

第二章 控制系统的数学模型

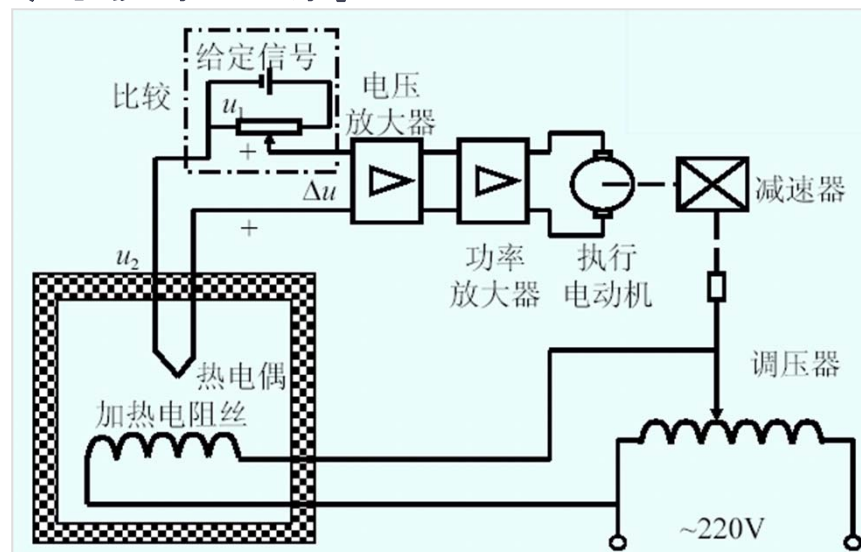
基本内容

- 控制系统的基本模型
- 微分方程
- 传递函数
- 控制系统的方框图
- 信号流图

基本要求

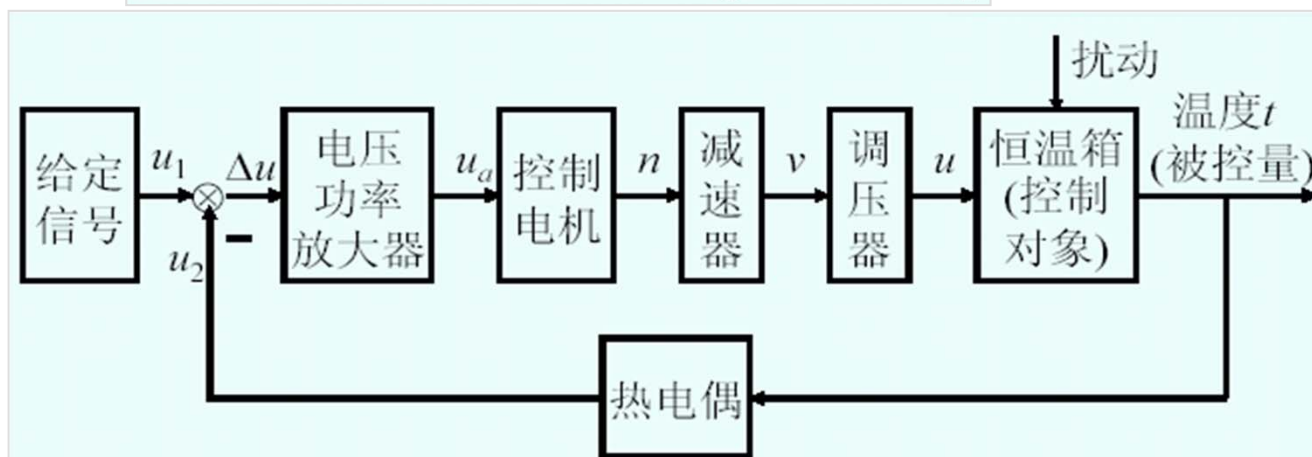
- 掌握微分方程列写的基本方法
- 掌握拉氏变换基本定理和常用拉氏变换表
- 重点掌握典型环节传递函数和闭环传递函数的求法
- 梅逊公式的应用

2.0 温故而知新



系统示意图

系统框图



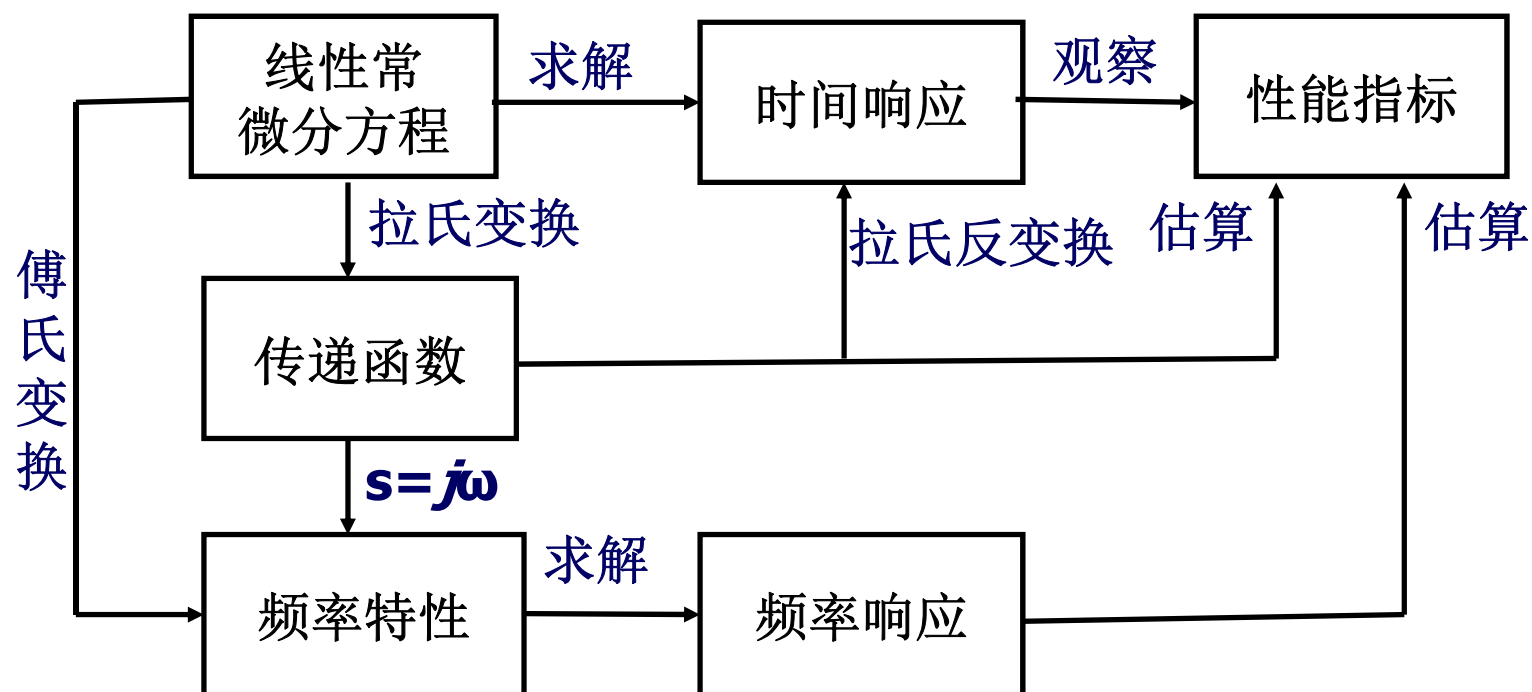
2.1 数 学 模 型

- 定义： 描述系统输入量、输出量以及内部各物理量之间动态关系的数学表达式

- 表示方式:
 1. 输入-输出描述（外部描述）
微（差）分方程、传递函数
 2. 状态变量描述（内部描述）
 3. 方框图

- 建立方法:
 1. 机理分析法
 2. 实验辨识法

- 求取性能指标的主要途径



2.2 傅氏变换与拉氏变换

- Fourier变换及其反变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- Laplace变换及其反变换

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

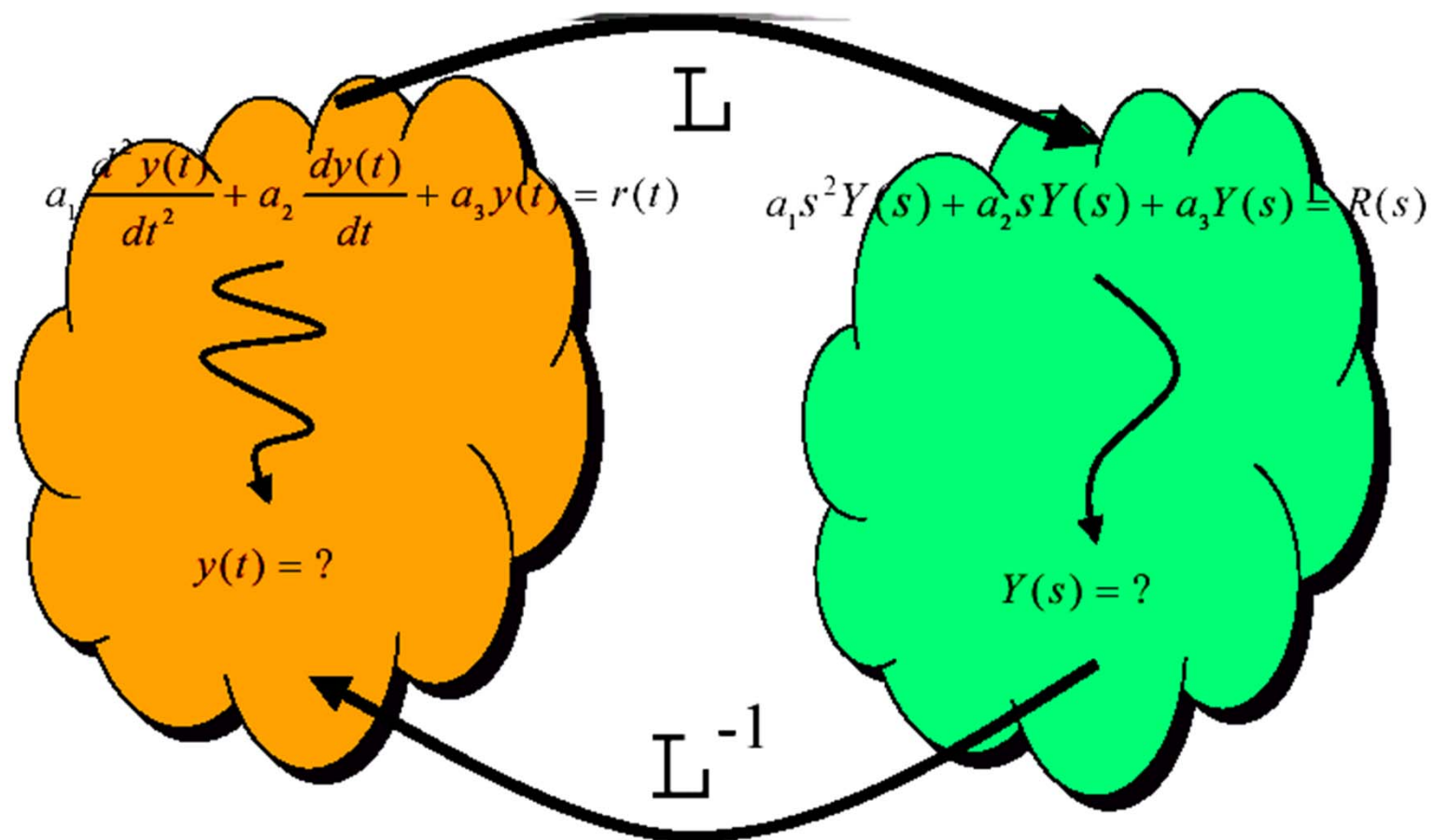
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

- 拉普拉斯
变换对照表

Item no	$f(t)$	$F(s)$
1.	单位脉冲 $\delta(t)$	1
2.	单位阶跃 $\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

- 拉普拉斯变换的定理

Item no.	Theorem	Name
1.	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	Definition
2.	$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$	Linearity theorem
3.	$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	Linearity theorem
4.	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$	Frequency shift theorem
5.	$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-sT}F(s)$	Time shift theorem
6.	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Scaling theorem
7.	$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$	Differentiation theorem
8.	$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-)$	Differentiation theorem
9.	$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0-)$	Differentiation theorem
10.	$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Integration theorem
11.	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	Final value theorem ¹
12.	$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	Initial value theorem ²



例 2.1

解方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 6,$

其中 $\dot{y}(0) = 2, y(0) = 2$

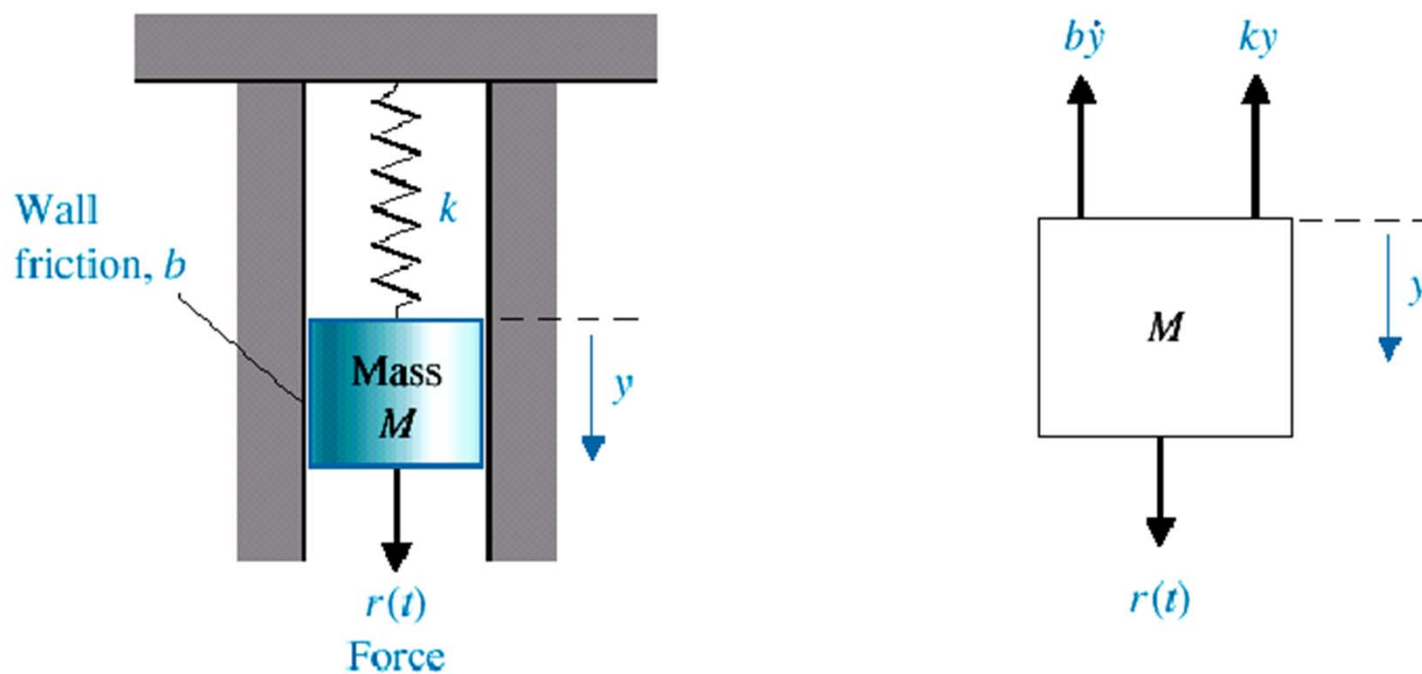
$$Y(s) = \frac{2s^2 + 12s + 6}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3}$$

$$y(t) = 1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

2.3 线性系统的微分方程

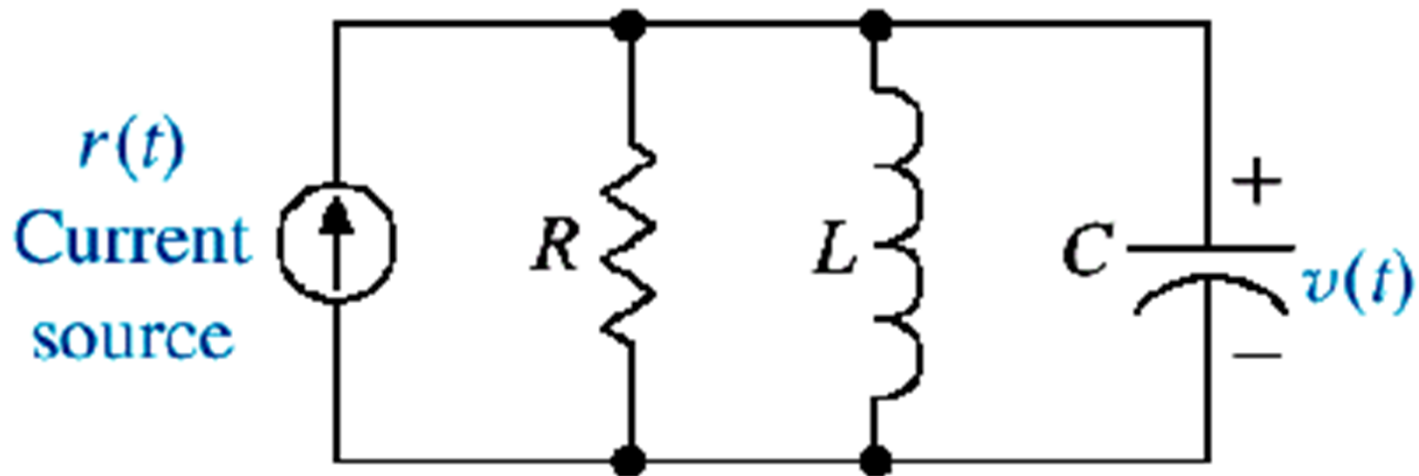
- 建立系统输入-输出微分方程一般步骤
 1. 确定系统的输入量、输出量
 2. 提出合乎实际的简化系统的假定
 3. 根据机理列出描述系统运动规律的一组微分方程
 4. 消去中间变量，求出描述系统输入与输出关系的微分方程

