高等数学 第四册（第三版）数学物理方法 答案（完整版）

第一章　复数与复变函数（1）

1.计算

$$(1).(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i)=\sqrt{2}-i-i-\sqrt{2}=-2i;$$

$$(2).\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(2-i)i}{-5}=\frac{-5+10i}{9+16}-\frac{2i+1}{5}=-\frac{2}{5};$$

$$(3).\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\frac{5}{(1-3i)(3-i)}=\frac{5}{-10i}=\frac{1}{2}i;\qquad (4).(1-i)^4=[(1-i)^2]^2=(-2i)^2=-4;$$

$$(5).\sqrt{a+bi}=(a+bi)^{\frac{1}{2}}=[\sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)]^{\frac{1}{2}}=(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2});$$

3.设 $z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2=\sqrt{3}-i$;试用三角形式表示 z_1z_2 及 $\frac{z_1}{z_2}$。

解： $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4};z_2=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6});$

$$z_1z_2=\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})]=\frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12});$$

$$\frac{z_1}{z_2}=2[\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})]=2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12});$$

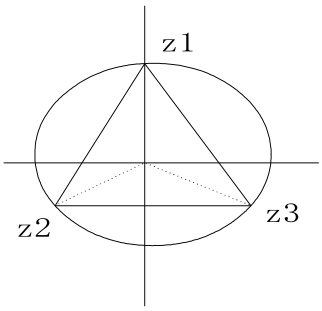
11. 设 z_1,z_2,z_3 三点适合条件 $z_1+z_2+z_3=0$ 及 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$;试证明 z_1,z_2,z_3 是一个内接于单位圆 $|z|=1$ 的正三角形的顶点。

证明：$z_1+z_2+z_3=0; \therefore z_1=-z_2-z_3; z_2=-z_3-z_1; z_3=-z_1-z_2;$

$\therefore |z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|; \therefore z_1,z_2,z_3$ 所组成的三角形为正三角形。

$\because |z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \therefore z_1,z_2,z_3$ 为以 z 为圆心，1 为半径的圆上的三点。

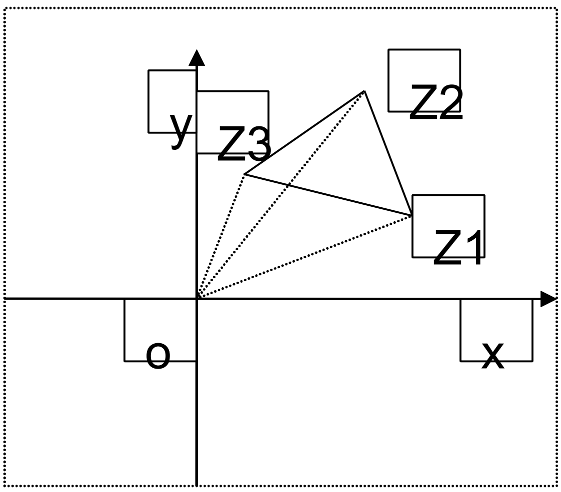
即 z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆的正三角形。



.

17. 证明：三角形内角和等于 π 。

证明：有复数的性质得：



$$\alpha=\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}; \beta=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}; \gamma=\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3};$$

$$\because \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\bullet\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\bullet\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=-1;$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=\arg(-1)+2k\pi;$$

$$\because \alpha\in(0,\pi); \beta\in(0,\pi); \gamma\in(0,\pi);$$

$$\therefore \alpha+\beta+\beta\in(0,3\pi);$$

$$\therefore k=0; \therefore \alpha+\beta+\gamma=\pi;$$

第一章 复数与复变函数（2）

7.试解方程 $z^4+a^4=0\left(a>0\right)$。

解:由题意 $z^4=-a^4$,所以有 $\left(\frac{z}{a}\right)^4=-1\left(a>0\right)$;

$\left(\frac{z}{a}\right)^4=\cos\pi+i\sin\pi=e^{j\pi}$;所以 $\frac{z}{a}=e^{i\frac{\theta+2k\pi}{4}}(k=0,1,2,3)$;

$z_1=ae^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$; $z_3=ae^{i\frac{5\pi}{4}}$; $z_4=ae^{i\frac{7\pi}{4}}$.

12. 下列关系表示的 **z** 点的轨迹的图形是什么？它是不是区域？

$(1).\left|z-z_1\right|=\left|z-z_2\right|(z_1\neq z_2)$

解: 此图形表示一条直线，它不是区域。

$(2).\left|z\right|\leq\left|z-4\right|;$

解： $\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{(x-4)^2+y^2}$ 即 $8x\leq 16; x\leq 2;$ 此图形为 $x\leq 2$ 的区域。

$(3).\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1;$

解： $\left|z-1\right|<\left|z+1\right|;(x-1)^2+y^2<(x+1)^2+y^2;$ $-2x<2x; x>0;$ 此图形为 $x>0$ 的区域。

(4). $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$ 且 $2\le \operatorname{Re}(z)\le 3$;

解：此图形表示 $[2,3]$ 区间辐角在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 的部分。

(5). $|z|\ge 1$ 且 $\operatorname{Im} z>0$;

解：$|z|\ge 1$ 表示半径为 1 的圆的外上半部分及边界，它是区域。

(6). $y_1<\operatorname{Im} z\le y_2$;

解：它表示虚部大于 y_1 小于等于 y_2 的一个带形区域。

(7). $|z|>2$ 且 $|z-3|>1$;

解：此图形表示两圆的外部。

(8). $\left|z-\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}$ 且 $\left|z-\frac{3i}{2}\right|>\frac{1}{2}$;

解：$x^2+(y-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{2}$，$x^2+(y-\frac{3}{2})^2>\frac{1}{2}$，它表示两相切圆半径为 $\frac{1}{2}$ 的外部区域。

(9). $\operatorname{Im} z>1$ 且 $|z|<2$;

解：此图形表示半径为 2 的圆的内部，

且 $\operatorname{Im} z > 1$ 的部分，它是区域。

$(10).|z| < 2$且$0 < \arg z < \frac{\pi}{4};$)

解：此图象表示半径为 2 的圆的内部且辐角主值在$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$的部分，它是区域。

第二章 解析函数（**1**）

4.若函数$f(z)$在区域 D 上解析，并满足下列的条件，证明$f(z)$必为常数.

$f'(z) = 0(z \in D)$

证明：因为$f(z)$在区域上解析，所以$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$。

令$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，即$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y} = 0$。

由复数相等的定义得：$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$，$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$。

所以，$u(x,y) = C_1$(常数)，$v(x,y) = C_2$(常数)，即$f(z) = C_1 + iC_2$为常数。

5 .证明函数在z平面上解析，并求出其导数。

（1） $e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(y\cos y + x\sin y).$

证明：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$.

则 $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$，$v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y)+e^x\cos y$；$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y-y\sin ye^x+x\cos ye^x$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)$；$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)$

满足 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$。

即函数在 z 平面上 (x,y) 可微且满足 $C-R$ 条件，故函数在 z 平面上解析。

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)+ie^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)$

8．由已知条件求解析函数 $f(z)=u+iv$，$u=x^2-y^2+xy$，$f(i)=-1+i$。

解：$u_x=2x+y,u_y=-2y+x$，$u_{xx}=2,u_{yy}=-2$。

所以 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 即 u 是平面上调和函数。由于函数解析，根据 $C-R$ 条件得 $u_x=v_y=2x+y$，于是，$v=2xy+\frac{y^2}{2}+\psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 是 x 的待定函数，再由 C—R 条件的另一个方程得 $v_x=2y+\psi'(x)=-u_y=2y-x$，

所以 $\psi'(x)=-x$，即 $\psi(x)=-\frac{x^2}{2}+c$。于是 $v=2xy+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+c$

又因为 $f(i)=-1+i$，所以当 $x=0,y=1$，时 $u=1$，$v=\frac{1}{2}+c=1$ 得

$c=\frac{1}{2}$

所以$f(z)=x^2-y^2+xy+i(2xy+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2})$。

第二章　解析函数（2）

12.设ω是z的解析函数，证明$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}$，$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$

$(\omega=u+iv,z=x+iy)$。

证明：ω是 z 上的解析函数，所以，ω在(x,y)上处处可微，即$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，

所以，$\frac{\partial u}{\partial x}\bullet\frac{\partial v}{\partial y}\bullet\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial v}{\partial y}\bullet\frac{\partial u}{\partial x}\bullet\frac{\partial x}{\partial u}$，所以$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}$，

同理，$\frac{\partial u}{\partial y}\bullet\frac{\partial v}{\partial y}\bullet\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{\partial v}{\partial x}\bullet\frac{\partial u}{\partial x}\bullet\frac{\partial x}{\partial u}$，所以，$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial v}$

即得所证。

14.若$z=x+iy$，试证：（1）$\sin z=\sin xchy+i\cos xshy$。

证：$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy$

$$=\sin x\frac{e^{iiy}+e^{-i(iy)}}{2}+\cos x\frac{e^{iiy}-e^{-iiy}}{2i}$$

$$=\sin x\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+i\cos x\frac{e^{i(iy)}-e^{-y}}{2}$$

$$=\sin xchy+i\cos xshy$$

18.解方程$\ln z=\frac{i\pi}{2}$。

解：$\ln z=\ln|z|+i\arg z=0+\frac{i\pi}{2}$，

即$|z|=1,\arg z=\frac{\pi}{2}$，设$z=x+iy$

$\sqrt{x^2+y^2}=1$，$\arg(x+iy)=\frac{\pi}{2}$得$x=0,y=1$，即$z=i$。

20.试求$(1+i)^i, 3^i, i^i, e^{2+i}$及$Ln(1+i)$。

解：$i^i = e^{iLni} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

$$(1+i)^i = e^{iLn(1+i)} = e^{i\ln\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} = (\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}}e^{2k\pi}$$，

$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

$$Ln(1+i) = \ln(1+i) + i2k\pi = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + i2k\pi = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$$

$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

$3^i = e^{iLn3} = e^{i(\ln 3 + 2k\pi)} = \cos\ln 3 + i\sin\ln 3$

$e^{2+i} = e^2 \bullet e^i = e^2(\cos 1 + i\sin 1)$

22，求证$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$

证：$z = x + iy$ (x,y, 均为实数)，所以$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\sin z}{z} = \lim\limits_{x,y\to\infty}\frac{\sin(x+iy)}{x+iy}$

当$x\to 0$则极限趋近于 z 轴，有$\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\sin iy}{iy} = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{iyz^i} = 1$

当$y\to 0$时，则极限趋于 z 轴，有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$，故$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\sin z}{z} = 1$。

第三章 柯西定理 柯西积分（1）

1.计算积分$\int_0^{1+i}(x-y+ix^2)dz,$积分路径是直线段。

解：令 z=(1+i)dz， dz=(1+i)dt，则：

$$\int_0^{1+i}(x-y+ix^2)\,dz = \int_0^1 it^2(1+i)dz = (i-1)\int_0^1 t^2\,dt = (i-1)\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{i-1}{3}$$。

2.计算积分路径是（1）直线段，（2）右半单位圆，（3）左半单位圆。

解：(1) 令$z=it(-1\le t\le 1)$，$dz=idt$，$|z|=|t|$，

所以 $\int_{-i}^{i}|z|dz=\int_{-1}^{1}|t|idt=i\int_{-1}^{1}(-t)dt+i\int_{0}^{1}tdt=i$

(2).令：$z=\cos\theta+i\sin\theta(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$，$dz=(-\sin\theta+\cos\theta)d\theta$，$|z|=1$，

则

$$\int_{-i}^{i}|z|=-i\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta+i\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=0+2i=2i$$

(3).令 $z=\cos\theta+i\sin\theta(\theta$从$\frac{3\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2})$，$dz=(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta$，$|z|=1$

，

$$\int_{-i}^{i}|z|=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta+i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=0+2i=2i$$

5.不用计算，证明下列分之值为零，其中c为单位圆。

（1）$\int_c\frac{dz}{\cos z}$，（2）$\int_c\frac{dz}{z^2+2z+2}$，（3）$\int_c\frac{e^z}{z^2+5z+6}dz$，

