第一章习题

第一节习题

1.一个月球登陆器以1000米/时的速度开始向月球表面垂直着陆。为了能在月球表面达到软着陆，即着陆时登陆器的速度正好为零，需要点燃一个能提供加速度为-20000米/时^{2}的减速器，试讨论这个减速器在何高度时点燃为好？

解：设高度为h，加速度为$a=-2oooom/h^2$，初始速度为$v_0=1000m/h$,降落所用的时间是T，则有

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt}=v_0+at. \\ h(T)=0 \\ \frac{dh}{dt}|_{t=T}=0 \end{cases}$$

由第一项可得$h=v_0t+\frac{1}{2}at^2+C$,其中C为任意常数，由第二项可得$v_0T+\frac{1}{2}aT^2+C=0$,由第三项可得$T=-\frac{v_0}{a}$，带入各项数值，最终得到$h(0)=C=25m.$

2.一个湖泊的水量为V立方米，排入湖泊内含污染物A的污水量为V_1立方米/时，流入湖泊内不含污染物A的水量为V_2立方米/时，流出湖泊的水量为V_1+V_2立方米/时。2000年底湖泊中污染物A的浓度为$5m_0$，超过了国家规定的标准，为了治理污染，从2000年起限定排入湖泊中的污水含污染物A的浓度不得超过$\frac{m_0}{5}$。试讨论湖泊中污染物A的浓度变化？

解：设污染物A的浓度为P(t),由题意可得

$$\begin{cases} VP'(t)+P(t)(V_1+V_2)=\frac{m_0}{5}V_1 \\ P(0)=5m_0 \end{cases}$$

解方程最终得到$P(t)=e^{-\frac{V_1+V_2}{V}t}[5m_0+\frac{m_0}{5}\frac{V_1}{V_1+V_2}(e^{\frac{V_1+V_2}{V}t}-1)].$

3.一个游泳者横渡到河的彼岸，试建立一个确立游泳者所在位置的微分方程模型。

解：不妨设游泳者始终朝着河的彼岸游，令(x,y)是游泳者的位置坐标，v_0是水流速度，v_1是游泳者的速度，则可建立以下方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=v_0 \\ \frac{dy}{dt}=v_1 \\ x(0)=0,\ y(0)=0 \end{cases}$$

4.把重200kg体积为$\frac{4}{3}\pi$的球体和重150kg体积为π的圆柱体同时放到河里，初速度为零，水作用在下沉的球体和圆柱体上的阻力分别为$\lambda\nu_c$和$\lambda\nu_s$，其中ν_c和ν_s分别是球体和圆柱体的速度，λ是一个正的常数，试确定哪一个物体先到达水底。

解：设两个物体的质量分别为m_c, m_s，体积为V_c, V_s,则有：

$$\begin{cases} m_c g - \lambda V_c = m_c \frac{dV_c}{dt} + \rho V_c g \\ m_s g - \lambda V_s = m_s \frac{dV_s}{dt} + \rho V_s g \end{cases}$$

设

$$\begin{cases} m_c g - \rho V_c g = M_c \\ m_s g - \rho V_s g = M_s \end{cases}$$

则$\frac{M_c}{M_s} = \frac{4}{3}$，解得

$$\begin{cases} V_c(t) = \frac{M_c m_c}{\lambda}(1 - e^{-\frac{\lambda}{m_c}t}) \\ V_s(t) = \frac{M_s m_s}{\lambda}(1 - e^{-\frac{\lambda}{m_s}t}) \end{cases}$$

由于$\frac{m_c}{m_s} = \frac{4}{3}$，从而球先到。

第二节习题

1.指出下列微分方程的阶数，并回答是否为线性微分方程：

(1) $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - y\sin x$;　　(2) $\frac{d^y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 + 2xy$;

(3) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + y = 2x\sin x$;　　(4) $\frac{dy}{dx} + \cos y + 4x = 0$;

(5) $y\frac{d^3y}{dx^3} - e^x\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$;　　(6) $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx} - 6y = 0$.

答：

(1)一阶线性；

(2)二阶非线性；

(3)二阶线性；

(4)一阶非线性；

(5)三阶非线性；

(6)三阶线性。

2.验证下列各函数是相应微分方程的解，并指出哪些是通解：

(1) $y = 1 + x^2$，$\frac{dy}{dx} = y^2 - (x^2+1)y + 2x$;

(2) $y = -\frac{1}{x}$，$x^2\frac{dy}{dx} - x^2y^2 - xy - 1 = 0$;

(3) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$，$\frac{d^y}{dx^2} - 4y = 0$(其中$C_1$，$C_2$是任一常数);

(4) $y = cxe^x$，$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$(其中c是任意常数);

(5) $y = e^{cx}$，$(\frac{dy}{dx})^2 - y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$(其中c是任意常数);

(6) $y=\begin{cases} -\frac{(x-C_1)^2}{4},\ -\infty<x<C_1; \\ 0,\ C_1<x<C_2, \\ \frac{(x-C_1)^2}{4},\ C_2<x<+\infty, \end{cases}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{|y|}.$

答：将解代入验证就可得知是否为微分方程的解：

(1)是解，但不是通解；

(2)是解，但不是通解；

(3)是解也是通解；

(4)是解，但不是通解；

(5)是解，但不是通解；

(6)是解也是通解。

3.求出：

(1)曲线族$y=Cx+x^2$所满足的微分方程；

(2)曲线族$xy=C$所满足的微分方程；

(3)平面上一切圆所满足的微分方程；

(4)曲线族$y=\frac{9}{2}C+\frac{C}{x}x^2$所满足的微分方程。

解：方程两边一直对x求导，直到没有常数为止，则得到微分方程

(1)$y''=2$；

(2)$y+xy'=0$；

(3)$y'''+(y')^2y'''=3y'(y'')^2$；

(4)$y'''=0$。

第二章习题

第一节习题

1.试求下列微分方程的通解或特解：

(1) $\frac{dy}{dx}=y+\sin x;$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{1-x^2}y=1+x,\ y(0)=1;$

(3) $y=e^x+\int_0^x y(t)\,dt;$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2};$

(5) $2xydy-(2y^2-x)dx=0;$

(6) $(y\ln x-2)ydx=xdy;$

(7) $3xy^2\frac{dy}{dx}+y^3+x^3=0;$

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}.$

解：

(1)方程两边同时乘以因子e^{-x}，由此得到方程的通解为

$$y = Ce^x - \frac{\sin x + \cos x}{2}$$

其中C为任意常数；

(2)方程两边同时乘以因子$e^{-\int \frac{1}{1-x^2}\,dx}$，由此得到方程的通解为

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(C + \frac{\pi}{2})$$

其中C为任意常数；再由初始条件可得$C = 1 - \frac{\pi}{2}$，则$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；

(3)方程两边关于x求导得：$y' = e^x + y(x)$，且$y(0) = 1$，方程两边同时乘以因子e^{-x}，由此得到方程的通解为

$$y = e^x(C + x)$$

其中C为任意常数；再由初始条件可得$C = 1$，则$y = e^x(1 + x)$；

(4)方程两边乘以$3y^2$，令$z = y^3$，则原方程化为

$$\frac{dz}{dx} = 3x^3 + \frac{3z}{x}$$

方程两边同时乘以因子$e^{-\int \frac{3}{x}\,dx}$，由此得到方程的通解为

$$z = x^3(C + 3x)$$

其中C为任意常数，则通解为$y^3 = x^3(C + 3x)$；

(5)令$z = y^2$，则原方程化为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x} - 1$$

方程两边同时乘以因子$e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}$，由此得到方程的通解为

$$z = x^2(C + x^{-1}$$

因此$y^2 = x^2(C + x^{-1})$，其中C为任意常数；

(6)显然$y \equiv 0$是原方程的解，当$y \neq 0$时，方程两边乘以$-y^{-2}$，令$z = y^{-1}$ ，原方程化为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

方程两边同时乘以因子$e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}$，由此得到方程的通解为

$$y^{-1} = x^2(C + \frac{1 + 2\ln x}{4x^2})$$

其中C为任意常数；

(7)方法一：显然$y=0$不是原方程的解，当$y\neq 0$时，$y'=-\frac{1}{3x}y-\frac{x^2}{3y^2}$，方程两边乘以$3y^2$，令$z=y^3$，方程两边同时乘以因子$e^{\int \frac{1}{x}\,dx}$，由此得到方程的通解为

$$y=\frac{C}{x}-\frac{x^3}{4}$$

其中C为任意常数；

方法二：由原方程可得$\frac{d(xy^3)}{dx}=-x^3$，再利用分离变量法可得通解；

(8)显然$y\equiv 0$是原方程的解，当$y\neq 0$时，原方程可化为$\frac{ydx-xdy}{y^2}-ydy=0$，则方程通解为

$$\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2}=C$$

其中C为任意常数。

2.设$y=\varphi(x)$满足微分不等式

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y\le 0,\ (x\ge 0).$$

求证：

$$\varphi(x)\le\varphi(0)e^{-\int_0^x a(t)\,dt},\ (x\ge 0).$$

证明：不等式两边同乘以因子$e^{\int_0^x a(s)\,ds}$，再对不等式积分就可得到所要结论。

3.设连续函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上有界，证明：方程

$$\frac{dy}{dx}-y=f(x)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上有且仅有一个有界解。试求出这个有界解，并进而证明：当$f(x)$还是一个以ω为周期的周期函数时，这个解也是一个以ω为周期的周期函数。

证明：设$|f(x)|\le M$，方程两边乘以因子e^{-x}，得到通解为$y=e^x(C+\int f(s)e^{-s}\,ds)$，其中C为任意常数。因此$|y|\le Ce^x+M$，可见方程在区间$(-\infty,+\infty)$上有有界解当且仅当$C=0$，此时这个解为$y=e^x\int f(s)e^{-s}\,ds$。若$f(x+\omega)=f(x)$，那么$y(x+\omega)=e^{(x+\omega)}\int f(s+\omega)e^{-(s+\omega)}\,ds=e^{(x+\omega)}e^{-\omega}\int f(s+\omega)e^{-s}\,ds=y(x)$。

4.考虑方程

$$\frac{dy}{dx}p(x)y+q(x),$$

其中$p(x)$和$q(x)$都是以ω为周期的连续函数，试证：

(1)若$q(x)\equiv 0$，则方程(2.4.23)的任一非零解以ω为周期当且仅当函数$p(x)$的平均值

$$\bar{p}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)\,dx=0$$

(2)若$q(x)\neq 0$，则方程(2.4.23)有唯一的ω周期解当且仅当函数$p(x)$的平均值$\bar{p}\neq 0$，试求出此解。

解：由解得表达式可得

$$
\begin{aligned}
& y(x)=y(x+\omega) \\
\Leftrightarrow \quad & C=Ce^{\omega\bar{p}}+e^{\omega\bar{p}}\int_0^\omega q(t)e^{-\int_0^t p(s)\,ds}\,dt
\end{aligned}
$$

(1)当$q(t)=0$时，$y(x)=y(x+\omega)\Leftrightarrow \bar{p}=0$；

(2)当$q(t)\neq 0$时，$y(x)=y(x+\omega)\Leftrightarrow \bar{p}\neq 0$，此时解为

$$
y=e^{\int p(x)\,dx}(C+\int q(x)e^{-\int p(x)\,dx}dx),\ \text{其中}C=\frac{1}{1-e^{\omega\bar{p}}}\int_0^\omega q(t)e^{-\int_0^t p(s)\,ds}\,dt
$$

第二节习题

1.试求下列微分方程的通解或特解：

(1) $x\frac{dy}{dx}-4xy=x^2\sqrt{y}$;

(2) $\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{2(x^2-1)}-\frac{x}{2y}=0,\ y(0)=1$;

(3) $\frac{dy}{dx}=y^2+\frac{1}{4x^2}$;

(4) $x^2\frac{dy}{dx}-x^2y^2=xy+1$;

(5) $\frac{dy}{dx}=1-x+y^2-xy^2$;

(6) $\frac{dy}{dx}=e^{x+y+3}$;

(7) $\cos y\sin x\frac{dy}{dx}=\sin y\cos x$;

(8) $2xy\frac{dy}{dx}=3y^2-x^2$;

(9) $(x-\sqrt{xy})\frac{dy}{dx}=y$;

(10) $e^{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}+y(1+e^{\frac{x}{y}})=0$;

(11) $2x\sin y+y^3e^x+(x^2\cos y+3y^2e^x)\frac{dy}{dx}=0$;

(12) $\frac{y^2}{2}-2ye^x+(y-e^x)\frac{dy}{dx}=0$;

(13) $1+(1+xy)e^{xy}+(1+x^2e^{xy})\frac{dy}{dx}=0$;

(14) $y\sec^2 x+\sec x\tan x+(2y+\tan x)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx}=0$;

(15) $ydx-(x^2+y^2+x)dy=0$;

(16) $y(1+xy)dx-xdy=0$.

解：

(1)显然$y\equiv 0$是方程的解，当$y\neq 0$时，方程两边乘以$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$，令$z=y^{\frac{1}{2}}$，方程两边再乘以因子$e^{-2x}$，得到方程的通解为

$$
y=(Ce^{2x}-\frac{x}{4}-\frac{1}{8})^2
$$

其中C为任意常数；

(2)方程两边乘以$2y$，令$z=y^2$，方程两边再乘以因子$e^{-\int \frac{x}{x^2-1}\,dx}$，得到方程的通解为

$$y=\sqrt{1-x^2}(C-\sqrt{1-x^2})$$

其中C为任意常数，再利用初值条件可确定C，因此解为$y=2\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)$；

(3)方法一：令$z=xy$，则$z'=\frac{4z^2+4z+1}{4x}$，显然$z=-\frac{1}{2}$是方程的解，当$z\neq-\frac{1}{2}$时，用分离变量法可得

$$y=\frac{1}{Cx-x\ln|x|}-\frac{1}{2x}$$

其中C为任意常数，因此方程的解为$xy=-\frac{1}{2}$或$y=\frac{1}{Cx-x\ln|x|}-\frac{1}{2x}$；

方法二：令$u=y+\frac{1}{2x}$，则u满足伯努利方程$u'+\frac{u}{x}-u^2=0$，利用伯努利方程的解法同样可得到上述通解；

(4)令$xy=u$则$u'=\frac{u^2+2u+1}{x}$，当$u^2+2u+1=0$时即$xy=-1$是方程的解，当$xy\neq-1$时，用分离变量法得$\ln|x|+\frac{1}{xy+1}=C$，因此方程的解为$xy=-1$或$\ln|x|+\frac{1}{xy+1}=C$，其中C为任意常数；

(5)用分离变量法可得方程的通解为$y=\tan(x-\frac{1}{2}x^2+C)$，其中C为任意常数；

(6)用分离变量法可得方程的通解为$e^{-y}+e^{x+3}=C$，其中C为任意正常数；

(7)显然$\sin y=0$时方程成立，即$y=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$是解，当$\sin y\neq0$时，用分离变量法可得方程的通解为$\sin^2 y-C\sin^2 x=0$，其中C为任意常数；

(8)令$z=y^2$，则$z'=\frac{3}{x}z-x$，方程两边再乘以因子$e^{-\int \frac{3}{x}\,dx}$，则方程的通解为

$$y^2=|x|^3(C+|x|^{-1})$$

其中C为任意常数；

(9)令$u=\frac{y}{x}$，则u满足方程$x^2(1-\sqrt{u})u'=xu\sqrt{u}$，当$u=0$时，$y=0$，当$u\neq0$时，由分离变量法可得方程的通解为

$$y=Ce^{-2\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

其中C为任意正常数；

(10)令$u=\frac{x}{y}$，则原方程化为$y\frac{du}{dy}=-\frac{u+e^u}{1+e^u}$，利用分离变量法可得方程的通解为

$$x+ye^{\frac{x}{y}}=C$$

其中C为任意常数；

(11)原方程可化为

$$[(x^2\cos y)dy+(2x\sin y)dx]+[(y^3e^x)dx+(3y^2e^x)dy]=0$$

则方程的通解为

$$x^2\sin y+y^3e^x=C$$

其中C为任意常数；

(12)原方程可化为

$$[\frac{y^2}{2}e^x-2ye^{2x}]dx+(e^xy-e^{2x})dy=0$$

则方程的通解为

$$\frac{y^2}{2}e^x-ye^{2x}=C$$

其中C为任意常数；

(13)原方程可化为

$$dy+dx+\{x^2e^{xy}dy+[(1+xy)e^{xy}]dx\}=0$$

则方程的通解为

$$y+x+xe^{xy}=C$$

其中C为任意常数；

(14)原方程可化为

$$(y\sec^2 x)dx+\tan xdy+(\sec x\tan x)dx+2ydy=0$$

则方程的通解为

$$y\tan x+\sec x+y^2=C$$

其中C为任意常数；

(15)显然$y=0$是原方程的解，当$y\neq 0$时，两边除以xy，则方程化为$d(\ln\frac{x}{y})=(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})dy$，令$z=\ln\frac{x}{y}$，利用分离变量法得到方程的通解为

$$\arctan\frac{x}{y}-y=C$$

其中C为任意常数；

(16)显然$y=0$是方程的解，当$y\neq 0$时，两边乘以$\frac{1}{y^2}$，则方程化为$\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy+xdx=0$，因此方程的通解为

$$x+\frac{1}{2}x^2y=Cy$$

其中C为任意常数。

2.考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x-y+3}$$

如果不存在常数1和3，我们就能解这个方程。为了消去这两个常数，我们可以做变换$x = X + h, y = Y + k$，

(a)试确定常数h和k，使方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y+3}$$

能写出下列形式：

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

(b)试求方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y+3}$$

的通解。

解：(1)将$x = X + h, y = Y + k$带入原方程，为得到$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$，只需

$$\begin{cases} h+k+1=0 \\ h-k+3=0 \end{cases}$$

从而得到$h = -2, k = 1$；

(2)由齐次方程的解法可得方程的通解为

$$\arctan u - \ln\sqrt{1+u^2} = \ln|x| + C$$

其中C为任意常数且$u = \frac{y-1}{x+2}$。

3.考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+m}{cx+dy+n}$$

其中a，b，c，d，m和n都是常数。证明：如果$ad - bc \neq 0$，则这个方程总可以化简为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY}{cX+dY}$$

并在$ad = bc$的特殊情况下，试求解上面的方程。

证明：当$ad-bc \neq 0$时，直线$ax+by+m = 0$与直线$cx+dy+n = 0$必有交点，设交点为$(\frac{nb-md}{ad-bc}, \frac{an-mc}{bc-ad})$，令$Y = y - \frac{an-mc}{bc-ad}, X = x - \frac{nb-md}{ad-bc}$，则$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY}{cX+dY}$；

当$ad = bc$时，如果存在μ使得$\mu(ax+by+m) = (cx+dy+n)$，则原方程化为$\frac{dy}{dx} = \mu$，因此解为$y+\mu x+C$，其中C为任意常数；如果对于任意的μ，$\mu(ax + by + m) \neq (cx + dy + n)$，此时$a, b, c, d$至少有一个不为零，不妨设$a \neq 0$，当$c = 0$则$d = 0$原方程化为$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+m}{n}$，此时方程解为

$$\begin{cases} -\frac{a}{b}xe^{-\frac{b}{n}x} - \frac{an}{b^2}e^{-\frac{b}{n}x} - ye^{-\frac{b}{n}x} - \frac{m}{b}e^{-\frac{b}{n}x} = C \qquad b \neq 0 \\ y = \frac{a}{2n}x^2 + \frac{m}{n}x + C \qquad b = 0 \end{cases}$$

当$c\neq 0$，令$z=ax+by+\frac{an}{c}$，则方程化为$\frac{dz}{dx}=(\frac{ab}{c}+a)+\frac{ab(m-\frac{an}{c})}{cz}:=A+\frac{B}{z}$，此时方程解为$\frac{z}{A}-\frac{B}{A^2}\ln|A(Az+B)|=x+C$。

4.试确定常数a使得下列方程是恰当的，并求解所得恰当方程

(a) $x+ye^{2xy}+axe^{2xy}\frac{dy}{dx}=0$

(b) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{ax+1}{y^3}\frac{dy}{dx}=0$

解：由恰当方程的判别法可得

(a)当$a=1$时方程是恰当方程，且通解是$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}e^{2xy}+C=0$;

(b)当$a=-2$时方程是恰当方程，且通解是$\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2y^2}+C=0$。

5.证明：形如$M(t)+N(y)\frac{dy}{dt}=0$的可分离变量方程都是恰当方程。

证明：由于$\frac{\partial M(t)}{\partial y}=0=\frac{\partial N(y)}{\partial t}$，所以结论成立。

6.分别求齐次方程和**Bernoulli**方程的积分因子。

解：(1)齐次方程：$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$，令$u=\frac{y}{x}$，则原方程化为$(f(u)-u)dx-xdu=0$，由于$M=f(u)-u,\ N=-x$，因此$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial u}}{M}=\frac{-f'(u)}{f(u)-u}$ 所以积分因子为$e^{\int\frac{-f'(u)}{f(u)-u}\,du}$;

(2)**Bernoulli**方程

$$\frac{dy}{dx}+g(x)y+h(x)y^{\alpha}=0\ (\alpha\neq 0,1)$$

令$z=y^{-\alpha+1}$ 则原方程化为$dz+[(1-\alpha)g(x)z+(1-\alpha)h(x)]dx=0$，由于$M=[(1-\alpha)g(x)z+(1-\alpha)h(x)],N=1$，因此$\frac{\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial M}{\partial x}}{M}=(1-\alpha)g(x)$所以积分因子为$e^{(1-\alpha)\int g(x)\,dx}$。

7.试导出方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$分别具有形如$\mu(x+y)$和$\mu(xy)$的积分因子的充分必要条件。

解：μ是积分因子当且仅当偏微分方程$\frac{1}{\mu}(Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y})=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$的解存在；

因此令$\omega=x+y$，此时偏微分方程化为常微分方程$(Q-P)\frac{d\mu}{d\omega}=(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\mu$，若$\frac{\partial P}{\partial\omega}-\frac{\partial Q}{\partial\omega}=0$，此时原方程为恰当方程，肯定存在形如$\mu(x+y)$的积分因子；若$\frac{\partial P}{\partial\omega}-\frac{\partial Q}{\partial\omega}\neq 0$，要使(1)有解当且仅当$\frac{1}{Q-P}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}))$是一个关于$x+y$的连续函数；同理可得具有形如$\mu(xy)$积分因子的充要条件是：当原方程是恰当方程时肯定存在；当原方程不是恰当方程时，$\frac{1}{Qy-Px}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})$是一个关于$xy$的连续函数。

第三节习题

1.求解下列方程，并讨论方程的奇解：

(1) $x=yy'+a(y')^2$;

(2) $16x^2+2y(y')^2-x(y')^3=0$;

(3) $y=2xy'+x^2(y')^4$;

(4) $(y')^2\cos^2 y+y'\sin x\cos x\cos y-\sin y\cos^2 x=0$;

(5) $(xy'-y)(yy'+x)=2y'$;

(6) $9(y')^2+4y^2=1$.