例 2.2 质量-弹簧阻尼系统



$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

例 2.3 RCL 并联电路



$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt = r(t)$$

- 质量-弹簧阻尼系统

$$y(t) = K_1 e^{-a_1 t} \sin(\beta_1 t + \theta_1)$$

- RCL并联电路

$$y(t) = K_2 e^{-a_2 t} \cos(\beta_2 t + \theta_2)$$

- 相似系统

弹簧阻尼系统	机械系统	电系统
力 F	转矩 T	电压 u
质量 m	转动惯量 J	电感 L
粘性摩擦系数 k	粘性摩擦系数 f	电阻 R
弹簧系数 k	扭转系数 k	电容的倒数 1/C
位移 y	角位移 θ	电荷 q
速度 v	角速度 ω	电流 i

2.4 非线性系统的线性化

- 叠加性和均匀性

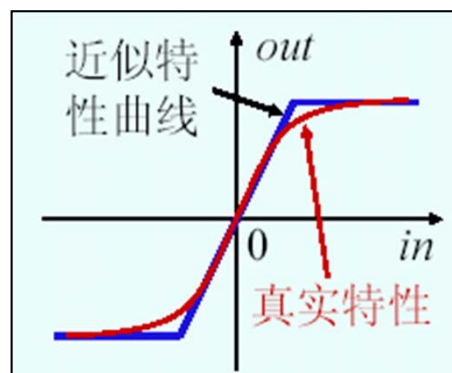
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

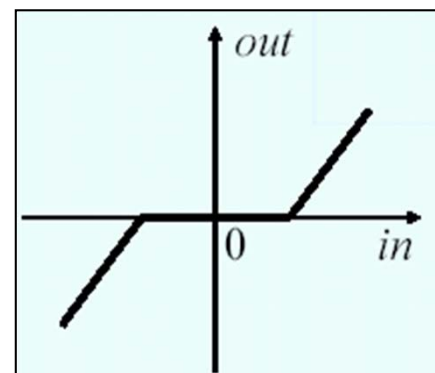
不满足以上条件的方程，就成为非线性方程。

- 常见非线性情况

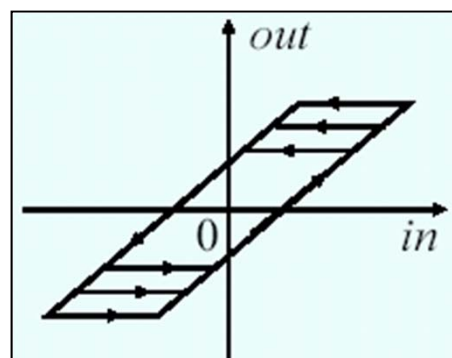
饱和非线性



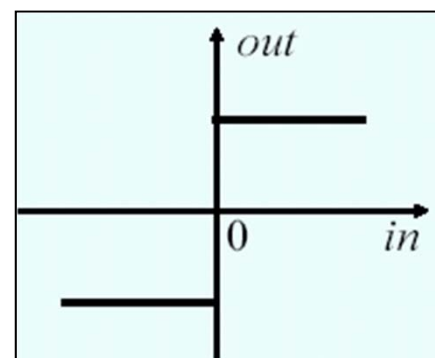
死区非线性



间隙非线性



继电器非线性



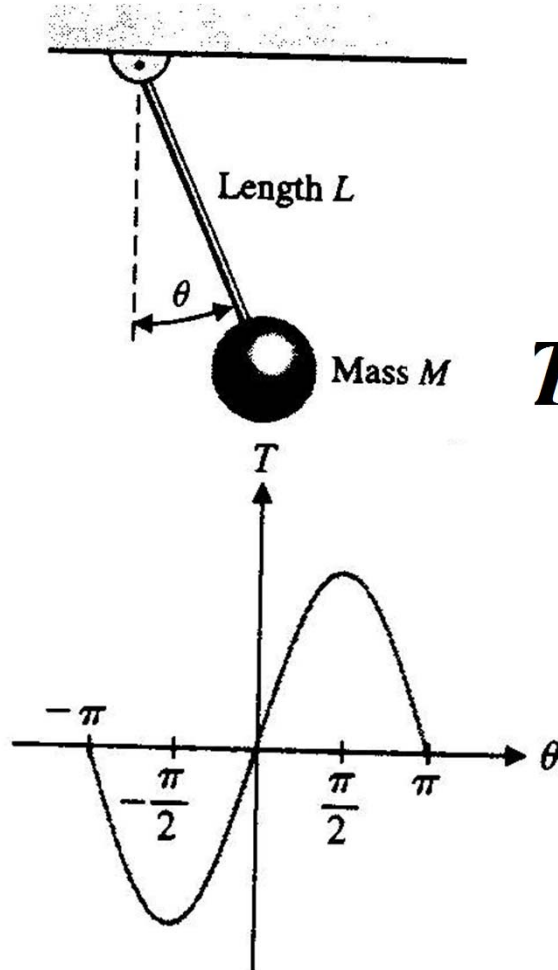
- 泰勒展开

$$y = g(x)$$

$$= g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

$$\Delta y = m \Delta x$$

例 2.4 单摆系统



$$T = MgL \sin \theta$$

$$T - T_0 \cong MgL \left. \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

$$\begin{aligned} T &= MgL(\cos 0^\circ)(\theta - 0^\circ) \\ &= MgL\theta \end{aligned}$$

- 处理线性化应注意的问题

1. 线性化是相对某一额定工作点的
2. 当输入量变化范围较大时，势必引入较大的误差，应注意它的条件
3. 若非线性系统是不连续的，则不能采用上述线性化方法
4. 线性化之后得到的是增量方程，可认为其初始条件为零

2.5 线性系统的传递函数

- 定义：在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比

$$a_0 c^{(n)}(t) + a_1 c^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} \dot{c}(t) + a_n c(t)$$

$$= b_0 r^{(m)}(t) + b_1 r^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{m-1} \dot{r}(t) + b_m r(t)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

- 传递函数的极点和零点

$$G(s) = \frac{b_0(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{a_0(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$
$$= \frac{K * \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

- 传递函数的说明

1. 传递函数的概念只适用于线性定常系统

2. 传递函数是系统本身的属性

3. 传递函数包含联系输入量与输出量所必需的单位，但它不提供有关系统物理结构的任何信息

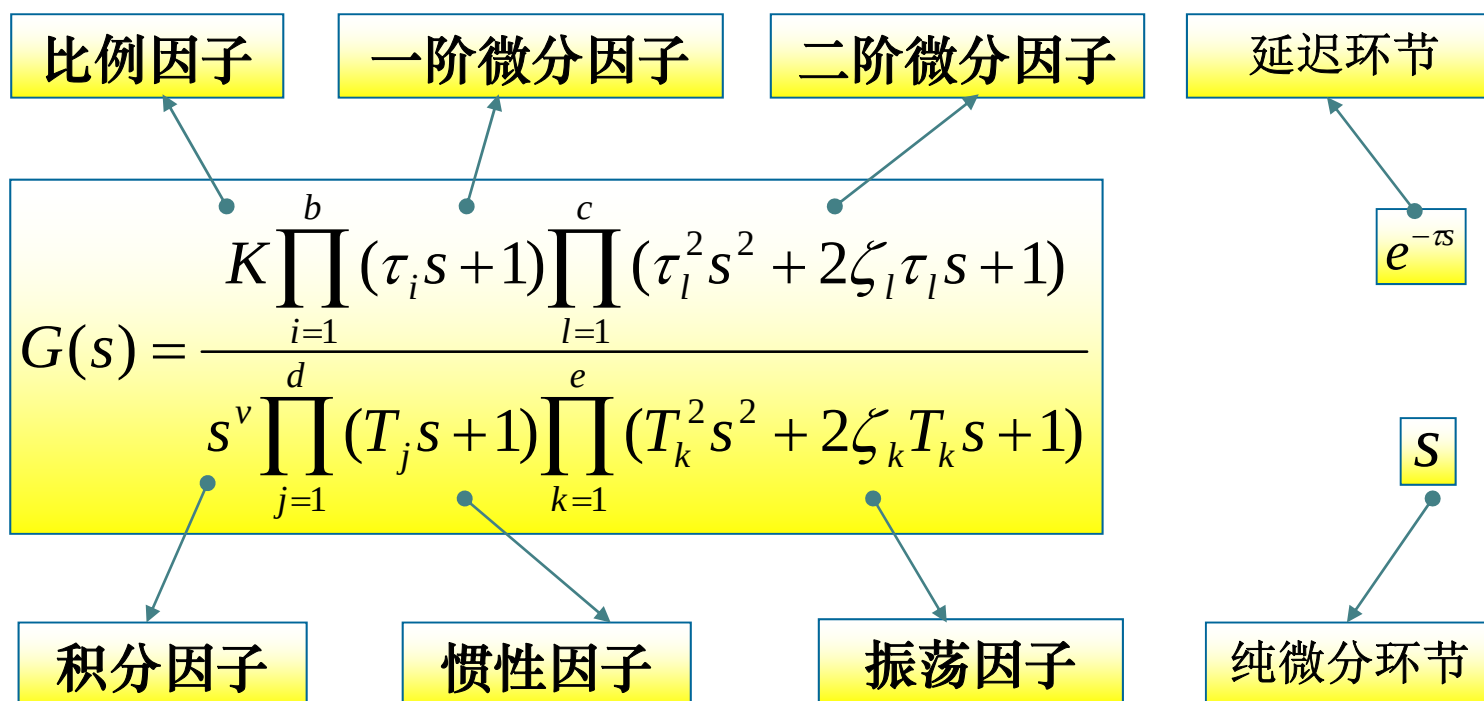
4. 如果系统的传递函数已知，则可以针对不同形式的输入量来研究系统的输出

5. 如果不知道系统的函数，则可通过引入已知输入量并研究系统输出量的实验方法，确定系统的传递函数

- 传递函数的优点

1. 比微分方程简单
2. 当输入 $r(t)=\delta(t)$ 时，单位脉冲函数 $R(s)=1$ ，其输出 $C(s)=G(s)$
3. 令传递函数中的 $s=j\omega$ ，则系统可在频率域内分析
4. $G(s)$ 的零极点分布决定系统响应过渡过程

2.6 典型环节的传递函数



$$K = \frac{b_0}{a_0} \cdot \prod_{i=1}^b \frac{1}{\tau_i} \cdot \prod_{l=1}^c \frac{1}{\tau_l^2} \cdot \prod_{j=1}^d T_j \cdot \prod_{k=1}^e T_k^2$$

- 理想运算放大器

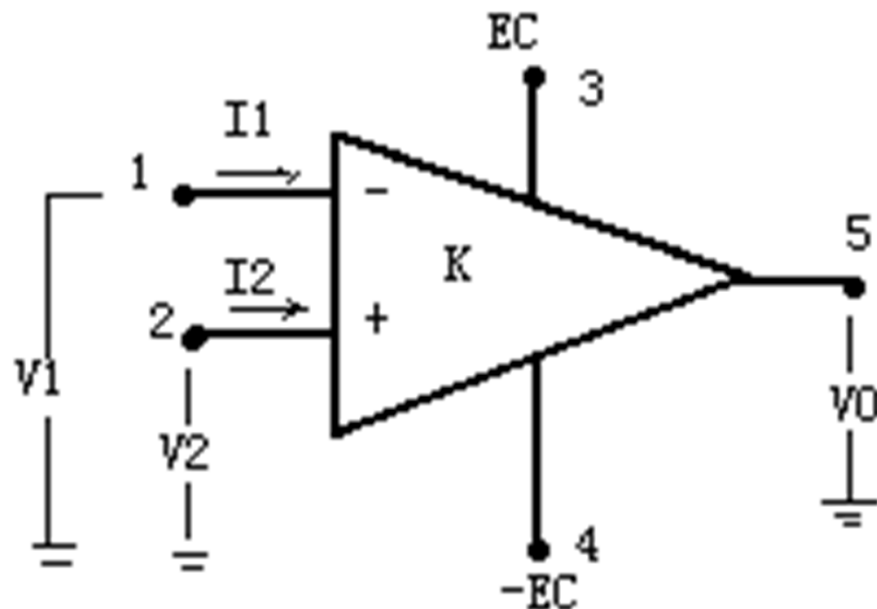


图 YF

特性:

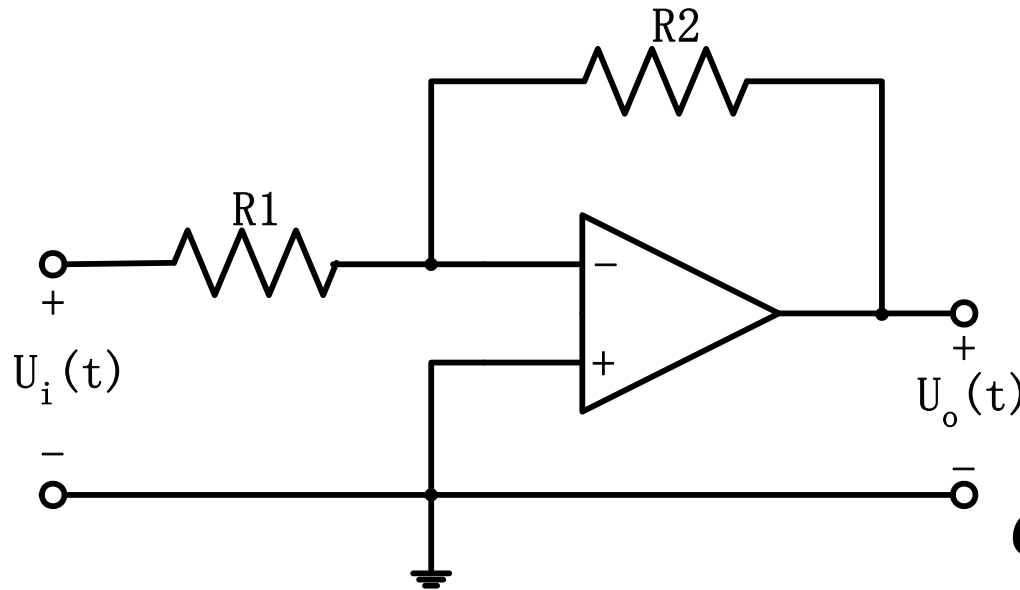
1. 输入阻抗为 ∞
2. 增益为 ∞

推导:

1. $I_1 = I_2 = 0$
2. $V_1 = V_2$

- 比例环节（放大环节）

$$c(t) = Kr(t) \quad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K$$



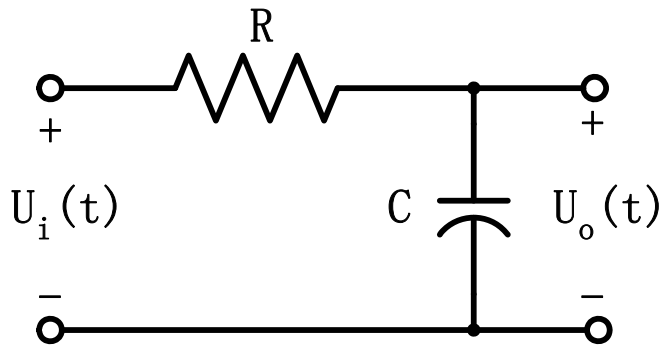
$$u_0(t) = -\frac{R_2}{R_1} u_i(t)$$

$$U_0(s) = -\frac{R_2}{R_1} U_i(s)$$

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = K$$

- 惯性环节

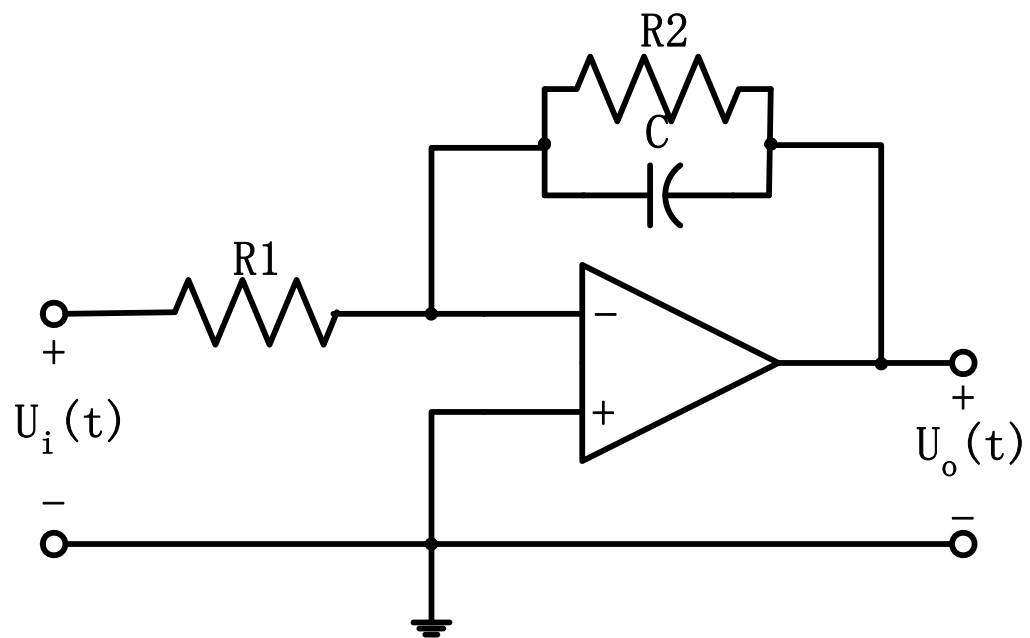
$$\tau \frac{d}{dt} c(t) + c(t) = Kr(t) \quad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$



$$\begin{cases} U_i(s) = I(s)R + \frac{1}{Cs} I(s) \\ U_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ u_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{cases}$$