解：（1）因为函数$f(z)=\frac{1}{\cos\theta}$在单位圆所围的区域内解析，所以$\int_c\frac{dz}{\cos z}=0$。

（2）因为函数$f(z)=\frac{1}{z^2+2z+2}$在单位圆内解析，所以$\int_c\frac{dz}{z^2+2z+2}=0$。

（3）

因为函数$f(z)=\frac{e^z}{z^2+5z+6}=\frac{e^z}{(z+2)(z+3)}$的解析区域$D$包含拉单位围线

所以由哥西积分定理有$\int_c\frac{e^z}{z^2+5z+6}dz=0$

6.计算$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}$，$\int_{|z|=1}\frac{dz}{|z|}$，$\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{z}$，$\int_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right|$。

解：$(1)\int_{|z|=1}\frac{dz}{|z|}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z-1}=2\pi i f(1)=2\pi i$。

$(2)\int_{|z|=1}\frac{dz}{|z|}=\int_{|z|=1} ie^{i\theta}d\theta=\int_0^{2\pi} de^{i\theta}=0$。

$(3)\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{|(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta|}{\cos\theta+i\sin\theta}=0$。

$(4)\int_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right|=\int_0^{2\pi}|d\theta|=2\pi$。

7.由积分$\int_c\frac{dz}{z+2}$之值，证明$\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$，其中取单位圆。

证明：因为被积函数的奇点$z=-2$在积分围道$|z|=1$外，故$\int_c\frac{dz}{z+2}=0$，现令$z=re^{i\theta}$，则在$|z|=1$上$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，$dz=ie^{i\theta}d\theta=i(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$，

$$\int_c\frac{dz}{z+2}=\int_0^{2\pi}\frac{i(\cos\theta+i\sin\theta)}{2+\cos\theta+i\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(-\cos\theta+i\sin\theta)(2+\cos\theta-i\sin\theta)}{(2+\cos\theta+i\sin\theta)(2+\cos\theta-i\sin\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-2\sin\theta+i(2\cos\theta+1)}{5+4\cos\theta}d\theta,$$

比较可得：$\int_0^{2\pi}\frac{2\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$，$\int_0^{2\pi}\frac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta}d\theta=0$。

第三章 柯西定理 柯西积分（2）

8.计算：

（1）$\int_c \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz, \quad (C:|z|=2)$。

解：$\int_c \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz=\int_c \frac{2z^2-2z+z+1}{z-1}dz=\int_c (2z+\frac{z-1+2}{z-1})dz$

$=\int_c (2z+1+\frac{1}{z-1})dz=\int_c (2z)dz+\int_c dz+\int_c \frac{1}{z-1}dz \quad =0+0+2\pi i f(1)=2\pi i$。

10.设C表圆周$x^2+y^2=3$，$f(z)=\int_c \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta$，求$f'(1+i)$。

解：设$g(\zeta)=3\zeta^2+7\zeta+1$，它在复平面内解析，故当$z\in C$时，则由哥西积分公式有$f(z)=\int_c \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-Z}d\zeta=\int_c \frac{g(\zeta)}{\zeta-z}dz=2\pi i g(z)=2\pi i\left[3z^2+7z+1\right]$，所以

$f'(1+i)=2\pi i\left[3z^2+7z+1\right]'_{z=1+i}=2\pi i(6z+7)_{z=1+i}=-12\pi+26\pi i$。

11. 求积分$\int_c \frac{e^z}{z}dz,(C:|z|=1,)$从而证明：$\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$。

解：由于$C:|z|=1$，函数$f(z)=\frac{e^z}{z}$在$z=0$处不解析，

$\int_c \frac{e^z}{z}dz=(2\pi i e^z)_{z=0}=2\pi i$。

令$z=e^{i\theta},dz=ie^{i\theta}d\theta$，则

$\int_c \frac{e^z}{z}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos\theta+i\sin\theta}}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\left[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)\right]d\theta=2\pi i$，故

$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta+\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}i\sin(\sin\theta)d\theta=2\pi$，所以

$2\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi$，即

$\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$。

13.设$f(z)=z^2$，利用本章例 5 验证哥西积分

公式 $f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$ 以及哥西求导公式 $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$ 。提示：把 $f(\zeta)$ 写成 $(\zeta-z)^2+2z(\zeta-z)+z^2$ 。

证明：设 $f(\zeta)=\zeta^2=(\zeta-z)^2+2z(\zeta-z)+z^2$，则式的右边为可写为：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{(\zeta-z)^2+2z(\zeta-z)+z^2}{\zeta-z}dz$$

$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c [(\zeta-z)+2z]d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{z^2}{\zeta-z}d\zeta$ 由哥西积分定理有：

$\frac{1}{2\pi i}\oint_c [(\zeta-z)+2z]d\zeta=0$，所以右边 $=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{z^2}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}z^2 2\pi i=z^2$，即 左边=右边。

再由式子可知当 $n=1$ 时，$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_c \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right]'=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$，成立。

假设当 $n=k$ 时，$f^k(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}$ 等式成立。则当 $n=k+1$ 时，$f^{k+1}(z)=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_c \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{k+2}}$ 成立。

所以 $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$ 。

14.求积分（1）$\int_c \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}dz$，（2）$\int_c \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$，其中 $C:|z|=a(a>1)$.

解：（1）被积函数有奇点$z=1$，该奇点在积分围道内，由哥西积分求导公式有：

$$\int_c \frac{\cos\pi z}{(z-1)^5}dz = \frac{2\pi i}{4!}\frac{d^4}{dz^4}[\cos\pi z]_{z=1} = \frac{2\pi i}{4!}\pi^4(-1)^2\cos\pi = -\frac{\pi^5}{12}i$$

$$(2):\int_c \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \int_{c1}\frac{e^z/(z+i)^2}{(z-i)^2}dz + \int_{c2}\frac{e^z/(z-i)^2}{(z+i)^2}dz = 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i} + 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'_{z=-i}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i - \frac{\pi}{2}(1+i)e^{-i} = i\pi\sqrt{2}\sin(1-\frac{\pi}{4})$$

第四章　解析函数的幂级数表示（**1**）

2.将下列函数展为含z的幂级数，并指明展式成立的范围：

（1）$\frac{1}{az+b}(a,b\text{为复数，}b\neq 0)$，（2）$\int_0^{\pi} e^{z^2}dz$，

（3）$\int_0^z \frac{\sin z}{z}dz$，（4）$\cos^2 z$，　(5)$\sin^2 z$.(6)$\frac{1}{(1-z)^2}$，

（1）解：原式＝$\frac{1}{b}\frac{1}{\frac{a}{b}z+1} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{a}{b}z)^{n-1}$

$|z|<|\frac{b}{a}|$

（2）解：原式=$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2)^n}{n!}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$　　|z|<∞

（3）解：原式=$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$　　|z|<∞

（4）解：原式=$\frac{1+\cos 2z}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}$　　|z|<

∞

（5）解：原式= $\frac{1-\cos 2z}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}$ $|z|<\infty$

（6）解；原式＝ $(\frac{1}{1-z})'=(\sum_{n=0}^{\infty}z^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1}$ $|z|<1$

4．写出 $e^z\ln(1+z)$ 的幂级数至少含 z^5 项为止，其中 $\ln(1+z)_{z=0}=0$。

解： $\because e^z=1+z+\frac{2^2}{2!}+\ldots,|z|<\infty$， $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots,|z|<1$

两式相乘得

$$e^z\ln(1+z)=1+z+(1-\frac{1}{2})z^2+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2!})z^3+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!})z^4$$
$$+(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\frac{1}{2!}-\frac{1}{2}\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})z^5\cdots|z|<1$$

5．将下列函数按 $(z-1)$ 的幂展开，并指明收敛范围：

（1） $\cos z$，　　（2） $\sin z$，

（3） $\frac{z}{z+2}$，　　（4） $\frac{z}{z^2-2z+5}$，

解：（1）原式= $\cos(z-1+1)=\cos(z-1)\cos 1+\sin(z-1)\sin 1$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{2n!}\cos 1+\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{2n!}(\cos 1+\frac{z-1}{2n+1}\sin 1)$$

（2）原式= $\sin(z-1+1)=\sin(z-1)\cos 1+\cos(z-1)\sin 1$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{2n!}\cos 1+\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{2n!}(\sin 1+\frac{z-1}{2n+1}\cos 1)$$

$|z-1|<\infty$

（3） $\because \frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}})=\frac{1}{3}(1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{3}-\cdots$ $\therefore \frac{z}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{3}(-\frac{z-1}{3})^n$

$|z-1|<3$

（ 4 ） 解 ： 原 式 $=\frac{z}{4}(\frac{1}{1+(\frac{z-1}{2})^2})=\sum_{n=0}^{\infty}[-(\frac{z-1}{2})^2]^n$

$|z-1|<\sqrt{2}$

6．设$\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$，证明$c_n=c_{n-1}+c_{n-2}\,(n\geq 2)$，指出此级数展式之前5项，并指出收敛范围。

解：$\because c_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$ （$n\geq 0$），

$c_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}]$

$c_{n-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]$

$\therefore c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$ ）

原 式 ＝ $1+\frac{3\sqrt{5}}{5}z+2z^2+\frac{7\sqrt{2}}{5}z^3+5z^4+\cdots$

$|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

第四章 解析函数的幂级数表示（2）

9．将下列函数在指定环域内展成罗朗级数：

（1） $\frac{z+1}{z^2(z-1)},0<|z|<1,1<|z|<+\infty.$

解：原式$=\frac{-2z-1}{z^2}+\frac{2}{z-1}$

在$0<|z|<1$内，上式$=\frac{-2z-1}{z^2}-\frac{2}{1-z}=-\frac{2z+1}{z^2}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

在$1<|z|<+\infty$内，上式$=-\frac{2z+1}{z^2}+\frac{2}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})=-\frac{2z+1}{z^2}+\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$

(2)$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},1<|z|<2$，

解：原式$=\frac{1}{z-2}+\frac{-2}{z^2+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{z}{2})}-\frac{1}{2}(\frac{1}{1+(\frac{z}{2})^2})=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z}{2})^n$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n[1-(-1)^n]\qquad 1<|z|<2$

（3）$\frac{e^z}{z(z^2+1)},0<|z|<1$

解：原式$=e^z(\frac{1}{2}+\frac{-z}{z^2+1})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}[\frac{1}{2}-z\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n]\qquad 0<|z|<1$

（4）$\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}$，$0<|z|<3$

解：当$1<|z|<3$时，原式=$\frac{1}{z^5}(\frac{1}{1-\frac{1}{z^5}})(-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}})=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{z^{5(n+1)}})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$

当$0<|z|<1$时，原式=$(\frac{1}{1-z^5})(-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}})=\sum_{n=0}^{\infty}z^{5n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$

（5）$\sin\frac{z}{z-1}$，$0<|z-1|<1$。

解：$\sin\frac{z}{z-1}=\sin\frac{z-1+1}{z-1}=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}$

$=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{z-1})^{2n}}{(2n)!}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{z-1})^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{2n}(2n)!}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}$。

10．将下列各函数在指定点的无心邻域内展成罗朗级数，并指出成立的范围：

（1） $\frac{1}{(z^2+1)^2}$，其中 $z=i$。

解：

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(z+i)^2}+\frac{1}{4i}(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i})$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2}+\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n+\frac{1}{4i}(z-i)^{-1}\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n$$

$$=-\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2}+-\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)}+\frac{1}{16}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n]^2+\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n$$

$0<|z-i|<2$

（2） $(z-1)^2 e^{\frac{1}{1-z}}$， $z=1$

解：$(z-1)^2 e^{\frac{1}{1-z}}=(z-1)^2\frac{1}{e^{\frac{1}{z-1}}}=(z-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(1-z)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(1-z)^{n-2}}$， $|z-1|>0$