解：令$p=\frac{dy}{dx}$

(1)原方程化为$x=yp+ap^2$，两边对x求导可得$(yp+2ap^2)dp+(p^2-1)dy=0$，当$p=\pm1$时，代回原方程可得特解为$y=\pm x+a$，当$p^2\neq 1$时，方程两边乘以$\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}$得到恰当方程，因此方程的通解为

$$\begin{cases} y\sqrt{p^2-1}+a[p\sqrt{p^2-1}+\ln|p+\sqrt{p^2-1}|]=C & |p|>1 \\ y(-\sqrt{1-p^2})+a[\arcsin p-p\sqrt{1-p^2}]=C & |p|<1 \end{cases}$$

其中C为任意常数，由p-判别法可知方程无奇解；

(2)原方程化为$y=\frac{xp}{2}-8\frac{x^2}{p^2}$，两边对x求导并合并同类项可得$(\frac{p}{2}-16\frac{x}{p^2})(1-xpp')=0$，因此方程的解为$y=-3\times 2^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}$或$2C^2yx^2=C^3x^4-16x^2$，其中C为任意常数，由C-判别法可知特解是奇解；

(3)原方程化为$y=2xp+x^2p^4$，两边对x求导并合并同类项可得$(p+2xp')(1+2xp^3)=0$，因此方程的解为$y=-3\times 2^{-\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}$或$(y-C^4)^2=4C^2|x|$，其中C为任意常数，由C-判别法可知特解是奇解；

(4)令$u=\sin y, v=\sin x$，则$(u')^2+u'vv'-u(v')^2=0$，令$p=\frac{du}{dv}, t=\frac{dp}{dv}$，则$(2p+v)t=0$，从而得到$p=-\frac{v}{2}$或$t=0$，由前者可到特解$4\sin y+\sin^2 x=0$，由后者得到通解$\sin y=C\sin x+C^2$，其中C是任意常数，由C-判别法可知特解是奇解；

(5)两边同乘以$2y$，令$u=y^2, p=u'$，则$2u=xp-\frac{2p}{x+\frac{p}{2}}$，两边对x求导并合并同类项可得$[(p+2x)^2-8](xp'-p)=0$，因此$(p+2x)^2=8$或$xp'=p$，由前者得到特解$p=-2x\pm 2\sqrt{2}$，由后者得到通解$p=C|x|$，其中C是任意常数，但当$p=-2x\pm2\sqrt{2}$时，$u<0$，与$u=y^2\geq 0$矛盾，因此方程只有通解$(\pm Cx|x|-2y^2)(\pm\frac{C}{2}|x|+x)=\pm 2C|x|$，其中C是任意常数；

(6)两边同乘以y^2，令$u=y^2, p=u'$，则$36p^2+(8u-1)^2=1$，令$x=s, 6p=\sin t, 8u-1=\cos t$，由于$du=pdx$，可得$\sin t(\frac{ds}{6}+\frac{dt}{8})=0$，从而$\sin t=0$或$\frac{ds}{6}+\frac{dt}{8}0$，由前者得$p=0$，由后者得$s+\frac{3}{4}t=C$，则方程的特解为$y=0$或$y=\pm\frac{1}{2}$，通解为$\sin^2(\frac{4}{3}x+C)+64y^4-16y^2=0$，其中C是任意常数，由C-判别法可知特解是奇解；

2.在x，y平面上确定曲线$y=y(x)$，使得它具有这样的性质：在曲线$y=y(x)$上任一点(x,y) 处的切线与坐标原点O到这点(x,y)的连线互相垂直。

解：由题意可知$\frac{dy}{dx}\frac{y}{x}=-1$，解方程得$x^2+y^2=C$，其中C为任意非负常数。

3.画出以x轴为轴且以原点为焦点的抛物线族$y^2=4c(x+c)$，求这个抛物线族所满足的微分方程，并证明：当其中的$\frac{dy}{dx}$换成$-\frac{dx}{dy}$时这个微分方程是不变的。解：两边对解的表达式关于x求导可得$C=\frac{1}{2}yy'$，再代回解得表达式可得微分方程为$y=2xy'+y(y')^2$。

证明；将$\frac{dy}{dx}$换成$-\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{y'}$代入方程即可发现方程不变。

4。如果一曲线族中的每一曲线都跟另一曲线族中的每一曲线正交(即互相垂直)，则我们称这两族曲线互为正交，一族曲线称为是另一族曲线的正交轨线。若已经给定一曲线族的方程，试求出另一族曲线的方程，并总结一下方法。

解：不妨设两族曲线为

$$\begin{cases} F(x,y)=C \\ G(x,y)=C \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} F_x dx+F_y dy=0 \\ G_x dx+G_y dy=0 \end{cases}$$

如果已知$F(x,y)=C$，求G。当$F_x=0$时，即$F(x,y)=y$，那么由题意知$G=x$；当$F_x\neq 0$时，由题意得$\left(\frac{dy}{dx}\right)_G=-\left(\frac{dx}{dy}\right)_F=\frac{F_y}{F_x}$，从而用积分因子法可解得G。

5.求一条曲线，使得其上每一点处的切线夹在坐标轴间的线段长等于常数a。

解：设曲线上一点坐标为(x,y)，令$p=\frac{dy}{dx}$则切线在y轴上的截距为$|y-px|$，在x轴上的截距为$|\frac{y}{p}-x|$，因此$(y-px)+(\frac{y}{p}-x)=a^2$。这是一个可把y表示出来的常微分方程，利用相应的解法可得$(x\pm\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}})p'=0$，则$x\pm\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=0$或者$p'=0$，由前者得到特解

$$\begin{cases} y=xp\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \\ x=\mp\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

由后者得到通解$y=Cx+\frac{aC}{\sqrt{C^2+1}}$，其中C为不为零的任意常数。

6.(i)若设追捕兔子问题中的$a<b$(从而$k<1$)，试求y与x的函数关系，并讨论兔子被狗捕捉前能跑多远？

(ii)设$a=b$，试求$y(x)$并讨论狗能接近兔子到何程度？

解：由课本例2.2.6可知，当$a<b$时，$k<1$，此时$y=\frac{1}{2}[\frac{x^{k+1}}{(k+1)c^k}+\frac{c^k}{(k-1)x^{k-1}}]-\frac{ck}{k^2-1}$。当$x\to 0$时，$y\to\frac{cab}{b^2-a^2}$；

当$k=1$时，$y=\frac{1}{2}[\frac{x}{2c}-c\ln x]-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}c\ln c$，而$(\triangle S)^2=(at-y)^2+x^2=x^2[(y')^2+1]=x^2[(\frac{1}{4c}-\frac{c}{2x})^2+1]=(\frac{x}{4c}-\frac{c}{2})^2+x^2$，令$F=(\frac{x}{4c}-\frac{c}{2})^2+x^2$，$F'(x)=0\Rightarrow x=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8c^2}+2}$，所以最近距离为$\triangle S=\sqrt{\frac{4c^4}{1+16c^2}}$。

7.一质点在重力的作用下沿某曲线滑动，在相等的时段内下降相等的距离，试求这曲线。

解：设曲线上的点坐标为$(x(t),y(t))$，由题意可得

$$\begin{cases} \frac{x''(t)}{g}=-\frac{dy}{dx} \\ y''(t)=0 \end{cases}$$

由第二式可得$y'(t)=C$，代入第一式可得$x''(t)=-g\frac{C}{\frac{dx}{dt}}$，从而得到曲线坐标满足

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\sqrt{-2gC}+C_1 \\ y=Ct+C_1 \end{cases}$$

提高练习

1.通过适当的变换，求解下列方程：

(1) $(x^2+y^2+3)y' = 2x(2y-\frac{x^2}{y})$;

(2) $xy(y-xy') = x+yy'$, $y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $y' = \frac{2}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$;

(4) $y' = \frac{4x^3-2xy^3+2x}{3x^2y^2-6y^5+3y}$;

(5) $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$,(提示： 令$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$).

解：

(1)方程两边乘以y，令$u=y^2$, $v=x^2$，则原方程化为$\frac{du}{dv}=\frac{4u-2v}{u+v+3}$，利用习题2.3的方法可得$y^2=x^2+1$或$|y^2-2x^2-3|^3=C(x^2+2)^4$，其中C是任意非负常数；

(2)令$u=y^2$，由初始条件可知$u\neq 1$，原方程化为$(x^2+1)u'=2x(u-1)$，由分离变量法和初始条件可得方程的解为$y^2-1=\pm\frac{1}{2}(x^2+1)$；

(3)令$u=\tan\frac{y^2}{x}$，原方程化为$u'=(1+u^2)\frac{u}{x}$，则方程的通解为$\sin\frac{y^2}{x}=C|x|$，其中C是任意常数；

(4)原方程可化为$(3x^2y^2dy+2xy^3dx)+(3y-6y^5)dy-(4x^3+2x)dx=0$，因此方程的通解为$x^2y^3+\frac{3}{2}y^2-y^6-x^4-x^2=C$，其中C是任意常数；

(5)令$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$，则原方程化为$\sin^2\theta d\rho=d\sin\theta$，因此方程的解为$y=0$或$(y+1)\sqrt{x^2+y^2}=Cy$，其中C是任意常数。

2.求使得微分方程

$$y^2\sin t+yf(t)\frac{dy}{dt}=0$$

是恰当方程的一切函数$f(t)$，并对于这些$f(t)$求解相应的微分方程。

解：原方程可化为$y^2\sin tdt+yf(t)dy=0$，由恰当方程的判别规则可得$f'(t)=2\sin t$，即$f(t)=-2\cos t+C$，其中C是任意常数，相应的微分方程的解为$(\frac{C}{2}-\cos t)y^2=C_1$，其中$C_1$是任意常数。

3.已知微分方程

$$f(t)\frac{dy}{dt}t^2+y=0$$

具有积分因子$\mu(t)=t$，试求一切可能的函数$f(t)$。

解：由题意可知$\frac{\partial}{\partial t}(f(t)t^3)=\frac{\partial}{\partial y}(ty)$，因此$t^3df+(3t^2f-t)dt=0$，解得$f=(\frac{1}{2}t^2+C)t^{-3}$，其中C为任意常数。

4.微分方程

$$e^t\sec y-\tan y+\frac{dy}{dx}=0$$

具有形如$e^{-at}\cos y$的积分因子，其中a是一个常数。试求a并求解这个微分方程。

解：乘上积分因子后方程变为恰当方程，由恰当方程的定义可知$-\cos ye^{-at}=-a\cos ye^{-at}$，因此$a=-1$，从而方程的解为$t+e^{-t}\sin y=C$，其中C是任意常数。

5.设$f_1(z), f_2(z)$连续可微，$\phi(x,y)=(f_1(xy)-f_2(xy))xy\neq 0$。求证：函数$\frac{1}{\phi(x,y)}$是方程

$$f_1(xy)ydx+f_2(xy)xdy=0$$

的一个积分因子。

证明：利用定义易得所要结论。

6.设$M(x,y), N(x,y)$是m次齐次函数，其中$m\neq 1$。求证：若方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

是恰当方程，则其通解为

$$xM(x,y)+yN(x,y)=C(\text{C是常数})$$

证明：由于

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1}$$

是恰当方程，则

$$(1+m)[M(x,y)dx+N(x,y)dy]=0 \tag{2}$$

也是恰当方程，由M, N为m次齐次函数知

$$\begin{cases} M(tx,ty)=t^m M(x,y) \\ N(tx,ty)=t^m N(x,y) \end{cases}$$

对两边关于t求导可得

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial(tx)}x+\frac{\partial M}{\partial(ty)}y=mt^{m-1}M \\ \frac{\partial N}{\partial(tx)}x+\frac{\partial N}{\partial(ty)}y=mt^{m-1}N \end{cases}$$

令$t=1$，得

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial(x)}x+\frac{\partial M}{\partial(y)}y=mM \\ \frac{\partial N}{\partial(x)}x+\frac{\partial N}{\partial(y)}y=mN \end{cases}$$

又由于$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，则

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial(x)}x+\frac{\partial N}{\partial(y)}y=mM \\ \frac{\partial M}{\partial(y)}x+\frac{\partial N}{\partial(y)}y=mN \end{cases} \tag{3}$$

设(2)的通解为$F(x,y)=C$，则$\frac{\partial F}{\partial x}=(1+m)M$, $\frac{\partial F}{\partial y}=(1+m)N$，利用(3)可得

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial(xM+yN)}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial(xM+yN)}{\partial y} \end{cases}$$

即$xM+yN=C$为(2)的通解，因此$xM+yN=\frac{c}{1+m}$为(1)的通解，其中C为任意常数。

7.设$r,s,m,n,\rho,\sigma,\mu,\nu$是任意常数，$m\nu-n\mu\neq 0$。试求方程

$$x^r y^s(mydx+nxdy)+x^\rho y^\sigma(\mu ydx+\nu xdy)=0$$

的一个形如$x^\alpha y^\beta$的积分因子($\alpha\beta$是常数)，并进而求出方程的通解。

解：由题意可得

$$(x^{\alpha+r}y^{\beta+s+1}m+x^{\alpha+\rho}y^{\sigma+\beta+1}\mu)dx+(x^{\alpha+r+1}y^{s+\beta}n+x^{\alpha+\rho 1}y^{\sigma\beta}\nu)dy=0$$

因为是恰当方程且$m\nu\neq n\mu$，所以

$$\begin{cases} m(s+\beta+1)=n(\alpha+r+1) \\ \mu(\sigma+\beta+1)=\nu(\sigma+\beta+1) \end{cases}$$

求解可得

$$\begin{cases} \alpha=\frac{1}{n\mu-m\nu}[m\mu(s-\sigma)+m\nu(\rho+1)-n\mu(r+1)] \\ \beta=\frac{1}{n\mu-m\nu}[m\nu(s+1)-n\mu(\sigma+1)+n\nu(\rho-r)] \end{cases}$$

利用恰当方程的解法可得通解为(C为任意常数)：当$\alpha+r+1\neq 0$且$\alpha+\rho+1\neq 0$时

$$\frac{m}{\alpha+r+1}x^{\alpha+r+1}y^{\beta+s+1}+\frac{\mu}{\alpha+\rho+1}x^{\alpha+\rho+1}y^{\sigma+\beta+1}=C$$

当$\alpha+r+1=0$且$\alpha+\rho+1=0$时

(1)当$s+\beta+1=0$

(1.1)当$\sigma+\beta+1=0$时

$$m\ln|x|y^{\beta+s+1}+\mu\ln|x|y^{\sigma+\beta+1}+n\ln^{|y|}+\nu\ln|y|=C$$

(1.2)当$\mu=0$时

$$m\ln|x|y^{\beta+s+1}+n\ln^{|y|}+\frac{1}{\sigma+\beta+1}y^{\sigma+\beta+1}\nu=C$$

(2)当$m=0$

(2.1)当$\sigma+\beta+1=0$时

$$\mu\ln|x|y^{\sigma+\beta+1}+\frac{1}{\beta+s+1}y^{\beta+s+1}+\nu\ln|y|=C$$

(2.2)当$\mu=0$时

$$\frac{n}{\beta+s+1}y^{\beta+s+1}+\frac{\nu}{\sigma+\beta+1}y^{\sigma+\beta+1}=C$$

当$\alpha+r+1=0$，$\alpha+\rho+1\neq 0$时，

(1)当$\beta+s+1=0$

$$m\ln|x|+\frac{\mu}{\alpha+\rho+1}x^{\alpha+\rho+1}y^{\sigma+\beta+1}+n\ln|y|=C$$

(2)当$m=0$

$$\frac{\mu}{\alpha+\rho+1}x^{\alpha+\rho+1}y^{\sigma+\beta+1}+\frac{n}{\beta+s+1}y^{\beta+s+1}=C$$

当$\alpha+r+1\neq 0$，$\alpha+\rho+1=0$时，

(1)当$\sigma+\beta+1=0$

$$\frac{m}{\alpha+r+1}x^{\alpha+r+1}y^{\beta+s+1}+\mu\ln|x|+\nu\ln|y|=C$$

(2)当$\mu=0$

$$\frac{m}{\alpha+r+1}x^{\alpha+r+1}y^{\beta+s+1}+\frac{\nu}{\sigma+\beta+1}y^{\sigma+\beta+1}=C$$

第三章

3.2

1. 求证, 若把Euler折线作如下修正:

$$\varphi(x_0) = y_0$$
$$\varphi(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad x_0 < x \le x_1$$
$$\varphi(x) = \varphi(x_{k-1}) + \frac{f(x_{k-2}, \varphi(x_{k-2})) + f(x_{k-1}, \varphi(x_{k-1}))}{2}(x - x_{k-1}), \quad x_{k-1} < x \le x_k, \ \ k = 2, 3, \ldots, n$$

则存在定理仍然成立。

证明：我们先证明这样的折线在区间$y_0 \le y \le y_0 + \alpha$上是Cauchy问题的近似解，即$\varphi_n(x)$满足

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_n(x))dx + \delta_n(x)$$

其中的$\delta_n(x)$是当$n \to \infty$时的无穷小量。事实上，

$$\begin{aligned}\delta_n(x) &= \int_{x_0}^{t_1}[f(x_0, y_0) - f(x, \varphi_n(x))]dx + \sum_{i=2}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\frac{f(x_{i-2}, \varphi(x_{i-2})) + f(x_{i-1}, \varphi(x_{i-1}))}{2} - f(x, \varphi_n(x))]dx \\ &+ \int_{x_N}^{x}[\frac{f(x_{N-2}, \varphi(x_{N-2})) + f(x_{N-1}, \varphi(x_{N-1}))}{2} - f(x, \varphi_n(x))]dx\end{aligned}$$

由折线的构造，我们知道，不等式

$$|x - x_{i-1}| \le \frac{\alpha}{n}, |\varphi_n(x) - y_{i-1}| \le M|y - y_{i-1}| \le \frac{M\alpha}{n}$$

在区间$x_{i-1} \le x \le x_i$上成立。因此，利用$f(x, y)$在R上的一致连续性即得，任给$\varepsilon > 0$，存在正整数$K = K(\varepsilon)$，当$n > K$时，在区间$x_{i-1} \le x \le x_i$上一致地

$$|f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x, \varphi_n(x))| \le \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

这样，当$n > K$时

$$
\begin{aligned}
|\delta_n(x)| &\leq \int_{x_0}^{x_1} |f(x_0,y_0) - f(x,\varphi_n(x))|dx + \sum_{i=2}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{f(x_{i-2},\varphi(x_{i-2})) + f(x_{i-1},\varphi(x_{i-1}))}{2} - f(x,\varphi_n(x))|dx \\
&+ \int_{x_N}^{x} |\frac{f(x_{N-2},\varphi(x_{N-2})) + f(x_{N-1},\varphi(x_{N-1}))}{2} - f(x,\varphi_n(x))|dx \\
&\leq N\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

成立。

接下来的证明与课本中的几乎一样。

2. 利用Ascoli引理证明下面的结论：

设一函数序列在有限区间I上是一致有界和等度连续的，则在I上它至少有一个一致收敛的子序列。并举例说明，当I是无限区间时上面的结论不一定成立。

证明：不妨设$I = [a,b)$。由Ascoli引理的条件知，只须证明函数序列中的任一个$f(x) = \varphi_n(x)$可延拓成$[a,b]$上的连续函数，即极限$\lim\limits_{x\to b-} f(x)$存在即可。

任取一列数$x_n, n = 1,2,\ldots,$ 使得对任意n，有$a \leq x_n < b$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. 由等度连续性知，序列$f(x_n)$是Cauchy序列, 故存在$A$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，再根据等度连续性易得$\lim\limits_{x\to b-} f(x) = A$.