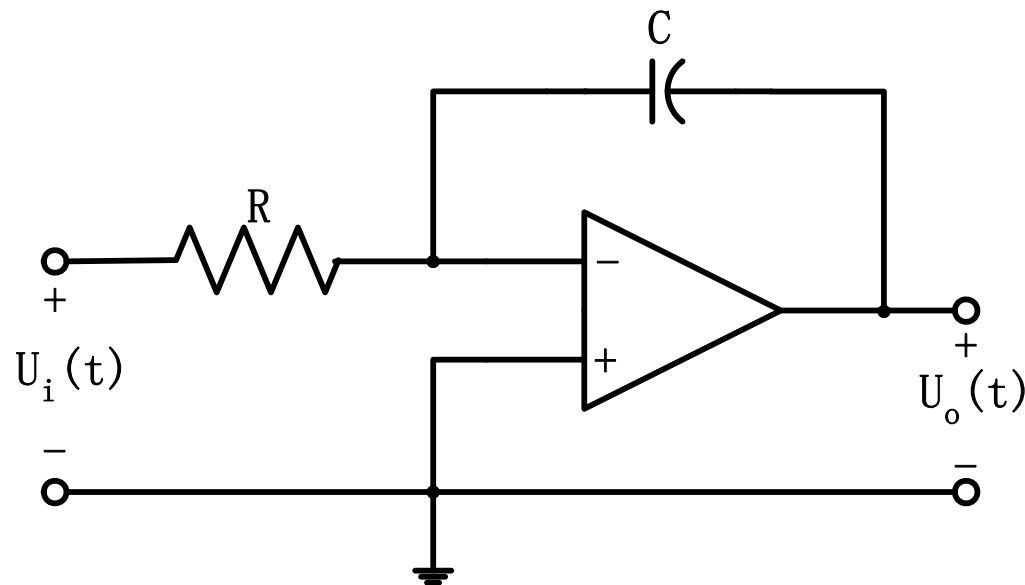
$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$



- 积分环节

$$c(t) = K \int r(t) dt$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s}$$



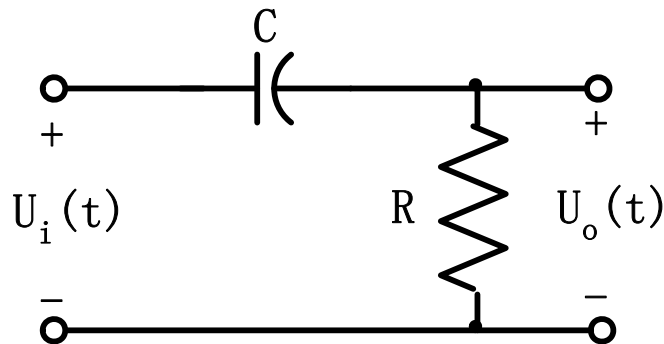
$$\frac{u_i(t)}{R} = -C \frac{du_o(t)}{dt}$$

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

- 微分环节

$$c(t) = \tau \frac{d}{dt} r(t)$$

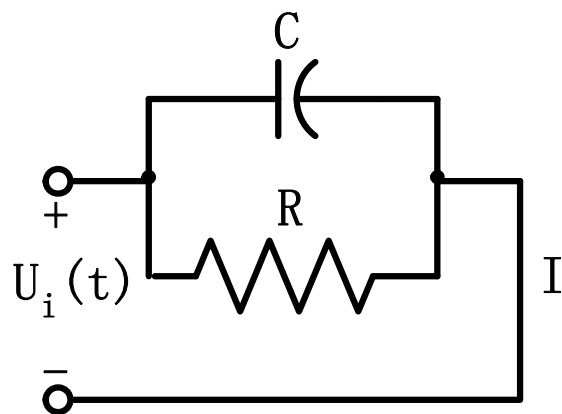
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s$$



$$\begin{cases} u_i(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ u_o(t) = i(t)R \end{cases}$$

相当于一个微分
环节和一个惯性
环节的串联

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$



一个比例环节和
一个微分环节的
并联。

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R} (RCs + 1)$$

一阶比例微分环节

- 振荡环节

$$\tau^2 \frac{d^2}{dt^2} c(t) + 2\zeta\tau \frac{d}{dt} c(t) + c(t) = Kr(t)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

对于单位阶跃输入 $r(t)=1(t)$, 令 $K=1$

$$C(s) = \frac{1}{s(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1)}$$

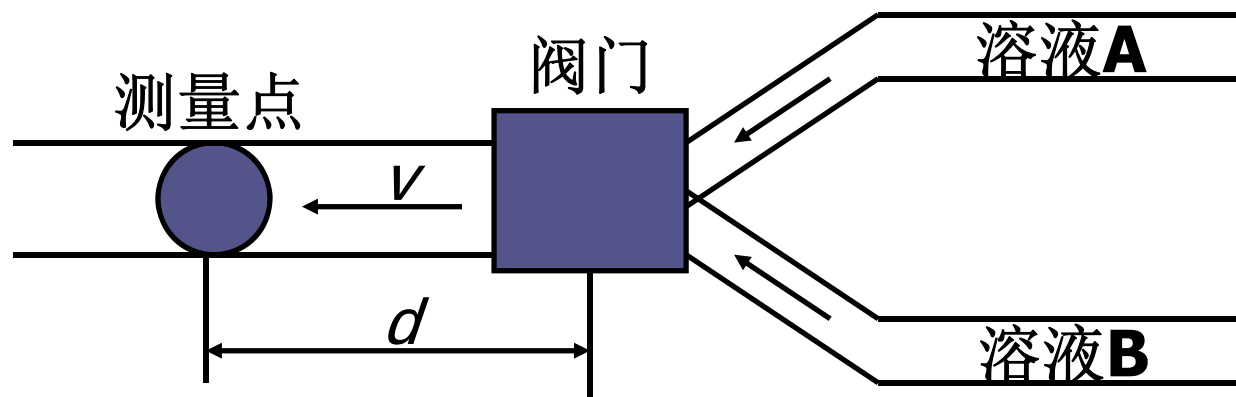
$$\begin{aligned} \text{令 } \omega_n &= \frac{1}{\tau} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned}$$

无阻尼自然振荡
频率

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta)$$

阻尼自
然振荡

- 纯滞后环节

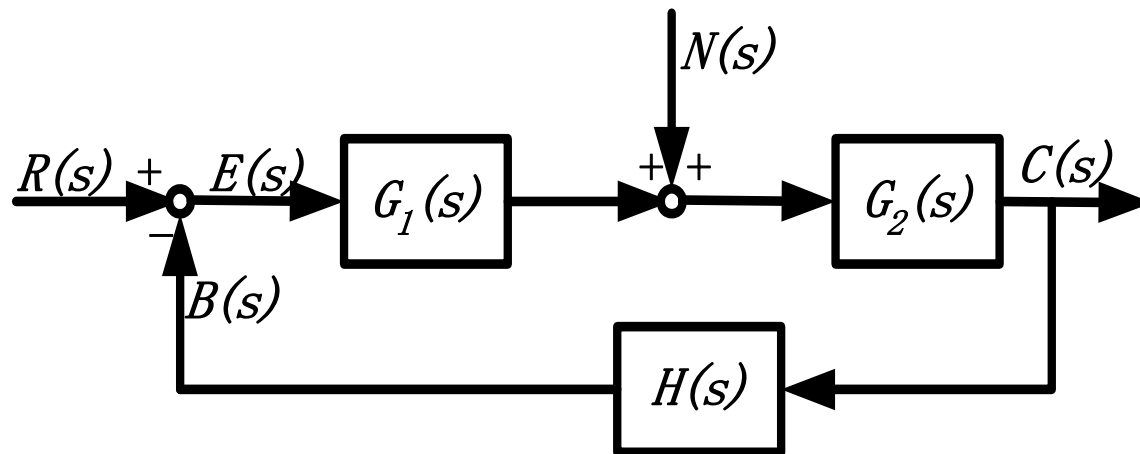


$$c(t) = r(t - \tau)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

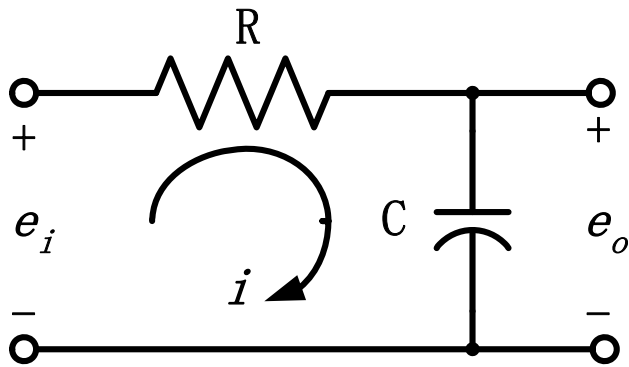
2.7 方块图

- 是系统中各个环节的函数功能和信号流向的图形表示，由函数方块、信号引出点、信号相加点及具有方向的信号线组成。



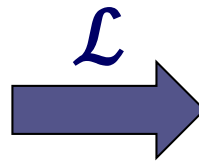
- 系统方块图的绘制步骤
 1. 考虑负载效应，分别列写系统各部件（环节）的微分方程
 2. 写出各元部件的传递函数，并将它们用方块表示，得到函数的方块
 3. 根据各元部件的信号流向，把各函数方块用信号线依次连接起来

• 例 2.5 RC 电路的方块图



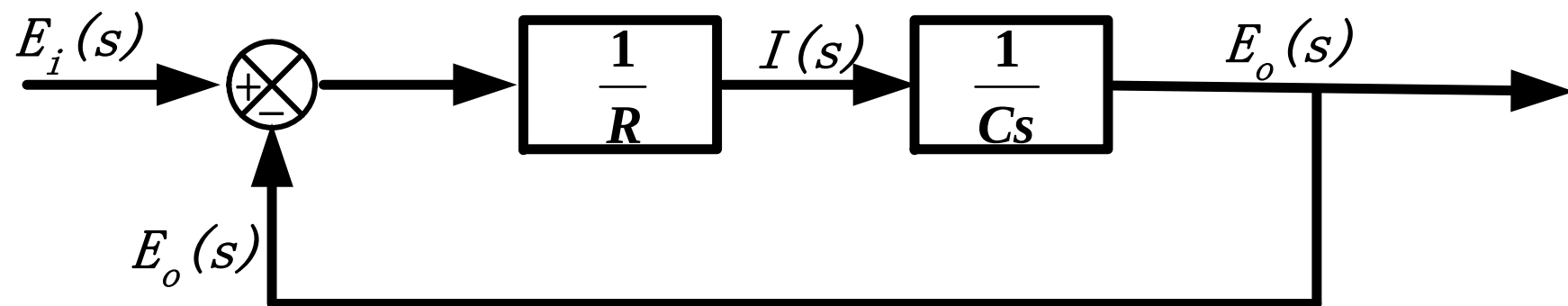
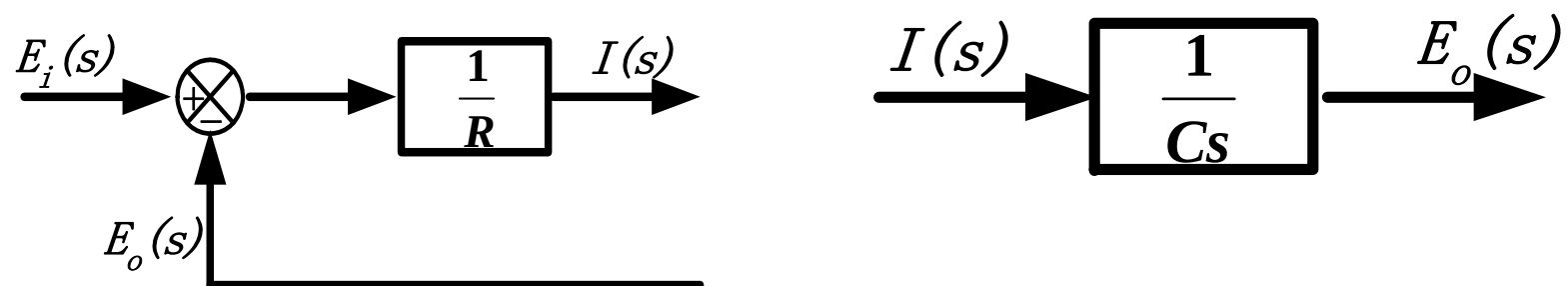
$$i = \frac{e_i - e_o}{R}$$

$$e_o = \frac{\int i dt}{C}$$

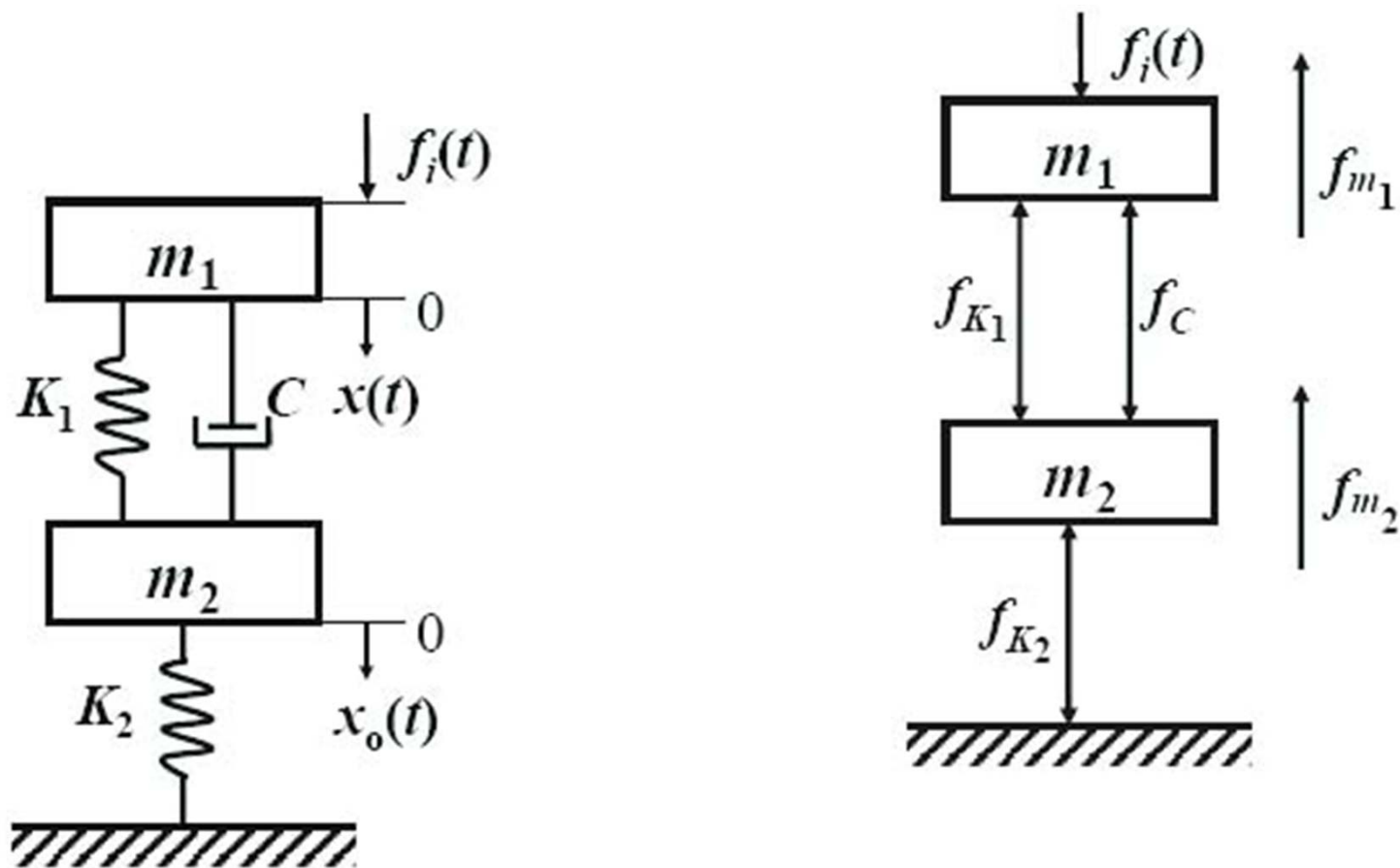


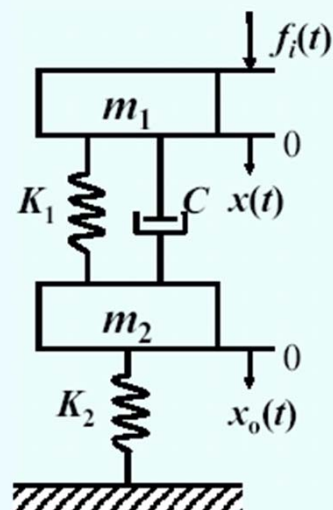
$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$