11．把 $f(z)=\frac{1}{1-z}$ 展成下列级数：

（1）在 $|z|<1$ 上展成 z 的泰勒级数。

解：$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$， $|z<1|$。

(2)在 $|z|>1$ 上展成 z 的泰勒级数。

解；$f(z)=\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n$， $|z|>1$

(3)在 $|z+1|<2$ 上展成 $(z+1)$ 的泰勒级数。

解：原式 $=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+1}{2})^n$， $|\frac{z+1}{2}|<1$

(4)在 $|z+1|>2$ 上展成 $(z+1)$ 的泰勒级数。

解：原式 $=-(z+1)\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z+1}}=-(z+1)\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{2}{z+1})^n$　　$|\dfrac{2}{z+1}|\langle 1$

12．把 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 展成在下列区域收敛的罗朗或泰勒级数：

（1）$0<|z|<1$，

解：原式 $=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$，

（2）$|z|>1$

解：原式 $=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{1}{z})^n$，

（3）$0<|z-1|<1$

解：原式 $=\dfrac{1}{1-(z+1)}+\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n+\dfrac{1}{1-z}==\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(z-1)^{n-1}$，

（4）$|z-1|>1$

解：原式

$=\dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}+\dfrac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{z-1})^n+\dfrac{1}{1-z}\sqrt{a^2+b^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{z-1})^n$，

（5）$|z+1|<1$

解：原式 $=-\dfrac{1}{1-(z+1)}+\dfrac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n+\dfrac{1}{1-z}$

$=-\sum_{n=0}^{\in}(z+1)^n+\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\dfrac{z+1}{2})^n$，

（6）$1<|z+1|<2$

解：原式 $=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1+z}{2}}+\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+1}{2})^{n}+\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z+1})^{n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-1)(z+1)^{n}$ 。

（7） $|z+1|>2$

解:原式 $=-\frac{1}{(1+z)(1-\frac{2}{1+z})}+\frac{1}{1+z}\frac{1}{1-\frac{1}{1+z}}=-\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z+1})^{n}+\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z+1})^{n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n}}(1-z^{n})$

$|z+1|>2$

第四章　解析函数的幂级数表示（3）

13．确定下列各函数的孤立奇点，并指出他们是什么样的类型，对于无穷远点也要加以讨论：

（1） $\frac{z-1}{z\left(z^{2}+1\right)^{2}}$

解：孤立奇点为：$z=0,z=i,z=-i$，

对于 $z=0,$ 原式= $\frac{\frac{z-1}{z(z-i)}}{\frac{1}{z}}=X(z)\therefore$ Z 为一阶极点

$z=i$，原式= $\frac{z-1}{z(z-i)^{2}(z+i)^{2}}=\frac{\frac{z-1}{z(z+i)^{2}}}{\frac{1}{(z-1)^{2}}}\therefore$ $z=i$ 为二阶极点，

同理：$z=-i$也为二阶极点。

对$z=\infty$，原式=$\dfrac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}(\frac{1}{z^2}+1)^2}=\dfrac{(1-z)z^4}{(1+z^2)^2}$，由于$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{(1-z)z^4}{(1+z^2)^2}=0$，即为可去奇点。

（2）$\dfrac{1}{(z^2+i)^2}$

解：$\because z^2+i=0$，$z=e^{i(k\pi+\frac{3}{4}\pi)}$为二阶极点。

$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(z^2+i)^2}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(\frac{1}{z^2}+i)^2}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(\frac{1+z^2 i}{z^2})^2}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^4}{(1+z^2 i)^2}=0$即为可去极点。

(3)$\dfrac{1-\cos z}{z^3}$

解；$\dfrac{1-\cos z}{z^3}=\dfrac{z^2}{2z^3}=\dfrac{1}{2z}$，$z=0$为一阶极点。

$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1-\cos z}{z^3}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^3}}=\lim\limits_{z\to 0}z^3(1-\cos\frac{1}{z})=0$即为可去极点。

(4)$\cos\dfrac{1}{z+i}$

解：$z=-i$为本性极点。

$\lim\limits_{z\to\infty}\cos\dfrac{1}{z+i}=\lim\limits_{z\to o}\cos\dfrac{1}{(\frac{1}{z}+i)}=\lim\limits_{z\to 0}\cos(\dfrac{z}{1+zi})=1$即在无穷远点为可去极点。

(5)$\dfrac{e^z}{e^z-1}$

解：z=0，$\dfrac{e^z}{e^z-1}=\dfrac{e^z}{mz^{m-1}}$即 z=0 时，有(m-1)阶

极点，

$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{e^{z}-1}{zm}=\lim\limits_{z\to0}\frac{e^{\frac{1}{z}}-1}{(\frac{1}{z})^{m}}=\lim\limits_{z\to0}z^{m}(e^{\frac{1}{z}}-1)=0$ 即无穷远点为可去极点。

(6) $\frac{e^{z}}{e^{z}-1}$

解： $z=0$，$\frac{e^{z}}{e^{z}-1}\lim\limits_{z\to0}\frac{1}{1-\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}}}=1$ 即无穷远点为可去极点。

(7) $\frac{1}{\sin z+\cos z}$

解： $\sin z+\cos z=\sqrt{2}\sin(z+\frac{\pi}{4})$， $z+\frac{\pi}{4}=k\pi$，

$z=k\pi-\frac{\pi}{4}$ (k=0,±1， $\cdots$)一阶极点，

$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{\sin z+\cos z}=\lim\limits_{z\to0}\frac{1}{\sin\frac{1}{z}+\cos\frac{1}{z}}=\lim\limits_{z\to0}\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\frac{1}{z}+\frac{\pi}{4})}=$ 不存在，为本性极点。

(8) $\frac{1-e^{z}}{1+e^{z}}$

解： $e^{z}=-1$， $z=i\theta$， $e^{i\theta}=-1$ $z=i(2k+1)\pi\ \ (k=0$，$\pm1\cdots)$ 一阶极点。

$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1-e^{z}}{1+e^{z}}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{z}}}{1+e^{\frac{1}{z}}}\lim\limits_{z\to0}\frac{(1-e^{\frac{1}{z}})'}{(i+e^{\frac{1}{z}})'}=\lim\limits_{z\to0}\frac{-e^{\frac{1}{z}}\bullet(-\frac{1}{z^{2}})}{e^{\frac{1}{z}}(-\frac{1}{z^{2}})}=-1$ 即可去极点。

(9) $(z^{2}-3z+2)^{\frac{2}{3}}$

解：$z=1,z=2$，三阶极点，

$$\lim_{z\to\infty}(z^2-3z+2)^{\frac{2}{3}}=\lim_{z\to0}(\frac{1}{z^2}-3\frac{1}{z}+2)^{\frac{2}{3}}=\lim_{z\to0}[(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-2)]^{\frac{2}{3}}=\lim_{z\to0}\frac{(1-3z+2z^2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{z^4}{3}}=\infty$$

(10) tgz

解：$z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\cdots)$ 一阶极点，$\lim_{z\to\infty}tgz=\lim_{z\to0}\frac{\sin\frac{1}{z}}{\cos\frac{1}{z}}=$ > 不存在

(11) $\sin\frac{1}{1-z}$

解：$z=1$，为本性奇点，$\therefore\lim_{z\to\infty}\sin\frac{1}{1-z}=\lim_{z\to0}\sin\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\lim_{z\to0}\sin\frac{z}{z-1}=0$ 即为可去奇点。

(12) $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{z}-1}$

解：$z=0,z=1$，一阶极点，$\lim_{z\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{z}-1}=\lim_{z\to0}\frac{e^{\frac{1}{\frac{1}{z}-1}}}{e^{\frac{1}{z}}-1}=\lim_{z\to0}\frac{e^{\frac{z}{1-z}}}{e^{\frac{1}{z}}-1}=0$ 可去奇点。

14. 设 $f(z),g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 阶极点，试问 $z=a$ 为 $f+g,f\bullet g,\frac{f}{g}$ 的什么样的特点。

解；设 $f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-a)^m},g(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$

$$f+g=\begin{cases}\dfrac{\lambda(z)+(z-a)^{m-n}\phi(z)}{(z-a)^m}(m>n)\\ \dfrac{(z-a)^{n-m}\lambda(z)+\phi(z)}{(z-a)^n}(m<n)\\ \dfrac{\lambda(z)+\phi(z)}{(z-a)^n}(m=n)\end{cases}$$

（1）

$$f.g=\frac{\lambda(z)\phi(z)}{(z-a)^{m+n}}$$

(m+n) 阶 极 点

（2）

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-a)^{m-n}}\dfrac{\lambda(z)}{\phi(z)}(m>n) & （m-n）\text{级极点}\\ (z-a)^{n-m}\dfrac{\lambda(z)}{\phi(z)}(m<n) & (m-n)\text{级零点}\\ \dfrac{\lambda（z）}{\phi(z)}(m=n) & \text{可去奇点}\end{cases}$$

(3)

所以

当 m≠n 时　z=a 为 f+g 的 max{m,n}阶极点

当 m=n 时 $\begin{cases}\lambda(a)+\phi(a)\neq 0 & \_\_\_\_\_\ n\text{阶极点}\\ \lambda(a)+\phi(a)=0\text{低于}n\text{阶的极点或可去极点}\end{cases}$

15.设 $f(z)\neq 0$，且以 $z=a$ 为解析点或极点，而 $\varphi(z)$ 以 $z=a$ 为本性奇点，证明 $z=a$ 是 $\varphi(z)\pm f(z)$，$\varphi(z)\cdot f(z)$，$\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ 的本性奇点。

证明：设 $f(z)=\dfrac{\lambda(z)}{(z-a)^m},\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$

$\varphi(z)\pm f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\pm\dfrac{\lambda(z)}{(z-a)^m}$ 显然其中主要部分有无限项。

所以 z=a 是±f(z)+ ϕ(z)的本性奇点。

$$\varphi(z).f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$$

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}}{\frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(z)}{\lambda(z)}(z-a)^{m-n}$$

所以 z=a 是 f(z)ϕ(z)及$\frac{\varphi(z)}{f(z)}$的本性奇点。

16. 讨论下列函数在无穷远点的性质。

(1)z^2

解：$\lim\limits_{z\to\infty}z^2=\lim\limits_{z\to\infty}1/z^2=\infty$ 二阶极点。

(2)$\frac{z}{z+1}$

解：$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{1+z}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}+1}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z}\frac{z}{1+z}=1\Rightarrow$ 可去极点。

(3)$(1+z)^{\frac{1}{2}}$

解：

$$令(1+z)^{\frac{1}{z}}=c_0+c_1\frac{1}{z}+c_2\frac{1}{z^2}+\dots$$

$$\therefore(1+z)^{\frac{1}{z}}=c_0+c_1\frac{1}{z}+c_2\frac{1}{z^2}+\dots$$

$$\therefore {c_0}^2=1$$

$$2c_0c_1=1$$

由上得：c_0=±1 $c_1=\pm\frac{1}{2}$

从而得：z=∞为本性奇点。

(4)$z\sin\frac{1}{z}$

解：$\lim\limits_{z\to\infty}z\sin\frac{1}{z}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z}\sin z=1$ 可去奇点。

第五章 残数及其应用（1）

1. 求下列函数在指定点处的残数.

(1) $\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ 在 $z=\pm1,\infty$

解:当 $z=1$ 时， $\operatorname*{Res}_{z\to1} f(z)=\lim_{z\to1}\left(\frac{z}{(z+1)^2}\right)_{z=1}=\frac{1}{4}$,

当 $z=-1$ 时, $\operatorname*{Res}_{z\to-1} f(z)=\lim_{z\to-1}\left[\frac{d\frac{z}{(z-1)}}{dz}\right]_{z=-1}=-\frac{1}{4}$.

求 $z\to\infty$ 时的残数，用残数和定理，即,

$\operatorname*{Res}_{z\to\infty} f(z)=\operatorname*{Res}_{z\to1} f(z)+\operatorname*{Res}_{z\to-1} s=0$,

(2) $\frac{1}{\sin z}$ 在 $z=n\pi\ (n=0,\pm1,\pm2\cdots)$

解:由题可知, $z=n\pi$ 是本题的极点，将 $\sin z$ 用罗朗展开得:

$\sin z=\sum\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$， 求 $\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z)$， $\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z)=1$ 。

(3) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 在 $z=0,\infty$.