举例：函数序列$f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$在R上收敛到0，但不是一致收敛。

3. 试计算初值问题$y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$的前两次迭代。

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x (s^2 + 1^2)ds = 1 + x + \frac{x^3}{3} \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x (s^2 + (1 + s + \frac{s^3}{3})^2)ds \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7
\end{aligned}
$$

4. 试计算初值问题$y' = e^x + y^2, y(0) = 0$的前三次迭代。

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 0 \\
y_1(x) &= \int_0^x e^s ds = e^x - 1 \\
y_2(x) &= \int_0^x (e^s + (e^s - 1)^2)ds \\
&= \frac{1}{2} + x - e^x + \frac{1}{2}e^{2x} \\
y_3(x) &= \int_0^x [e^s + (\frac{1}{2} + s - e^s + \frac{1}{2}e^{2s})^2]ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -2-\frac{11}{48}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{x^3}{3}+2e^x \\
& +\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{16}e^{4x}-2te^x+\frac{1}{2}xe^{2x}.
\end{aligned}
$$

5. 试证明下列给定的初值问题在指定的区间上存在解$y(x)$：

(1). $y'=y^2+\cos x^2, y(0)=0; 0\le x\le \frac{1}{2}$.

(2). $y'=e^{-x^2}+y^2, y(0)=0; 0\le x\le \frac{1}{2}$.

(3). $y'=e^{-x^2}+y^2, y(1)=0; 0\le x\le \frac{\sqrt{e}}{2}$.

(4). $y'=e^{-x^2}+y^2, y(0)=1; 0\le x\le \frac{\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})^2}$.

(5). $y'=e^{-x}+\ln(1+y^2), y(0)=0; 0\le x\le \infty$.

证明：

(1) 由存在定理知，$\alpha=\min(a,\frac{b}{M})$, $M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$。取$a=1,b=1$，即得$M=2,\alpha=\frac{1}{2}$，故在$0\le x\le\frac{1}{2}$存在解$y(x)$.

(2) 取$a=1,b=1$，即得.

(3) 此题有误，因为1不在区间$0\le x\le\frac{\sqrt{e}}{2}$中.

(4) 取$a=1,b=1$，即得.

(5)$R=\{(x,y)|0\le x\le\infty,|y|\le b\}, M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=1+\ln(1+b^2)$，故$\alpha=\min\{\infty,\frac{b}{1+\ln(1+b^2)}\}$,取$b=\infty$，即得.

6. 试说明：Picard迭代序列中的第一项$y_0(x)$可以取为定义于$J=[x_0-\alpha,x_0+\alpha], D=[y_0-b,y_0+b]$上且满足初值条件$y(x_0)=y_0$的任一连续且导数有界的函数。

证明：设$k(x)$为满足条件的函数，构造迭代序列：

$$
y_0(x) \quad = \quad k(x),\cdots,y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_{n-1}(s))ds(n=1,2,\cdots)
$$

由数学归纳法知：$\{y_n(x)\}$为J上的连续函数列，且为一致有界，一致收敛的Cauchy列。其余证明同课本类似。

7. 考虑初值问题

$$
y'=x^2+y^2,\ y(0)=0,
$$

并且设R是矩形域$0\le x\le a, -b\le y\le b$.

(a) 试证明：对于

$$
\begin{gathered}
0\le x\le\min(a,\frac{b}{a^2+b^2}), \\
y'=x^2+y^2, y(0)=0,
\end{gathered}
$$

的解$y(x)$存在。

(b) 证明：当a固定时，$\frac{b}{a^2+b^2}$的最大值是$\frac{1}{2a}$. (此题原文为$\frac{b}{a^2+a^2}$，可能有误)

(c) 证明：当$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$\alpha=\min(a,\frac{1}{2a})$取最大值。

(d) 结论：当$0\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$时，

$$y'=x^2+y^2,\ y(0)=0,$$

的解$y(x)$存在。

这一题的目的好象不明确，因为相关结论可由皮亚诺定理得到。

证明：(a) 利用皮亚诺定理即得。

(b) 对b求导$\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)'=\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$

显然，$b=a$时有最大值$\frac{1}{2a}$.

(c) 由$a=\frac{1}{2a}$可得$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$时取最大值。

8. 试构造初值问题$y'=2x(y+1),y(0)=0$的毕卡迭代，并且证明他们收敛于解$y(x)=e^{x^2}-1$。

证明. 用归纳法：

$y_0=0,$

$y_1=\int_0^x 2xdx=x^2,$

$y_2=\int_0^x 2x(x^2+1)dx=\frac{x^4}{2}+x^2=\frac{(x^2)^2}{2}+x^2,$

假设$n=k$时, $y_k=\sum_{j=1}^k\frac{(x^2)^j}{j!}$,则

$y_{k+1}=\int_0^x 2x(\sum_{j=1}^k\frac{(x^2)^j}{j!})dx=\sum_{j=1}^k\frac{(x^2)^{j+1}}{(j+1)!}$

故有$y_n=\sum_{j=1}^n\frac{(x^2)^j}{j!}$，令$n\to\infty$, 即得$y(x)=e^{x^2}-1$.

9. 设$y(x)$是$t_0\le x\le x_1$上的连续函数，且当$x_0\le x\le x_1$时

$$|y(x)|\le M+K\int_{x_0}^x|y(\tau)|d\tau,$$

此处M,K都是非负常数。试用迭代法(即逐步逼近法)证明：当$x_0\le x\le x_1$时,

$$|y(x)|\le M\exp(K(x-x_0)).$$

证明：利用已知条件可得

$$\begin{aligned}|y(x)| &\le M+K\int_{x_0}^x|y(\tau)|d\tau\\ &\le M+K\int_{x_0}^x(M+K\int_{x_0}^\tau|y(\xi)|d\xi)d\tau\\ &\le M+KM(x-x_0)+K^2\int_{x_0}^x\int_{x_0}^\tau|y(\tau)|d\xi d\tau\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

由迭代法我们有：

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leq M + KM(x-x_0) + \cdots + \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \cdots \\ &= Me^{K(x-x_0)}\end{aligned}$$

10. 证明:Picard迭代序列中第k项$y=\varphi_k(x)$与真解$y=\varphi(x)$的误差估计式：

$$|\varphi(x)-\varphi_k(x)| \leq \frac{MN^k}{(K+1)!}|x-x_0|^{k+1},$$

其中N是Lipschitz常数，M是$|f(x,y)|$在$R:|x-x_0|\leq a,\ |y-y_0|\leq b$上的上界。

证明. 对n用归纳法

$$|\varphi(x)-\varphi_0(x)| \leq \int_{x_0}^{t} M ds = M(x-x_0)$$

即$n-0$时成立。现假设$n=k$时结论成立，则

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi_{k+1}(x)| &= \Big|\int_{x_0}^{x}\big[f(s,\varphi(s))-f(s,\varphi_{n-1}(s))\big]ds\Big| \\ &\leq \int_{x_0}^{x}\big|f(s,\varphi(s))-f(s,\varphi_k(s))\big|ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x} N\big|\varphi(s)-\varphi_k(s)\big|ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x} N\frac{MN^k}{(K+1)!}|x-x_0|^k \\ &= \frac{MN^{k+1}}{(K+2)!}|x-x_0|^{k+1}.\end{aligned}$$

11. 利用Osgood条件讨论下列微分方程满足初值条件$y(0)=0$的解唯一性问题：

$$(a)\quad \frac{dy}{dx}=|y|^{\alpha},(\text{ 常数}\alpha>0);$$

$$(b)\quad \frac{dy}{dx}=\begin{cases}0,\ \text{当}y=0,\\ y\ln|y|,\ \text{当}y\neq 0.\end{cases}$$

证明：(a)

(b)因为

$$|y_1\ln|y_1|-|y_2\ln|y_2||=|y_1\ln|y_1|-y_1\ln|y_1-y_2|+y_1\ln|y_1-y_2|-y_2\ln|y_1-y_2|+y_2\ln|y_1-y_2|-y_1\ln|y_2||\leq|y_1||\ln\frac{y_1-y_2}{y_1}|+|y$$

令$F(r)=2r+\ln r$则可得证。

12.(a)设$f(x),g(x),y(x)$是$x_0\le x\le x_1$上的非负连续函数.求证若

$$y(x)\le g(x)+\int_{x_0}^{x} f(\tau)y(\tau)\,d\tau \quad (x_0\le x\le x_1)$$

则

$$y(x)\le g(x)+\int_{x_0}^{x} f(\tau)g(\tau)e^{\int_\tau^x f(s)ds}\,d\tau \quad (x_0\le x\le x_1)$$

(b)在(a)的假设下,若$g(x)$还是单调下降的,则

$$y(x)\le g(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau}$$

证明:(a)设$u(x)=\int_{x_0}^{x} f(s)x(s)\,ds$则有

$$u'(x)=f(x)y(x),\quad u'(x)-fu=f(y-u)$$

$$\Longrightarrow u'(x)-fu\le fg$$

$$\Longrightarrow u'(x)\le fg+fu$$

两边乘以$e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}$

$$u'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}\le fge^{-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}+fue^{-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}$$

关于x从x_0到x积分

$$u(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}\le\int_{x_0}^{x} f(s)g(s)e^{-\int_{x_0}^{s} f(\xi)\,d\xi}\,ds$$

$$\Longrightarrow u(x)\le\int_{x_0}^{x} f(s)g(s)e^{-\int_{x_0}^{s} f(\xi)\,d\xi}\,ds$$

又因为$u(x)>y(x)-g(x)$

$$\Longrightarrow y(x)\le g(x)+\int_{x_0}^{x} f(s)g(s)e^{-\int_{x_0}^{s} f(\xi)\,d\xi}\,ds$$

(b)$y(x)\le g(x)+\int_{x_0}^{x} f(s)g(s)e^{-\int_{x_0}^{s} f(\xi)\,d\xi}\,ds$

$\le g(x)+g(x)\int_{x_0}^{x} f(s)e^{-\int_{x_0}^{s} f(\xi)\,d\xi}\,ds$

$=g(x)(1+\int_{x_0}^{x} f(s)e^{-\int_{x_0}^{s} f(\xi)\,d\xi}\,ds)$

$=g(x)(1-\int_{x_0}^{x}(e^{\int_s^t f(\xi)d\xi})'_s\,ds)$

$=g(x)e^{\int_s^x f(\xi)d\xi})'_s\,ds$

3.3

1.(a)试确定适当的x_0的值,使得方程

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4}(x_n^2 - 2)$$

定义的逐次迭代x_n收敛于$\sqrt{2}$.

(b)选取$x_0 = 1.4$.试证明:为了求$\sqrt{2}$到11位有效小数,要求30次迭代.

证明:(a)设$f(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 2)$,则$f^{'}(x) = 1 - \frac{x}{2}$,若要使得$|f^{'}(x)| \leq \lambda < 1$,仅需$0 < x_0 < 4$.

(b)$x_{n+1} - \sqrt{2} = (x_n - \sqrt{2})(1 - \frac{\sqrt{2}+x_n}{4})$,从而$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|x_0 - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \times 0.02$,$|x_{30} - \sqrt{2}| \leq 0.02 \times \frac{1}{2^30} < 2 \times 10^{-11}$.

2.试确定适当的α的值,使得由方程

$$x_{n+1} = x_n - \alpha(x_n^2 - 3), x_0 = 1.7$$

定义的逐次迭代x_n收敛于$\sqrt{3}$.

证明:设$f(x) = x - \alpha(x^2 - 3)$,则$f^{'}(x) = 1 - 2\alpha x$,若要使得$|f^{'}(x)| \leq \lambda < 1$,又$x_n$单调递增收敛到$\sqrt{3}$,则$0 < \alpha\sqrt{3} < 1$.有$0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.数π是方程

$$tan\frac{x}{4} - tan^{-1}\frac{x}{4} = 0$$

的根.试利用牛顿法求π到八位有效小数.

证明:设$g(x) = tan\frac{x}{4} - tan^{-1}\frac{x}{4}$,则$g^{'}(x) = \frac{1}{4\cos^2(x/4)\sin^2(x/4)}$,牛顿迭代序列为$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g^{'}(x_n)} = x_n - \sin(x_n)$,从而有估计$|x_n - \pi| \leq |x_{n-1} - \pi| \leq |x_0 - \pi|^n$

所以若取$x_0 = 3.1415$,则只需取$n = 2$,即迭代两次即可得到八位有效小数.

4.(a)试证明:在区间$0 \leq x \leq 1$内,方程$x = \cos x$具有唯一的根$x = \eta$

(b)设$x_{n+1} = \cos x_n, n = 0, 1, 2, \cdots$,且$0 < x_0 < 1$,所以得出结论:当$n \to \infty$时,$x_n \to \eta$.

证明:(a)设$f(x) = x - \cos x$,则$f(x)$在$[0,1]$上是严格递增的,连续的;又因为$f(0) = -1 < 0, f(1) > 0$,所以由介值定理存在唯一的$x = \eta$,使得$x = \cos x$.

(b)$0 < x_0 < 1$,所以$x_1 = \cos x_0 \in (0,1)$,由归纳法可知$0 < x_n < 1$.所以$|(\cos x)'| = |\sin x| < \sin 1, x \in (0,1)$,进而存在唯一的$\eta$使得$x_n \to \eta$且$\eta = \cos\eta$.

3.4

1.讨论下列微分方程解的存在区间:

$$(1)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$(2)\quad \frac{dy}{dx}=y(y-1)$$

$$(3)\quad \frac{dy}{dx}=y\sin(xy)$$

$$(4)\quad \frac{dy}{dx}=1+y^2$$

证明:设初值为(x_0,y_0),矩形区域$R=\{(x,y):|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$,其中$a,b>0$待定.$M=\sup_{(x,y)\in R}|f(x,y)|,\alpha=\min\{a,\frac{b}{M}\}$.

(1);$(x_0,y_0)\neq(0,0)$;假定(x_0,y_0)不在$y=0$坐标轴上;若$a\le|x_0|$,则$b<|y_0|,M=\frac{1}{(|y_0|-b)^2},\alpha=\infty$,则此时解的存在区间为$(-\infty,\infty)$;假定$y_0=0$,则$x_0\neq 0,a<|x_0|,b>0$;从而$\alpha=\min\{a,\frac{b}{(|x_0|-a)^2}\}$,则此时解的存在区间为$(2x_0,0)$或$(0,2x_0)$.

(2);a可取得适量大若$y_0<0;M=(y_0-b)(y_0-b-1)$,此时取$b=\sqrt{y_0^2-y_0},\alpha=\frac{1}{2\sqrt{y_0^2-y_0}+1-2y_0}$,则此时解的存在区间为$(x_0-\frac{1}{2\sqrt{y_0^2-y_0}+1-2y_0},x_0+\frac{1}{2\sqrt{y_0^2-y_0}+1-2y_0})$;

(3)a可取得适量大,$\alpha=\min\{a,\frac{b}{(|y_0|+b}\}$,取$b$足够大,则可取$\alpha=1$,则此时解的存在区间为$(x_0-1,x_0+1)$.

(4);a可取得适量大,若$y_0<0;M=1+(y_0-b)^2,\alpha=\frac{b}{b^2-2y_0b+y_0^2+1}$,从而取$b=\sqrt{1+y_0^2};\alpha=\frac{\sqrt{1+y_0^2}+y_0}{2}$;则此时解的存在区间为$(x_0-\frac{\sqrt{1+y_0^2}+y_0}{2},x_0+\frac{\sqrt{1+y_0^2}+y_0}{2})$ 若$y_0\ge 0;M=1+(y_0+b)^2,\alpha=\frac{b}{b^2+2y_0b+y_0^2+1}$,从而取$b=\sqrt{1+y_0^2};\alpha=\frac{\sqrt{1+y_0^2}-y_0}{2}$;则此时解的存在区间为$(x_0-\frac{\sqrt{1+y_0^2}-y_0}{2},x_0+\frac{\sqrt{1+y_0^2}-y_0}{2})$

2.设在区域$\{(x,y):x_0\le x<\infty,-\infty<y<+\infty\}$上连续函数$|f(x,y)|\le K$.试证明:对于一切$x\ge x_0$,初值问题

$$y'=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

的解$y(x)$存在.

证明:我们用反证法,设$y=\phi(x)$的右饱和区间为$[x_0,b],b<\infty$,则

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\phi(s))\,ds,\quad x_0\le x<b$$

$$|\phi(x)|\le|y_0|+K(x-x_0)\le|y_0|+K(b-x_0)$$

在区间$[x_0,b)$上有界,即$\limsup_{x\to b-}|\phi(x)|$存在,则$(x,\phi(x))$到$\partial G$的距离趋于0.这与假设矛盾.

3.曲线$x^2+y^2=1$是微分方程$xdx+ydy=0$的一条积分曲线，它在区域$G=\{(x,y):x^2+y^2>0\}$的内部，但没有延伸到G的边界,这一点是否与上述的延伸定理相矛盾?试说明理由.

证明:不矛盾.

微分方程$xdx+ydy=0$不等价于$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.而延伸定理是针对$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$类型的微分方程的.

4.试证明：方程$\frac{dy}{dx}=y^2(1-y)^3e^y$以$(x_0,y_0)$为初值的右行解的最大存在区间为$[x_0,+\infty)$，其中$x_0\geq 0$，$y_0$ 任意给定。（题目作了替换）

证明：易知函数$f(y)=y^2(1-y)^3e^y$及其导数在整个(x,y)平面上连续，从而$Cauchy$问题的解是唯一的。

显然，$y\equiv 0,y\equiv 1$是方程的两个特解。

若点(x_0,y_0)在$y=0$下方。解曲线的斜率大于零，则解曲线单调递增，但又不能越过$y=0$，从而有界，由延展定理可知，右行解最大存在区间为$[x_0,+\infty)$。其它情形可类似分析。

5.设初值问题

$$(E):\quad \frac{dy}{dx}=(y^2-2y-3)e^{(x+y)^2},\quad y(x_0)=y_0$$

的解的最大存在区间为$a<x<b$,其中(x_0,y_0)为平面上的任一点,则$a=-\infty$和$b=\infty$至少有一个成立.

证明:函数$f(x,y)=(y^2-2y-3)e^{(x+y)^2}$在全平面上连续,$f'_y=2(y-1)e^{(x+y)^2}+2(x+y)(y^2-2y-3)e^{(x+y)^2}$在全平面上连续. 从而初值问题的积分曲线是唯一的.显然$y=-1$和$y=3$是两个解,则其他积分曲线不会与它们相交.

(1)若(x_0,y_0)在$y=-1$下方.

解曲线斜率$\frac{dy}{dx}>0$,这说明$y=y(x)$是单调递增的,但又不能越过$y=-1$,则由定理3.5.1,$b=\infty$.

(2)若(x_0,y_0)在$y=-1$与$y=3$之间或$y=-1$或$y=3$上.

由定理3.5.1,可知$a=-\infty,b=\infty$.

(3)若(x_0,y_0)在$y=3$上方.

同(1)可知,$a=-\infty$.

6.假设$a(x)$和$b(x)$在区间I上连续，证明线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x),\quad (x\in I)$$

的每一个解$y=y(x)$的(最大)存在区间为I。

证明:设区间(a_1,b_1)满足$x_0\in(a_1,b_1)\subset[\alpha,\beta]\subset I$,则函数$f(x,y)=a(x)y+b(x)$在区域$\{(x,y)|a_1<x<b_1,-\infty<y<\infty\}$上满足利普希兹条件.由定理3.2.4知上述初值问题在(a_1,b_1)内存在唯一.再由(a_1,b_1)的

任意性知上述初值问题在I上存在且唯一.