■ 例 2.6 机械系统





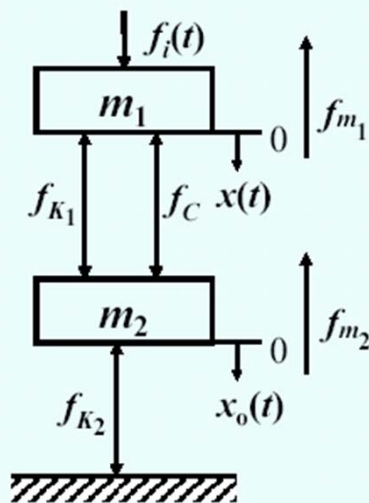
$$m_1 \ddot{x}(t) = f_i(t) - f_C(t) - f_{K_1}(t)$$

$$f_{K_1}(t) = K_1 [x(t) - x_o(t)]$$

$$f_C(t) = C \left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx_o(t)}{dt} \right)$$

$$m_2 \ddot{x}_o(t) = f_{K_1}(t) + f_C(t) - f_{K_2}(t)$$

$$f_{K_2}(t) = K_2 x_o(t)$$



$$X(s) = \frac{1}{m_1 s^2} [F_i(s) - F_C(s) - F_{K_1}(s)]$$

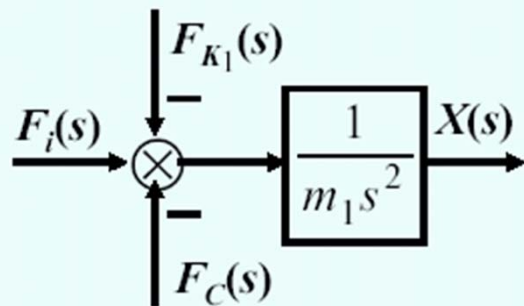
$$F_{K_1}(s) = K_1 [X(s) - X_o(s)]$$

$$F_C(s) = Cs [X(s) - X_o(s)]$$

$$X_o(s) = \frac{1}{m_2 s^2} [F_{K_1}(s) + F_C(s) - F_{K_2}(s)]$$

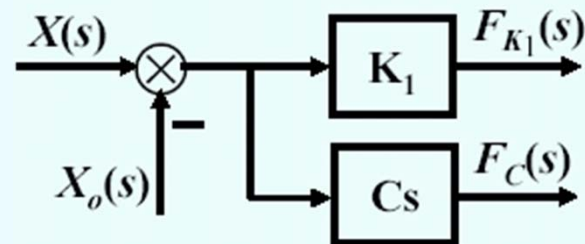
$$F_{K_2}(s) = K_2 X_o(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{m_1 s^2} [F_i(s) - F_C(s) - F_{K_1}(s)]$$

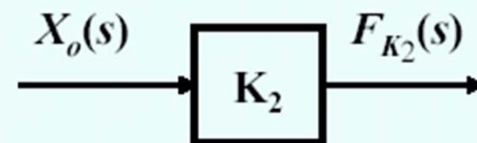
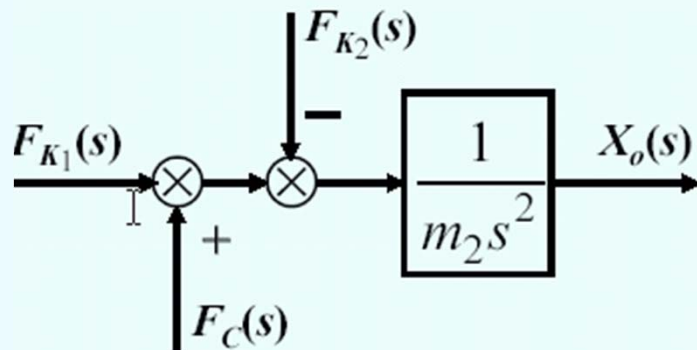


$$F_{K_1}(s) = K_1[X(s) - X_o(s)]$$

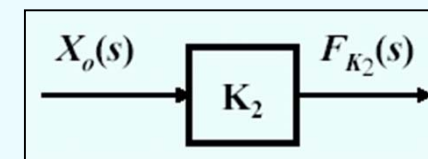
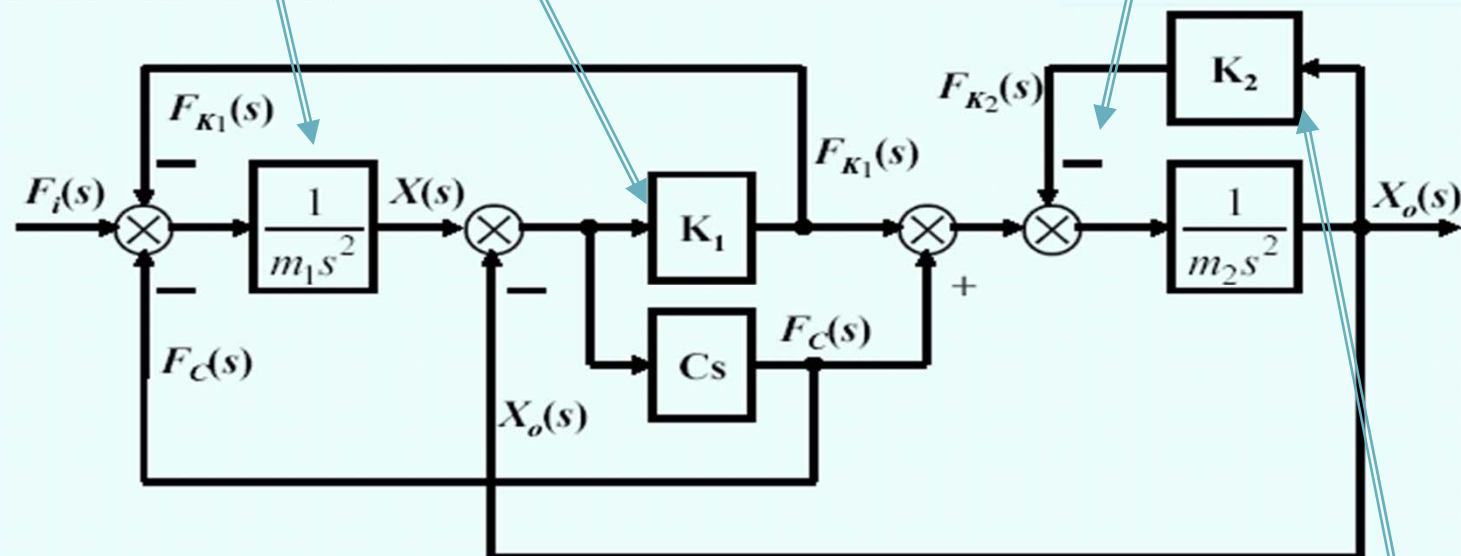
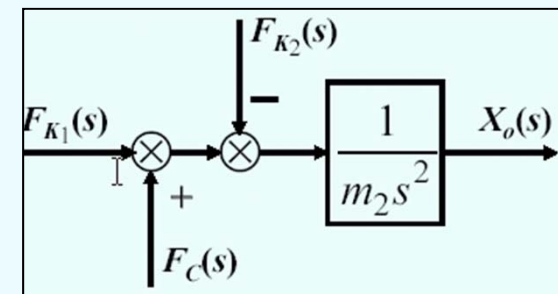
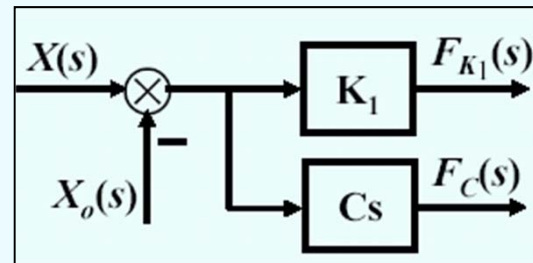
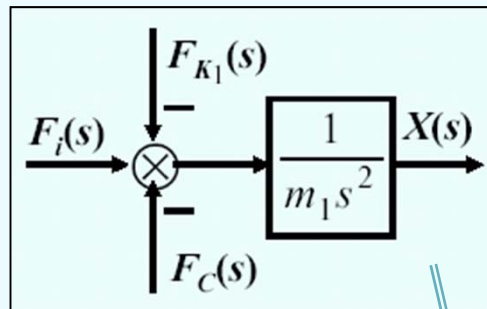
$$F_C(s) = Cs[X(s) - X_o(s)]$$



$$X_o(s) = \frac{1}{m_2 s^2} [F_{K_1}(s) + F_C(s) - F_{K_2}(s)]$$

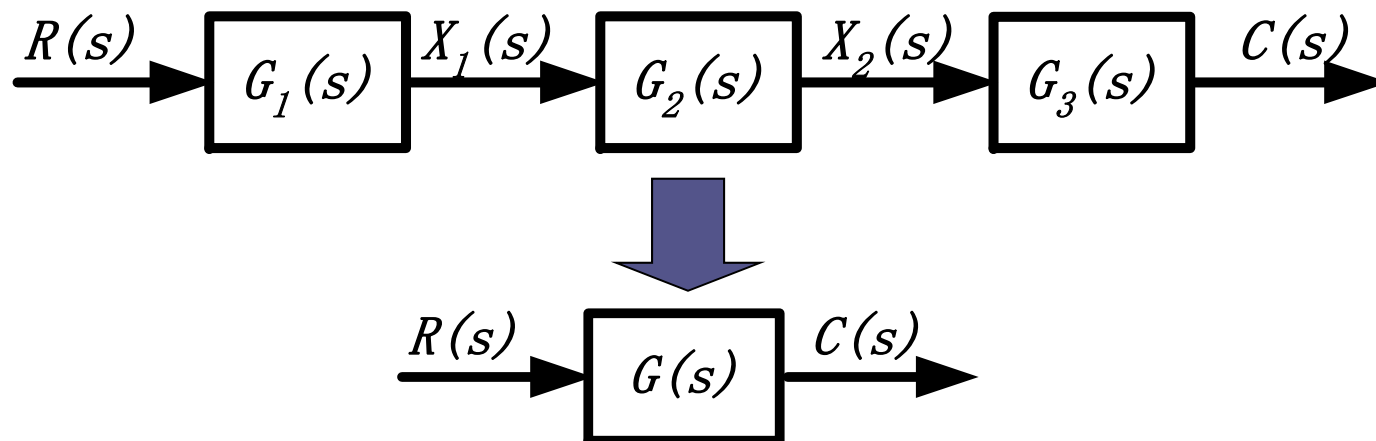


$$F_{K_2}(s) = K_2 X_o(s)$$



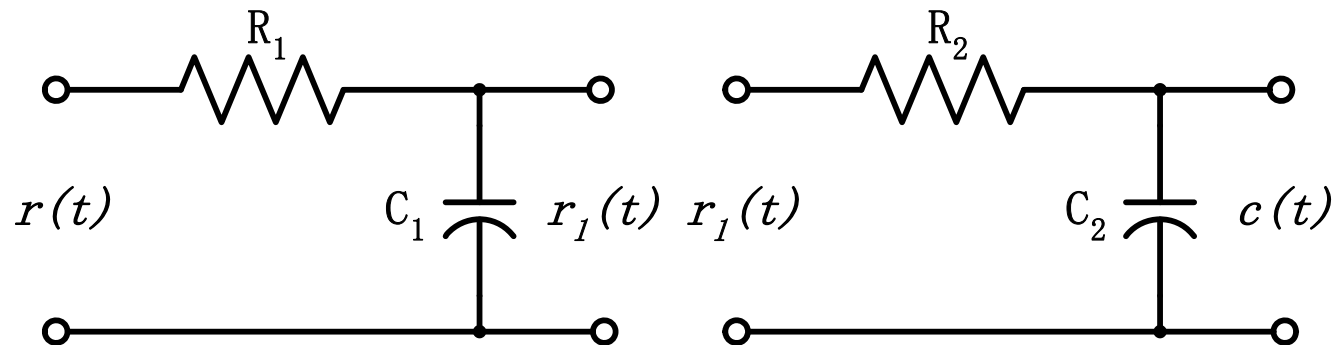
- 方块图的基本运算和变换

一、串联连接



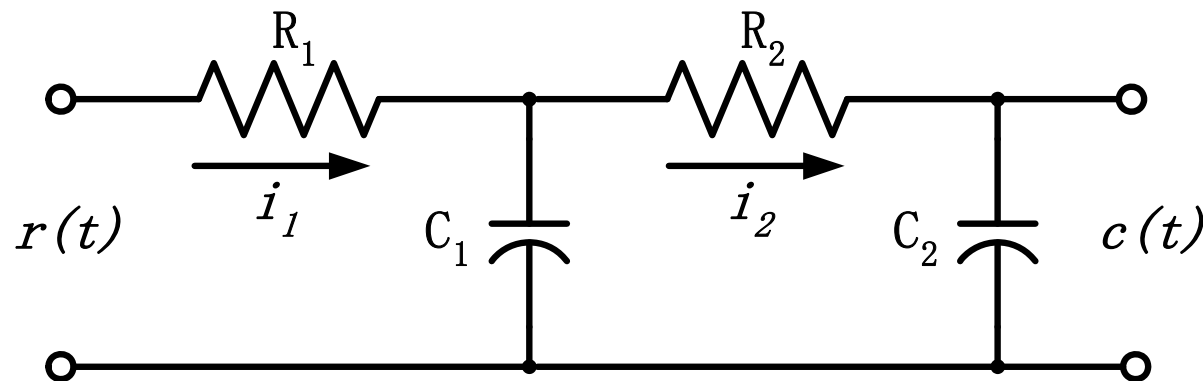
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

例 2.7 RC 串联电路

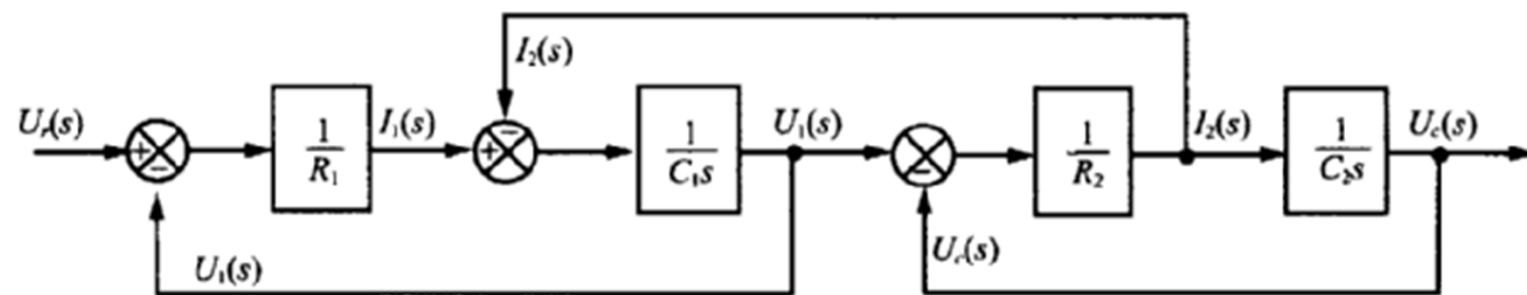


$$G_1(s) = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1}$$

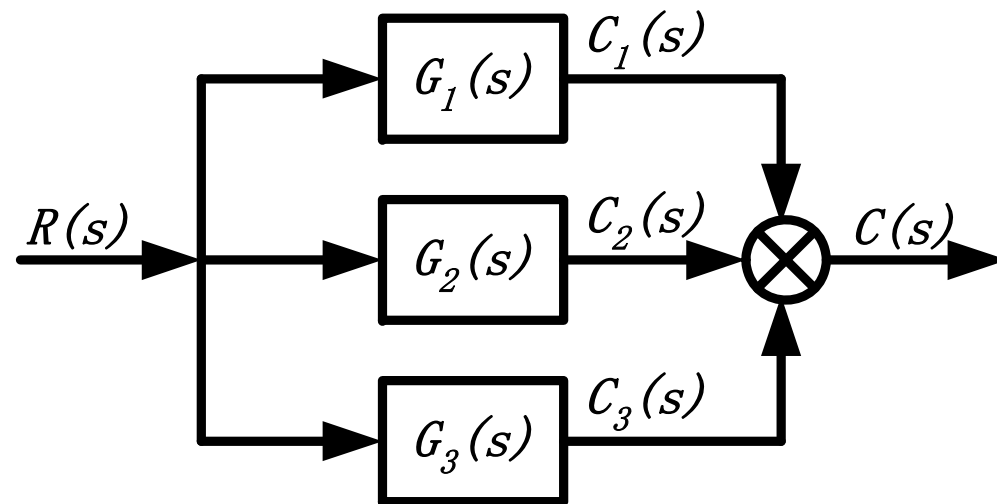
$$G_2(s) = \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$