解:将原式用罗朗展开得： $\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{-(2z)-\frac{(2z)^2}{2}\cdots}{z^4}$,

$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{-\frac{(2z)^3}{3\times2\times1}}{z^4}\right]=-\frac{4}{3}$, 根据残数和定理,

$\operatorname*{Res}_{z\to\infty} f(z)=\frac{4}{3}$.

(4) $e^{\frac{1}{z-1}}$ 在 $z=1,\infty$,

解：$f(z)$ 的奇点为 1，将 $e^{\frac{1}{z-1}}$ 用罗朗展开式展开得：$1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2\times1\times(z-1)^2}+\cdots$

所以,$\mathop{\mathrm{Re}s}\limits_{z=1} f(z)=\mathop{\mathrm{Re}s}\limits_{z=1}\left(\frac{1}{z-1}\right)=1$,

根据残数和定理得：$\mathop{\mathrm{Re}s}\limits_{z\to\infty}\left(e^{\frac{1}{z-1}}\right)=-1$

2.求下列函数在其孤立奇点(包括无穷远点)处的残数(m是自然数).

$(1)\ z^m \sin\frac{1}{z}$

解:将式子用罗朗展开 $z^m\sin\frac{1}{z}=z^m\sum\frac{(-1)^n z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}$，当 $m-2n-1=-1, n=\frac{1}{2}m$.

当 m 为奇数时，残数为 0，当 m 为偶数时,$\mathop{\mathrm{Re}s}\limits_{z=0} f(z)=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(m+1)!}$,根据残数和定理,

$$\mathop{Res}\limits_{z\to\infty} f(z)=-\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(m+1)!}$$

(2) $\frac{z^{2m}}{1+z^m}$

解：$z=e^{i\frac{2k\pi+\pi}{m}}\ (k=0,1,2\cdots(m-1))$ 是函数的一阶极点。

当 $m=1$ 时，

$$\mathop{\mathrm{Re}s}\limits_{z=e^{i\frac{2k\pi+\pi}{m}}} f(z)=-1,$$

$(3)\ \frac{1}{(Z-\alpha)^m(z-\beta)}(\alpha\neq\beta)$

解:本题是以$z=\alpha$为m阶极点，以$z=\beta$为其一阶极点.

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left(\frac{1}{z-\beta}\right)^{(m-1)}=-\frac{1}{(\beta-\alpha)^m}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z)=\frac{1}{(\beta-\alpha)^m}$$

根据残数和定理得:

$$\operatorname*{Res}_{z\to\infty} f(z)=-\frac{1}{(\beta-\alpha)^m}+\frac{1}{(\beta-\alpha)^m}=0$$

(4) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$

解:$f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$是以$z=1$为二阶极点，

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{x\to 1}\frac{d\left(\frac{e^z}{(z-1)^2}(z-1)^2\right)}{dz}=\lim_{z\to 1}\left(e^z\right)=e$$

根据残数定理和得:$\operatorname*{Res}_{z\to\infty} f(z)=-e$.

(5)$\dfrac{z}{1-\cos z}$

解:用罗朗展开式展开得：本题以$z=n\pi$为一阶极点.

$$f(z)=\frac{z}{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}=\frac{z}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}$$

当$n=1$时有解,则，$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} f(z)=2$，所以,根据残数和定理得：$\operatorname*{Res}_{z\to\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=k\pi} f(z)=-2$

(7)$e^{z+\frac{1}{z}}$

解:本题以$z=0$为其孤立齐点.

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^{z}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots\right)\cdot\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right]$$

$$\operatorname*{Re}_{z=0}s f(z)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!3!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)!}$$

$$\operatorname*{Re}_{z\to\infty}s f(z)=-\operatorname*{Re}_{z=0}s f(z)=-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!3!}+\cdots)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n-1)!}$$

(9) $\frac{z}{\cos z}$

解：本题以 $z=n\pi$ 为奇点。

用罗朗展开式得：$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$

原式得：$\frac{z}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}=\frac{1}{\frac{1}{z}-\frac{z^1}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\cdots}$，所以 $\operatorname*{Re}_{z=n\pi}s f(z)=2$

(10) $\frac{z^{2m}}{(z+1)^m}$

解：本题以 $z=-1$ 为 m 阶极点。所以

$$\operatorname*{Re}_{z=-1}s f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to-1}[(z+1)^m\left(\frac{z^{2m}}{(z+1)^m}\right)]^{(m-1)}=\frac{1}{(m-1)!}2m\cdot(2m-1)\cdots(m+2)(-1)^{m+1}$$

第五章 残数及其应用（**2**）

3．计算下列积分。

(1) $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}$

解：用残数方法求，用罗朗展式展开，

$$\frac{1}{z\sin z}=\frac{1}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}$$

由上式可已看出没有符合残数要求的

项，所以，即$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}$=0。

$(2)\oint_c\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}, c: x^2+y^2=2(x+y)$

解：用残数方法求解，

$\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$在$z=1$有 二阶极点，$z=\pm$i 有一阶极点.

$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to1}$ (z+i) $\frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}=\frac{1}{4}$

(3)$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$,$|a|<1,|b|<1,a\neq b$,n 为自然数。

解：$\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$分别以$z=a,z=b$为其n阶极点。

$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\frac{1}{(a-b)^n}$， $\operatorname*{Res}_{z=b}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\frac{1}{(-a+b)^n}$

当n为偶数时，$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}=\frac{2\times2\pi i}{(a-b)^n}$

当n为奇数时，$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}=0$

（4）$\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}dz}{1+z^2}$

解：在围线内，有$z=i,z=-i$两个不解析点，

$\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{e^{2z}}{z-i}=\frac{e^{i2}}{2i}$， $\operatorname*{Res}_{z=-i}f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{e^{2z}}{z+i}=\frac{e^{-i2}}{-2i}$

即$\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}dz}{1+z^2}=\frac{1}{2\pi}\cdot2\pi i\left[\frac{e^{2i}}{2i}-\frac{e^{-i2}}{2i}\right]=i\sin2$

（5）$\oint_{|z|=7}\frac{1+z}{1-\cos z}dz$

（6）$\int_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$

解：本题以 $z=-1,z=0$ 为其一阶极点。

$\frac{z^3}{1+z}\ e^{\frac{1}{z}}=\frac{z^3}{1+z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{\frac{1}{z^2}}{2!}+\cdots\right)$，　　　$\underset{z\to\infty}{\operatorname{Res}}\frac{z^3}{1+z}\ e^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{6}$。

即 $\int_{|z|=7}\frac{1+z}{1-\cos z}dz$ ＝- $\underset{z\to\infty}{\operatorname{Res}}\frac{z^3}{1+z}\ e^{\frac{1}{z}}\times 2\pi i$ ＝- $\frac{1}{6}\times 2\pi i$ ＝ $-\frac{1}{3}\pi i$

4．求下列积分值。

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+a}$ (a>1)

解: $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+a}$ ＝ $\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz(z^2+2az+1)}$

由于分母有两个一阶极点: $z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$, $z_2=-a-\sqrt{a^2-1}$, 很明显只有 $|z_1|<1$

所以只有 $z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$ 符合题意，所以, $\underset{z=z_1}{\operatorname{Res}}f(z)=\lim_{x\to z_1}(z-z_1)f(z)=\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$

即 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+a}$ ＝ $\frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}\cdot 2\pi i$ ＝ $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

(2) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos^2\theta+1}$

解：原式等于 $\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz[1+\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2]}$ ＝ $\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{d(z^2)}{z^4+6z^2+1}$

在 $|z|=1$ 时,只有 $z_1=-3+2\sqrt{2}$ 的一个一阶极点.

$\underset{z=z_1}{\operatorname{Res}}f(z)=\lim_{x\to z_1}(z-z_1)f(z)=\frac{1}{4\sqrt{2}}$，所以, $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos^2\theta+1}$ ＝2 $\pi i\cdot\frac{2}{i}\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta+a}$($a$>0)

解：原式 $=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta+a}=\frac{1}{4}\int_{|z|=1}\frac{dz}{a+\left(\frac{z-z^{-1}}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{iz}=-\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{z^4-(4a+2)z^2+1}$

令 $z^2=w$，则 $z_1=2a+1-2\sqrt{a^2+a}$ 为其二阶极点.所以

$\operatorname*{Res}_{z=z_1}\frac{1}{w^2-w(4a+2)+1}=\frac{1}{8\sqrt{a^2+a}}$

即 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta+a}=-\left(\frac{-2}{i}\right)\frac{1}{8\sqrt{a^2+a}}\cdot 2\pi i=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$

(4) $\int_0^{\pi}\frac{\sin(\theta+ia)}{\cos(\theta+ia)}d\theta$ (a 为是实数而且 $\neq 0$)

解：$\int_0^{\pi}\frac{\sin(\theta+ia)}{\cos(\theta+ia)}d(\theta+ia)=-\int_0^{\pi}\frac{d(\cos(\theta+ia))}{\cos(\theta+ia)}=-\ln\cos(ia+\theta)\Big|_0^{\pi}$

$=\ln\frac{\cos ia}{\cos(\pi+ia)}=ln(-1)=\begin{cases}i\pi\,(a>0)\\-i\pi\,(a<0)\end{cases}$

5．求下列个积分的值。

（1）$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

解：函数 $f(x)$ 在上半平面有两个一阶极点：$x=i,x=2i$。

$\operatorname*{Res}_{x=i}f(x)=\lim_{x\to i}(x-i)f(x)=\frac{1}{6i}$， $\operatorname*{Res}_{x=2i}f(x)=\lim_{x\to i}(x-2i)f(x)=\frac{1}{3i}$

所以，$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\left(\frac{1}{3i}+\frac{1}{6i}\right)\cdot\pi i=\frac{\pi}{2}$

（2）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$

解：函数 $f(x)$ 在上半平面有 $x=ai$ 一个二 阶

极点。

$$\operatorname*{Res}_{x=ai} f(x)=\lim_{x\to ai}\frac{dy}{dx}((x-ai)f(x))=-\frac{i}{4a}$$

所以，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=-\frac{i}{4a}\cdot 2\pi i=\frac{\pi}{2a}$

（3）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx$

解：因为 $\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$ 是偶函数。所以 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx=2\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx$ 令 $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$

$f(x)e^{ix}$ 在上半平面有 $z=i,z=3i$ 两个极点。

$$\operatorname*{Res}_{x=i} f(x)e^{ix}=\lim_{x\to i}(z-i)f(x)e^{ix}=-\frac{i}{16e}$$

$$\operatorname*{Res}_{x=3i} f(x)e^{ix}=\lim_{x\to 3i}(z-3i)f(x)e^{ix}=\frac{i}{48e^3}$$

所以，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx=2\pi i\cdot\left(\frac{-i}{16e}+\frac{i}{48e^3}\right)=\frac{\pi}{24e^3}\left(3e^2-1\right)$

(4) $\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin mxdx}{x^4+a^4}$ (m>0,a>1)

解：由于$f(x)$是偶函数，而且$f(x)$在上半平面只有两个一阶极点：$x_1=ae^{\frac{\pi}{4}},x_2=ae^{\frac{3\pi}{4}}$

$$\operatorname*{Res}_{x=x_1} f(x)e^{jmx}=\lim_{x\to x_1}(x-x_1)f(x)e^{jmx}$$

同理，$\operatorname*{Res}_{x=x_2} f(x)e^{jmx}=\lim_{x\to x_2}(x-x_2)f(x)e^{jmx}$

所以，$\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin mxdx}{x^4+a^4}=2\pi\operatorname{Re}\sum_{a_k}\operatorname*{Res}_{x=a_k}\left[f(x)e^{jmx}\right]=\frac{\pi}{2a^2e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}}\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}$

（5）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$

解：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=2\pi i\sum_{\mathrm{Im}_{a_k}>0}\underset{x=a_k}{\mathrm{Re}\,s}f(x)$

函数$f(x)=\frac{1}{x^4+1}$在上半平面有两个一阶极点：$x_1=e^{\frac{i\pi}{4}},x_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$