3.5

1.设函数$f(x,y)$在区域$G=\{a<x<b,|y|<+\infty\}$上连续，$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 是方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$经过G中同一点(x_0,y_0)的两个解，其中$\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$。

试证：区域G中介于$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$间的部分被方程经过$(x_0,y_0)$的解所充满。

证明：设两解的公共存在区间为$|x-x_0|\le h$，为简单下面证明我们仅考虑解的右行存在区间。

反正法：若不然，存在(x_1,y_1)满足$x_0<x_1<x_0+h,\varphi_1(x_1)<y_0<\varphi_2(x_1)$但不存在同时过$(x_0,y_0)$，$(x_1,y_1)$的解。由解的存在定理，过点$(x_1,y_1)$存在解$u(x)$，又由解的延展定理$u(x)$必与$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$中的一个相交，不妨设与$\varphi_2(x)$交于点$(\xi,\varphi_2(\xi))$，则在交点处两曲线相切。在$[x_0,\xi]$上取$\varphi_2(x)$，$[\xi,x_1]$ 上取$u(x)$，则此曲线为方程的解曲线，且同时过(x_0,y_0)，(x_1,y_1)两点。此与假设矛盾。2.设数值函数$f(x,y)$在整个(x,y)平面上连续,求证对于任何x_0,只要$|y_0|$适当小,方程

$$\frac{dy}{dx}=(y^2-e^{2x})f(x,y)$$

满足初值条件$y(x_0)=y_0$的解必可延拓到$x_0\le x<\infty$.

证明:对任意的x_0,取$y_0\in[-e_0^x,e_0^x]$.

用反证法.若右行解的最大存在区间为$[x_0,x_1),x_1<\infty$.则可知当$x\to x_1-,|y(x)|\to\infty$.对$y=y(x)$与$y=\pm e^x$相交的点均进行如下延拓下去:若此时$f(x,y(x))\ne 0$,则沿着曲线$y(x)=\pm e^x$延拓,直至$f(x,y(x))=0$.这样我们就构造出一个以$y=\pm e^x$为上下解的解,这与假设矛盾.

3.设$y=y(x)$是方程$y'=h(x)g(y)$满足初始条件$y(0)=y_0$的解，其中$h(x)$在$0\le x\le a$上连续,$g(y)$在$-\infty<y<\infty$上连续且$h(x)>0,g(y)>0$.令

$$H(x)=\int_0^x h(\tau)d\tau$$

设对于任何ξ,积分

$$G(\xi)=\int_\xi^\infty\frac{d\tau}{g(\tau)}$$

恒存在. 求证：(1)如果$G(y_0)>H(a)$,则$y(x)$在$0\le x\le a$上有定义;

(2)如果$G(y_0)\le H(a)$,则$y(x)$在$0\le x<H^{-1}(G(y_0))$上有定义.（题目稍作修正）

证明:将方程分离变量并两边积分，得：

$$G(y_0)-G(y(x))=H(x)$$

由条件可知，$H(x)$恒正且单调上升，$G(\xi)$恒正且单调下降。

(1).如果$G(y_0) > H(a)$，则有$G(y(a)) > 0$，即$G(y(x))$在$0 \le x \le a$上有定义，所以$y(x)$在$0 \le x \le a$上有定义。

(2).如果$G(y_0) \le H(a)$，则有$G(y(a)) \le 0$，又$G(\xi)$恒正，所以$y(a)$不存在，则$y = y(x)$必在$0 \le x \le b < a$上有定义,$x = b$ 满足$G(y_0) = H(b)$，故$b = H^{-1}(G(y(0)))$，所以$y = y(x)$在$0 \le x < H^{-1}(G(y_0))$上有定义.

3.6

1.设$f(x,y)$在区域R上连续，微分方程$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$经过R内任何一点的积分曲线都是（存在）唯一的，试证微分方程的解对初值是连续依赖的。

证明：用反证法.假定$y = \psi(x)$是以$(x_0, y_0) \in R$为初值的一个解, 存在包含初始时刻x_0的闭区间$[a,b]$,存在$\epsilon_0 > 0$,对任意的n,存在$(\xi_n, y_n(\xi_n))$,使得$|(\xi_n, y_n(\xi_n)) - (x_0, y_0)| \le \frac{1}{n}$,且以$(\xi_n, y_n(\xi_n))$为初值的解曲线$y = \phi(x; \xi_n, y_n(\xi_n))$必然会从$y = \psi(x) \pm \epsilon_0$边界穿出.则每个右行解或左行解曲线的首个穿出点必然有确界,则在以确界点的正下(或上)方包含在$\psi(x) - \epsilon_0 < y < \psi(x) + \epsilon_0$内部的任一点为初值的解曲线,由延拓定理必然会经过$(x_0, y_0)$,这与唯一性矛盾.

2.设给定方程

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx)$$

试求

$$\left[\frac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)\right]_{t_0=0, x_0=0} \qquad \left[\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)\right]_{t_0=0, x_0=0}$$

解：课本例题。3.叙述并证明解关于参数的解析性定理。（略）

4.设纯量函数$y = y(x, \eta)$(η为实参数)是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$$

满足初值条件$y(0) = \eta$的解。证明：不等式

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x, \eta) > 0$$

对一切x和η都成立。

证明：由于

$$y(x, \eta) = y(0) + \int_0^x \sin(sy)\, ds = \eta + \int_0^x \sin(sy)\, ds$$

则

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x, \eta) = 1 + \int_0^x s\cos(sy) \frac{\partial y}{\partial \eta}\, ds$$

令$z(x,\eta)=\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta)$，则上式化为

$$z(x,\eta)=1+\int_0^x s\cos(sy)z\,ds$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,\eta)=x\cos(xy)z, \qquad z(0)=1$$

因此$z(x,\eta)=\exp\left(\int_0^x s\cos(sy)\,ds\right)>0$，
即对一切x和η都有

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(x,\eta)>0$$

3.7

1.2.（略）3.对n阶线性微分方程组的初值问题，试叙述并证明解的存在和唯一性定理。
叙述：存在唯一性定理：线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}+\mathbf{B}(t)$$

在区间$a\le t\le b$上有且仅有一个满足初值条件

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$$

的解$\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)$，其中$t_0\in[a,b],\mathbf{X}_0\in\mathbf{R}^n,\mathbf{X}(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^T,t\in[a,b]$是$n$维向量函数，以及$\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t)$分别是给定的$n\times n$实矩阵和$n$维实向量函数，且关于$t$是连续的。
证明：定义n维向量$\mathbf{X}(t)$的模为$||\mathbf{X}(t)||=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t)|$，$\mathbf{A}$的模为$||\mathbf{A}(t)||=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(t)|$。线性微分方程组的初始问题等价于积分方程

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}_0+\int_{t_0}^t(\mathbf{A}(s)\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}(s))\,ds$$

用逐次逼近法求解这个积分方程，即

$$\mathbf{X}_n(t)=\mathbf{X}_0+\int_{t_0}^t(\mathbf{A}(s)\mathbf{X}_{n-1}(s)+\mathbf{B}(s))\,ds \qquad n=1,2,\cdots$$

因此，若$\mathbf{X}_{n-1}(t)$是连续的，则$\mathbf{X}_n(t)$也是连续的，从而得到一逼近向量函数列$\{\mathbf{X}_{n-1}(t)\}$，令$A=\sup\limits_{t\in[a,b]}\mathbf{A}(t)$，则

$$||\mathbf{X}_n(t)-\mathbf{X}_{n-1}(t)||\le\int_{t_0}^t||\mathbf{A}(s)||\,||\mathbf{X}_{n-1}(s)-\mathbf{X}_{n-2}(s)||\,ds$$

由归纳法即得

$$||\mathbf{X}_n(t)-\mathbf{X}_{n-1}(t)||\le\frac{(A(b-a))^n}{n!}$$

当$n\to\infty$时，$\mathbf{X}_n(t)$按模收敛于$\mathbf{X}(t)$，并且$\mathbf{X}(t)$关于$t\in[a,b]$一致连续，且$\mathbf{X}(t)$是线性微分方程组的解。
下证唯一性，设$\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)$都是初始问题的解，则

$$\mathbf{X}(t)-\mathbf{Y}(t)=\int_{t_0}^{t}[\mathbf{A}(s)(\mathbf{X}(s)-\mathbf{Y}(s))]\,ds$$

由于$\mathbf{X}(t)$是连续的，由归纳法可得

$$||\mathbf{X}(t)-\mathbf{Y}(t)||\leq\sup_{t\in[t_0,t]}||\mathbf{X}(t)-\mathbf{Y}(t)||\frac{[A(t-t_0)]^n}{n!}$$

令$n\to\infty$，我们可得$\mathbf{X}(t)=\mathbf{Y}(t)$。
4.陈述并详细证明微分方程组的$Cauchy$定理。
$Cauchy$定理：考虑微分方程组的初值问题

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n),\qquad y_k(x_0)=y_0^k\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

假设右端函数$f_k,(k=1,2,\cdots,n)$在区域

$$|x-x_0|\leq\alpha,\ |y_k-y_0^k|\leq\beta$$

内可以展成收敛的幂级数，则初值问题在x_0的领域$|x-x_0|<\rho$内存在一组唯一的解析解$y_k=y_k(x)$，其中$\rho=$。
证明：

5.设初值问题

$$(E):\ y''+p(x)y'+q(x)y=0,\quad y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'$$

其中$p(x)$和$q(x)$在区间$|x-x_0|<a$内可以展成$(x-x_0)$的收敛的幂级数，则(E)的解$y=y(x)$在$|x-x_0|<a$内存在且唯一，而且可展成$(x-x_0)$的收敛的幂级数。

证明：将方程化为方程组。类比$Cauchy$存在定理可得证明。6.试述高阶正规形方程组的延展定理，并根据它证明：
设$\bar{G}$是(x,y)平面的某有界闭域，而数值函数$f(x,y,y')$在

$$(x,y)\in\bar{G},\quad |y'|<\infty$$

上连续，如果当方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)$$

的积分曲线$y=\varphi(x)$还停留在$\bar{G}$内部时，$\left|\frac{dy}{dx}\right|$恒小于某常数$M$，则积分曲线$y=\varphi(x)$ 在向左右延展时必可达到$\bar{G}$的边界。

证明：原方程可化为方程组:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{dy}{dx} \\ y_2 = f(x,y,y_1) \end{cases}$$

因为G为有界闭域，且$\frac{dy}{dx}$有界，$f(x,y,y_1)$连续。则由解的延展定理可知，积分曲线左右延展可到达G的边界。

提高练习

1. 设数值函数$a(x)$在$0<x<x_1$上连续，且

$$\int_0^x a(\tau)d\tau (0<x<x_1)$$

收敛，求证方程

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y$$

满足条件$\lim_{x\to 0_+}=0$的解只有一个。

证明：令$F(x)=y(x)e^{-\int_0^x a(\tau)d\tau}$

则$F'(t)=a(x)y(x)e^{-\int_0^x a(\tau)d\tau}-a(x)y(x)e^{-\int_0^x a(\tau)d\tau}=0$

故在$0<x<x_1$上, $F(x)=C$(常数)

$$y(x)=Ce^{-\int_0^x a(\tau)d\tau}$$

由于$\lim_{x\to 0_+}=0$, 可得$C=0$, 故方程只有唯一解0.

2.设$w(x)$是区间$x_0\le x\le x_0+\alpha$上的非负函数，并且

$$w(x)\le L\int_{x_0}^x w(s)ds.$$

因为$w(x)$是连续的，所以我们能够找到这样的常数A，使得当$x_0\le x\le x_0+\alpha$时，$0\le w(x)\le A$.

(a) 试证明：$w(x)\le LA(x-x_0)$.

(b) 利用对于$w(x)$的这个估值，求得

$$w(x)\le \frac{AL^2(x-x_0)^2}{2}.$$

(c) 用数学归纳法证明：对于每一个整数n，

$$w(x) \leq \frac{1}{n!} A L^n (x - x_0)^n.$$

(d) 结论：当$x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$时, $w(x) = 0$.

证明. (a)由已知条件知

$$\begin{aligned} w(x) &\leq L \int_{x_0}^{x} w(s) ds \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} A ds \\ &= LA(x - x_0). \end{aligned}$$

(b) 根据(a)的结论知

$$\begin{aligned} w(x) &\leq L \int_{x_0}^{x} w(s) ds \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} LA(x - x_0) ds \\ &= \frac{AL^2 (x - x_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

(c)假设对整数k, 有

$$w(x) \leq \frac{1}{k!} A L^k (x - x_0)^k.$$

则

$$\begin{aligned} w(x) &\leq L \int_{x_0}^{x} w(s) ds \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} \frac{AL^k (x - x_0)^k}{k!} ds \\ &= \frac{AL^{k+1} (x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

因此，对于每一个整数n，有

$$w(x) \leq \frac{1}{n!} A L^n (x - x_0)^n.$$

(d)由于当$n \to \infty$时，

$$\frac{1}{n!} A L^n (x - x_0)^n \to \infty.$$

故当$x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$时, $w(x) = 0$. 3. 对积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x)) dx,$$

在区间$I=[x_0,x_0+h]$上(其中正数h的意义同定理3)构造序列$y_n(x)$如下：

任给正整数n，令$x_k=x_0+kd$，其中$d_n=\frac{h}{n},k=0,1,\ldots,n$。则分点

$$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n(=x_0+h)$$

把区间I分成n等份。我们从$[x_0,x_1]$到$[x_1,x_2]$，再从$[x_1,x_2]$到$[x_2,x_3],\cdots$，最后从$[x_{n-2},x_{n-1}]$到$[x_{n-1},x_0+h]$递推地定义下面的函数

$$y_n(x)=\begin{cases} y_0, x\in[x_0,x_1];\\ y_0+\int_{x_0}^{x-d_n}f(x,y_n(x))dx, x\in[x_1,x_0+h]. \end{cases}$$

我们称序列

$$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x),\cdots,(x\in I)$$

为Tonelli序列。

试利用Ascoli引理从Tonelli序列来证明皮亚诺定理。

证明. 由Tonelli序列的构造知，这族函数始终位于矩形区域

$$R=\{(x,y):\ \ |x-x_0|\le a,\ \ |y-y_0|\le b\}$$

内。由于$f(x,y)$在R上连续，设

$$M=\sup_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$$

我们先证明Tonelli序列在区间$I=[x_0,x_0+h]$上是初值问题(E)的近似解，即满足

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_n(x))dx+\delta_n(x),$$

其中$\delta_n(x)$是当$n\to\infty$时的无穷小量。事实上，由$y_n(x)$的定义可知

$$\delta_n(x)=\int_{x-d_n}^{x}f(x,y_n(x))dx,$$

因此，当$n\to\infty$时,

$$\big|\delta_n(x)\big|\le Md_n\to 0.$$

要利用Ascoli引理，还必须说明$\{y_n(x)\}$在区间上$[x_0,x_0+h]$是一致有界且等度连续的函数序列。由于这族函数始终位于矩形区域R内，因此当$x\in[x_0,x_0+h]$时，$\big|y_n(x)-y_0\big|\le b$即$\{y_n(x)\}$在区间上$[x_0,x_0+h]$上一致有界。

另一方面

$$\big|y_n(s)-y_n(t)\big| = \big|\int_{t-d_n}^{s-d_n} f(x,y_n(x))dx\big|$$
$$\leq M\big|s-t\big|$$

也就是说，函数序列$\{y_n(x)\}$在区间$[x_0,x_0+h]$上是等度连续的。

根据Ascoli引理，存在一个子序列$y_{n_i}(x)$在区间$[x_0,x_0+h]$上一致收敛，记该子序列的极限为$y(x)$，则$y(x)$在区间$[x_0,x_0+h]$上连续。注意到

$$y_{n_i}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n_i}(x))dx + \delta_n(x),$$

由$y_{n_i}(x)$的一致收敛性以及$f(x,y)$的连续性，在上式中令$i\to\infty$得

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx + \delta_n(x),$$

这说明$y(x)$是积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx + \delta_n(x), \quad x_0\leq x\leq x_0+h.$$

在区间$[x_0,x_0+h]$上的一个连续解。

4. 令函数

$$\alpha(x) = \int_0^x \exp(-\frac{1}{x^2})dx, \quad (0\leq x\leq 1)$$

其中规定$\alpha(0)=0$。再在条形区域

$$G:\ 0\leq x\leq 1, -\infty<y<+\infty$$

上定义一个连续的函数$f^*(x,y)$，使得它满足条件：

$$f^*(x,y) = \begin{cases} x, 0\leq x\leq 1, y>\alpha(x); \\ x\cos\frac{\pi}{x}, 0\leq x\leq 1, y=0; \\ -x, 0\leq x\leq 1, y<-\alpha(x) \end{cases}$$

然后考虑初值问题

$$(E^*):\ \ \frac{dy}{dx} = f^*(x,y), y(0)=0.$$

我们把区间$0\leq x\leq 1$分成n等份，再仿本节2.1段中的方法可以得到一条欧拉折线$y=\varphi_n^*(x),(0\leq x\leq 1)$。试证明：

$$\begin{cases} \varphi_n^*(x)\geq\alpha(x),\ \frac{2}{n}\leq x\leq 1;\ \text{如果}n\text{为偶数}; \\ \varphi_n^*(x)\leq-\alpha(x),\ \frac{2}{n}\leq x\leq 1;\ \text{如果}n\text{为奇数}. \end{cases}$$

因此，这欧拉序列$y=\varphi_n^*(x)$当$n\mapsto\infty$时是不收敛的, 从而(E^*)的解是不唯一的。

证明：将$[0,1]$区间n等分，则初值问题(E^*)的欧拉折线表示为

$$\varphi_n(x)^*=\sum_{i=1}^{n}f^*(x_{i-1},y_{i-1})(x_i-x_{i-1})+f^*(x_n,y_n)(x-x_n)$$

$x\in[0,\frac{1}{n}]$时，$y_1(x)=0$;

$x\in[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$时，$y_2(x)=\frac{1}{n}\cos\pi(x-\frac{1}{n})$

(1)n为偶数时，对$x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}](k\geq 3)$由归纳可知：$y_k>\alpha(x)$。则$\varphi_n(x)^*\geq\alpha(x)$。

(2)类似(1)可得相应结论。

5.设初值问题

$$(E):\quad \frac{dy}{dx}=(x^2-y^2)f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

其中函数$f(x,y)$在全平面连续且满足$yf(x,y)>0$,当$y\neq 0$时.则对任何的(x_0,y_0),当$x_0<0,|y_0|$适当小时,(E) 的解都在$-\infty<x<\infty$上存在.

证明:皮亚诺定理保证的局部存在性.

用反证法.设右行解最大存在区间$[x_0,X),x_0<X<\infty$;由定理3.5.1,当$x_n\to X-0,|y(x_n)|\to\infty$;则存在$x_1\in[x_0,X)$,使得$x_1^2-y(x_1)^2<0$且$|y(x)|>a>0,x\in[x_1,X)$,则若$y(x_1)>0$,$y=y(x),x\in[x_1,X)$单调递降,这与当$x_n\to X-0,|y(x_n)|\to\infty$矛盾;若$y(x_1)<0$,$y=y(x),x\in[x_1,X)$单调递升,这与当$x_n\to X-0,|y(x_n)|\to\infty$矛盾.从而右行解的最大存在区间为$[x_0,\infty)$;同理,左行解的最大存在区间为$(-\infty,x_0]$.

6.设连续函数$f(x,y)$对y是递减的,则初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

的右侧解是唯一的.(左侧解是否唯一?能举一个反例吗?)（题目修正）

证明:皮亚诺定理保证了解的存在性.

设有两个解$y(x)$和$y_1(x)$,$y(x_0)=y(x_1)$,且存在$x_1>x_0$,使$y(x_1)>y_1(x_1)$.

令$\xi=\sup x_0\leq x<x_1:y(x)=y_1(x),r(x)=y(x)-y_1(x)$,则$r(x)\geq 0,x\in[\xi,x_1],r(x_1)>0$.

由积分中值定理得存在$x_2\in(\xi,x_1)$,满足$r'(x_2)=\frac{r(x_1)}{x_1-\xi}>0$.

另一方面,对于任意$x\in(\xi,x_1)$

$$r'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}=f(x,y)-f(x,y_1)\leq 0\quad (r=y-y_1\geq 0)$$

这与存在x_2满足$r'(x_2) > 0$矛盾.

左侧解未必唯一.例如$\frac{dy}{dx} = x^2(\chi_{x<0}x^2 - y), y(0) = 0$.

7.