$$G(s) = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}$$

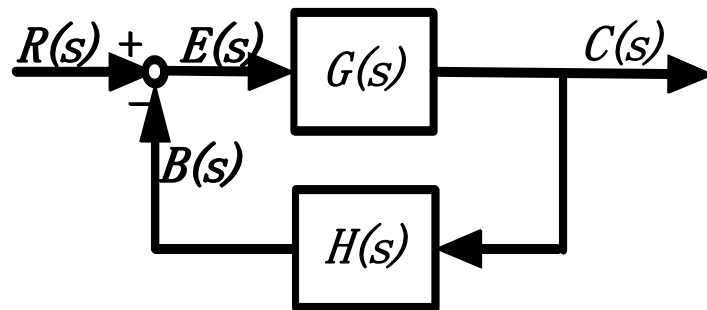


二、并联连接



$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

三、反馈连接



开环传递函数

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

前向通道传递函数

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

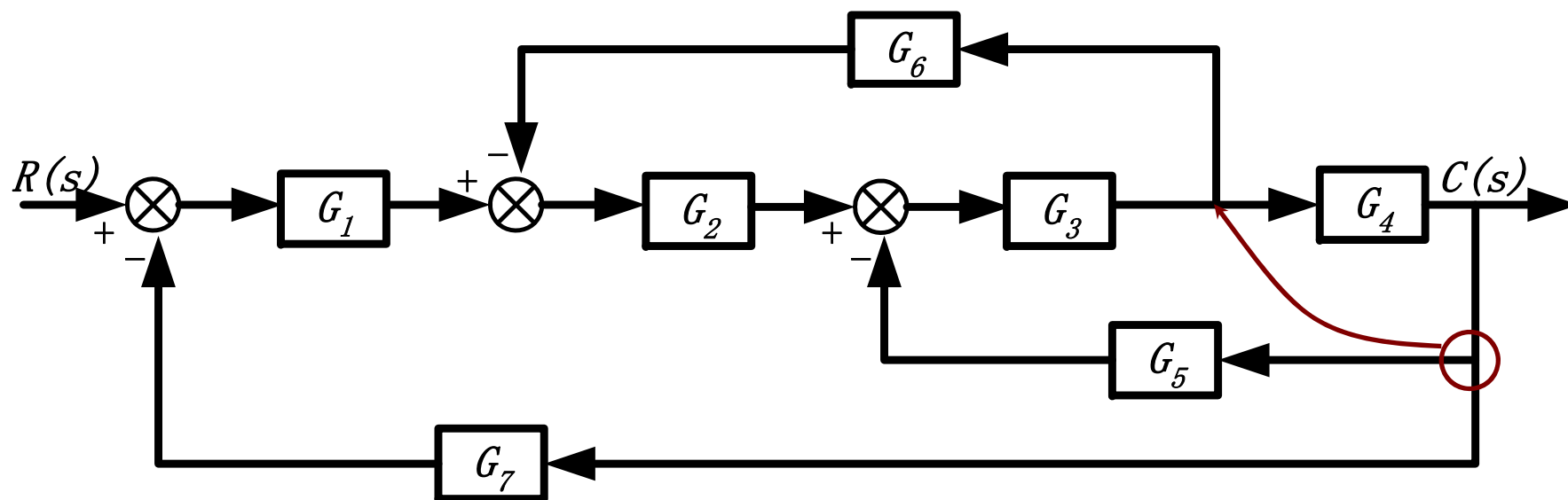
闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

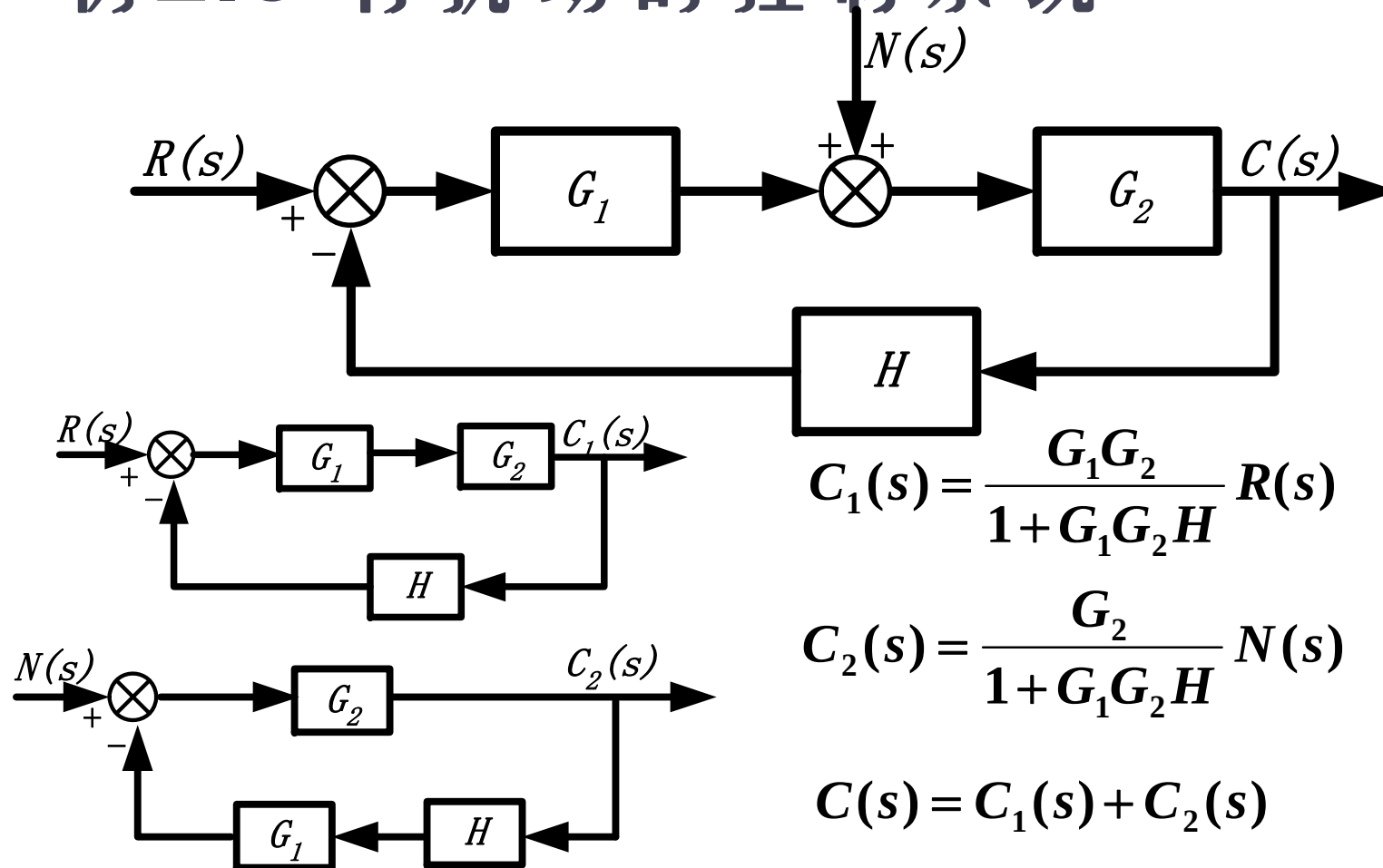
四、方块图的变换和简化

原方块图	等效方块图	说明
		等效单位反馈
		汇合点前移
		汇合点后移
		引出点前移
		引出点后移

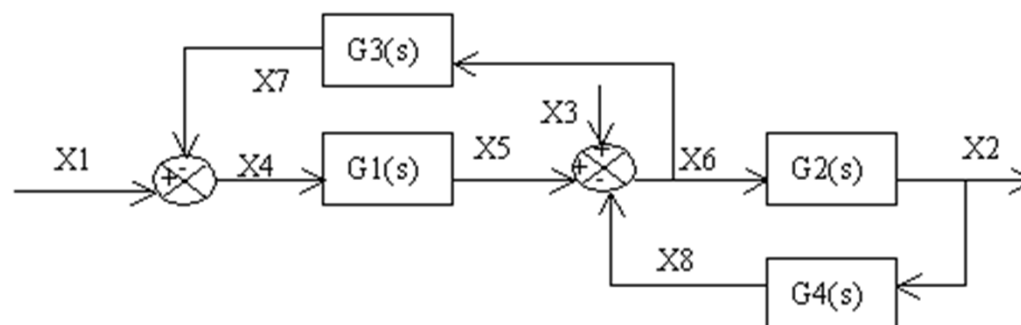
例2.8 简化系统方块图



例2.9 有扰动的控制系统



例 2.10 代数法



$$X4(s) = X1(s) - X7(s) \quad X6(s) = X3(s) + X5(s) - X8(s)$$

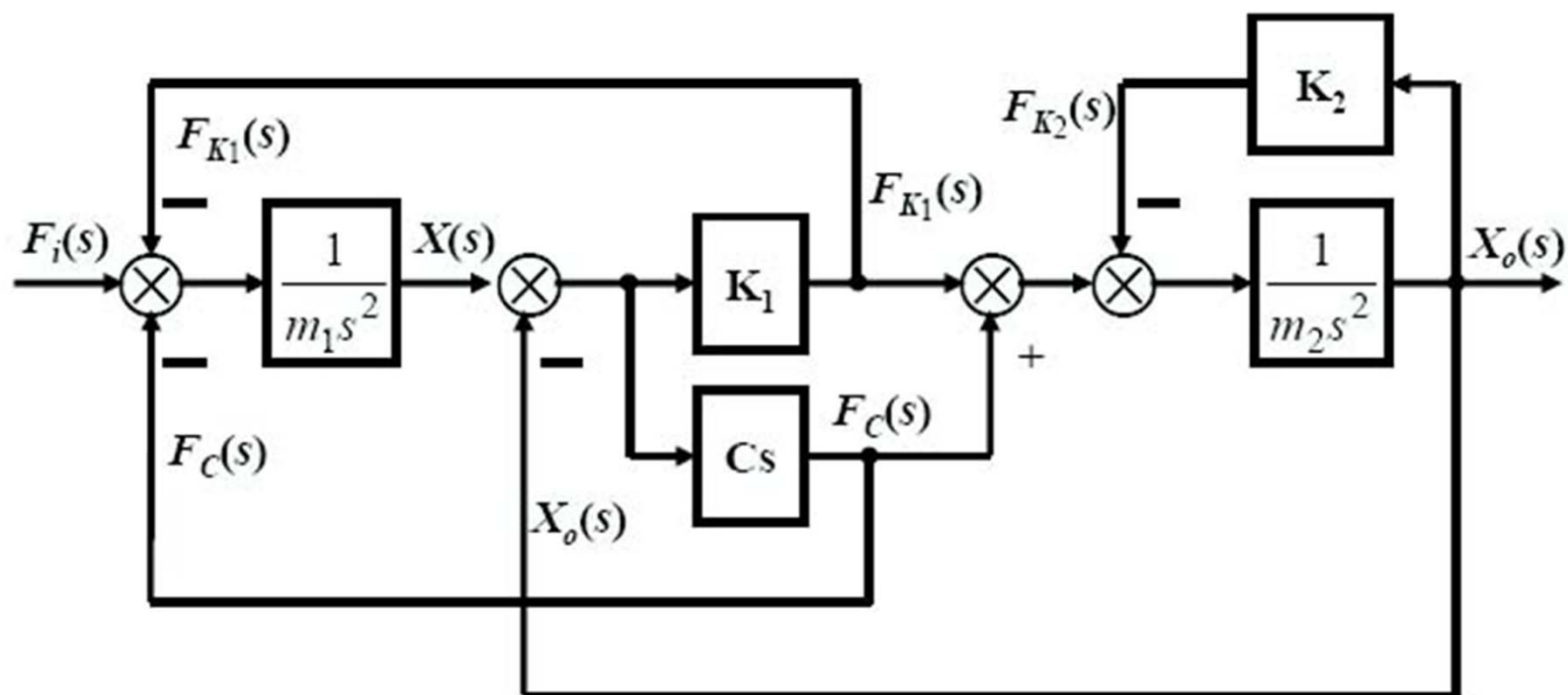
$$X5(s) = G1(s)X4(s) \quad X2(s) = G2(s)X6(s)$$

$$X7(s) = G3(s)X6(s) \quad X8(s) = G4(s)X2(s)$$

消去中间变量 $X4 - X8$

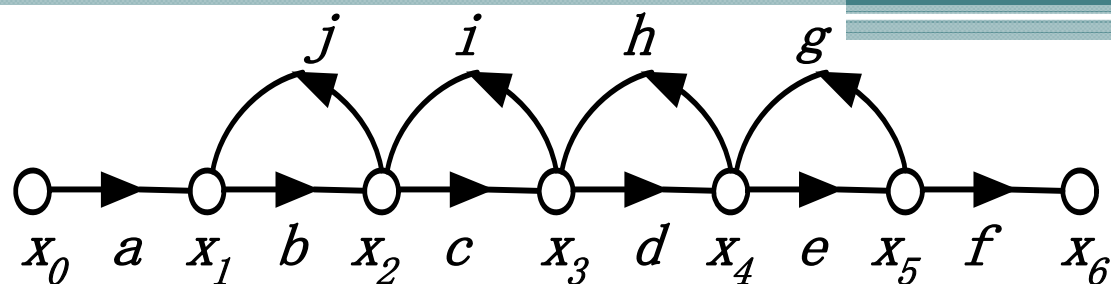
$$X2(s) = \frac{G1(s)G2(s)}{1 + G1(s)G3(s) + G2(s)G4(s)} X1(s) + \frac{G2(s)}{1 + G1(s)G3(s) + G2(s)G4(s)} X3(s)$$

- 化简系统方框图



2.8 信号流图

- —— 是一种由节点和支路组成的，表示复杂系统中各变量关系的信号传递网络。节点代表系统的变量，支路是连接两个节点的定向线段并有一定的支路增益。



■ 常用术语

源节点：只有输出支路的节点

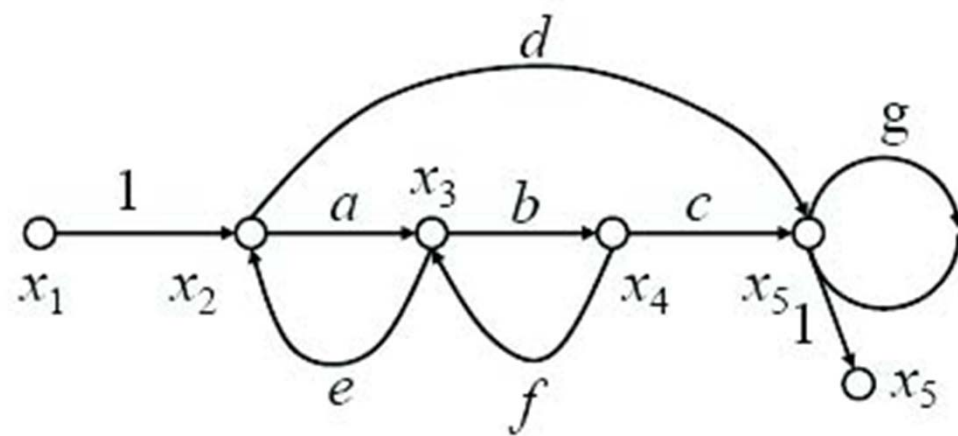
阱节点：只有输入支路的节点

混合节点：既有输出支路又有输入支路

前向通路：从源节点到阱节点的通路

回路：起于并终于同一节点

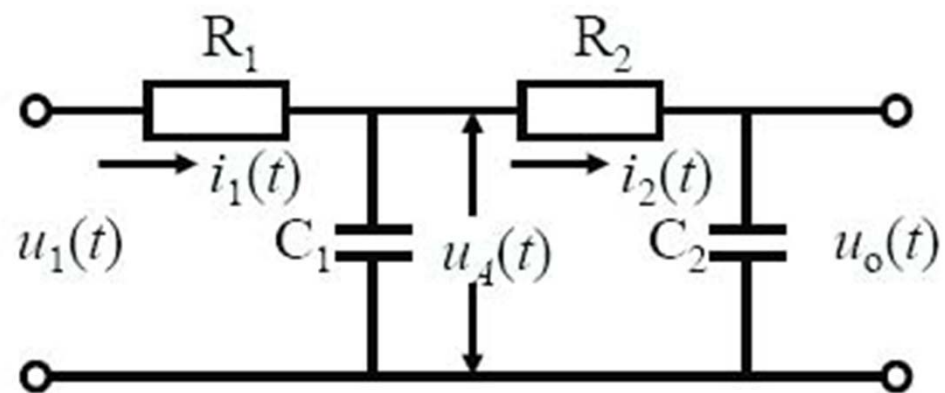
不接触回路：相互之间没有公共节点回路



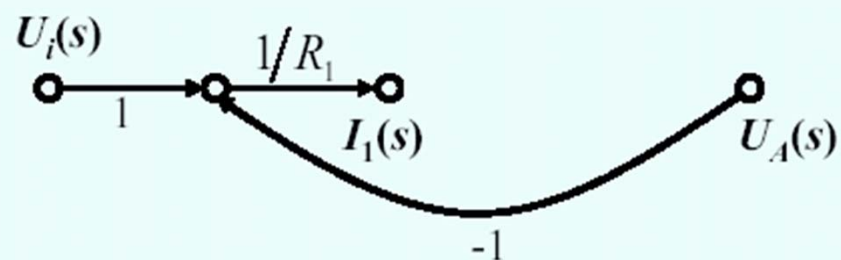
- 信号流图的绘制

- ✓ 由系统微分方程绘制信号流图
根据微分方程绘制信号流图的步骤与绘制方框图的步骤类似。
- ✓ 由系统方框图绘制信号流图

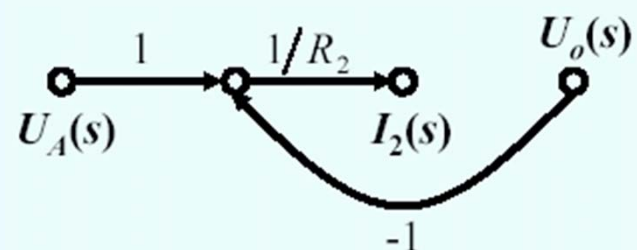
例2.11 由系统微分方程绘制信号流图



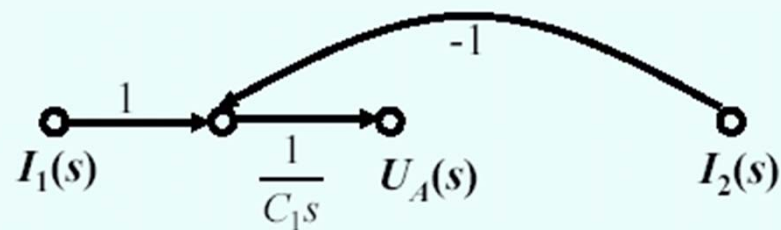
$$I_1(s) = \frac{U_i(s) - U_A(s)}{R_1}$$