而$\underset{x=x_1}{\mathrm{Re}\,s}f(x)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{x=x_1}=-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4}$，　$\underset{x=x_2}{\mathrm{Re}\,s}f(x)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{x=x_2}=-\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4}$

即$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=2i\pi\cdot\left(\frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{4}+\frac{-e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

第七章 一维波动方程的傅氏解

1．今有一弦，其两端被钉子钉紧，作自由，它的初位移为：

$\varphi(x)=\begin{cases}hx & (0\le x<1)\\ h(2-x) & (1\le x\le 2)\end{cases}$，初速度为 0，试求其付氏解，其中 h 为已知常数。

解：所求问题是一维波动方程的混合问题：$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & (1<x<2,t>0)\\ u(0,t)=u(l,t)=0(t\ge 0) & \\ u(x,0)=\begin{cases}hx & (0\le x\le 1)\\ h(2-x) & (1\le x\le 2)\end{cases} & \\ u_t(x,0)=0 & \end{cases}$，根据前面分离变量解法得其傅氏解为：

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$。

其中，$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2}{2}[\int_0^1 h\xi\sin\frac{n\pi\xi}{2}d\xi+\int_1^2 h(2-\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{2}d\xi]=\frac{8h}{n^2\pi^2}$，

$D_n=0$，

于是所求傅氏解为：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8h}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$

2.将前题之初始条件改为：$\varphi(x)=\begin{cases}h(1+x)(-1\le x\le 0)\\ h(1-x)(0\le x\le 1)\end{cases}$，试求其傅氏解。

解：所求问题为一维波动方程的混合问题：

$c_n=\frac{2}{l}(\int_{-1}^0 h(1+\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi+\int_{-1}^0 h(1-\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$

$=\frac{2h}{2}(\int_{-1}^0\sin\frac{n\pi\xi}{2}d\xi+\int_0^1\sin\frac{n\pi\xi}{2}d\xi+\int_{-1}^0\xi\sin\frac{n\pi\xi}{2}d\xi)=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$

$$\therefore u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$
。

3 今有一弦，其两端 $x=0$ 和 $x=l$ 为钉所固定，作自由摇动，它的初位移为 0。初速度为

$\varphi(x)=\begin{cases}c & (2\le x\le\beta\\ 0 & (x\notin[2,\beta]\end{cases}$，其中 c 为常数，$0<\alpha<\beta<l$，试求其傅氏解。

解：所求问题为一维波动方程的混合问

题：

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_2^{\beta} c\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2cl}{n^2\pi^2 a}(\cos\frac{n\pi 2}{l}-\cos\frac{n\pi\beta}{l})$$

$$\therefore u(x,t)=\sum_{\alpha}^{\beta}\frac{2cl}{n^2\pi^2 a}(\cos\frac{n\pi^2}{l}-\cos\frac{n\pi\xi}{l}\beta)\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

4．今有一弦，其两端固定在 $x=0$ 和 $x=l$ 两处，在开始一瞬间，它的形状是一条以过

$x=\frac{l}{2}$ 点的铅垂线为对称抛物线，其顶点的纵坐标为 h,假定没有初速度，试用付氏方法求弦的振动情况：

解：设其抛物线方程为 $(x-a)^2=-2p(y-b)$，将点 $(0,0)$，$(\frac{l}{2},h)$ 及 $(l,0)$ 代入得：

$a=\frac{l}{2},p=\frac{l^2}{8h},b=h$，故方程为 $\left(x-\frac{l}{2}\right)^2=-\frac{l^2}{4h}(y-h)$，即

$y=h-\frac{(x-\frac{l}{2})^2}{l^2}4h \qquad (0\le x\le l)$，

所求问题为一维波动方程的混合问题，

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l};\ D_n=0$，

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left[h-\frac{(\varepsilon-\frac{d}{2})^2}{l^2}4h\right]\sin\frac{16h}{n^3\pi 3}d\xi=\frac{16h}{n^3\pi 3}\left[1-(-1)^n\right](n=1,2,3...)$$

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & (n\text{为偶数})\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32h}{n^3\pi 3}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} & (n\text{为奇数})\end{cases}$$

5 求解混合问题 $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0,(t\ge 0)\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l},u_t(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l},(0\le x\le l)\end{cases}$。

解：$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$，

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}0, & (n\neq 1)\\ 1, & (n=1)\end{cases}$$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}0, & (n\neq 1)\\ \frac{l}{n\pi a}, & (n=1)\end{cases}$$

$$\therefore u(x,t)=\begin{cases}0,(n\neq 1)\\ (\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}d\xi\end{cases}$$。

6.求解混合问题$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0,(t\geq 0)\\ u(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{l},u_t(x,0)=x(l-x),(0\leq x\leq l)\end{cases}$。

解：所求问题为一维波动方程的混合问题：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{3\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}0,(n\neq 3)\\ 1,(n=3)\end{cases}$$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\xi(l-\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}0,(n\neq 1)\\ \frac{8l^3}{n^4\pi^4a},(n\text{为奇数})\end{cases}$$

$$\therefore u(x,t)=\begin{cases}0,(n\text{为偶数})\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8l^3}{n^4\pi^4a}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}(n\text{为奇数且}n\neq 3)\\ (\cos\frac{3\pi at}{l}+\frac{8l^3}{81\pi^4a}\sin\frac{3\pi at}{l})\sin\frac{3\pi x}{l}(n=3)\end{cases}$$

第八章　热传导方程的付氏解

1.一根长为l的枢轴，它的初温为常数u_0，其两端的温度保持为0，试求在枢轴上温度的分布情况。

解：所求问题为热传导方程混合问题，其付氏解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\frac{-n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中：

$$c_n=\frac{2}{l}\int_0^l u_0\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi\xi}{l}\Big|_0^l\right)=\frac{4u_0}{n\pi}$$

故：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4u_0}{n\pi}e^{\frac{-(na\pi)^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}$

5．有一两端无界的枢轴，其初始温度为$u(x,0)=\begin{cases}1(|x|<1)\\0(|x|\geq 1)\end{cases}$，试求在枢轴上的温度分布为$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-a^2\mu^2t}\frac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)d\mu$。

解：所求问题为热传导方程初值问题，

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} (-\infty \le x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x)(-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

其 付 氏 解 为 ：

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\mu a)^2 t}[A(\mu)\cos(\mu x) + B(\mu)\sin(\mu x)]d\mu$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-(\mu a)^2 t}[A(\mu)\cos(\mu x) + B(\mu)\sin(\mu x)]d\mu$$

$$A(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} \cos(\mu\xi)d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \cos(\mu\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi\mu}\sin\mu$$

$$B(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi = 0$$

故：$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\mu^2 t}\frac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)d\mu$$

6．利用前题的结果，证下面重要的定积分：$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$。

解：由上题结论：$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-a^2\mu^2 t}\frac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)d\mu$

当$x=0,t=0$时，

$$u(x,t)=u(0,0)=\frac{2}{\pi}\int e^0\frac{\sin\mu}{\mu}\cos(0)d\mu=1$$，

即：$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\mu}{\mu}d\mu=1$

令$x=\mu$，则有：$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=1$

即：$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ 得证。

第九章 拉普拉斯方程圆的狄利克雷问题付氏解（1）

1、试证明拉普拉斯方程$u_{xx}+u_{yy}=0$在极坐标下的形式为：$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+r^2u_{\theta\theta}=0$。

证明：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(-\frac{y}{r^2}\right)$，

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{r^2-x^2}{r^2}$$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\left(-\frac{2xy}{r^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{r^2-x^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{2xy}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{y^2}{r^2}$$

同理：$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{2xy}{r^3}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{r^2+x^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\frac{2xy}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{x^2}{r^2}$

得到极坐标下二维拉普拉斯方程具有如下性质

$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+r^2u_{\theta\theta}=0$。

2、求解狄利克雷问题 $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(1,\theta)=\begin{cases} A, & |\theta|<\alpha, \quad (-\pi\le\theta\le\pi) \\ 0, & |\theta|\ge\alpha \end{cases} \end{cases}$，其中 A，$\alpha$ 为已知常数。

解：其付氏解为：$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n$，

其中：$A_n=\frac{1}{\pi l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\cos n\varphi d\varphi=\frac{A}{n\pi}\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha}$

$=\frac{2A}{n\pi}\sin n\alpha$

$B_n=\frac{1}{\pi l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{n\pi}(-\cos n\varphi)\Big|_{-\alpha}^{\alpha}$

$=0$

$\therefore u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2A}{n\pi}\sin n\alpha\cos n\theta\right)r^n$

3、求解狄利克雷问题 $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(1,\theta)=A\cos\theta(-\pi\le\theta\le\pi) \end{cases}$，其中 A 为已知常数。

解：其付氏解为：$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n$，

其中：

$$A_n=\frac{1}{\pi l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A\cos\varphi\cos n\varphi d\varphi$$

当 n=1 时，A_n 才有值

$$A_1=\frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} COS^2\varphi\, d\varphi$$

$$=\frac{A}{\pi}\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$=A$

$$B_n=\frac{1}{\pi l^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A\cos\varphi\sin n\varphi\, d\varphi$$

$=0$

$\therefore u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+A\cos\theta r$。

第九章 拉普拉斯方程圆的狄利克雷问题付氏解（2）

12、试证明： $\frac{\sin Nx}{\pi x}\xrightarrow[N\to\infty]{弱}\delta(x)$

证明：由 $u(x,N)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx$

有 $\lim\limits_{x\to\infty}u(x,N)=\lim\limits_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx=\varphi(0)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta(x)\,dx$$

$\therefore$证得： $\frac{\sin Nx}{\pi x}\xrightarrow[N\to\infty]{弱}\delta(x)$

13、试证明： $\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}\overset{ruo}{\underset{a\to 0}{\Rightarrow}}\delta(x)$

证明：$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{a}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,d\left(\arctan\frac{x}{a}\right)$

$$\xrightarrow{u=\arctan\frac{x}{a}}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(a\tan u)\,du=\varphi(atg\xi)$$

$$\xrightarrow{a\to 0}=\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta(x)\,dx$$

故证得：$\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}\underset{a\to 0}{\overset{ruo}{\Rightarrow}}\delta(x)$

第十一章　格林公式

3．求解圆的狄利克雷问题$\begin{cases}\Delta u=0 & \rho<a\\ u(a,\varphi)=A\cos\varphi\end{cases}$，其中 A 为常数。

解：由圆的狄利克雷积分公式$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi_0)\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi_0$，

本题中$f(\varphi)=A\cos\varphi$，于是$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A\cos\varphi_0\left(a^2-\rho^2\right)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi_0$，将上试中的分子与分母同除以$a^2$，并记$\varepsilon=\frac{\rho}{a}$，得

$u(\rho,\varphi)=\frac{1-\varepsilon^2}{2\pi}A\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi_0}{1-2\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi_0$。

另$z=e^{j\varphi_0}$，则$\cos\varphi_0=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$，

$\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{1}{2}\left[e^{i(\varphi-\varphi_0)}+e^{-i(\varphi-\varphi_0)}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{j\varphi}\bullet z^{-1}+e^{-i\varphi}z\right]$，　$d\varphi_0=\frac{dz}{iz}$，

一并代入上试中积分，于是得：

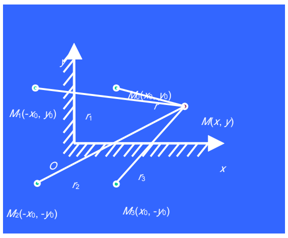
$$I=\int_0^{2\pi}\frac{A\cos\varphi_0\left(a^2-\rho^2\right)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi_0=\frac{-1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{1+z^2}{z\left[\varepsilon e^{-i\varphi}z^2-\left(1+\varepsilon^2\right)z+\varepsilon e^{j\varphi}\right]}dz$$

令分母为零，得到被积函数的奇点，$z=\frac{e^{j\varphi}}{\varepsilon},\varepsilon e^{j\varphi},0$，故在$|z|<1$内有奇点$z_1=\varepsilon e^{j\varphi}$和$z_2=0$，且