8.证明$\mathbf{z} = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(x,\lambda)$满足线性微分方程

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{A}(x,\lambda)\mathbf{z} + \mathbf{B}(x,\lambda)$$

和初值条件

$$\mathbf{z}(x_0,\lambda) = \mathbf{0}$$

其中

$$\mathbf{A}(x,\lambda) = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}(x,\varphi(x,\lambda),\lambda), \qquad \mathbf{B}(x,\lambda) = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda}(x,\varphi(x,\lambda),\lambda).$$

(注意：当y和λ分别为n维列向量和m维列向量时，$\mathbf{A}(x,\lambda), \mathbf{B}(x,\lambda)$和$\mathbf{z}(x,\lambda)$分别为$n\times n$矩阵，$n\times m$矩阵和$n\times m$矩阵。)

证明：设初值问题

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

的解为$\mathbf{y} = \varphi(x,\lambda)$，则

$$\varphi(x,\lambda) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(x,\mathbf{y},\lambda)\,dx$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} &= \int_{x_0}^{x}(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\lambda})\,dx \\ &= \int_{x_0}^{x}\left(\mathbf{A}(x,\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \mathbf{B}(x,\lambda)\right)dx\end{aligned}$$

令$\mathbf{z} = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$，显然

$$\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial x} = \mathbf{A}(x,\lambda)\mathbf{z} + \mathbf{B}(x,\lambda)$$

并且$\mathbf{z}(x_0,\lambda) = 0$。

9.试举例说明，如果微分方程不满足解的唯一性条件，则它的积分曲线族在局部范围内也不能视作平行直线族。

例：$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{3}{2}}$,$y^{\frac{3}{2}}$不满足$Osgood$条件，$y = (\frac{x}{3}+c)^2, y \equiv 0$都是方程的解，但积分曲线在原点附近不能看成平行直线族。

10.设G是(x_1,x_2)平面上的某区域，而$f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)$对$x_1,x_2$连续且满足*Lipschitz*条件，求证$(x_1^0,x_2^0)$是方程组

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1,x_2)$$

的奇点(即$f_1(x_1^0,x_2^0)=f_2(x_1^0,x_2^0)=0$)的充要条件在于$(x_1^0,x_2^0)$的任意领域内都有时间长为任意大的轨道段$\Gamma$,使得在轨道段$\Gamma$上有

$$|\frac{dx_1}{dt}|+|\frac{dx_2}{dt}|\geq M,(x_1(t),x_2(t))\in\Gamma$$

，这里把t看作时间，解$x_1(t),x_2(t)$看作(x_1,x_2)平面上动点位置的坐标，所谓轨道就是此动点在(x_1,x_2)平面上的轨迹。（题目有问题）

11.证明方程

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=\sin y$$

的任一饱和解都在$0<x<\infty$上或者$-\infty<x<0$上有定义。

证明:原方程转化成微分方程组为

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx}=\mathbf{f}(x,\mathbf{Y})$$

其中$\mathbf{Y}(x)=(y_1,y_2)^T$, $\mathbf{f}(x,\mathbf{Y})=(y_2,\frac{\sin y_1-y_2}{x})^T$。显然$\mathbf{f}(x,\mathbf{Y})$在$(0,\infty)\times\mathbf{R}^2$或$(-\infty,0)\times\mathbf{R}^2$上连续，并且

$$|\mathbf{f}(x,\mathbf{Y})|\leq|\mathbf{Y}|+\frac{1+|\mathbf{Y}|}{|x|}$$

我们仅对$(0,\infty)\times\mathbf{R}^2$上右向解作出证明。设右饱和区间为$[x_0,\beta),0<x_0<\beta<\infty$，则

$$\mathbf{Y}(x)=\mathbf{Y}_0+\int_{x_0}^x\mathbf{f}(s,\mathbf{Y})\,ds\qquad x_0\leq x<\beta$$

从而

$$|\mathbf{Y}(x)|\leq|\mathbf{Y}_0|+\int_{x_0}^x(|\mathbf{Y}|+\frac{1+|\mathbf{Y}|}{x_0})\,ds\leq|\mathbf{Y}_0|+\frac{\beta-x_0}{x_0}+\frac{1+x_0}{x_0}\int_{x_0}^x|\mathbf{Y}(s)|\,ds$$

由$Gronwall$不等式，得：$\lim_{x\longrightarrow\beta-}|\mathbf{Y}(x)|\neq\infty$，这与饱和区间的定义矛盾，因此$\beta=\infty$。对于其他情形都可得到证明。

第四章习题

第一节习题

1.设$a_{ij}(t)(i,j=1,2,3)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续。已知线性微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3,\\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+a_{23}(t)x_3,\\ \frac{dx_3}{dt}=a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2+a_{33}(t)x_3+t\end{cases}$$

的对应齐次线性微分方程组的基本解组为

$$(1,-1,-1)^T,\quad e^t(1,1+t,t)^T,\quad e^t(0,1,1)^T$$

试求线性微分方程组的通解及满足初值条件$x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0$的特解。

解：齐次微分方程组的通解为$X(t)=\Phi(t)C$，而$\Phi(t)=\begin{pmatrix} 1 & e^t & 0 \\ -1 & e^t(1+t) & e^t \\ -1 & te^t & e^t \end{pmatrix}$

则$X(t)=(C_1+C_2e^t,\ -C_1+C_2(1+t)e^t+C_3e^t,\ -C_1+C_2te^t+C_3e^t)^T$

而特解$X^*(t)=\Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)B(s)\,ds$，其中$\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-t} & -\frac{1+t}{e^t} & \frac{2+t}{e^t} \end{pmatrix}$ $\qquad B(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

因此$C=\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}+t+1 \\ -\frac{t^2}{2}-2t-3 \\ -\frac{t^2}{2}-3t-4 \end{pmatrix}$所以通解为$\tilde{X}(t)=\Phi(t)C+X^*(t)$

当$\tilde{X}(0)=0$时，$\tilde{X}(t)=\begin{pmatrix} -e^t+\frac{t^2}{2}+t+1 \\ (3-t)e^t-\frac{t^2}{2}-2t-3 \\ (4-t)e^t-\frac{t^2}{2}-3t-4 \end{pmatrix}$。

2.设$X=P(t)e^{\lambda t}$是常系数齐次线性方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i=1,\cdot,n)$$

的解，其中λ是常数，向量函数$P(t)$的每一个分量都是次数不超过k的多项式。求证向量函数组

$$e^{\lambda t}P(t),\ e^{\lambda t}\frac{dP(t)}{dt},\ \cdots,\ e^{\lambda t}\frac{d^kP(t)}{dt^k}$$

是齐次线性方程组的线性无关解。

证明：设$A=(a_{ij}),\ (i,j=1,\cdots,n)$由于$\frac{d^jP(t)}{dt^j}=(A-\lambda E)^jP(t)$，则

$$\frac{d(e^{\lambda t}\frac{d^jP(t)}{dt^j})}{dt}=e^{\lambda t}(\lambda E+A-\lambda E)(A-\lambda E)^jP(t)=A(e^{\lambda t}\frac{d^jP(t)}{dt^j})$$

因此向量函数组

$$e^{\lambda t}P(t),\ e^{\lambda t}\frac{dP(t)}{dt},\ \cdots,\ e^{\lambda t}\frac{d^kP(t)}{dt^k}$$

是齐次线性方程组的解，下证其线性无关，

设$C_1e^{\lambda t}P(t)+C_2e^{\lambda t}\frac{dP(t)}{dt}+\cdots+C_{k+1}e^{\lambda t}\frac{d^kP(t)}{dt^k}=0$，由于$e^{\lambda t}>0$，

所以$C_1P(t)+C_2\frac{dP(t)}{dt}+\cdots+C_{k+1}\frac{d^kP(t)}{dt^k}=0$。若不线性相关不妨设$C_j\neq 0$，那么就有$P^{j-1}(t)=-\frac{1}{C_j}\left(C_1P(t)+C_2P'(t)+\cdots+C_{k+1}P^k(t)\right)$，由于$P(t)$的每个分量是不超过k次的多项式，那么$P^{j-1}(t)$的每个分量是次数不超过$k-(j-1)$的多项式，比较系数可得$C_1=C_2=\cdots=C_{j-1}=0$，但右端次数至

多$k-j$次，因此矛盾，从而他们是线性无关的。

3.设$n\times n$矩阵函数$A_1(t)$和$A_2(t)$在区间$a<t<b$上连续。若齐次线性方程组

$$\frac{dX}{dt}=A_1(t)X\text{与}\frac{dX}{dt}=A_2(t)X$$

有相同的基本解组，试证：$A_1(t)\equiv A_2(t)$。

证明：设基本解组为$X_1(t),\cdots,X_n(t)$，那么两个方程的通解都可以表示为$X(t)=C_1X_1(t)+\cdots+C_nX_n(t)$，则

$$0\equiv X(t)-X(t)\Rightarrow 0=\frac{dX}{dt}-\frac{dX}{dt}=(A_1(t)-A_2(t))X$$

由于$X(t)\neq 0$，所以$A_1(t)\equiv A_2(t)$。

4.设$n\times n$矩阵$A(t)$在$a<t<b$上连续，$X_1(t),\cdots,X_n(t)$是齐次线性方程组

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X$$

的基本解组。令$\Phi(t)=(X_1(t),\cdots,X_n(t))$。又设n维向量函数$R(t,X)$在区域$\{(t,X):a<t<b,||X||<\infty\}$上连续，试证明$Cauchy$问题

$$\begin{cases}\frac{dX}{dt}=A(t)X+R(t,X)\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$$

与积分方程

$$X(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)R(\tau,X(\tau))\,d\tau$$

等价，即若$X=X(t)$是线性方程组的解，则$X=X(t)$是积分方程的解；反之，若$X=X(t)$是积分方程的连续解，则$X=X(t)$是线性方程组的解。

证明：充分性很显然，把积分方程代入验证即可，同时发现也满足初始条件；

下面证明必要性：由于

$$\frac{d(\Phi^{-1}(t)X(t))}{dt}=\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}X(t)+\Phi^{-1}(t)[A(t)X(t)+R(t,X)]$$

而

$$\frac{d(\Phi(t)\Phi^{-1}(t))}{dt}=A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)+\Phi(t)\frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}=0$$

则

$$\frac{d(\Phi^{-1}(t)X(t))}{dt}=\Phi^{-1}(t)R(t,X)\Rightarrow X(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)R(\tau,X(\tau))\,d\tau$$

因此证明了必要性。

5.证明函数组

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad \varphi_2(x)=\begin{cases}0, & x\geq 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上线性无关，但它们的朗斯基行列式恒等于零。试问这与本节的引理4.1.1是否矛盾？如果不矛盾它说明了什么？

证明：令$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)=0$，显然$C_1=C_2=0$，因此它们是线性无关的，且它们的朗斯基行列式恒等于零，但这与本节的引理4.1.1不矛盾，说明φ_1与φ_2不能满足同一个2阶齐次线性微分方程。

6.求出方程组

$$t\frac{dx_1}{dt}=2x_1-x_2,\ t\frac{dx_2}{dt}=2x_1-x_2$$

的一切解，并证明它的任何两个线性无关解的Wronsky行列式等于Ct，其中C为非零常数。这个Wronsky行列式在点$t=0$等于零但不是恒等于零，试解释引理4.1.1为何在此不成立？

解：当$t\neq 0$时，$\frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{2}{t} & -\frac{1}{t}\\ \frac{2}{t} & -\frac{1}{t}\end{pmatrix}$，则基解矩阵为$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & t\\ 1 & t\end{pmatrix}$。设$\Psi(t)=\Phi(t)A$，其中$|A|\neq 0$，则任何两个线性无关解的Wronsky行列式为

$$|\Psi(t)|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}a_{11}+ta_{21} & \frac{1}{2}a_{12}+ta_{22}\\ a_{11}+ta_{21} & a_{12}+ta_{22}\end{vmatrix}=(\frac{1}{2}a_{12}a_{21}-\frac{1}{2}a_{11}a_{22})t:=Ct$$

当$t=0$时，显然Wronsky行列式等于零。引理不成立是因为当$t=0$时，$2x_1-x_2=0$，此时x_1,x_2是线性相关的。

7.设$x=x_1(t),x=x_2(t)$分别是方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$

的满足初值条件

$$x_1(0)=0\quad x_1'(0)=1$$
$$x_2(0)=1\quad x_2'(0)=0$$

的解。试不具体求出$x_1(t),x_2(t)$而直接证明：(a)$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)$，$\frac{dx_2(t)}{dt}=-x_1(t)$；

(b)$x_1^2(t)+x_2^2(t)\equiv 1$；

(c)$x_2(t)$有零点；

(d)若以α表示x_2在正半轴的第一个零点，则$x_1(t),x_2(t)$都是以4α为周期的周期函数。

证明：(a)令$x_3(t)=x_1'(t)$，则$\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{d^3x_1}{dt^3}=-x_3$且$x_3(0)=1,x_3'(0)=0$，由解的存在唯一性知$x_3(t)=x_2(t)$，因此有$\frac{dx_1}{dt}=x_2(t)$，再关于x求导可得$\frac{dx_2}{dt}=-x_1$；

(b)$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_2\\ \frac{dx_2}{dt}=-x_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1\frac{dx_1}{dt}=x_1x_2\\ x_2\frac{dx_2}{dt}=-x_1x_2\end{cases}\Rightarrow\frac{d\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}{dt}=0\Rightarrow x_1^2+x_2^2=C$ 又由于$X_1(0)=0\ x_2(0)=1$，因此$C=1$，则$x_1^2+x_2^2=1$；

(c)如果$x_2(t)$没有零点，由于$x_1(t),x_2(t)$都是连续的，且$x_2(0)=1$，所以$x_2(t)>0$。又由于$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)>0$，所以$x_1(t)$是单调增的。如果当$t\to\pm\infty$时$x_2(t)$不趋向零，那么$x_1(t)$肯定会在某一时刻大

于1，这与$x_1^2+x_2^2=1$矛盾。因此当$t\to\pm\infty$时$x_2(t)\to 0$，那么$x_1(t)\to 1$。但$\frac{dx_2(t)}{dt}=-x_1(t)$，当t充分大时$x_1(t)>\frac{1}{2}$，所以$|\frac{dx_2(t)}{dt}|>\frac{1}{2}$，$x_2(t)$肯定会在某一时刻小于0，这与$x_2(t)$没有零点矛盾；
(d)显然$x_1(t)$和$x_2(t)$是整体存在的，由于α是x_2在正半轴第一个零点且$x_2(0)=1$，则

$$x_2(\alpha)=0\ x_2'(\alpha)=-1\ x_1(\alpha)=1\ x_1'(\alpha)=0$$

令$x_3(t)=x_1(t+\alpha)$，则$\frac{d_3^x}{dt^2}+x_3=0$且$x_3(0)=x_1(\alpha)=1\ x_3'(0)=x_1'(\alpha)=0$。由解的唯一性可知$x_1(t+\alpha)=x_2(t)$，因此

$$\frac{dx_1(t+\alpha)}{dt}=x_2(t+\alpha)=\frac{dx_2(t)}{dt}=-x_1(t)\Rightarrow x_1(t)=-x_2(t+\alpha)\Rightarrow x_1(t-\alpha)=-x_2(t)$$

所以$x_1(t)=x_1(t+4\alpha)$，两边关于t求导可得到$x_2(t)=x_2(t+\alpha)$。
8.设实系数线性方程组(4.10.39)有如下的一些基本解组：

$$X_1(t),\bar{X}_1(t),\cdots,X_r(t),\bar{X}_r(t),X_{2r+1}(t),\cdots,X_n(t)$$

其中$\bar{X}(t)$表示$X(t)$的共轭复向量，$X_{2r+1}(t),\cdots,X_n(t)$是实值的。试证明：对线性方程组的任何实值解$X=X(t)$，存在复常数$C_1,\cdots,C_r$及实常数$C_{2r+1},\cdots,C_n$使得

$$\begin{aligned}X(t) \quad &= \quad C_1X_1(t)+\bar{C}_1\bar{X}_1(t)+\cdots+C_rX_r(t)+\bar{C}_r\bar{X}_r(t)\\ &\quad +C_{2r+1}X_{2r+1}(t)+\cdots+C_nX_n(t); \qquad (4.10.37)\end{aligned}$$

反之，对于任何复常数$C_1,\cdots,C_r$及实常数$C_{2r+1},\cdots,C_n$，由(4.10.37)式给出的函数都是(4.10.39)的解。
证明：易证由(4.10.37)式给出的函数都是(4.10.39)的解，代入方程验证即可。
设$Y_i=\frac{X_i+\bar{X}_i}{2}$，$W_i=\frac{X_i-\bar{X}_i}{2i}(i=1,\cdots,r)(*)$，易证$Y_iW_i$也是方程组的解，下面证明

$$Y_1,\cdots,Y_r,W_1,\cdots,W_r,X_{2r+1},\cdots,X_n$$

线性无关。
设$a_1Y_1+\cdots+a_rY_r+b_1W_1+\cdots+b_rW_r+c_{2r+1}X_{2r+1}+\cdots+c_nX_n=0$，将(*)代入可得

$$(\frac{a_1}{2}+\frac{b_1}{2i})X_1+(\frac{a_1}{2}-\frac{b_1}{2i})\bar{X}_1+\cdots+(\frac{a_r}{2}+\frac{b_r}{2i})X_r+(\frac{a_r}{2}-\frac{b_r}{2i})\bar{X}_r+c_{2r+1}X_{2r+1}+\cdots+c_nX_n=0$$

由于$X_1(t),\bar{X}_1(t),\cdots,X_r(t),\bar{X}_r(t),X_{2r+1}(t),\cdots,X_n(t)$是基本解组，因此它们线性无关，从而$a_1=\cdots=a_r=b_1=\cdots=b_r=c_{2r+1}=\cdots=c_n=0$，所以$Y_1,\cdots,Y_r,W_1,\cdots,W_r,X_{2r+1},\cdots,X_n$线性无关，即$Y_1,\cdots,Y_r,W_1,\cdots,W_r,X_{2r+1},\cdots,X_n$也是基本解组，
那么任何实值解都可由$Y_1,\cdots,Y_r,W_1,\cdots,W_r,X_{2r+1},\cdots,X_n$表示出来，再把(*)代入即可得到我们所要

证明的结论。

9.设非齐次线性微分方程组

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+f(t)$$

中的$f(t)\neq 0$，证明非齐次线性微分方程组有且至多有$n+1$个线性无关解。

证明：设$X_1(t),\cdots,X_{n+2}(t)$是非齐次的解，令$Y_i=X_iX_{n+2}$，则Y_i是齐次方程的解，则$Y_1,\cdots,Y_{n+1}$线性相关。假设$X_1(t),\cdots,X_{n+2}(t)$线性无关，那么$Y_1(t),\cdots,Y_{n+1}(t)$ 也是线性无关的，矛盾!!下面证有$n+1$个线性无关解：

设$X_1,\cdots,X_n$是齐次基本解组，X^*是特解，则令$Y_i=X_i+X^*$是非齐次方程的解。若$C_1Y_1+\cdots+C_{n+1}X^*=0$，那么

$$C_1X_1+\cdots+C_nX_n+(C_1+\cdots+C_{n+1})X^*=0$$

如果$C_1+\cdots+C_{n+1}=0$，由$X_1,\cdots,X_n$可以得到$C_i\equiv 0$；

如果$C_1+\cdots+C_{n+1}\neq 0$，则$X^*=\frac{1}{C_1+\cdots+C_{n+1}}(C_1X_1+\cdots+C_nX_n)$，那么$X^*$是齐次方程的解，因此$f(t)=0$，但$f(t)\neq 0$，所以$C_1+\cdots+C_{n+1}=0$。

第二和三节习题

1.求下列方程的通解：

(1)$\frac{d^7x}{dt}-8\frac{d^5x}{dt^5}+16\frac{d^3x}{dt^3}=0$；

(2)$\frac{d^4x}{dt^4}+4x=0$；

(3)$\frac{d^4x}{dt^4}-4\frac{d^3x}{dt^3}+8\frac{d^2x}{dt^2}-8\frac{dx}{dt}+3x=0$；

(4)$\frac{dx}{dt}=x+y-z,\ \frac{dy}{dt}=y+z-x,\ \frac{dz}{dt}=z+x-y$；

(5)$\frac{dx}{dt}=-3x+48y-28z,\ \frac{dy}{dt}=-4x+40y-22z,\ \frac{dz}{dt}=-6x+57y-31z$；

(6)$\frac{d^2x}{dt^2}-x+4y=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}+x-y=0$；

(7)$\frac{dx}{dt}=3x-y+3z,\ \frac{dy}{dt}=2x+z,\ \frac{dz}{dt}=x-y+2z$；

(8)$\frac{dx}{dt}=3x+5y,\ \frac{dy}{dt}=-5x+3y$；

(9)$\frac{dx}{dt}=-5x-10y-20z,\ \frac{dy}{dt}=5x+5y+10z,\ \frac{dz}{dt}=2x+4y+9z$；