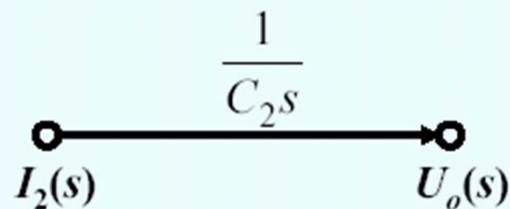
$$I_2(s) = \frac{U_A(s) - U_o(s)}{R_2}$$

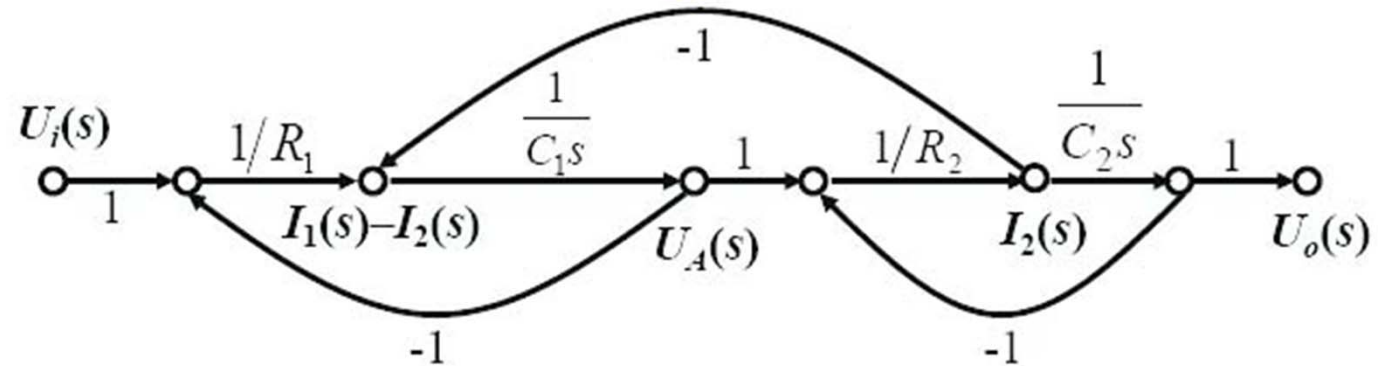
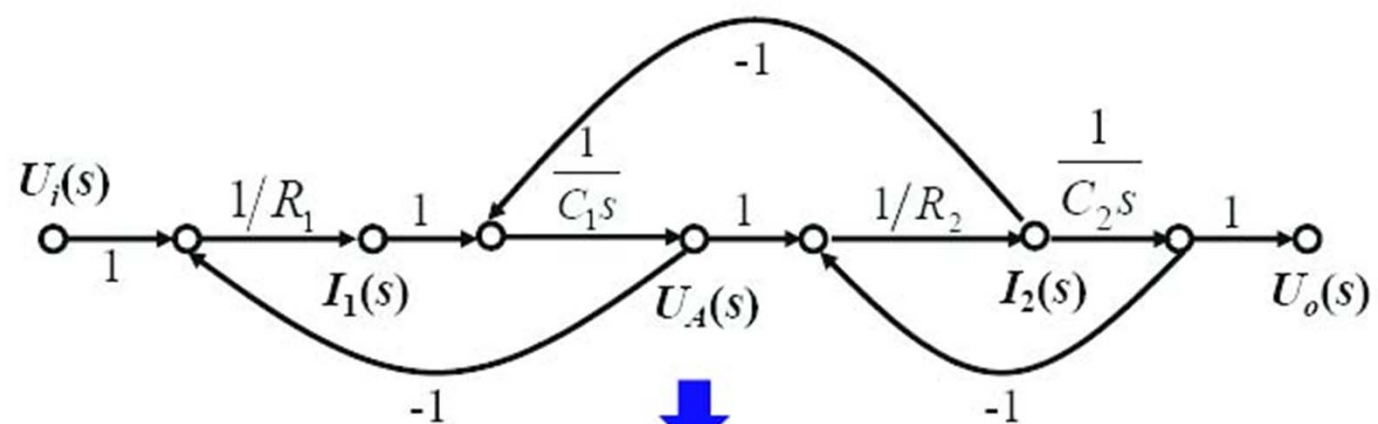


$$U_A(s) = \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)]$$

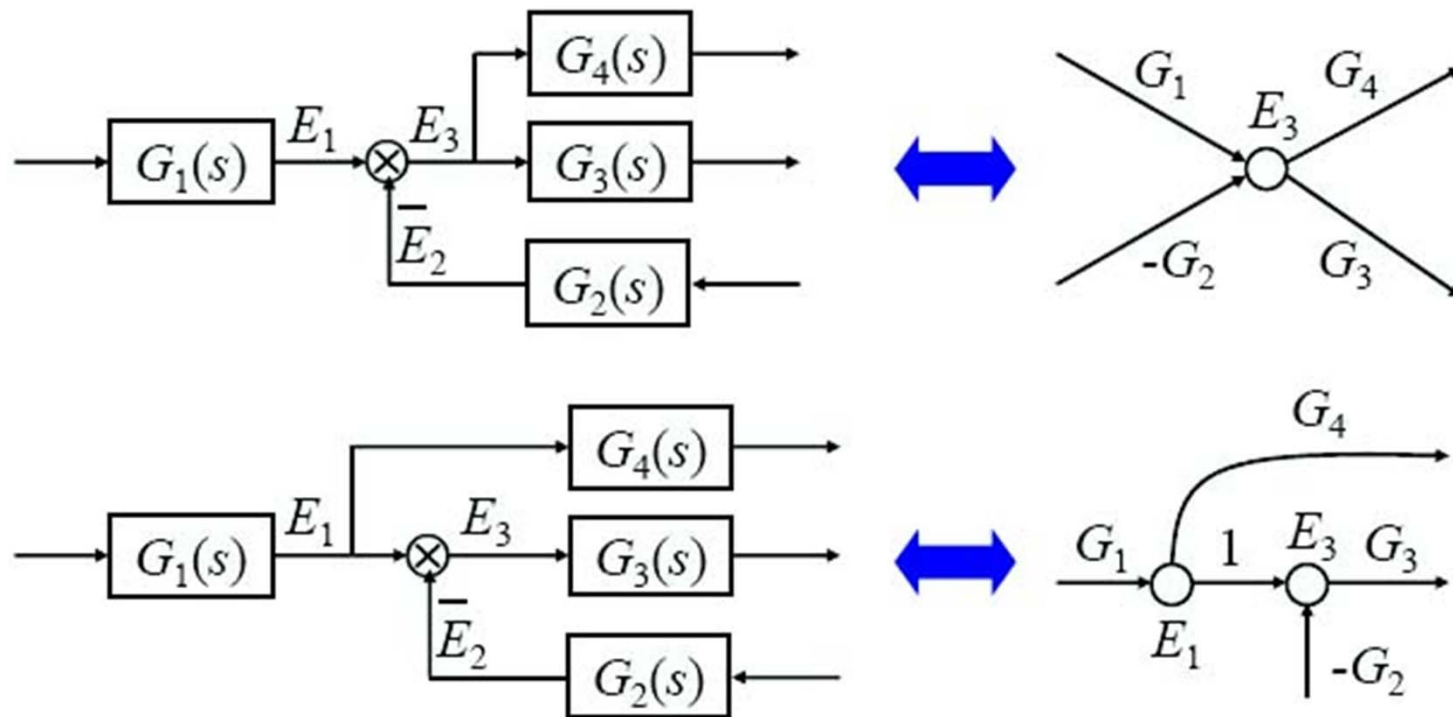


$$U_o(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$

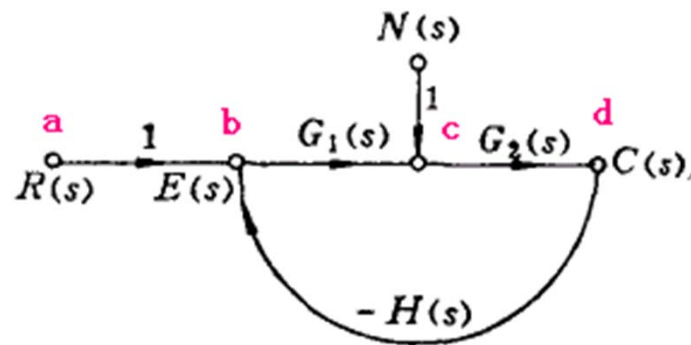
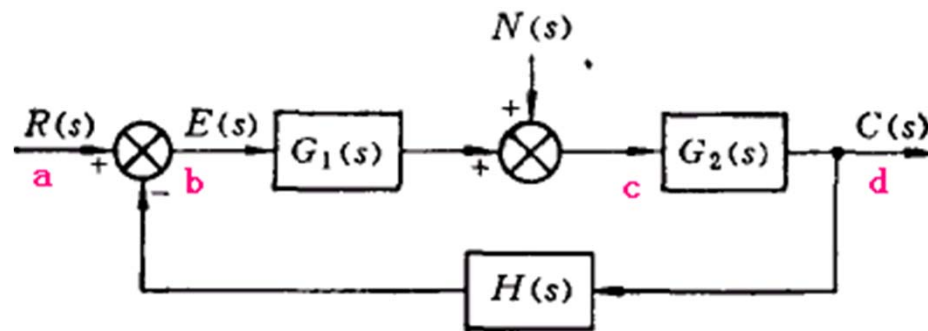




- 比较点与节点之间的关系



例2.12 由方块图绘制信号流图

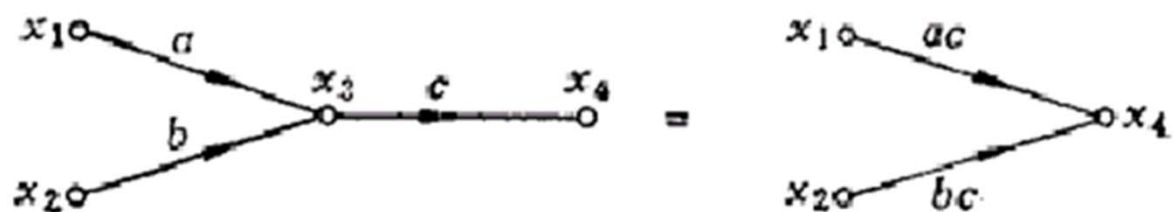
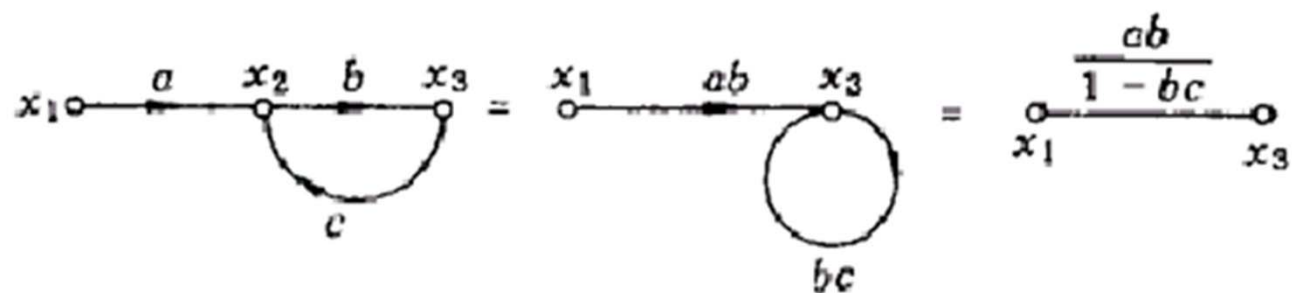
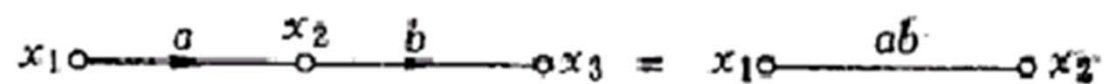
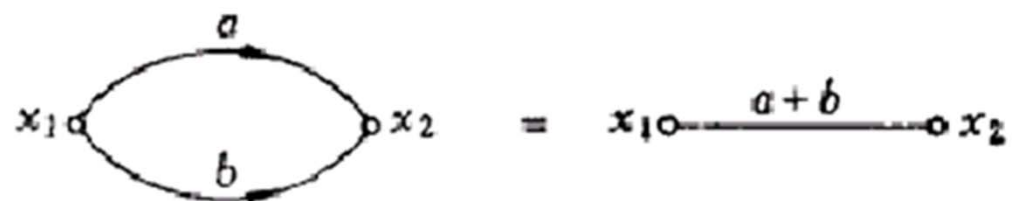


■ 性质

- 信号流图只适用于线性系统
- 支路表示一个信号为另一个信号的函数关系，信号只能沿着支路上的箭头指向传递
- 在节点上可以把所有输入支路的信号叠加，并把相加后的信号传递到所有输出支路
- 对于一个给定的系统，其信号流图不是唯一的

- 简化

1. 串联支路的总传输等于各支路传输乘积
2. 并联支路的总传输等于各支路传输之和
3. 混合节点可以通过移动支路的方向消去
4. 回路可以根据反馈连接规则化为等效支路



- 梅逊公式
$$P = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}$$

其中 k 为前向通道的数目； Δ 为信号流图的特征式，

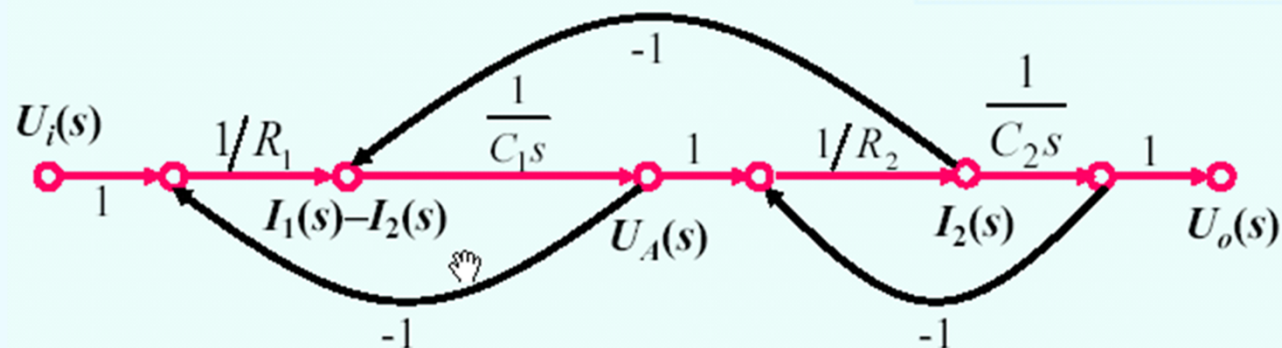
$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 + \cdots + (-1)^m \sum L_m$$