均是单极点，故有留数定理有：

$$I=\frac{-1}{2i}\cdot 2\pi i\sum_{k=1}^{2}resf\left(z_k\right)=-\pi\left[resf\left(\varepsilon e^{j\varphi}\right)+resf\left(0\right)\right]=\frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}\cos\varphi,$$

则有： $u\left(\rho,\varphi\right)=\frac{A}{a}\rho\cos\varphi$。



5.求区域： $0\le x<\infty, 0\le y<\infty$，的格林函数，并由此求解狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u\left(0,y\right)=f\left(y\right) \quad \left(0\le y<\infty\right) \\ u\left(x,0\right)=0 \end{cases}$$

其中 f 为已知的连续函数。

解： $G=\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{1}{r_1}+\ln\frac{1}{r_2}-\ln\frac{1}{r_3}$

$$=\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}}$$

$$u(x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{l}f\frac{\partial G}{\partial n}dl=-\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0}f(y)(-\frac{\partial G}{\partial x})|_{x=0}\,dy-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}0(-\frac{\partial G}{\partial y})|_{y=0}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(y)\frac{\partial}{\partial x}(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$+\ln\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}})|_{x=0}\,dy$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(y)(\frac{2x_0}{x_0^2+(y-y_0)^2}-\frac{2x_0}{x_0^2+(y+y_0)^2})dy$$ 。

第十三章　Fourier 变换

1. 求函数 $f(x)=\frac{\sin ax}{x}(a>0)$ 的 Fourier 变换。

解：由 Fourier 变换的定义有：

$$F\left[f(x)\right]=F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2ix}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(a-\omega)x}-e^{-i(a+\omega)x}}{2ix}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(a-\omega)x+i\sin(a-\omega)x-\cos(a+\omega)x+i\sin(a+\omega)x}{2ix}dx$$

$$=2\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{2x}dx+\int_0^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{2x}dx\right]$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{x}dx+\int_0^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{x}dx$$

由函数的奇偶性有：$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\begin{cases}\pi/2 & a>0\\ -\pi/2 & a<0\end{cases}$，

（1） 若 $a>|\omega|$，$\int_0^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，于是有：

$$F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=\pi$$

（2） 若 $a=|\omega|$，则 $\omega=\begin{cases}a,\omega>0\\ -a,\omega<0\end{cases}$，于是有

$\int_0^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{x}dx=\begin{cases}0,\omega>0\\ \frac{\pi}{2},\omega<0\end{cases}$，$\int_0^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\omega>0\\ 0,\omega<0\end{cases}$

得 $F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=\frac{\pi}{2}$。

（3） 若 $a<|\omega|$，则：如果 $\omega>0,a-\omega<0,a+\omega>0,$ 故有：

$\int_0^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{x}dx=-\frac{\pi}{2}$，$\int_0^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

于是 $F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=0$，同理如果 $\omega<0$，则 $F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=0$。

2. 求函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2,|x|<1\\ 0,|x|>1\end{cases}$ 的 Fourier 变换。

解：$f(x)$在$|x|<1$中是偶函数，于是由 Fourier 变换公式有

$$F\left[f(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\left(\cos\omega x-i\sin\omega x\right)dx$$

$$=2\int_0^1\left(1-x^2\right)\cos\omega x dx=\frac{4}{\omega^3}\left(\sin\omega-\omega\cos\omega\right)$$

3. 求解热传导方程的初值问题 $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},-\infty<x<\infty,t>0\\ u(x,0)=\cos x\end{cases}$。

解：对定解问题各项以 x 为变量施行 Fourier 变换，并记

$$F\left[u(x,t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx=\tilde{u}(\omega,t)$$

$$F\left[\cos x\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\cos xe^{-i\omega x}dx=\tilde{\varphi}(\omega)$$

则定解问题化为$\begin{cases}\frac{d\tilde{u}(\omega,t)}{dt}+a^2\omega^2\tilde{u}(\omega,t)=0\\ \tilde{u}(\omega,0)=\tilde{\varphi}(\omega)\end{cases}$，它的解为

$$\tilde{u}(\omega,t)=\tilde{\varphi}(\omega)e^{-a^2\omega^2t}$$

它的逆变换得：

$$u(x,t)=F^{-1}\left[\tilde{u}(\omega,t)\right]=F^{-1}\left[\tilde{\varphi}(\omega)e^{-a^2\omega^2t}\right]=FF^{-1}\left[\cos x*F^{-1}\left[e^{-a^2\omega^2t}\right]\right]$$

$$F^{-1}\left[e^{-a^2\omega^2t}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(a^2t)\omega^2}\cos x\omega d\omega=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

则

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cos(x-\zeta)d\zeta=\frac{\cos x}{a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2t}}\cos\zeta d\zeta=\frac{1}{2}e^{-a^2t}\cos x$$

第十四章 **Laplace** 变换

1．求下列函数的 Laplace 变换

（1）e^{at}，

解：由 Laplace 变换的定义有

$$L\left[e^{at}\right]=\int_0^{\infty}e^{at}e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}e^{-(p-a)t}dt=\frac{1}{p-a},\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,a$$

（2）$\sin kt$，

解：由线性性质和上式有

$$L[\sin kt]=L\left[\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}\right]=\frac{1}{2i}\left(L\left[e^{ikt}\right]-L\left[e^{-ikt}\right]\right)=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ik}-\frac{1}{p+ik}\right]=\frac{k}{p^2+k^2}$$

2．求下列函数$F(p)$的 Laplace 逆变换。

（1）$F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$，（2）$F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}$，

解：（1）$\dfrac{p}{p^2-2p+5}=\dfrac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\dfrac{p-1}{(p-1)^2+4}+\dfrac{1}{(p-1)^2+4}$

又由$L^{-1}\left[\dfrac{p-1}{(p-1)^2+4}\right]=e^t\cos 2t$，$L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p-1)^2+4}\right]=\dfrac{1}{2}e^t\sin 2t$

所以

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-2p+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2+4}\right]=e^t(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)$$

（2）因为$L\left[t^a\right]=\int_0^{\infty}t^a e^{-pt}dt=\dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$，

取$a=-\dfrac{1}{2}$得$L\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{p}}\Gamma(\dfrac{1}{2})$即

$\dfrac{1}{\sqrt{p}}=L\left[\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\right]$，所以$L^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$

3．求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y''(t)-ty'(t)+y(t)=1 \\ y(0)=1, y'(0)=2 \end{cases}$。

解：记 $L[y(t)]=\tilde{Y}(p)$, 对方程中各项施行 Laplace 逆变换，注意应用微分性质并将初始条件代入，得

$\frac{d\tilde{Y}(p)}{dp}+\left(p+\frac{2}{p}\right)\tilde{Y}(p)=1+\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}$，该方程的解为

$\tilde{Y}(p)=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{c}{p^2}e^{-p^2/2}$，

将 $e^{-p^2/2}$ 以 0 为中心展开为级数，得

$\tilde{Y}(p)=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{c}{p^2}(1-\frac{p^2}{2}+\frac{1}{8}p^4-\cdots)$

因为 $L^{-1}\left[p^k\right]=0$

故有

$y(t)=L^{-1}\left[\tilde{Y}(p)\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]+L^{-1}\left[\frac{2}{p^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{c}{p^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{c}{2}\right]+\cdots=1+(2+c)t$，

代入初始条件得 $2+c=2, c=0$

于是得 $y(t)=1+2t$

4.设有一初始温度为 $3\sin 2\pi x$ 的单位长度的均匀杆，杆的侧面绝热，而两端的温度均保持零度，试求杆内的温度分布。

解：其定解问题为$\begin{cases} u_t = Du_{xx}, 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 3\sin 2\pi x, (0 < x < 1) \end{cases}$，这虽然是一有界问题，但由于$t$的变换范围为$[0,\infty)$及$u(x,0)$已知，故可用 Laplace 逆变换法求解，记

$$L[u(x,t)] = \tilde{u}(x,p)$$

对方程和边界条件对于变量t施行 Laplace 逆变换并代入初始条件得

$$\begin{cases} \frac{d^2\tilde{u}(x,p)}{dx^2} - \frac{p}{D}u(x,p) = -3\sin 2\pi x / D \\ \tilde{u}(0,p) = \tilde{u}(1,p) = 0 \end{cases}$$

解此非齐次的二阶微分方程得

$$\tilde{u}(x,p) = 3\sin 2\pi x \Big/ \left(p + 4\pi^2 D\right)$$

取逆变换得$u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 Dt}\sin 2\pi x$

第十五章 球函数

1．试证$\int_{-1}^{1} P_n(x) = 0, n = 1,2,3\cdots$

证明：$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_0(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 2 & n = 0 \end{cases}$

2．将函数$f(x) = |x|$，按勒让得多项式展开。

解：令$|x| = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x)$，其中 $C_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}|x|P_l(x)dx$

因为$|x|$是偶函数，故当$P_l(x)$为奇函数，即当$l = 2n+1$时，$C_l = C_{2n+1} = 0$，

于是 $C_{2n}=\int_0^1 P_{2n-1}(x)dx-\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx$

$\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx=\frac{1}{2n+1}\frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}\left[(n+1)!\right]^2}$， $\int_0^1 P_{2n-1}(x)dx=\frac{1}{2n-1}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}\left[n!\right]^2}$，

于是 $C_{2n}=\frac{1}{2n-1}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}\left[n!\right]^2}-\frac{1}{2n+1}\frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}\left[(n+1)!\right]^2}=\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}$

所以 $|x|=\frac{1}{2}P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}P_{2n}(x),|x|<1$ 。

3．设有一半径为 a 的球，球面上的电势分布为 $f(\theta,\varphi)$，求球内的电势分布。

解：其定解问题为 $\begin{cases}\Delta u=0,r<a\\ u_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$，

令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 代入方程得在 $r<a$ 中的解，为

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}r^lY_{l,m}(\theta,\varphi)$$

将其代入边界条件得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{l,m}a^lY_{l,m}(\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi)$$

故由球函数的展开式立即可得

$$C_{l,m}=\frac{1}{a^l}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\overline{Y}_{l,m}(\theta,\varphi)\sin\theta d\varphi d\theta$$

第七章 一维波动方程的傅氏解

1． 今有一弦，其两端被钉子钉紧，作自由，它的初位移为：

$\varphi(x)=\begin{cases} hx & (0\le x<1) \\ h(2-x) & (1\le x\le 2)\end{cases}$，初速度为 0，试求其付氏解，其中 h 为已知常数。

解：所求问题是一维波动方程的混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (1<x<2,t>0) \\ u(0,t)=u(l,t)=0(t\ge 0) \\ u(x,0)=\begin{cases} hx & (0\le x\le 1) \\ h(2-x) & (1\le x\le 2)\end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

，根据前面分离变量解法得其傅氏解为：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$。

其中，$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2}{2}[\int_0^1 h\xi\sin\frac{n\pi\xi}{2}d\xi+\int_1^2 h(2-\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{2}d\xi]=\frac{8h}{n^2\pi^2}$，

$D_n=0$，

于是所求傅氏解为：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8h}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$

2.将前题之初始条件改为：$\varphi(x)=\begin{cases} h(1+x)(-1\le x\le 0) \\ h(1-x)(0\le x\le 1)\end{cases}$，试求其傅氏解。

解：所求问题为一维波动方程的混合问题：

$$\mathrm{c_n}=\tfrac{2}{l}(\int_{-1}^0 h(1+\xi)\sin\tfrac{n\pi\xi}{l}d\xi+\int_{-1}^0 h(1-\xi)\sin\tfrac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=\tfrac{2h}{2}(\int_{-1}^0\sin\tfrac{n\pi\xi}{2}d\xi+\int_0^1\sin\tfrac{n\pi\xi}{2}d\xi+\int_{-1}^0\xi\sin\tfrac{n\pi\xi}{2}d\xi)=\tfrac{8h}{n^2\pi^2}\sin\tfrac{n\pi}{2}$$

$$\therefore u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{8h}{n^2\pi^2}\sin\tfrac{n\pi}{2}\cos\tfrac{n\pi at}{l}\sin\tfrac{n\pi x}{l}$$