(10)$\frac{d^3x}{dt^3}-5\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}-4x=e^{3t}$；

(11)$y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$；

(12)$y^{(4)}+2y''+y=\sin x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2,\ y''(0)=3,\ y'''(0)=0$；

(13)$y''-2y'+2y=4e^x\cos x$；

(14)$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=1-\frac{2}{t}x,\ \frac{dy}{dt}=x+y-1+\frac{2}{t}x, \quad (t>0)\\ x(1)=\frac{1}{3},\ y(1)=-\frac{1}{3}\end{cases}$；

(15) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}x,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{t}y+x+t, \quad (t>0) \\ x(1)=0,\ y(1)=\frac{4}{3} \end{cases}$ 。

解：(1)特征方程为$\lambda^7-8\lambda^5+16\lambda^3=0$

特征根为$0,0,0,2,2,-2,-2$

基本解组为$1,t,t^2,e^{2t},te^{2t},e^{-2t},te^{-2t}$

所以通解为$c_1+c_2t+c_3t^2+c_4e^{2t}+c_5te^{2t}+c_6e^{-2t}+c_7te^{-2t}$

(2)特征方程为$\lambda^4+4=0$

特征根为$\pm(1+i),\pm(1-i)$

基本解组为$e^t\cos t,e^{-t}\cos t,e^t\sin t,e^{-t}\sin t$

所以通解为$c_1e^t\cos t+c_2e^{-t}\cos t+c_3e^t\sin t+c_4e^{-t}\sin t$

(3)特征方程为$\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda+3=0$

特征根为$1,1,1\pm\sqrt{2}i$

基本解组为$e^t,te^t,e^t\cos\sqrt{2}t,e^t\sin\sqrt{2}t$

所以通解为$c_1e^t+c_2te^t+c_3e^t\cos\sqrt{2}t+c_4e^t\sin\sqrt{2}t$

(4)特征方程的特征根为$1,1\pm\sqrt{3}i$

对应的特征向量为：

$$(1,1,1)^T,\ (1,\frac{\sqrt{3}i-1}{2},\frac{-\sqrt{3}i-1}{2})^T,\ (1,\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\frac{\sqrt{3}i-1}{2})^T$$

则通解为$c_1e^t(1,1,1)^T+c_2e^t(\cos\sqrt{3}t,\frac{-1}{2}\cos\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t,-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t)^T+c_3e^t(-\sin\sqrt{3}t,-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t)^T$

(5)特征方程的特征根为$1,2,3$

对应的特征向量为：

$$(3,2,3)^T,\ (4,1,1)^T,\ (2,2,3)^T$$

则通解为$c_1e^t(3,2,3)^T+c_2e^{2t}(4,1,1)^T+c_3e^{3t}(2,2,3)^T$

(6)特征方程的特征根为$\pm i,\pm\sqrt{3}$

对应的特征向量为：

$$(1,\sqrt{3},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})^T,\ (1,-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})^T\ ,(1,i,\frac{1}{2},\frac{i}{2})^T\ ,(1,-i,\frac{1}{2},\frac{-i}{2})^T$$

则通解为$c_1e^{\sqrt{3}t}(1,-\frac{1}{2})^T+c_2e^{-\sqrt{3}t}(1,-\frac{1}{2})^T+c_3(\cos t,\frac{1}{2}\cos t)^T+c_4(\sin t,\frac{1}{2}\sin t)^T$

(7)特征方程的特征根为$0,2,3$

对应的特征向量为：

$$(-1,3,2)^T,\ (-1,1,0)^T,\ (4,3,1)^T$$

则通解为$c_1(-1,3,2)^T+c_2e^{2t}(-1,1,0)^T+c_3e^{3t}(4,3,1)^T$

(8)特征方程的特征根为$3\pm 5i$

对应的特征向量为：

$$(1,i)^T,\ (1,-i)^T$$

则通解为$c_1e^{3t}(\cos 5t,-\sin 5t)^T+c_2e^{3t}(\cos 5t,-\sin 5t)^T$

(9)特征方程的特征根为$5,2\pm i$

对应的特征向量为：

$$(2,0,-1)^T,\ (20+10i,15-5i,-14-2i)^T,\ (20-10i,15+5i,-14+2i)^T$$

则通解为$c_1e^{5t}(2,0,-1)^T+c_2e^{(2+i)t}(20+10i,15-5i,-14-2i)^T+c_3e^{(2-i)t}(20-10i,15+5i,-14+2i)^T$

(10)齐次方程的特征方程为$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$

特征根为$1,2,2$

基本解组为e^t,e^{2t},te^{2t}

所以齐次方程的通解为$c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3te^{2t}$

设特解为Ae^{3t}，代入方程可得$A=\frac{1}{2}$

因此通解为$c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3te^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$

(11)齐次方程的特征方程为$\lambda^2-5\lambda+6=0$

特征根为$2,3$

基本解组为e^{2x},e^{3x}

所以齐次方程的通解为$c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

设特解为Axe^{-x}，代入方程可得$A=1$

因此通解为$c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+xe^{-x}$

(12)齐次方程的特征方程为$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

特征根为$i,i,-i,-i$

基本解组为$\cos x,x\cos x,\sin x,x\sin x$

所以齐次方程的通解为$c_1\cos x+c_2x\cos x+c_3\sin x+c_4x\sin x$

设特解为$x^2(A\cos x+B\sin x)$，代入方程可得$A=-\frac{1}{8},B=0$

因此通解为$c_1\cos x+c_2x\cos x+c_3\sin x+c_4x\sin x-\frac{x^2}{8}\cos x$

再由初始条件，则$\cos x+x\cos x-3\sin x+\frac{13}{8}x\sin x-\frac{x^2}{8}\cos x$

(13)齐次方程的特征方程为$\lambda^2-2\lambda+2=0$

特征根为$1\pm i$

基本解组为$e^x\cos x, e^x\sin x$

所以齐次方程的通解为$c_1e^x\cos x+c_2e^x\sin x$

设特解为$xe^x(A\cos x+B\sin x)$，代入方程可得$A=0, B=2$

因此通解为$c_1e^x\cos x+c_2e^x\sin x+2xe^x\sin x$

(14)由第一个方程可解得$x=\frac{t}{3}$，将其代入第二个方程，可得$y=-\frac{t}{3}$

(15)由第一个方程可解得$x=0$，将其代入第二个方程，可解得$y=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{t}$。

2.设$\varphi(t)$是方程$x''+k^2x=f(t)$的解，其中k是常数，函数$f(t)$在区间$[0,+\infty)$上连续。试证明：

(a)当$k\neq 0$时，方程的通解可表示为

$$\varphi(t)=c_1\cos kt+\frac{c_2}{k}\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\,ds;$$

(b)当$k=0$时，方程的通解可表示为

$$x=c_1+c_2t+\int_0^t (t-s)f(s)\,ds$$

其中c_1, c_2是任意常数。

证明：(a)当$k\neq 0$时，易证$\varphi_0(t)=\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\,ds$为方程$x''+k^2x=f(t)$的一个特解，而齐次方程$x''+k^2x=0$的通解为

$$x=C_1\cos kt+\frac{C_2}{k}\sin kt$$

故方程的通解为

$$\varphi(t)=C_1\cos kt+\frac{C_2}{k}\sin kt+\frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-s)\cdot f(s)\,ds$$

(b)当$k=0$时，易知$\varphi_0(t)=\int_0^t (t-s)f(s)\,ds$为方程$x''(t)=f(t)$的一个特解，而齐次方程$x''=0$的通解为$x=C_1+C_2t$，

故方程的通解为

$$\varphi(t)=C_1+C_2t+\int_0^t (t-s)f(s)\,ds$$

其中$C_1, C_2\in\mathbb{R}$。

3.给定方程$x'''+5x''+ax'=f(t)$，其中$f(t)$在$(0,+\infty)$上连续，设$\varphi_1(t),\varphi_2(t)$是上述方程的任意两个解，且极限$\lim\limits_{t\to+\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]$存在，试求参数$a$的允许范围。

解：令$y=\varphi_1(t)-\varphi_2(t)$，则y是齐次方程的解，特征方程为$\lambda^3+5\lambda^2+a\lambda=0$，解得有$\lambda_1=0, \lambda_2=\frac{-5+\sqrt{25-4a}}{2}, \lambda_3=\frac{-5-\sqrt{25-4a}}{2}$。

若$25-4a<0$，通解为$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}t}\cos\frac{sqrt4a-25}{2}t+C_3e^{-\frac{5}{2}t}\sin\frac{sqrt4a-25}{2}t$，$\lim\limits_{t\to+\infty}y$存在；

若$25-4a=0$，通解为$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}t}+C_3te^{-\frac{5}{2}t}$，$\lim\limits_{t\to+\infty}y$存在；

若$25-4a>0$，通解为$y=C_1+C_2e^{\lambda_2 t}+C_3e^{\lambda_3 t}$，要使$\lim\limits_{t\to+\infty}y$存在当且仅当$\lambda_2,\lambda_3<0$，此时$a>0$。
综上所述，$a>0$。

4.设a,b是常数，$f(t)$是区间$(-\infty,+\infty)$上的连续函数。设$\omega(t;\tau)$是初值问题

$$x''+ax'+bx=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=f(\tau)$$

的解，其中τ是一个参数。试证明：

$$x(t)=\int_0^t \omega(t-\tau;\tau)\,d\tau$$

是初值问题

$$x''+ax'+bx=f(x),\ x(0)=0,\ x'(0)=0$$

的解。

解：代入验证即可。

5.求解弹簧振子在无阻尼下的强迫振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=p\cos\omega t$$

其中m,k,p和ω都是正的常数。对外加频率$\omega\neq\sqrt{\frac{k}{m}}$和$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$两种不同的情况，分别说明其解的物理意义，这里$\sqrt{\frac{k}{m}}$表示弹簧振子的固有频率。

解：方程可化为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=\frac{p}{m}\cos\omega t$$

当$\omega\neq\sqrt{\frac{k}{m}}$时通解为

$$x(t)=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{p}{m(\frac{k}{m}-\omega^2)}\cos\omega t$$

(外加项同系统的自然频率非共振时，系统振幅有限)

当$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$时，通解为

$$x(t)=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{p}{2\sqrt{km}}t\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(外加项同系统的自然频率处于共振状态时，引起系统振幅无限增大)

6.证明：常系数齐次线性微分方程组的任何解当$x\to\infty$时都趋于零，当且仅当它的系数矩阵A的所有特征根都具有负的实部。

证明：常系数齐次线性方程组的任何解当$x\to\infty$时都趋于零，当且仅当方程组的基本解组当$x\to\infty$时都

趋于零。

我们可以构造方程组的一个基本解组如下：

$$Y_1^1(x),\cdots,Y_1^{n_1}(x);\cdots;Y_k^1(x),\cdots,Y_k^{n_k}(x)$$
$$Y_j^l(x)=e^{\lambda_j x}[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{x^i}{i!}(A-\lambda E)^i]v_j^l$$

可见要想当$x\to\infty$时都趋于零，特征根必须具有负的实部。

第五节习题

1.设在区间$(-\infty,+\infty)$上$q(x)\le 0$，证明齐次线性微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的任何一个非平凡解最多只有一个零点。

2.证明齐次线性微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的任何两个线性无关的解的零点是相互交错的。

证明：设y_1,y_2是两个线性无关解，利用变换$y(x)=v(x)u(x)$以及$v>0$，可以看到u_1,u_2是方程$\frac{d^2u}{dt^2}+Q(t)u=0$的线性无关解，由课本推论4.5.2可得所要结论。

3.设微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+P(t)x=0$$

其中$P(t)$是t的连续的2π周期函数，而且满足

$$n^2<P(t)<(n+1)^2$$

其中n是一个非负的整数。试证明上述方程的任何非零解都不是2π周期的。

证明：设$x(t)$是方程的解，。则有

$$x''+P(t)x=0$$

由条件可知，存在某个$\varepsilon>0$使得下面不等式成立：

$$(n+\varepsilon)^2<P(t)<(n+1)^2,\ (-\infty<x<\infty).$$

利用$x=\cos((n+\varepsilon)t)$是$x''+(n+\varepsilon)^2x=0$的解，以及施图姆比较定理可知，$x(t)$的周期$\ge\frac{2\pi}{n+\varepsilon}>2\pi$。因此结论成立。

第六节习题

1.求解下列边值问题：

(1)$y''+y=x;\ y(0)=2,\ y(\frac{\pi}{2})=1$；

(2)$y''-3y'+2y=e^x,\ y(0)=0,\ y(1)=0$；

(3)$x^2y''-3xy'+3y=0,\ y'(1)+y(1)=-2,\ 2y'(2)-y(2)=0$。

解：(1)齐次方程的特征方程为$\lambda^2+1=0$

特征根为$\pm i$

基本解组为$\cos x,\ \sin x$

齐次方程的通解为$c_1\cos x+c_2\sin x$

设特解为Ax，代入方程的$A=1$

因此通解为$c_1\cos x+c_2\sin x+x$

再利用边值条件得$y(x)=2\cos x+(1-\frac{2}{\pi})\sin x+x$

(2)齐次方程的特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0$

特征根为$1,2$

基本解组为e^x,e^2x

齐次方程的通解为$c_1e^x+c_2e^2x$

设特解为Axe^x，代入方程的$A=-1$

因此通解为$c_1e^x+c_2e^2x-xe^x$

再利用边值条件得$y(x)=\frac{1}{1-e}e^x+\frac{1}{e-1}e^2x-xe^x$

(3)由Euler方程的解法得到通解为$c_1x+c_2x^3$

再由边值条件得$y(x)=-x$。

2.证明边值问题

$$\begin{cases} y''+16y=0, \quad (0\leq x\leq \pi) \\ y'(0)-4y(0)=A,\ y'(\pi)-4y(\pi)=B \end{cases}$$

当$A=B$时有无限个解；当$A\neq B$时无解。

证明：$y''+16y=0$的通解为

$$y=C_1\cos 4t+C_2\sin 4t \qquad\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

那么

$$\begin{cases} y'(0)-4y(0)=4(C_2-C_1)=A \\ y'(\pi)-4y(\pi)=4(C_2-C_1)=B \end{cases}$$

若$A\neq B$，则C_1,C_2无解，因此边值问题无解；

若$A=B$，则$C_2-C_1=\frac{A}{4}$，C_1,C_2有无限个解，那么边值问题有无限个解。

3.当A,B取何值时，边值问题

$$\begin{cases} y''+16y=32x, \quad (0\leq x\leq \pi) \\ y(0)=A,\ y(\pi)=B \end{cases}$$

有唯一解；无限个解或无解？

解：$y''+16y=0$的通解为

$$y=C_1\sin 4x+C_2\cos 4x$$

则$W[y_1,y_2]=\begin{bmatrix} y_1,y_2 \\ y_1',y_2' \end{bmatrix}=-4$

由课本定理4.42可知$y''+16y=32x$的一个特解为

$$y^*=2x$$

那么$y''+16y=32x$的通解为

$$y=2x+C_1\sin 4x+C_2\cos 4x \qquad\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

再注意到边值条件可得

$$\begin{cases} y(0)=C_2=A \\ y(\pi)=2\pi+C_2=B \end{cases}$$

因此方程无唯一解；

当$2\pi+A=B$时，方程有无限个解；

当$2\pi+A\neq B$时，方程无解。

第七节习题

1.计算下列函数$f(t)$的拉氏变换$F(s)$：

(1)$f(t)=t^4e^{\pi t}$, (2)$f(t)=t^{\frac{3}{2}}e^{-4t}$,

(3)$f(t)=e^{-2t}\sin 3\pi t$, (4)$f(t)=e^{-\frac{t}{2}}\cos 2(t-\frac{1}{8}\pi)$

解：(1)$F(s)=\frac{24}{(s-\pi)^5}$，$s>\pi$

(2)$F(s)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4(s+4)^{\frac{5}{2}}}$，$s>-4$

(3)$F(s)=\frac{3\pi}{(s+2)^2+9\pi^2}$，$s>-2$

(4)$F(s)=\frac{2\sqrt{2}s+5\sqrt{2}}{(2s+1)^2+16}$，$s>-\frac{1}{2}$

2.计算下列函数$F(s)$的拉氏逆变换：

(1)$F(s)=\frac{3}{2s-4}$, (2)$F(s)=\frac{s-1}{(s+1)^2}$

(3)$F(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+5}$, (4)$F(s)=\frac{1}{s^2-4}$

(5)$F(s)=\frac{s^3}{(s-4)^4}$, (6)$F(s)=\frac{5-2s}{s^2+7s+10}$

(7)$F(s)=\frac{s}{(s^2+k^2)^2}$, (8)$F(s)=\frac{s^3}{s^4+4a^4}$

解：(1)$f(t)=\frac{3}{2}e^{2t}$

(2)$f(t)=(1-2t)e^{-t}$

$(3)f(t)=e^{-2t}\cos t$

$(4)f(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sh}(2t)$

$(5)f(t)=e^{4t}(1+12t+24t^2+\frac{32}{3}t^3)$

$(6)f(t)=-2e^{-\frac{7}{2}t}\mathrm{ch}(\frac{3}{2}t)+8e^{-\frac{7}{2}t}\mathrm{sh}(\frac{3}{2}t)$

$(7)f(t)=\frac{t}{2k}\sin(kt)$

$(8)f(t)=\frac{1}{2}e^{at}\cos(at)+\frac{1}{2}e^{-at}\cos(at)$

3.用拉氏变换方法求解下列初值问题：

$(1)y''+4y'+4y=t^2;\ y(0)=y'(0)=0;$

$(2)x''+6x'+34x=30\sin 2t;\ x(0)=x'(0)=0$

$(3)x''+\omega_0^2x=F_0\sin\omega t,\ x(0)=x'(0)=0,\ \omega_0\neq 0;$

$(4)y^{(4)}+2y''+y=4te^t,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=y^{(3)}(0)=0.$

解：(1)在方程两侧取拉氏变换，并记$\mathcal{L}\{f(t)\}=Y(s)$，得到

$$s^2Y+4sY+4Y=\frac{2}{s^3}.$$

所以$Y=\frac{2}{s^3(s^2+4s+4)}$，$y(t)=-\frac{t}{4}e^{-2t}-\frac{3}{8}e^{-2t}+\frac{t^2}{4}-\frac{t}{2}+\frac{3}{8}$

(2)在方程两侧取拉氏变换，并记$\mathcal{L}\{x(t)\}=X(s)$，得到

$$s^2X+6sX+34X=\frac{60}{s^2+4}.$$

所以$X=\frac{60}{(s^2+4)(s^2+6s+34)}$，$x(t)=\frac{60}{174}(e^{-3t}\cos(5t)-\frac{2}{5}e^{-3t}\sin(5t)-\cos(2t)+\frac{5}{2}\sin(2t))$

(3)在方程两侧取拉氏变换，并记$\mathcal{L}\{x(t)\}=X(s)$，得到

$$s^2X+\omega_0^2X=F_0\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

所以当$\omega=\omega_0$的时候，$X=F_0\frac{\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2}$，$x(t)=\frac{F_0\sin(\omega_0t)}{2\omega_0^2}-\frac{F_0t\cos(\omega_0t)}{2\omega_0}$。

当$\omega\neq\omega_0$的时候，$X=F_0(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{1}{s^2+\omega_0^2})\frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$，$x(t)=\frac{F_0(\omega_0\sin(\omega t)-\omega\sin(\omega_0t))}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}$。

(4)在方程两侧取拉氏变换，并记$\mathcal{L}\{f(t)\}=Y(s)$，得到

$$s^4Y+2s^2Y+Y=\frac{4}{s^2}.$$

所以$Y=\frac{4}{s^2(s^4+2s^2+1)}$，$y(t)=2t\cos t-6\sin t+4t$。

4.有一种船舶减震器利用的是耦合振动原理。在水面上的船体可以作为一个阻尼振子，其质量为M，劲度系数为K，阻尼系数为R，减震器则是附在船体上的振子，质量为m，劲度系数为k。船体的位移$X(t)$和减震器的位移$x(t)$满足运动方程

$$\begin{cases} MX''(t)=F(t)-KX(t)-RX'(t)-k(X-x)\\ mx''(t)=-k(x-X), \end{cases}$$

其中$F(t)$是船体所受到的外力。假设在$t=0$时刻船体和减震器静止不动，这时船体受到外力$F(t)=\frac{M}{4}\delta(t)$的撞击，试讨论船体的位移变化，并把所得结果与不装备减震器的船舶作比较。

第八节习题

1.求解微分方程

(1)$x^2y''+5xy'+13y=0,(x>0)$；

(2)$(2x+1)^2y''-4(2x+1)y'+8y=0$；

(3)$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\frac{1}{1+\cos^2 t}$；

(4)$t^2(t+1)\frac{d^2x}{dt^2}-t(2+4t+t^2)\frac{dx}{dt}+(2+4t+t^2)x=-t^4-2t^3$；

(5)$t\frac{d^2x}{dt^2}-(2t+1)\frac{dx}{dt}+(t+1)x=(t^2+t-1)e^{2t}$；

(6)$(1-t^2)\frac{d^3x}{dt^3}-t\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=0$。