 $\sum L_1$ 为所有单独回路增益之和； $\sum L_2$ 为所有每两个互不接触回路增益乘积之和； $\sum L_m$ 为任意 m 个互不接触回路增益乘积之和。

P_k 为第 k 条前向通道总增益； Δ_k 为与第 k 条前向通道不接触部分的 Δ 值，称为信号流图余因子式。

只有一条前向通路

$$P_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_1 s} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_2 s}$$



三个不同回路

$$L_1 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_1 s}$$

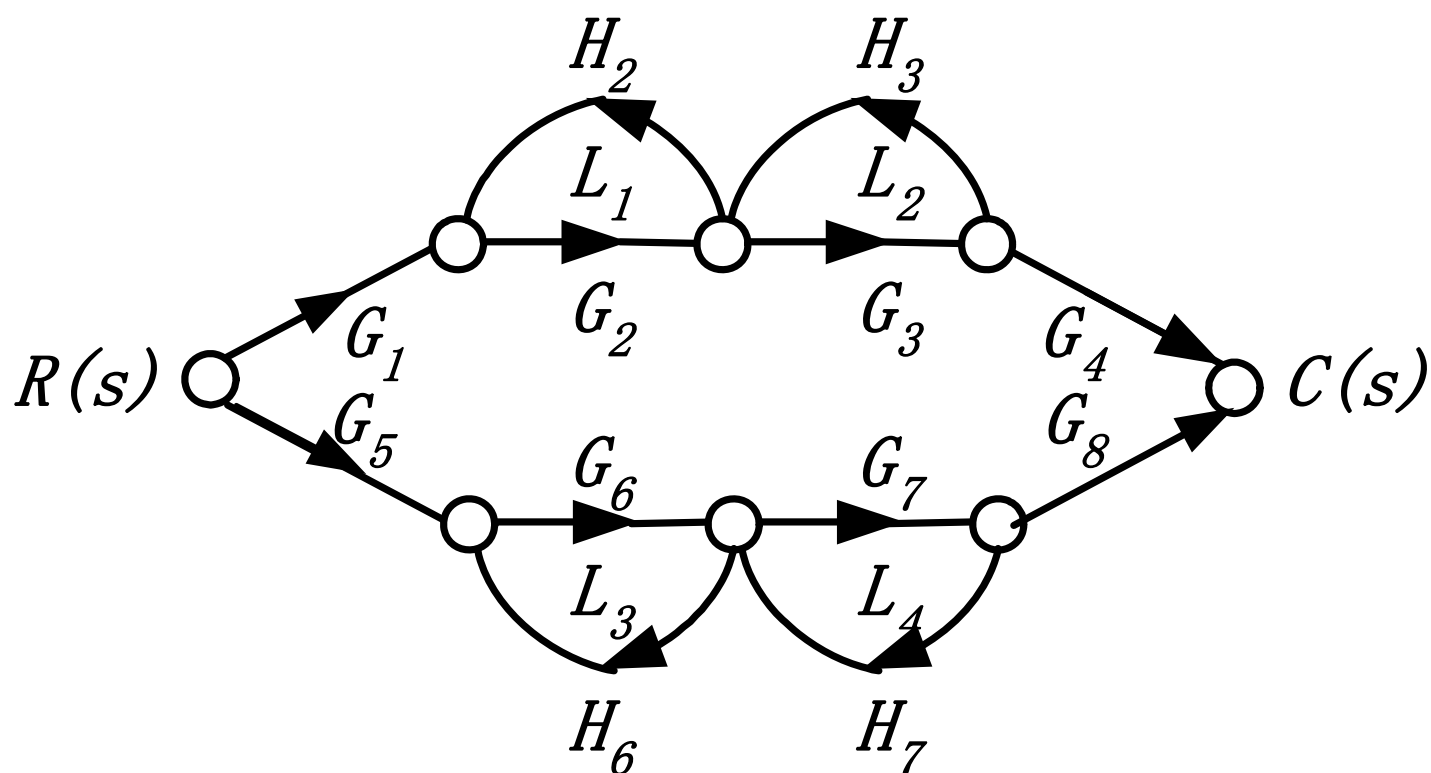
$$L_2 = -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_2 s}$$

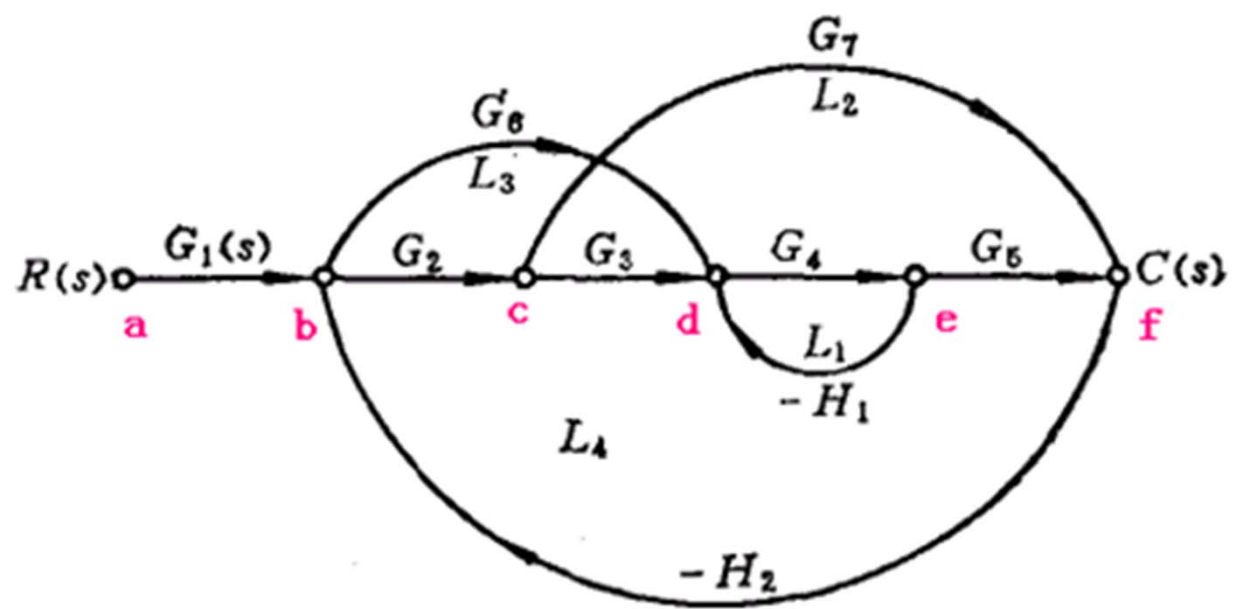
$$L_3 = -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_1 s}$$

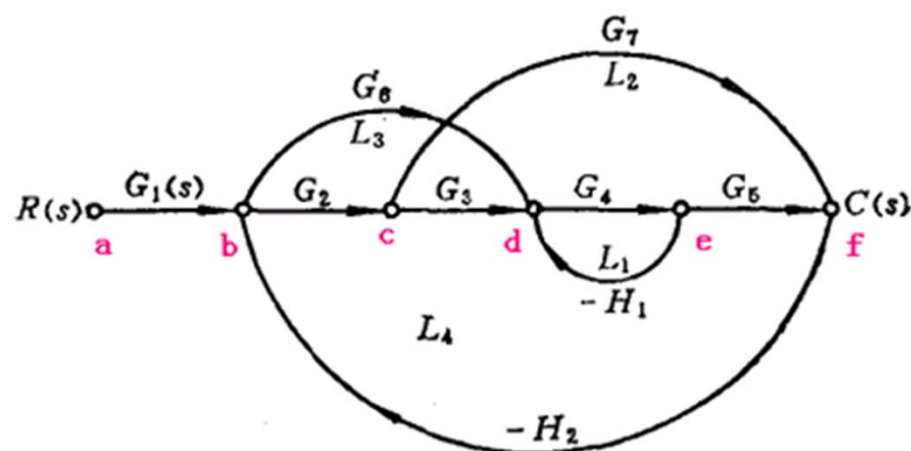
L_1 、 L_2 不接触

P_1 与 L_1 、 L_2 、 L_3 均接触

例 2.13 求信号流图的传递函数







三条前向通路

$$\text{abcdef} \quad P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$\text{abdef} \quad P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$

$$\text{abcf} \quad P_3 = G_1 G_2 G_7$$

四个回路

$$\text{de} \quad L_1 = -G_4 H_1$$

$$\text{bcf} \quad L_2 = -G_2 G_7 H_2$$

$$\text{bdef} \quad L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2$$

$$\text{bcdef} \quad L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = G = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3)$$

$$= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2}$$

2.9 状态空间模型

- 传递函数的局限性
 1. 只描述系统的输入与输出之间的关系，不涉及到系统内部状态的信息
 2. 只适用于零初始条件下的单输入-单输出线性定常系统，无法表示时变系统，非线性系统以及非零初始条件下的线性定常系统

- 状态空间的基本概念

状态：表征系统运动信息的集合

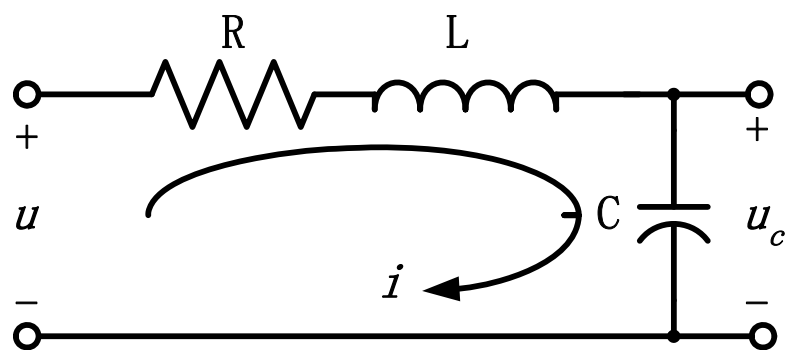
状态变量：足以描述系统全部运动的、数目最少的一组独立变量

状态方程：描述系统状态变量与输入变量之间关系的一阶微分方程组 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

输出方程：描述系统输出变量与输入变量和状态变量之间关系的代数方程 $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$

状态空间表达式：状态方程和输出方程的组合

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$



$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u$$

$$\begin{cases} \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C} \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [-u_c - Ri + u] \end{cases}$$

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

输出方程

$$u_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix}$$

- **SISO**线性定常系统的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

- 传递函数与状态空间方程之间的关系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

例 2.14 根据状态空间方程求传递函数

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [2 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

2.10 数学模型的Matlab描述

- 连续系统的数学模型

1. 传递函数分子、分母多项式模型

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

```
>> num=[b0,b1,...,bm];  
>> den=[a0,a1,...,an];  
>> G=tf(num,den);
```

2. 零极点增益模型

$$G(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

```
>>z=[z1,...,zm];  
>>p=[p1,...,pn];  
>>k=[k];  
>>G=zpk(z,p,k);
```

3. 部分分式展开

$$G(s) = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{r_n}{s - p_n} + K(s)$$

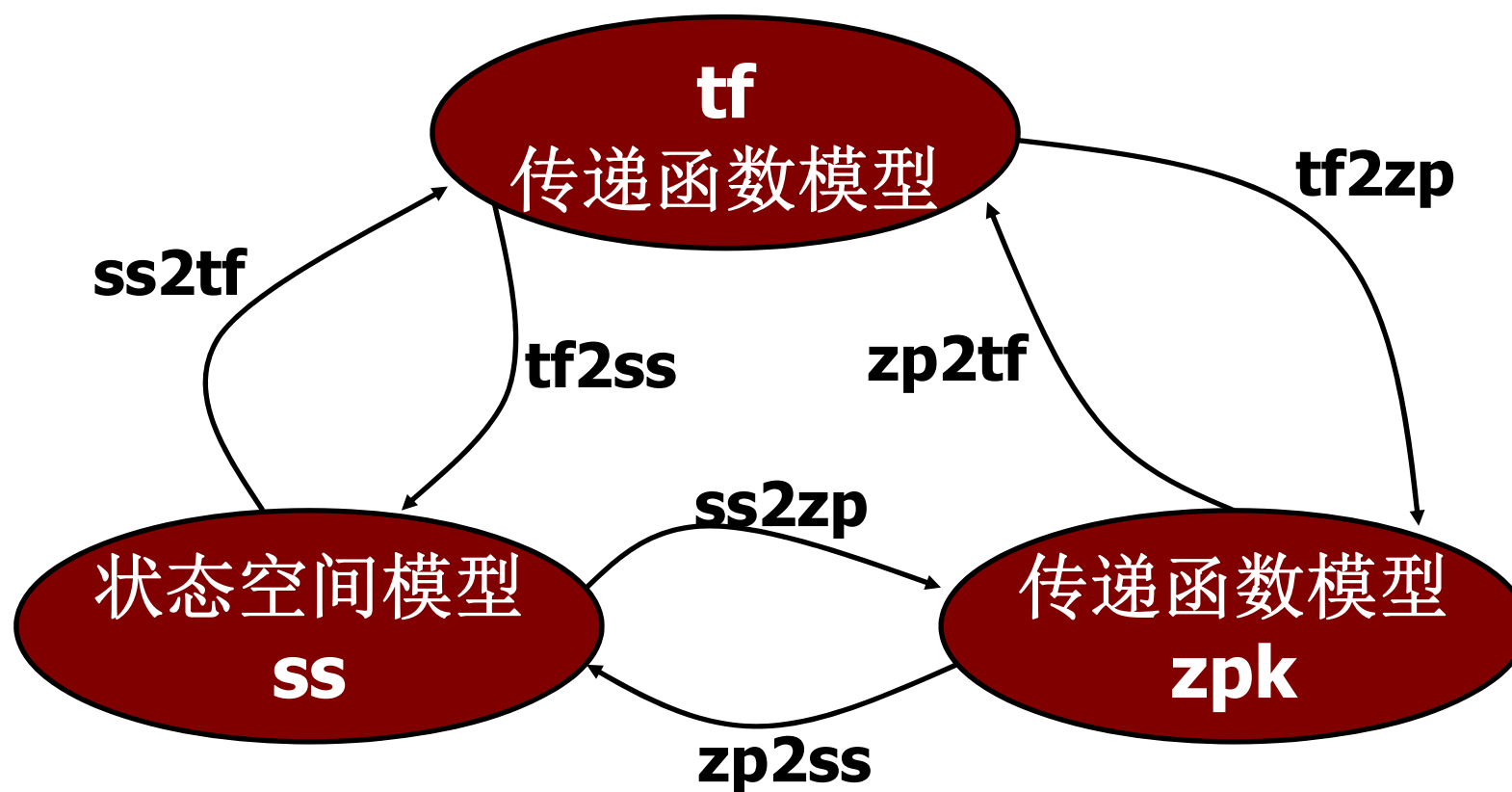
```
>>[r,p,k]=residue(num,den);  
>>[num,den]=residue(r,p,k);
```

4. 状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

```
>>ss(A,B,C,D);
```

- 模型之间的转换



- 控制系统建模

1. 系统并联 $G = G_1 + G_2$

```
>>[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2)
```

2. 系统串联 $G = G_1 G_2$

```
>>[num,den]=series(num1,den1,num2,den2)
```

3. 反馈系统 $G(s) = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$

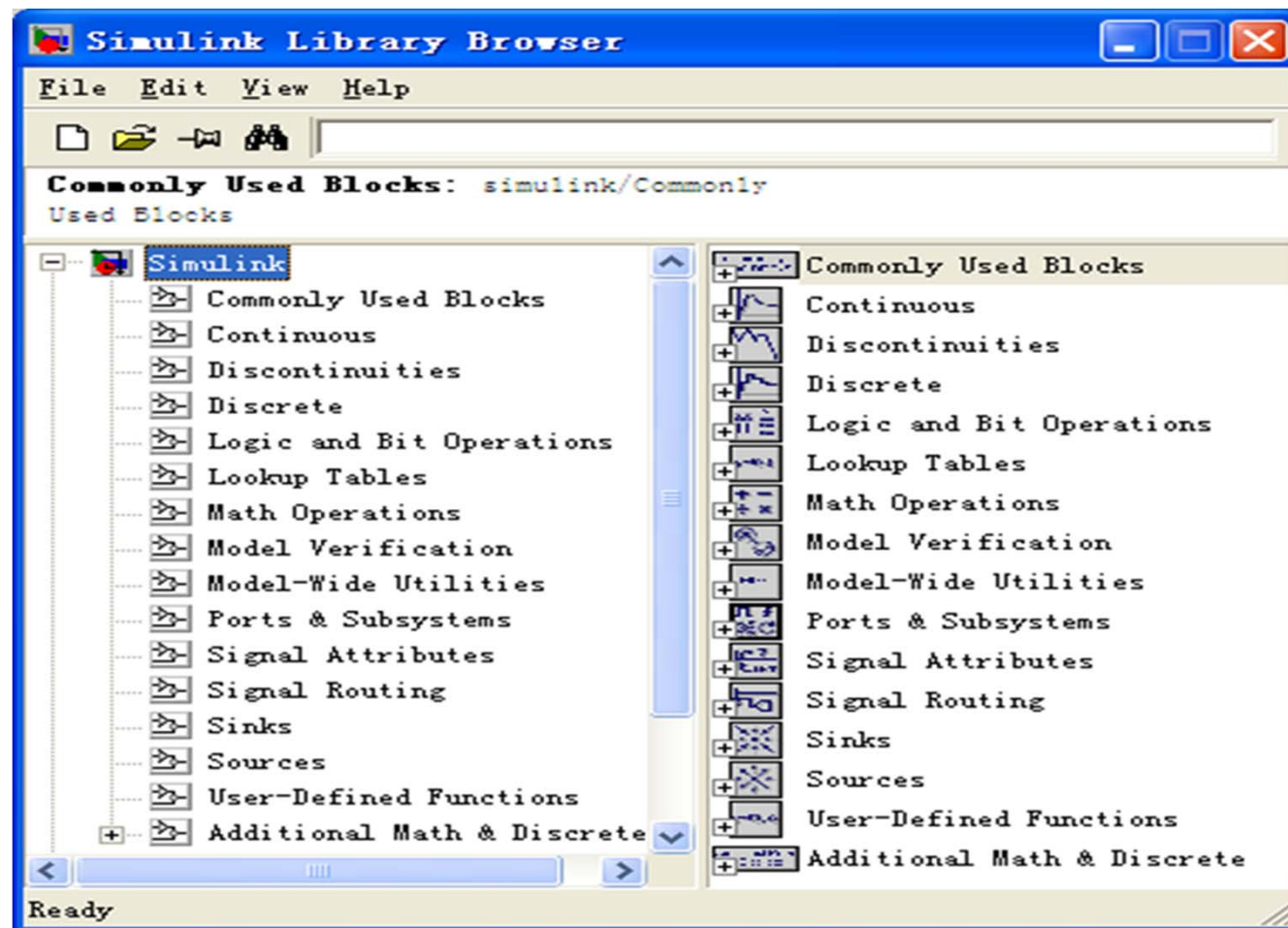
```
>>[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2,sign)
```