。

3 今有一弦，其两端 $x=0$ 和 $x=l$ 为钉所固定，作自由摇动，它的初位移为 0。初速度为

$\varphi(x)=\begin{cases} c & (2\le x\le\beta \\ 0 & (x\notin[2,\beta]\end{cases}$，其中 c 为常数，$0<\alpha<\beta<l$，试求其傅氏解。

解：所求问题为一维波动方程的混合问题：

$$\mathrm{D_n}=\tfrac{2}{n\pi a}\int_2^{\beta}c\sin\tfrac{n\pi\xi}{l}d\xi=\tfrac{2cl}{n^2\pi^2a}(\cos\tfrac{n\pi 2}{l}-\cos\tfrac{n\pi\beta}{l})$$

$$\therefore u(x,t)=\sum_{\alpha}^{\beta}\tfrac{2cl}{n^2\pi^2a}(\cos\tfrac{n\pi^2}{l}-\cos\tfrac{n\pi\xi}{l}\beta)\sin\tfrac{n\pi at}{l}\sin\tfrac{n\pi x}{l}$$

4．今有一弦，其两端固定在 $x=0$ 和 $x=l$ 两处，在开始一瞬间，它的形状是一条以过

$x=\frac{l}{2}$点的铅垂线为对称抛物线，其顶点的纵坐标为 h,假定没有初速度，试用付氏方法求弦的振动情况：

解：设其抛物线方程为$(x-a)^2=-2p(y-b)$，将点$(0,0)$，$(\frac{l}{2},h)$及$(l,0)$代入得：

$a=\frac{l}{2},p=\frac{l^2}{8h},b=h$，故方程为$\left(x-\frac{l}{2}\right)^2=-\frac{l^2}{4h}(y-h)$，即

$y=h-\frac{(x-\frac{l}{2})^2}{l^2}4h \qquad (0\le x\le l)$，

所求问题为一维波动方程的混合问题，

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l};\quad D_n=0$，

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left[h-\frac{(\varepsilon-\frac{l}{2})^2}{l^2}4h\right]\sin\frac{16h}{n^3\pi 3}d\xi=\frac{16h}{n^3\pi 3}\left[1-(-1)^n\right](n=1,2,3...)$$

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & (n\text{为偶数})\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32h}{n^3\pi 3}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} & (n\text{为奇数})\end{cases}$$

5 求解混合问题$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0,(t\ge 0)\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l},u_t(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l},(0\le x\le l)\end{cases}$。

解：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$，

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}0, & (n\ne 1)\\ 1, & (n=1)\end{cases}$$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}0, & (n\ne 1)\\ \frac{l}{n\pi a}, & (n=1)\end{cases}$$

$$\therefore u(x,t)=\begin{cases}0,(n\ne 1)\\ (\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}d\xi\end{cases}$$。

6.求解混合问题$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0,(t\ge 0)\\ u(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{l},u_t(x,0)=x(l-x),(0\le x\le l)\end{cases}$。

解：所求问题为一维波动方程的混合问题：

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{3\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}0,(n\ne 3)\\ 1,(n=3)\end{cases}$$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \xi(l-\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\begin{cases}0,(n\neq 1)\\ \frac{8l^3}{n^4\pi^4 a},(n\text{为奇数})\end{cases}$$

$$\therefore u(x,t)=\begin{cases}0,(n\text{为偶数})\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8l^3}{n^4\pi^4 a}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}(n\text{为奇数且n}\neq 3)\\ (\cos\frac{3\pi at}{l}+\frac{8l^3}{81\pi^4 a}\sin\frac{3\pi at}{l})\sin\frac{3\pi x}{l}(n=3)\end{cases}$$

第八章　热传导方程的付氏解

1.一根长为l的枢轴，它的初温为常数u_0，其两端的温度保持为 0，试求在枢轴上温度的分布情况。

解：所求问题为热传导方程混合问题，其付氏解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\frac{-n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中：$c_n=\frac{2}{l}\int_0^l u_0\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2}{l}\frac{l}{n\pi}(-\cos\frac{n\pi\xi}{l}\Big|_0^l)=\frac{4u_0}{n\pi}$

故：$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4u_0}{n\pi}e^{\frac{-(na\pi)^2t}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

5．有一两端无界的枢轴，其初始温度为$u(x,0)=\begin{cases}1(|x|<1)\\0(|x|\geq 1)\end{cases}$，试求在枢轴上的温度分布为$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-a^2\mu^2t}\frac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)d\mu$。

解：所求问题为热传导方程初值问题，$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}(-\infty\leq x<\infty,t>0)\\u(x,0)=\varphi(x)(-\infty<x<\infty)\end{cases}$

其付氏解为：$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\mu a)^2t}[A(\mu)\cos(\mu x)+B(\mu)\sin(\mu x)]d\mu$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-(\mu a)^2t}[A(\mu)\cos(\mu x)+B(\mu)\sin(\mu x)]d\mu$$

$$A(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\cos(\mu\xi)d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\cos(\mu\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi\mu}\sin\mu$$

$$B(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi=0$$

故：$u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\mu^2 t}\dfrac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)d\mu$

6．利用前题的结果，证下面重要的定积分：$\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$。

解：由上题结论：$u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\mu^2 t}\dfrac{\sin\mu}{\mu}\cos(\mu x)d\mu$

当 $x=0,t=0$ 时，

$$u(x,t)=u(0,0)=\frac{2}{\pi}\int e^0\frac{\sin\mu}{\mu}\cos(0)d\mu=1,$$

即：$\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\dfrac{\sin\mu}{\mu}d\mu=1$

令 $x=\mu$，则有：$\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=1$

即：$\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$ 得证。

第九章 拉普拉斯方程圆的狄利克雷问题付氏解（1）

1、试证明拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 在极坐标下的形式为：$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+r^2u_{\theta\theta}=0$。

证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{x}{r}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\dfrac{y}{r^2}\right)$,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{r^2-x^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\left(-\frac{2xy}{r^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{r^2-x^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{2xy}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{y^2}{r^2}$$

同理：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}\dfrac{y^2}{r^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\dfrac{2xy}{r^3}+\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{r^2+x^2}{r^2}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\dfrac{2xy}{r^2}\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\dfrac{x^2}{r^2}$

得到极坐标下二维拉普拉斯方程具有如下性质

$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+r^2u_{\theta\theta}=0$。

2、求解狄利克雷问题 $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\\ u(1,\theta)=\begin{cases}A, & |\theta|<\alpha,\quad(-\pi\le\theta\le\pi)\\ 0, & |\theta|\ge\alpha\end{cases}\end{cases}$，其中 A，$\alpha$

为已知常数。

解：其付氏解为：$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)r^n$，

其中：$A_n=\frac{1}{\pi\, l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\cos n\varphi d\varphi=\frac{A}{n\pi}\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha}$

$=\frac{2A}{n\pi}\sin n\alpha$

$B_n=\frac{1}{\pi\, l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{n\pi}(-\cos n\varphi)\Big|_{-\alpha}^{\alpha}$

$=0$

$\therefore u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2A}{n\pi}\sin n\alpha\cos n\theta\right)r^n$

3、求解狄利克雷问题 $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(1,\theta)=A\cos\theta(-\pi\le\theta\le\pi)\end{cases}$，其中 A 为已知常数。

解：其付氏解为：$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)r^n$，

其中：$A_n=\frac{1}{\pi\, l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\cos\varphi\cos n\varphi d\varphi$

当 n=1 时，A_n才有值 $A_1=\frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi}COS^2\varphi d\varphi=\frac{A}{\pi}\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right]_0^{2\pi}$

$=A$

$B_n=\frac{1}{\pi\, l^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}A\cos\varphi\sin n\varphi d\varphi$

$=0$

$\therefore u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+A\cos\theta r$。

第九章 拉普拉斯方程圆的狄利克雷问题付氏解（2）

12、试证明：$\frac{\sin Nx}{\pi x}\xrightarrow[N\to\infty]{\text{弱}}\delta(x)$

证明：由 $u(x,N)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx$

有 $\lim_{x\to\infty}u(x,N)=\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\sin Nx}{\pi x}dx=\varphi(0)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta(x)\,dx$$

∴证得： $\frac{\sin Nx}{\pi x}\xrightarrow[N\to\infty]{弱}\delta(x)$

13、试证明： $\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}\underset{a\to 0}{\overset{ruo}{\Rightarrow}}\delta(x)$

证明：$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{a}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,d\left(\arctan\frac{x}{a}\right)$

$$\xrightarrow{u=\arctan\frac{x}{a}}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(a\tan u)\,du=\varphi(atg\xi)$$

$$\xrightarrow{a\to 0}=\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta(x)\,dx$$

故证得： $\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}\underset{a\to 0}{\overset{ruo}{\Rightarrow}}\delta(x)$

第十章　波动方程的达氏解

2.验证 $u(x,t)=tg(x+at)+(x-at)^{3/2}$ 满足波动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$。

证明：$u(x,t)=tg(x+at)+(x-at)^{3/2}$， $u_{tt}=\frac{2a^2\sin(x+at)}{\cos^3(x+at)}+\frac{3}{4}a^2(x-at)^{-1/2}$，

而 $u_{xx}=\frac{2\sin(x+at)}{\cos^3(x+at)}+\frac{3}{4}(x-at)^{-1/2}$

代入 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 等式成立。即为所证。

4. 试求出方程 $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0$ 的通解为 $u(x,y)=\varphi(xy)\ln x+\psi(xy)$，其中 φ 和 ψ 为充分光滑的任意函数。

解： $u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=yu_\xi+u_\eta$.....(1)

$u_{xx}=(u_x)_\xi+(u_x)_\eta\eta_x=y(u_x)_\xi+(u_x)_\eta=y(yu_\xi+u_\eta)_\xi+(yu_\xi+u_\eta)_\eta=y^2u_{\xi\xi}+2yu_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}$　(2)

$u_{xy}=(u_x)_\xi\xi_y=x(yu_\xi+u_\eta)=xyu_{\xi\xi}+xu_{\eta\xi}$. . . . (3)

$u_y=u_\xi\xi_y=xu_\xi$.....(4)

$u_{yy}=(u_y)_\xi\xi_y=x(xu_\xi)_\xi=x^2u_{\xi\xi}$　. . . . (5)

把上面各式代入方程 $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0$ 有：

$$x^2(y^2u_{\xi\xi}+2yu_{\eta\xi}+u_{\eta\eta})-2xy(xyu_{\xi\xi}+xu_{\eta\xi})+y^2(x^2u_{\xi\xi})+xyu_\xi+x(yu_\xi+u_\eta)$$

$$=2xyu_{\xi\xi}+2x^2yu_{\eta\xi}+x^2u_{\eta\eta}-2x^2y^2u_{\xi\xi}-2x^2yu_{\eta\xi}+2xyu_\xi+xu_\eta=0$$

即 $x^2u_{\eta\eta}+2xyu_{\xi}+xu_{\eta}=0$， $xu_{\eta\eta}+2yu_{\xi}+u_{\eta}=0$

故 $u(x,y)=\varphi(xy)\ln x+\psi(xy)$ 为方程的通解。

5．试用行波法求解定解问题： $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2+\sin y,-\infty<x,y<\infty\\ u(0,y)=\sin y\\ u(x,0)=x\end{cases}$ 。

解：将方程的两边对 y 积分得：$u_x=\int x^2dy+\int\sin ydy+g_1(x)=x^2y-\cos y+g_1(x)$

再对 x 积分得 $u(x,y)=\dfrac{x^3y}{3}-x\cos y+g(x)+f(y)$，其中 $g(x)=\int g_1(x)dx$ 和 $f(y)$ 由定解条件确定。则有 $g(0)+f(y)=\sin y$

所以 $f(y)=\sin y-g(0)$

$-x+g(x)+f(0)=x$

所以 $u(x,y)=\dfrac{xy}{3}-x\cos y+2x+\sin y$

第十一章 格林公式

3．求解圆的狄利克雷问题 $\begin{cases}\Delta u=0 & \rho<a\\ u(a,\varphi)=A\cos\varphi\end{cases}$，其中 A 为常数。