解：

(1)令$x=e^t$，则$y_{tt}+4y_t+13y=0$，得特征方程$\lambda^2+4\lambda+13=0$，$\lambda=-2\pm3i$，于是$y=e^{-2t}(c_1\cos3t+c_2\sin3t)$，所以

$$y=\frac{c_1\cos(3\ln x)+c_2\sin(3\ln x)}{x^2}.$$

(2)令$2x+1=t$,则$t^2y_{tt}-2ty_t+2y=0$，再令$t=e^u$，则特征方程为$\lambda(\lambda-1)-2\lambda+2=0$，得解$\lambda=1,2$。于是

$$y=c_1e^u+c_2e^{2u}=c_1t+c_2t^2=c_1(2x+1)+c_2(2x+1)^2.$$

(3)齐次方程的特征方程为$\lambda^2+1=0$，于是齐次方程有通解$x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$，然后由常数变异公式有

$$x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+\int_{t_0}^{t}\frac{\sin(t-s)}{1+\cos^2 s}ds.$$

(4)我们首先求该方程的特解，猜测解的形式为$x=at^2+bt+c$，代入方程得到$a=1,\ c=0$。于是有特解$x=t^2+bt$。由此我们知道$x=t$是相应齐次方程的解。我们再用降阶法来求齐次方程的通解，即设解为$x=tu(t)$，代入方程得$t^3[(t+1)u_{tt}-(t+2)u_t]=0$，令$v=u_t$，则解得$v=C(t+1)e^t$，于是$u=Cte^t$，所以最终我们得到方程的通解为

$$x=t^2+C_1t+C_2t^2e^t.$$

(5)我们首先求该方程的特解，猜测解的形式为$x=(at+b)e^{2t}$，代入方程得到$a=1$，$b=0$，由此知道特

解为$x_0 = te^{2t}$。再求齐次方程的两个线性无关解，注意到齐次方程为

$$t\frac{dx^2}{dt^2} - (2t+1)\frac{dx}{dt} + (t+1)x = t(\frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dx}{dt}) - (t+1)(\frac{dx}{dt} - x) = 0,$$

于是容易得到特解$x_1 = Ce^t$，然后用降阶法，设$x = C(t)e^t$，代入方程，解得$x_2 = t^2e^t$。于是最终方程的解为

$$x = (C_1 + C_2t^2)e^t + te^{2t}.$$

(6)令$y = \frac{dx}{dt}$，则该方程为$(1-t^2)\frac{dy^2}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + y = 0$，用幂级数法求解，设解为$y = \sum_{n\geq 0} a_nt^n$，代入方程，则有$a_n = \frac{n-3}{n}a_{n-2}$。于是我们有通解$y = c_1t + c_2(1 - \frac{1}{2}t^2 - \sum k \geq 2\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}t^{2k})$。由此得到原来方程的通解为

$$x = c_0 + c_1t^2 + c_2(t - \frac{1}{6}t^3 - \sum k \geq 2\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\frac{t^{2k+1}}{2k+1}).$$

2.求出下列微分方程在$x = x_0$处展开的两个线性无关的幂级数解，并写出相应的递推公式：

(1)$y'' - xy' - y = 0, x_0 = 0$;　　(2)$y'' - xy' - y = 0, x_0 = 1$;

(3)$(1-x)y'' + y = 0, x_0 = 0$;　　(4)$\frac{d^3y}{dx^3} + xy = 0, x_0 = 0$;

(5)$x\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + xy = 0, x_0 = 0$;　(6)$y'' + (\sin x)y = 0, x_0 = 0$.

解：

(1)令$y = \sum_{n\geq 0} a_nx^n$，代入方程得$\sum_n(a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_nn - a_n)x^n = 0$，于是得到递推公式$a_n = \frac{a_{n-2}}{n}$。所以如果分别取$(a_0, a_1) = (1, 0)$ 和$(a_0, a_1) = (0, 1)$，我们可以得到两个线性无关的解

$$y_1 = \sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k}}{(2k)!!},$$

$$y_2 = \sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

(2)令$y = \sum_{n\geq 0} a_n(x-1)^n$，将方程写为$y'' - (x-1)y' - y' - y = 0$，代入方程得$\sum_n(a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_nn - a_{n+1}(n+1) - a_n)(x-1)^n = 0$，于是得到递推公式$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{n}$。所以如果分别取$(a_0, a_1) = (1, 0)$ 和$(a_0, a_1) = (0, 1)$，我们可以得到两个线性无关的解。

(3)令$y = \sum_{n\geq 0} a_nx^n$，代入方程得$\sum_n(a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n+1}(n+1)n + a_n)x^n = 0$，于是得到递推公式$a_n = \frac{a_{n-1}(n-1)(n-2) - a_{n-2}}{n(n-1)}$。所以如果分别取$(a_0, a_1) = (1, 0)$ 和$(a_0, a_1) = (0, 1)$，我们可以得到两个线性无关的解。

(4)令$y = \sum_{n\geq 0} a_nx^n$，代入方程得$6a_3 + \sum_{n\geq 1}[a_{n+3}(n+3)(n+2)(n+1) + a_{n-1}]x^n = 0$，于是得到

递推公式$a_3=0,a_n=-a_{n+4}(n+4)(n+3)(n+2)\ (n\geq 0)$。所以如果分别取$(a_0,a_1,a_2)=(1,0,0)$和$(a_0,a_1,a_2)=(0,1,0)$，我们可以得到两个线性无关的解。

(5)令$y=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$，代入方程得$4a_1+\sum_{n\geq 1}[a_{n-1}+(n+4)(n+1)a_{n+1}]x^n=0$，于是得到递推公式$a_1=0,a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+5)(n+2)}\ (n\geq 0)$。所以如果分别取$a_0=1$ 和$a_0=2$，我们可以得到两个线性无关的解。

3.对于下列初值问题求出$y''(x_0),y^{(3)}(x_0)$和$y^{(4)}(x_0)$，从而写出相应初值问题的解在x_0点的泰勒级数的前5项：

(1)$y''+xy'+y=0;\ y(0)=1,y'(0)=0;$

(2)$y''+(\sin x)y'+(\cos x)y=0;\ y(0)=0,y'(0)=1.$

解:(1)由方程，我们知道
$$y^{(k+2)}=-xy^{(k+1)}-(k+1)y^{(k)},$$
于是由初值，我们得到$y''(0)=-1,\ y^{(3)}(0)=0$ 和$y^{(4)}(0)=3$，由此
$$y=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots,$$

(2)由方程和初值，我们有$y''(0)=0$，对方程求一阶导数，得到$y^{(3)}(0)=-2$ 和$y^{(4)}(0)=0$，由此
$$y=x-\frac{x^3}{3}+\cdots.$$

4.求解$Hermite$方程：
$$y''+2xy'+\lambda y=0,\ (-\infty<x<\infty)$$
其中λ是常数。

解：令$y=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$，代入方程得$\sum_n(a_{n+2}(n+2)(n+1)-2a_nn+\lambda a_n)x^n=0$，于是得到递推公式$a_n=\frac{(2n-\lambda)a_{n-2}}{n(n-1)}$。于是可以得到由两个参数$a_0$ 和a_1 决定的解表达式。

5.用广义幂级数求解下列微分方程：

(1)$2xy''+y'+xy=0;$　　(2)$x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{9})y=0;$

(3)$2x^2y''-xy'+(1+x)y=0;$　(4)$xy''+y=0.$

解：(1)令$y=\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+\rho}$，$a_0=1$，而且如果$n<0,\ a_n=0$，代入方程得$\sum_n(2a_n(n+\rho)(n+\rho-1)-a_n(n+\rho)+a_{n-2})x^{n+\rho-1}=0$，于是得到递推公式$a_n(n+\rho)(2n+2\rho-1)+a_{n-2}=0$。当$n=0$时，由该公式知道$\rho=0,1/2$。于是最终得到两个线性无关解
$$y_1=x^{1/2}(1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!!5\cdot 9\cdots(4n+1)}),$$

$$y_2 = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!!3\cdot 7\cdots(4n1)}.$$

(2)令$y=\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+\rho}$，$a_0=1$，而且如果$n<0, a_n=0$，代入方程得$\sum_n (a_n(n+\rho)(n+\rho-1)+a_n(n+\rho)+a_{n-2}-\frac{1}{9}a_n)x^{n+\rho}=0$，于是得到递推公式$a_n[(n+\rho)^2-\frac{1}{9}]+a_{n-2}=0$。当$n=0$时，由该公式知道$\rho=\pm 1/3$。于是最终得到两个线性无关解，亦即$\pm 1/3$阶的Bessel函数。

(3)令$y=\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+\rho}$，$a_0=1$，而且如果$n<0, a_n=0$，代入方程得$\sum_n (2a_n(n+\rho)(n+\rho-1)-a_n(n+\rho)+a_{n-1}+a_n)x^{n+\rho}=0$，于是得到递推公式$a_n[2(n+\rho)^2-3(n+\rho)+1]+a_{n-1}=0$。当$n=0$时，由该公式知道$\rho=1,1/2$。于是得到两个线性无关解

$$y_1 = x^{1/2}(1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)!!n!}),$$

$$y_2 = x(1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!!n!}).$$

(4)令$y=\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+\rho}$，$a_0=1$，而且如果$n<0, a_n=0$，代入方程得$\sum_n (a_n(n+\rho)(n+\rho-1)+a_{n-1})x^{n+\rho-1}=0$，于是得到递推公式$a_n(n+\rho)(n+\rho-1)+a_{n-1}=0$，取$n=0$时，由该公式知道$\rho=1,0$。当$\rho=1$时，

$$y = x(1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!n!}).$$

当$\rho=0$时，由于递推公式不能从a_0决定a_1，没有相应的广义幂级数解。

6.半整数阶的贝塞尔方程为$x^2y''+xy'+(x^2-(n-\frac{1}{2})^2)y=0$，它的两个线性无关解称为半整数阶的贝塞尔函数$J_{\frac{1}{2}+n}(x)$，$J_{n-\frac{1}{2}}(x)(n=0,1,2,\cdots)$。证明：

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\\
J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\\
J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(dx^2)^n}\frac{\sin x}{x},\\
J_{-n-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(dx^2)^n}\frac{\cos x}{x},
\end{aligned}$$

证明：首先证明

$$(*)\begin{cases} \frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x); \\ \frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x). \end{cases}$$

因为

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+n},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] &= \frac{d}{dx}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}(\frac{1}{2})^{2k+n}x^{2k}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}(\frac{1}{2})^{2k+n}2kx^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k)}(\frac{1}{2})^{2(k-1)+n+1}x^{2k-1} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+2)\Gamma(k+1)}(\frac{1}{2})^{2k+n+1}x^{2k+1}=-x^{-n}J_{n+1}(x).\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^{n}J_n(x)] &= \frac{d}{dx}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}(\frac{1}{2})^{2k+n}x^{2(k+n)}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)}(\frac{1}{2})^{2k+n}2(k+n)x^{2(k+n)-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k)\Gamma(k+1)}(\frac{1}{2})^{2(k-1)+n+1}x^{2(k+n)-1} \\ &= x^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(n-1+k+1)\Gamma(k+1)}(\frac{1}{2})^{2k+n-1}x^{2k+n-1}=x^nJ_{n-1}(x).\end{aligned}$$

其次，容易验证函数$y=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$满足Bessel方程$x^2y''+xy'+(x^2-1/4)y=0$，其次$y$的广义幂级数首项为$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}=\frac{1}{\Gamma(1/2+1)\Gamma(1)}(\frac{x}{2})^{1/2}$，所以$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$。其余则可由(*)的递推公式和归纳法得到。例如，由(*)，有

$$\begin{aligned}J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= -x^{n-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}-n}J_{n-\frac{1}{2}}(x) \\ &= -x^{n-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}-n}(-1)x^{n-\frac{3}{2}}\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}-n}J_{n-\frac{3}{2}}(x) \\ &= (-1)^2x^{n+\frac{1}{2}}(x^{-1}\frac{d}{dx})^2x^{\frac{3}{2}-n}J_{n-\frac{3}{2}}(x) \\ &= (-1)^nx^{n+\frac{1}{2}}(x^{-1}\frac{d}{dx})^nx^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}(2x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(dx^2)^n}\frac{\sin x}{x}.\end{aligned}$$

7.设超几何方程

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'-\alpha\beta y=0$$

其中α,β,γ是常数。

(1)证明$x=0$是一个正则奇点，相应的指标根为$\rho_1=0$和$\rho_2=1-\gamma$；

(2)证明$x=1$也是一个正则奇点，相应的指标根为$\rho_1=0$和$\rho_2=\gamma-\alpha-\beta$；

(3)设$1-\gamma$不是正整数，则超几何方程在$x=0$的领域内有一个幂级数解为

$$y_1=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1!}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 2!}x^2+\cdots$$

(称为超几何级数)，试问它的收敛半径是什么？

(4)设$1-\gamma$不是整数，则第二个解是

$$\begin{aligned} y_2 \quad = \quad & x^{1-\gamma}[1+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)\cdot 1!}x \\ & +\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)\cdot 2!}x^2+\cdots] \end{aligned}$$

证明：(1) 在方程两边乘上$x/(1-x)$，于是看出$x=0$是一个正则奇点。由于$p(0)=\gamma, q(0)=0$，于是指标方程为$\lambda(\lambda-1)+\gamma\lambda=0$，所以相应的指标根为$\rho_1=0$和$\rho_2=1-\gamma$;

(2)在方程两边乘上$(1-x)/x$，于是看出$x=1$也是一个正则奇点。由于$p(0)=1+\lambda+\beta-\gamma, q(0)=0$，于是指标方程为$\lambda(\lambda-1)+(1+\lambda+\beta-\gamma)\lambda=0$，所以相应的指标根为$\rho_1=0$和$\rho_2=\gamma-\alpha-\beta$;

(3)将方程写为

$$xy''-x^2y''+\gamma y'-(1+\alpha+\beta)xy'-\alpha\beta y=0,$$

令$y=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$，$a_0=1$，而且如果$n<0,\ a_n=0$，代入方程得$\sum_n(a_{n+1}(n+1)n-a_nn(n-1)+\gamma a_{n+1}(n+1)-(1+\alpha+\beta)a_nn-\alpha\beta a_n)x^n=0$，于是得到递推公式$a_{n+1}(n+\gamma)(n+1)=a_n(n+\alpha)(n+\beta)$。由此容易看出收敛半径为1。

(4)令$y=\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+1-\gamma}$，$a_0=1$，而且如果$n<0,\ a_n=0$，代入方程得$\sum_n(a_{n+1}(n+2-\gamma)(n+1-\gamma)-a_n(n+1-\gamma)(n-\gamma)+\gamma a_{n+1}(n+2-\gamma)-(1+\alpha+\beta)a_n(n+1-\gamma)-\alpha\beta a_n)x^{n+1-\gamma}=0$，于是得到递推公式$a_{n+1}(n+2-\gamma)(n+1)=a_n(n+1-\gamma+\alpha)(n+1-\gamma+\beta)$。

第九节习题

1.试把一般的S-L边值问题(4.9.1)和(4.9.2)化成特殊形式的S-L边值问题(4.9.6)和(4.9.7)。

解：参看课本注4.9.1。

2.求解边值问题：

$$y''+\lambda y=0,\ y(a)=0,\ y'(b)=0,$$

其中a和b是常数($a<b$)，而λ是参数。

解：特征方程为$r^2+\lambda=0$。

(1)当$\lambda=0$时，$r=0$，方程化为$y''=0,\ y(0)=0,\ y'(b)=0$，此时方程只有零解；

(2)当$\lambda < 0$时，$r_1 = \sqrt{-\lambda}, r_2 = -\sqrt{-\lambda}$，此时方程通解为$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$，再代入边值条件，可得$C_1 = C_2 = 0$，即当$\lambda \le 0$时，方程只有零解；

(3)当$\lambda > 0$时，$r_1 = i\sqrt{\lambda}, r-2 = -i\sqrt{\lambda}$，方程通解为$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}t + C_2 \sin\sqrt{\lambda}t$，代入边值条件可得

$$\begin{cases} C_1 \cos[\sqrt{\lambda}(a-b)] = 0 \\ C_2 \cos[\sqrt{\lambda}(a-b)] = 0 \end{cases}$$

当且仅当$\sqrt{\lambda}(a-b) = \frac{\pi}{2} + k\pi$，即$\lambda = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2(b-a)}\right]^2$，$(k = 0, 1, \cdots)$时，存在非零解，此时$C_1, C_2$可取任意常数，即方程有无穷多个解，当$\lambda \ne \left[\frac{(2k+1)\pi}{2(b-a)}\right]^2$，$(k = 0, 1, \cdots)$时，方程只有零解。

3.求解周期性边值问题：

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1), \end{cases}$$

并比较它与S-L边值问题的异同。

解：$\lambda_n = (2n\pi)^2,\ y_n = c_n \cos(2n\pi t) + d_n \sin(2n\pi t),\ n = 0, 1, 2, \ldots$

4.讨论非齐次方程的S-L边值问题：

$$\begin{cases} y'' + [\lambda + q(x)]y = f(x), \\ y(0)\cos\alpha - y'\sin\alpha = 0,\ y(1)\cos\beta - y'\sin\beta = 0. \end{cases}$$

试证明：当λ不是相应齐次方程的S-L边值问题的特征值时，它有并只有一个解；而当λ等于某个特征值λ_m时，他有解的充要条件为

$$\int_0^1 f(x)\varphi_m(x)\,dx = 0$$

其中$\varphi_m(x)$为相应于特征值λ_m的特征函数。

证明：利用反证法。当λ不是相应齐次方程的S-L边值问题的特征值时，假设它有有两个解y_1和y_2，则$y_1 - y_2$满足下面的齐次方程

$$\begin{cases} y'' + [\lambda + q(x)]y = 0, \\ y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0,\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0. \end{cases}$$

因为λ不是此齐次方程的S-L边值问题的特征值，所以有$y_1 - y_2 \equiv 0$。这与假设矛盾。

而当λ等于某个特征值λ_m 时，令解为y，则有下面等式成立：

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\phi_m dx &= \int_0^1 (y'' + (\lambda + q)y)\phi_m dx \\ &= y'(1)\phi_m(1) - y'(0)\phi_m(0) - y(1)\phi_m'(1) + y(0)\phi_m'(0). \end{aligned}$$

因为

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0,\ \phi_m(0)\cos\alpha - \phi_m'(0)\sin\alpha = 0,$$

所以有

$$y(0)\phi'_m(0)=y'(0)\phi_m(0).$$

同理，可得

$$y(1)\phi'_m(1)=y'(1)\phi_m(1).$$

综上所述，有

$$\int_0^1 f(x)\phi_m(x)dx=0.$$

提高练习

1.考虑非齐次线性方程组

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+f(t)$$

其中$A(t)$和$f(t)$是以ω为周期的连续周期函数。设

$$X=X_1(t),\cdots,X=X_n(t)$$

是对应的齐次线性方程组

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X$$

的基本解组，它们分别满足如下的初值条件：

$$X_1(0)=(1,0,\cdots,0)^T,X_2(0)=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,X_n(0)=(0,0,\cdots,1)^T$$

求证；

(1)设$X=\varphi(t)$是非齐次线性方程组的解，则$X=\varphi(t)$是以ω为周期的周期解的充要条件是$\varphi(0)=\varphi(\omega)$.

(2)对于任何连续周期函数$f(t)$，非齐次线性方程组有唯一的周期解的充要条件是矩阵$X(\omega)=(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))$没有不等于1的特征根，等价于齐次线性方程组没有不恒等于零的周期解。

证明：(1)非齐次线性方程组解的表达式为：

$$\varphi(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)\varphi(0)+\Phi(t)\int_0^t\Phi(s)^{-1}f(s)ds$$

其中$\Phi(t)$为齐次线性方程组的基解矩阵。由$A(t),f(t)$的周期性可得结论。

(2)非齐次线性方程组的唯一性等价于其对应的齐次线性方程组的唯一性，故等价于$\Phi(0)=\Phi(w)$，即等价于题目中的结论。

2.证明微分方程

$$x"+2x=\lambda\sin 2\pi t+5x^3$$

当λ是小参数时至少有一个1周期解。

证明：令$x = \lambda u$，则原方程化为

$$u'' + 2u = \sin(2\pi t) + 5\lambda^2 u^3.$$

因为λ是小参数，所以结论成立。

3. 设微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ (x \in R^n)$$

其中$f(t,x)$ 对$(t,x) \in R^{n+1}$是连续的，对x满足局部李氏条件，而且对t 氏T周期的。试证明：这微分方程的解$x = x(t)$是T周期的，当且仅当它满足边值条件

$$x(0) = x(T).$$

证明：若解$x = x(t)$是T周期的，显然它满足边值条件

$$x(0) = x(T).$$

若解$x = x(t)$满足边值条件

$$x(0) = x(T).$$

那么$x(t+T)$满足

$$\frac{dx(t+T)}{dt} = f(t+T, x(t+X)) = f(t, x(t+X)),\ (x \in R^n),$$

$$x(t+T)|_{t=0} = x(0).$$

根据方程的唯一性定理，可得$x(t) = x(t+T)$.