- **step**指令可用于求单位阶跃响应

```
>>[y,x,t]=step(num,den,t)
```

类似指令**impulse**,**lsim**等

- Simulink建模方法



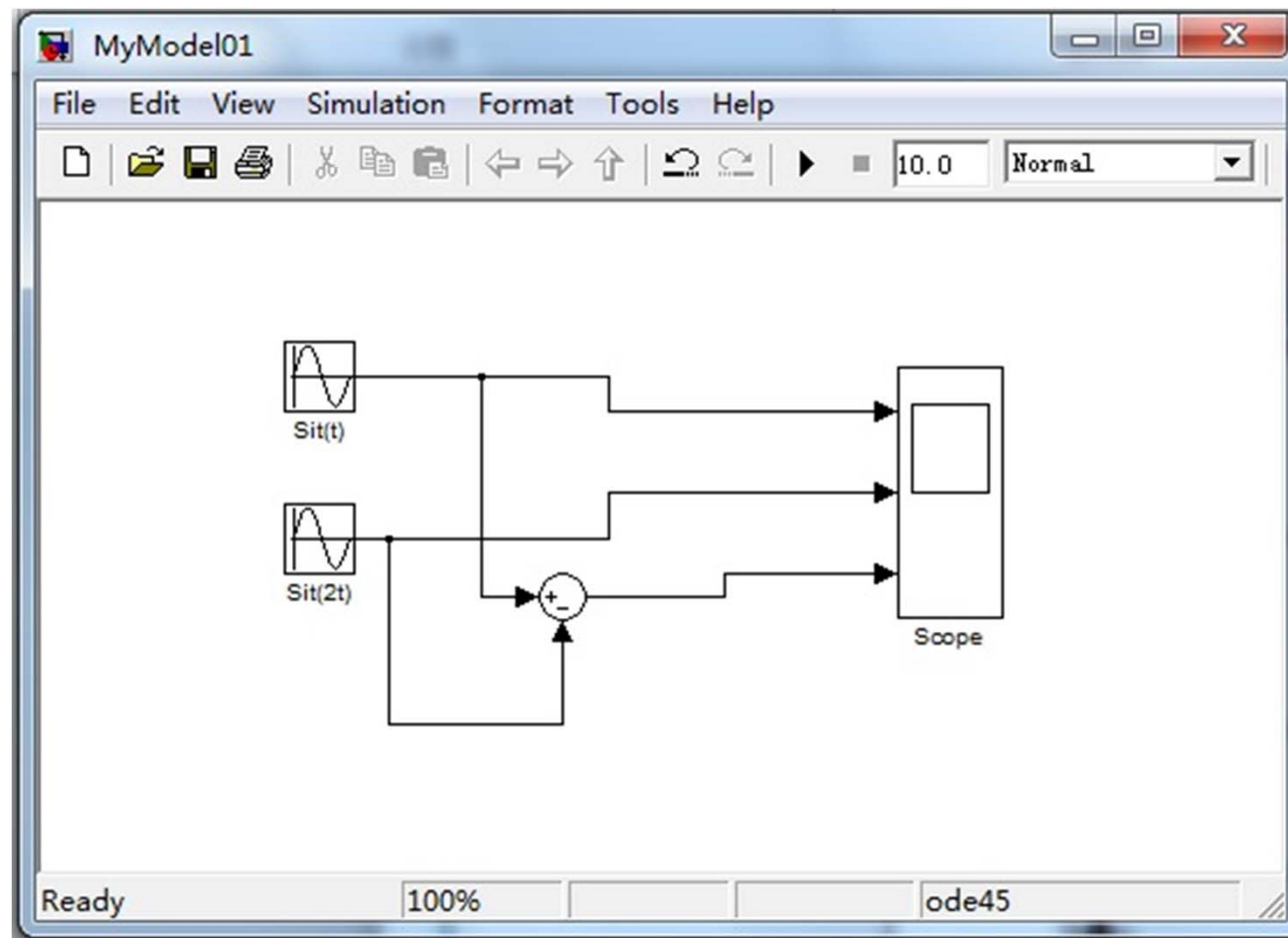
Simulink模块库包含的子模块库

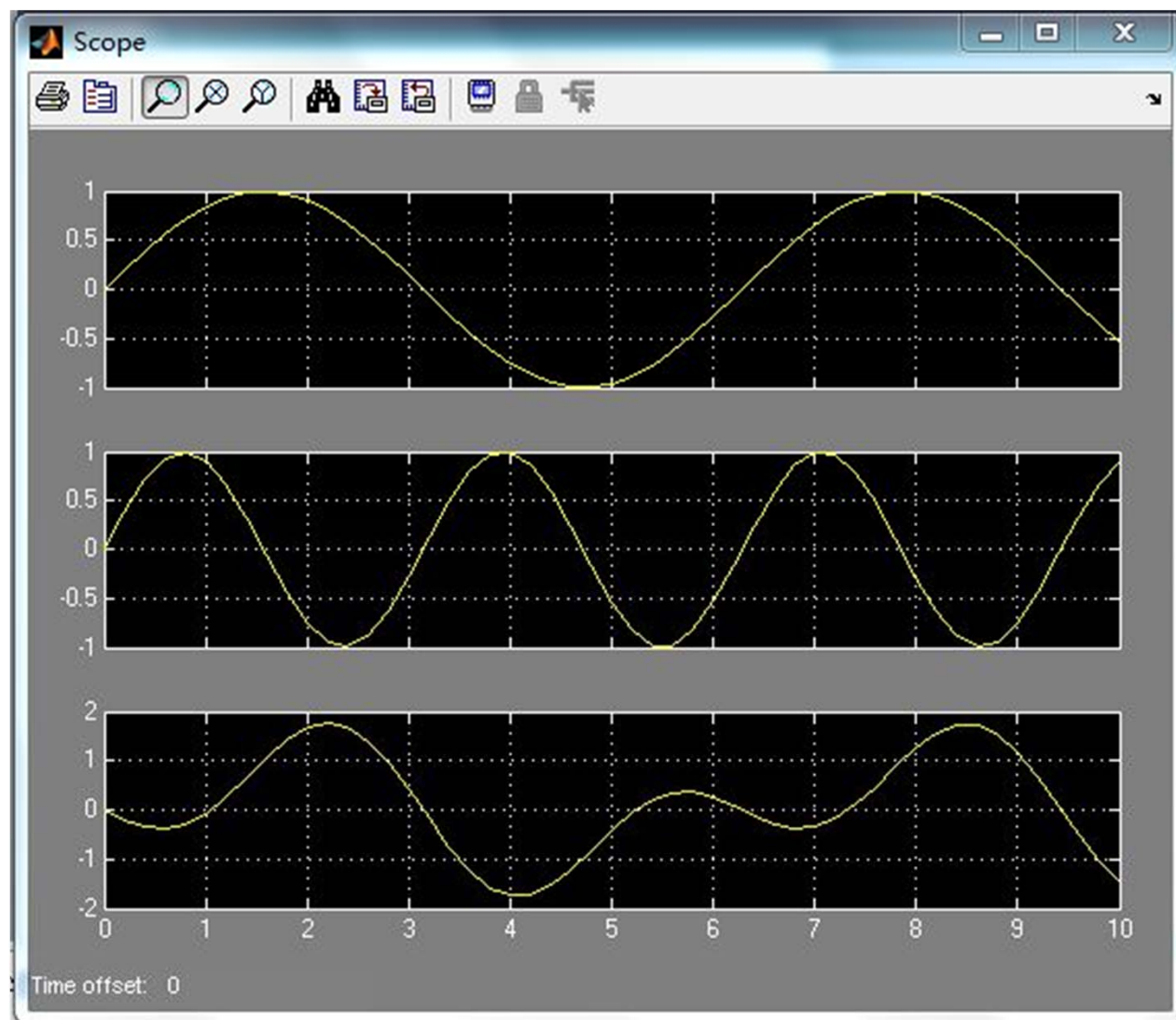
- (1) Commonly Used Blocks模块库，为仿真提供常用元件；
- (2) Continuous模块库，为仿真提供连续系统；
- (3) Discontinuous模块库，非连续系统元件；
- (4) Discrete模块库，为仿真提供离散元件；
- (5) Logic and Bit Operations模块库，提供逻辑运算和位运算的元件；
- (6) Lookup Tables模块库，线形插值查表模块库；
- (7) Math Operations模块库，提供数学运算功能元件；
- (8) Model Verification模块库，模型验证库；
- (9) Model-Wide Utilities模块库；
- (10) Ports and Subsystems模块库，端口和子系统；
- (11) Signals Attributes模块库，信号属性模块；
- (12) Signals Routing模块库，提供用于输入、输出和控制的相关信号及相关处理；
- (13) Sinks模块库，为仿真提供输出设备元件；
- (14) Sources模块库，为仿真提供各种信号源；
- (15) User-defined Functions模块库，用户自定义函数元件；
- (16) Additional Math &Discrete模块库。

建模与仿真

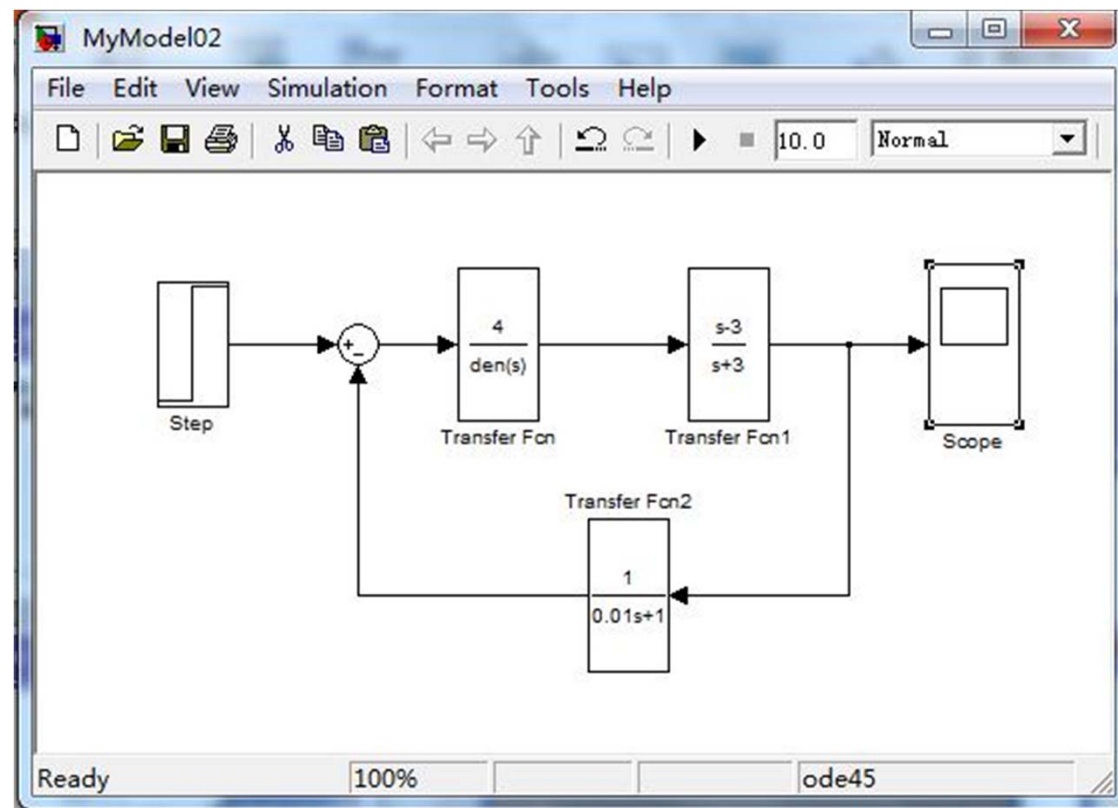
- (1) 新建一个模型窗口
- (2) 为模型添加所需模块
- (3) 连接相关模块，构成所需要的系统模型
- (4) 进行系统仿真
- (5) 观察仿真结果

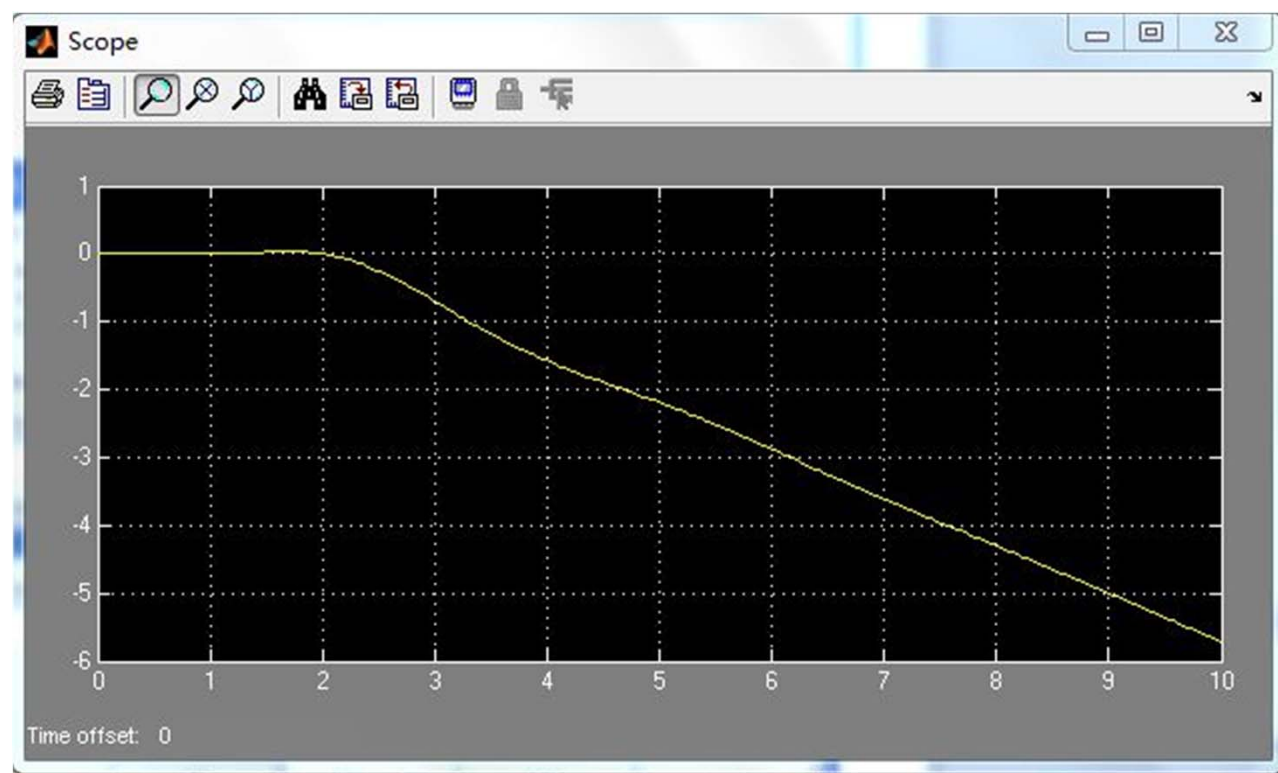
仿真计算 $y(t)=\sin(t)-\sin(2t)$





闭环系统的仿真模拟





复习

- 数学模型基本概念
- 数学模型形式
 - ✓ 微分方程
 - ✓ 传递函数
- 控制系统的图形化描述
 - ✓ 方框图
 - ✓ 信号流图
- 闭环控制系统的传递函数