解：由圆的狄利克雷积分公式 $u(\rho,\varphi)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi_0)\dfrac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi_0$，

本题中 $f(\varphi)=A\cos\varphi$，于是 $u(\rho,\varphi)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{A\cos\varphi_0(a^2-\rho^2)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi_0$，将上试中的分子与分母同除以 a^2，并记 $\varepsilon=\dfrac{\rho}{a}$，得

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1-\varepsilon^2}{2\pi}A\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi_0}{1-2\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi_0$$ 。

另 $z=e^{i\varphi_0}$，则 $\cos\varphi_0=\dfrac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)=\dfrac{z^2+1}{2z}$，

$\cos(\varphi-\varphi_0)=\dfrac{1}{2}\left[e^{i(\varphi-\varphi_0)}+e^{-i(\varphi-\varphi_0)}\right]=\dfrac{1}{2}\left[e^{i\varphi}\bullet z^{-1}+e^{-i\varphi}z\right]$， $d\varphi_0=\dfrac{dz}{iz}$，

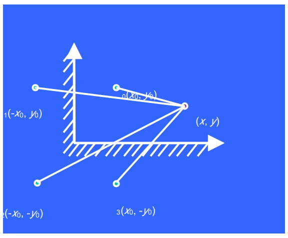
一并代入上试中积分，于是得：

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{A\cos\varphi_0\left(a^2-\rho^2\right)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)}d\varphi_0=\frac{-1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{1+z^2}{z\left[\varepsilon e^{-i\varphi}z^2-\left(1+\varepsilon^2\right)z+\varepsilon e^{i\varphi}\right]}dz$$

令分母为零，得到被积函数的奇点，$z=\dfrac{e^{i\varphi}}{\varepsilon},\varepsilon e^{i\varphi},0$，故在$|z|<1$内有奇点$z_1=\varepsilon e^{i\varphi}$和$z_2=0$，且均是单极点，故有留数定理有：

$$I=\frac{-1}{2i}\bullet 2\pi i\sum_{k=1}^{2}resf\left(z_k\right)=-\pi\left[resf\left(\varepsilon e^{i\varphi}\right)+resf\left(0\right)\right]=\frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}\cos\varphi,$$

则有：$u\left(\rho,\varphi\right)=\dfrac{A}{a}\rho\cos\varphi$。



5.求区域：$0\le x<\infty,0\le y<\infty,$的格林函数，并由此求解狄利克雷问题$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0\\u\left(0,y\right)=f\left(y\right)\quad\left(0\le y<\infty\right)\\u\left(x,0\right)=0\end{cases}$其中$f$为已知的连续函数。

解：$G=\ln\dfrac{1}{r}-\ln\dfrac{1}{r_1}+\ln\dfrac{1}{r_2}-\ln\dfrac{1}{r_3}$

$$=\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}}$$

$$u(x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{l'}f\frac{\partial G}{\partial n}dl=-\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0}f(y)(-\frac{\partial G}{\partial x})|_{x=0}\,dy-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}0(-\frac{\partial G}{\partial y})|_{y=0}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(y)\frac{\partial}{\partial x}(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$+\ln\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}})|_{x=0}\,dy$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(y)(\frac{2x_0}{x_0^2+(y-y_0)^2}-\frac{2x_0}{x_0^2+(y+y_0)^2})dy$$。

第十三章　Fourier 变换

1. 求函数$f\left(x\right)=\dfrac{\sin ax}{x}\left(a>0\right)$的 Fourier 变换。

解：由 Fourier 变换的定义有：

$$F[f(x)]=F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2ix}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(a-\omega)x}-e^{-i(a+\omega)x}}{2ix}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(a-\omega)x+i\sin(a-\omega)x-\cos(a+\omega)x+i\sin(a+\omega)x}{2ix}dx$$
$$=2\left[\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{2x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{2x}dx\right]$$
$$=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{x}dx$$

由函数的奇偶性有：$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\begin{cases}\pi/2 & a>0\\ -\pi/2 & a<0\end{cases}$，

（1） 若$a>|\omega|$，$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，于是有：$F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=\pi$

（2） 若$a=|\omega|$，则$\omega=\begin{cases}a,\omega>0\\ -a,\omega<0\end{cases}$，于是有

$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{x}dx=\begin{cases}0,\omega>0\\ \frac{\pi}{2},\omega<0\end{cases}$，$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2},\omega>0\\ 0,\omega<0\end{cases}$

得$F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=\frac{\pi}{2}$。

（3） 若$a<|\omega|$，则：如果$\omega>0,a-\omega<0,a+\omega>0,$故有：

$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a-\omega)x}{x}dx=-\frac{\pi}{2}$，$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(a+\omega)x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

于是$F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=0$，同理如果$\omega<0$，则$F\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=0$。

2. 求函数$f(x)=\begin{cases}1-x^2,|x|<1\\ 0,|x|>1\end{cases}$的 Fourier 变换。

解：$f(x)$在$|x|<1$中是偶函数，于是由 Fourier 变换公式有$F[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)(\cos\omega x-i\sin\omega x)dx$

$$=2\int_{0}^{1}(1-x^2)\cos\omega x dx=\frac{4}{\omega^3}(\sin\omega-\omega\cos\omega)$$

3．求解热传导方程的初值问题 $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \cos x \end{cases}$。

解：对定解问题各项以 x 为变量施行 Fourier 变换，并记

$$F\left[u(x,t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx = \tilde{u}(\omega,t)$$

$$F[\cos x] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x e^{-i\omega x} dx = \tilde{\varphi}(\omega)$$

则定解问题化为 $\begin{cases} \frac{d\tilde{u}(\omega,t)}{dt} + a^2\omega^2\tilde{u}(\omega,t) = 0 \\ \tilde{u}(\omega,0) = \tilde{\varphi}(\omega) \end{cases}$，它的解为

$$\tilde{u}(\omega,t) = \tilde{\varphi}(\omega) e^{-a^2\omega^2 t}$$

它的逆变换得：

$$u(x,t) = F^{-1}\left[\tilde{u}(\omega,t)\right] = F^{-1}\left[\tilde{\varphi}(\omega) e^{-a^2\omega^2 t}\right] = FF^{-1}\left[\cos x * F^{-1}\left[e^{-a^2\omega^2 t}\right]\right]$$

$$F^{-1}\left[e^{-a^2\omega^2 t}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t} e^{j\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-(a^2 t)\omega^2} \cos x\omega d\omega = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

则 $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \cos(x-\zeta) d\zeta = \frac{\cos x}{a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2 t}} \cos\zeta d\zeta = \frac{1}{2} e^{-a^2 t} \cos x$

第十四章 **Laplace** 变换

1． 求下列函数的 Laplace 变换

（1）e^{at}，

解：由 Laplace 变换的定义有

$$L\left[e^{at}\right] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$$

（2）$\sin kt$，

解：由线性性质和上式有

$$L[\sin kt] = L\left[\frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left(L\left[e^{ikt}\right] - L\left[e^{-ikt}\right]\right) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ik} - \frac{1}{p+ik}\right] = \frac{k}{p^2+k^2}$$

2． 求下列函数 $F(p)$ 的 Laplace 逆变换。

（1）$F(p) = \frac{p}{p^2-2p+5}$，（2）$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$，

解：（1）$\frac{p}{p^2-2p+5} = \frac{p-1+1}{(p-1)^2+4} = \frac{p-1}{(p-1)^2+4} + \frac{1}{(p-1)^2+4}$

又由 $L^{-1}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\right]=e^t\cos 2t$，$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2+4}\right]=\frac{1}{2}e^t\sin 2t$

所以

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-2p+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2+4}\right]=e^t(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)$$

（2）因为 $L\left[t^a\right]=\int_0^\infty t^a e^{-pt}dt=\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$，

取 $a=-\frac{1}{2}$ 得 $L\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{p}}\Gamma(\frac{1}{2})$ 即

$\frac{1}{\sqrt{p}}=L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right]$，所以 $L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$

3． 求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y''(t)-ty'(t)+y(t)=1 \\ y(0)=1, y'(0)=2 \end{cases}$。

解：记 $L[y(t)]=\tilde{Y}(p)$，对方程中各项施行 Laplace 逆变换，注意应用微分性质并将初始条件代入，得

$\frac{d\tilde{Y}(p)}{dp}+\left(p+\frac{2}{p}\right)\tilde{Y}(p)=1+\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}$，该方程的解为 $\tilde{Y}(p)=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{c}{p^2}e^{-p^2/2}$，

将 $e^{-p^2/2}$ 以 0 为中心展开为级数，得 $\tilde{Y}(p)=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{c}{p^2}(1-\frac{p^2}{2}+\frac{1}{8}p^4-\cdots)$

因为 $L^{-1}\left[p^k\right]=0$

故有 $y(t)=L^{-1}\left[\tilde{Y}(p)\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]+L^{-1}\left[\frac{2}{p^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{c}{p^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{c}{2}\right]+\cdots=1+(2+c)t$，

代入初始条件得 $2+c=2, c=0$

于是得 $y(t)=1+2t$

4.设有一初始温度为 $3\sin 2\pi x$ 的单位长度的均匀杆，杆的侧面绝热，而两端的温度均保持零度，试求杆内的温度分布。

解：其定解问题为$\begin{cases} u_t = Du_{xx}, 0<x<1, t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \\ u(x,0)=3\sin 2\pi x, (0<x<1) \end{cases}$，这虽然是一有界问题，

但由于t的变换范围为$[0,\infty)$及$u(x,0)$已知，故可用 Laplace 逆变换法求解，记

$$L[u(x,t)]=\tilde{u}(x,p)$$

对方程和边界条件对于变量t施行 Laplace 逆变换并代入初始条件得

$$\begin{cases} \frac{d^2\tilde{u}(x,p)}{dx^2}-\frac{p}{D}u(x,p)=-3\sin 2\pi x/D \\ \tilde{u}(0,p)=\tilde{u}(1,p)=0 \end{cases}$$

解此非齐次的二阶微分方程得

$$\tilde{u}(x,p)=3\sin 2\pi x \Big/ \left(p+4\pi^2 D\right)$$

取逆变换得$u(x,t)=3e^{-4\pi^2 Dt}\sin 2\pi x$

第十五章 球函数

1．试证$\int_{-1}^{1}P_n(x)=0, n=1,2,3\cdots$

证明：$\int_{-1}^{1}P_n(x)\,dx=\int_{-1}^{1}P_0(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases} 0 & n\neq 0 \\ 2 & n=0 \end{cases}$

2．将函数$f(x)=|x|$，按勒让得多项式展开。

解：令$|x|=\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(x)$，其中 $C_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}|x|P_l(x)dx$

因为$|x|$是偶函数，故当$P_l(x)$为奇函数，即当$l=2n+1$时，$C_l=C_{2n+1}=0$，

于是$C_{2n}=\int_0^1 P_{2n-1}(x)dx-\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx$

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx=\frac{1}{2n+1}\frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}\left[(n+1)!\right]^2},\quad \int_0^1 P_{2n-1}(x)dx=\frac{1}{2n-1}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}[n!]^2},$$

于是$C_{2n}=\frac{1}{2n-1}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}[n!]^2}-\frac{1}{2n+1}\frac{(-1)^n(2n+2)!}{2^{2n+2}\left[(n+1)!\right]^2}=\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}$

所以$|x|=\frac{1}{2}P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}P_{2n}(x), |x|<1$。

3．设有一半径为a的球，球面上的电势分布为$f(\theta,\varphi)$，求球内的电势分布。

解：其定解问题为$\begin{cases}\Delta u = 0, r < a \\ u_{r=a} = f(\theta,\varphi)\end{cases}$，

令$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y_{l,m}(\theta,\varphi)$代入方程得在$r < a$中的解，为

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{l,m} r^l Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

将其代入边界条件得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{l,m} a^l Y_{l,m}(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)$$

故由球函数的展开式立即可得

$$C_{l,m} = \frac{1}{a^l}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\overline{Y}_{l,m}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$$