4. 设微分方程

$$\ddot{x} + g(x) = p(t),$$

其中$p(t)$是t的连续的2π周期的函数，$g(x)$是x的连续可微函数，且满足条件

$$n^2 < g'(x) < (n+1)^2,\ (-\infty < x < \infty)$$

其中n是某个正整数。试证明这微分方程的2π周期解(如果存在的话)是唯一的。

证明：（反证法）假设存在两个不同的2π周期解x_1和x_2。则有

$$(x_1 - x_2)'' + \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}(x_1 - x_2) = 0$$

由条件可知，存在某个$\varepsilon>0$使得下面不等式成立：

$$(n+\varepsilon)^2<\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<(n+1)^2,\ (-\infty<x<\infty).$$

利用$x=\cos((n+\varepsilon)t)$是$x''+(n+\varepsilon)^2x=0$的解，以及施图姆比较定理可知，x_1-x_2的周期$\leq\frac{2\pi}{n+\varepsilon}<2\pi$。这与假设矛盾。

5.求解

$$\begin{cases}-x'+y'+z'-x+2z=e^{-t}\\ x'-y'+z'+x=2e^{-t}\\ x'+y'-z+x+2y=3e^{-t}\end{cases}$$

解：

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}C_1t^2e^{-t}-C_2te^{-t}+C_3e^{-t}+\frac{5}{2}te^{-t}-t^2e^{-t}+\frac{1}{4}t^3e^{-t}\\ y=-C_1te^{-t}+C_2e^{-t}+2te^{-t}-\frac{3}{4}t^2e^{-t}\\ z=C_1e^{-t}+\frac{3}{2}te^{-t}\end{cases}$$

易知平衡点$(-1,0)$稳定但不渐近稳定。

6.证明边值问题

$$\begin{cases}x^2y\text{"}-3xy'+3y=\ln x,(1\leq x\leq 2)\\ y(1)=A,y(2)=B\end{cases}$$

对所有的A,B都有唯一解。

证明：方程为欧拉方程，求解可得表达式，验证可得结论。

7.令函数

$$G(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

则$G(x,t)$关于t展开的幂级数为

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,$$

其中$P_n(x)$是勒让德多项式(函数$G(x,t)$称为勒让德多项式的母函数)。

证明：注意到$G(x,t)$满足方程

$$(1-x^2)G_{xx}-2xG_x+t^2G_{tt}+2tG_t=0,$$

设$G(x,t)$关于t展开的幂级数为

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)t^n,$$

则由$G(x,t)$满足的方程知道a_n满足勒让德方程

$$(1-x^2)a_{xx}-2xa_x+n(n+1)a=0.$$

现在我们想要说明$a_n=P_n$，我们仅需说明其首项相同即可。例如，当n为偶数时，我们取$x=0$，于是

$$G(0,t)=(1+t^2)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(0)t^n,$$

这说明当n为偶数时，$a_n(0)=P_n(0)$，于是$a_n=P_n$。

8.利用上题中的$G(x,t)$所满足的恒等式

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial G}{\partial t}=(x-t)G$$

证明递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0,(n\geq 1)$$

证明：利用上题中$G(x,t)$关于t的展式，应用到该恒等式，然后比较t^n的系数即可。

9.利用刘维尔公式(见第六章§1) 求出勒让德方程的另一个与$P_n(x)$线性无关的解$Q_n(x)$，并证明当$x\to 1-0$时$|Q_n(x)|\to+\infty$.

解：另一个线性无关解为

$$Q_n(x)=P_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}.$$

由于$P_n(x)$为多项式，并且$P_n(1)=1$，所以当取$0<x_0<1$充分接近1时，对于$x\in[x_0,1]$，我们有$P_n(x)\simeq 1$，于是当$x\to 1-0$时，我们有

$$|Q_n(x)|=P_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}\geq c\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{1-x}\geq cln\frac{1-x_0}{1-x}\to\infty.$$

第五章

5.1

1.（与提高练习第一题重复）

2.试讨论一阶齐次线性微分方程$\frac{dx}{dt}=a(t)x$零解稳定或渐进稳定的充要条件。

解：方程解的表达式为：

$$x=x(0)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}$$

由定义，零解稳定的充要条件为$\int_{t_0}^{\infty}a(\tau)d\tau<\infty$

零解渐进稳定的充要条件为$\int_{t_0}^{\infty}a(\tau)d\tau\infty$

3.设A 是一个2×2的常矩阵，记$p=-trA,q=detA$并设$p^2+q^2\neq 0$.

试证下列二阶常系数齐次线性微分方程组

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

的解满足：

(1)当$p > 0, q > 0$时，零解是渐进稳定的。

(2)当$p > 0, q = 0$或$p = 0, q > 0$时，零解是稳定的，但不是渐进稳定的。

(3)在其他情形下，零解是不稳定的。

证明：

设λ_1, λ_2为A的两特征根，则：

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -p,\ \lambda_1\lambda_2 = q$$

(1)

$$p > 0, q > 0$$

则λ_1, λ_2为两负实根

或一对实部为负的共轭虚根，由定理5.1.1知，零解渐进稳定。

(2)

$$p > 0, q = 0$$

则λ_1, λ_2分别为一正根一零根，由定理5.1.1知，零解稳定，但非渐进稳定。

$$p = 0, q > 0$$

则λ_1,λ_2为两共轭纯虚根，由定理5.1.1知，零解稳定，但非渐进稳定。

(3)同(1)(2)分析，在其他情形下，特征根至少有一个实部为正，由定理5.1.1知，零解不稳定。

4.讨论二维方程

$$x' = y - xf(x, y), y' = -x - yf(x, y)$$

零解的稳定性，其中函数$f(x, y)$在$(0, 0)$点附近是连续可微的。

解：$f(x, y)$在$(0, 0)$点附近连续可微，则$f(x, y)$在$(0, 0)$点的一小邻域内可一阶近似展开为：

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

则原二维方程的一阶线性近似方程为

$$x' = y - f(0, 0)x\ y' = -x - f(0, 0)y$$

则由上题分析可知，

$f(0,0) > 0$时，零解渐进稳定。

$f(0,0)0$时，零解稳定，但非渐进稳定。

$f(0,0) > 0$时，零解不稳定。

5.设函数$g(x)$连续，且当$x \neq 0$ 时$xg(x) > 0$.

试证方程$x" + g(x) = 0$的零解是稳定的，但不是渐进稳定的。

证明：稳定性证明，化为方程组，并取$V = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(s)ds$

非渐近稳定性利用定义证明。

6.讨论下列方程零解的稳定性：

$$(1)x' = -y - xy^2, y' = x - x^4y$$

$$(2)x' = -y^3 - x^5, y' = x^3 - y^5$$

$$(3)x' = -x + 2x(x+y)^2, y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2$$

$$(4)x' = 2x^2y + y^3, y' = -xy^2 + 2x^5$$

解：

(1)

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) > 0$$

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = -(x^2y^2 + x^4y^2) < 0$$

零解渐进稳定。

(2)

$$V(x,y) = (x^4 + y^4) > 0$$

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = -4(x^8 + y^8) < 0$$

零解渐进稳定。

(4)

$$N = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$$

$$V(x,y) = x^2y^4$$

$$\frac{dV(x,y)}{dt}=2x^2y^7+8x^7y^3$$

N内有$V(x,y)>0,\frac{dV(x,y)}{dt}>0$,边界上有$V(x,y)=0$,

故零解不稳定。

7.讨论a取何值时，方程组

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=-x_2+x_1^3\\ \frac{dx_2}{dt}=x_1+ax_2+x_2^3\end{cases}$$

的零解是稳定，渐进稳定或不稳定的。

解：设原方程组的线性化方程的系数矩阵的两根为$\lambda_1,\ \lambda_2$，则有：

$$\lambda_1+\lambda_2=a,\ \lambda_1\lambda_2=1$$

(1)$a>0$,同第3题分析，零解不稳定。

(2)$a=0$,令$V(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)>0$则

$\frac{dV(x,y)}{dt}=2(x_1^4+x_2^4)>0$,故零解不稳定。

(3)$a<0$,同第3题分析，零解渐进稳定。

8.研究二阶微分方程$x'=y,y'=-1+x^2$的两个平衡点的稳定性。

解：易知方程组的两个平衡点为$(1,0),(-1,0)$。

(1)对于平衡点$(1,0)$。

令$x_1=x-1,y_1=y$则相空间(x,y)中的平衡点$(1,0)$对应于相空间相空间(x_1,y_1)中的平衡点$(0,0)$。且有：

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=y_1\\ \frac{dy_1}{dt}=x_1(x_1+2)\end{cases}$$

令$N=\{(x_1,y_1):x_1>0,y_1>0\},V(x_1,y_1)=x_1y_1$则有：

$$\frac{dV(x_1,y_1)}{dt}=3x_1y_1+x_1^2y_1$$

在N上有：$V(x_1,y_1)>0,\frac{dV(x_1,y_1)}{dt}>0$

在∂N上有：$V(x_1,y_1)=0$

由判定定理知：平衡点$(1,0)$不稳定。

(2)对于平衡点$(-1,0)$。

令$x_2=x+1,y_2=y$则相空间(x,y)中的平衡点$(-1,0)$对应于相空间相空间(x_2,y_2)中的平衡点$(0,0)$。且有：

$$\begin{cases}\frac{dx_2}{dt}=y_2\\ \frac{dy_2}{dt}=x_2(x_2-2)\end{cases}$$

易知平衡点$(-1,0)$稳定但不渐近稳定。

5.2

1.对于极坐标下的方程

$$\frac{d\theta}{dt}=1,\begin{cases} r^2\sin\frac{1}{r} & r>0 \\ 0, & r=0 \end{cases}$$

试作出原点附近的相图，并研究平衡点$r=0$的稳定性质。

（略）

2.判断下列方程的奇点$(0,0)$的类型，并作出该奇点附近的相图。

$$(1)x'=4y-x, y'=-9x+y$$

$$(2)x'=2x+y+xy^2, y'=x+2y+x^2+y^2$$

$$(3)x'=2x+4y+\sin y, y'=x+y+e^y-1$$

$$(4)x'=x+2y, y'=5y-2x+x^3$$

$$(5)x'=x(1-y), y'=y(1-x)$$

解：(1)中心。

(2)不稳定双向结点。

(3)鞍点。

(4)鞍点。

(5)不稳定星形结点。

3.试确定方程组

$$\begin{cases} x'=-y-x(x^2+y^2-1)^2 \\ y'=x-y(x^2+y^2-1)^2 \end{cases}$$

的周期解和极限环并讨论极限环的稳定性。

解：引入极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$则方程组可化为：

$$\frac{d\theta}{dt}=1, \frac{dr}{dt}=r(1-r^2)$$

解得：$\theta=t+\theta_0, r=\frac{r_0}{\sqrt{(1-r_0^2)e^{-2t}+r_0^2}}$ 其中$r_0=r(0), \theta_0=\theta(0)$分别为$r,\theta$的初值。则对应的周期解为$\theta=t+\theta_0, r=r_0=1$即为极限环，易知此极限环稳定。

4.试判断下列方程组有无极限环存在。

$$(1)x'=x+y+\frac{1}{3}x^3-xy^2, y'-x+y+x^2y+\frac{2}{3}y^3$$

$$x' = y - x + x^3, y' = -x - y + y^3$$

解：(1)无。

(2)在域$x^2 + y^2 = 2$内存在不稳定极限环。

5.3

1.试用等斜线法画出下列方程的轨线图。

$$(1)x' = x(1 - x - 2y), y' = y(x - 2 - y)$$

$$(2)x' = xy, y' = x^2 + y^4$$

$$(3)x' = xy, y' = x^2 - y^4$$

$$(4)x' = xy - y^3, y' = y^2 - 2x^2y + x^4$$

（略）

提高练习

1.证明：对于线性方程组下列包含关系成立：

稳定⇔一切解在$t \geq 0$上保持有界；

渐进稳定⇔全局渐进稳定。

证明：若$\phi(t)$为基本解矩阵，那么$x(t) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)x_0$。

(1)⇒

由于对于任意的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得若$||x_0^1|| < \delta$有$||x^1(t) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)x_0^1|| < \varepsilon$。所以对于任一$x_0$，总存在$x_0^1$，使得满足$x_0^1 = Cx_0$，且$||x_)^1|| < \delta$，那么有

$$||x(t)|| = ||C\psi(t)\psi^{-1}(t_0)x_0^1|| < C||\psi(t)\psi^{-1}(t_0)x_0| < C\varepsilon|$$

即$x(t)$有界。

⇐

若$x(t)$有界，即存在C，使得$||x(t)|| \leq C$。若零解不稳定，即存在$\varepsilon > 0$和$t_0 \geq 0$。不论$\delta > 0$多么小，总存在x_0，虽然$||x_0|| < \delta$ ，但是(4.1)有以$x(t_0) = x_0$为初值的解$x(t, t_0, x_0)$在t等于某$t_1(\geq t_0)$时有

$$||x(t_1, t_0, x_0)|| \geq \varepsilon$$

那么若$x_0^1 = \frac{C}{\varepsilon}x_0$，则

$$||x^1(t) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)x_0^1|| = ||\frac{C}{\varepsilon}x(t)|| > C$$

产生矛盾。所以零解稳定。

(2)$\Rightarrow$

对于任意给定的$t_0 \geq 0$，存在$\delta > 0$，只要x_0满足

$$||x_0^1|| < \delta$$

系统(4.1)的满足初值条件$x^1(t_0) = x_0$的解$x^1 = x^1(t, t_0, x_0)$便有

$$\lim_{t \to +\infty} x^1(t, t_0, x_0^1) = 0$$

所以对于任一x_0，总存在x_0^1，使得满足$x_0^1 = Cx_0$，且$||x_)^1|| < \delta$，那么有

$$\lim_{t \to +\infty} x(t, t_0, x_0) = C \lim_{t \to +\infty} x^1(t, t_0, x_0^1) = 0$$

$\Leftarrow$

若对于任一$x(t)$满足$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$，那么对初值很小的$x(t)$也满足$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$。同时由于$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$，则任一$x(t)$有界，则由(1)知零解稳定。所以零解渐近稳定。

2.设数值函数$f(x,t)$ 在区域$\{(t,x) : t \geq 0, |x| < H\}$上连续，且保证方程$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$的解由初值唯一确定，$f(t,0) \equiv 0$。

求证：如果方程的零解稳定，且存在$x_1 > 0, x_2 < 0$ 使方程满足初值条件$x(0) = x_1, x(0) = x_2$的解，当$t \to +\infty$时都趋于零，则零解是渐进稳定的。

证明：设初值x_1, x_2对应的解分别为$\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 。

(1)断言：当$0 < x_0 < x_1$时，以x_0为初值的解$\varphi(t)$当$t \to +\infty$时趋于零。

若不然，则$\exists \varepsilon_0 > 0, \{t_j\}_{j=1}^{\infty}, t_j \to \infty (j \to \infty) st |\varphi(t_j)| > \varepsilon_0$。因为$\lim_{t \to \infty} \varphi_1(t) = 0$ ，所以存在某个t_0，使得当$t > t_0$时，$|\varphi_1(t)| < \varepsilon_0$，即存在$i > 0$，使得当$j > i$时，$|\varphi(t_j)| > |\varphi_1(t_j)|$，而$x_0 < x_1$，因此$|\varphi(t)||\varphi_1(t)|$必相交，此与解的唯一性矛盾，断言成立。

(2).类似(1)，当$0 > x_0 > x_2$ 时，以x_0为初值的解$\varphi(t)$当$t \to +\infty$时趋于零。

取$\delta = \min\{x_1, -x_2\}$ ，则当$|x_0| < \delta$时，以x_0为初值的解$\varphi(t)$满足$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$，故零解是渐近稳定的。

3.考虑下列两个方程组

$$\frac{dX}{dt} = \{A + B(t)X\}$$

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

其中A是常矩阵，$B(t)$是在$t \geq 0$上连续的矩阵函数且满足$\int_0^{\infty} |B(t)| dt < \infty$

求证：如果后一个方程的一切解在$t \geq 0$上保持有界，则前一个方程的一切解在$t \geq 0$上也保持有界。

证明：第一个方程组适合初值条件$X(t_0)=X_0$的解可表示为：

$$X(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)X(\tau)d\tau(t\geq 0)$$

其中$\Phi(\tau)$是第二个方程组适合初值条件$\Phi(t_0)=E$的基解矩阵。因为第二个方程的一切解在$t\geq 0$上保持有界，$\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0$是第二个方程组满足初始条件$X(t_0)=X_0$的解，故存在正常数M，使得

$$||\Phi(t)||||\Phi^{-1}(t_0)||||X_0||\leq M,||\Phi(\tau)||||\Phi^{-1}(\tau)||\leq M(t\geq 0)$$

故可得：

$$||X(t)||\leq M+M\int_{t_0}^{t}||B(\tau)||||X(\tau)||d\tau(t\geq 0)$$

由$Growall$不等式，则有：

$$||X(t)||\leq Me^{M\int_{t_0}^{t}||B(\tau)||d\tau}(t\geq 0)$$

因为$\int_0^{+\infty}||B(\tau)||d\tau<+\infty$所以$\int_{t_0}^{t}||B(\tau)||d\tau$有界，设为$h$，则有：$||X(t)||\leq Me^{Mh}(t\geq 0)$ 即第一个方程组的一切解是有界的。

4.考虑下列两个方程组

$$\frac{dX}{dt}=AX+R(t,X)$$
$$\frac{dX}{dt}=AX$$

其中A是常矩阵，$R(t,X)$在$\{(t,X):t\geq t_0,||X||<H\}$上连续且满足$||R(t,X)||\leq a(t)||X||$，其中$a(t)$是$t\geq t_0$上的非负连续函数且$\int_0^{\infty}a(t)dt<\infty$。

求证：如果后一个方程的一切解在$t\geq t_0$上保持有界，则前一个方程的零解是稳定的。

证明：由常数变易法可知，当X_0充分小时，第一个方程组适合初值条件$X(t_0)=X_0$的解可表示为：

$$X(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau)R(\tau,X(\tau))(t\geq t_0)$$

其中$\Phi(\tau)$是第二个方程组适合初值条件$\Phi(t_0)=E$的基解矩阵。因为第二个方程的一切解在$t\geq 0$上保持有界，故存在正常数M，使得

$$||\Phi(t)||||\Phi^{-1}(t_0)||||X_0||\leq M,||\Phi(\tau)||||\Phi^{-1}(\tau)||\leq M(t\geq t_0)$$

又有题目条件，可得：

$$||X(t)||\leq M||X_0||+M\int_{t_0}^{t}a(\tau)||X(\tau)||d\tau(t\geq t_0)$$

由$Growall$不等式，则有：

$$||X(t)||\leq M||X_0||e^{M\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}(t\geq t_0)$$

因为$\int_{t_0}^{+\infty} a(\tau)d\tau < +\infty$所以$\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$有界，设为$h$，则有：$||X(t)|| \leq M||X_0||e^{Mh}(t \geq t_0)$ 则对任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta = \frac{\varepsilon}{Me^{Mh}}$，当$||X_0|| < \delta$时，$||X(t)|| < \varepsilon$即第一个方程组的零解是渐进稳定的。

5.设线性微分方程$x' = ax + by, y' = cx + dy$以$(0,0)$为高阶奇点，试作出其相图。（略）

6.考虑二阶方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1), x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1), x_2 \end{cases}$$

其中$f_1(x_1), x_2, f_2(x_1), x_2$在整个$(x_1, x_2)$平面上连续可微。设$(0,0)$是方程组的唯一奇点，它在$Liapunov$意义下是稳定的，且方程组没有周期闭轨。试证明任何轨道必负向无界；对于正向有界的轨道，当$t \to +\infty$时，它趋于点$(0,0)$。

7. 证明方程

$$x" + ax + bx' - cx^2 - d(x')^2 = 0$$

不存在极限环，其中a, v, c, d为常数且$b \neq 0$ （提示：利用$Dulac$ 定理）。

8.试证明：方程$x" + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$（其中$\mu > 0$为常数）至少有一个闭轨。