第七节一阶常系数线性差分方程

一、一阶常系数齐次线性差分方程的求解

二、一阶常系数非齐次线性差分方程的求解

三、小结

一阶常系数齐次线性差分方程的一般形式

$$y_{x+1} - ay_x = 0 (a \neq 0 \text{为常数}) \quad (1)$$

一阶常系数非齐次线性差分方程的一般形式

$$y_{x+1} - ay_x = f(x) \quad (2)$$

$$(a \neq 0 \text{为常数}, \quad f(x) \neq 0)$$

注: (1)为(2)所对应的一阶常系数齐次线性差分方程.

一、一阶常系数齐次线性差分方程的求解

1.迭代法

$$y_{x+1} - ay_x = 0 (a \neq 0 为常数) \quad (1)$$

设 y_0 为已知，由方程（1）依次可得，

$$y_1 = ay_0$$

$$y_2 = ay_1 = a^2 y_0$$

$$y_3 = ay_2 = a^3 y_0$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$y_x = ay_{x-1} = a^x y_0$$

容易验证， $y_x = a^x y_0$满足差分方程，令 $y_0 = C$为任意常数，于是差分方程（1）的通解为 $Y_x = Ca^x$.

例 1 求 $2y_{x+1} + y_x = 0$的通解 .

解 $a = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 差分方程的通解为 $Y_x = C\left(-\dfrac{1}{2}\right)^x$.

2.特征根法

$$y_{x+1} - ay_x = 0 (a \neq 0 \text{为常数}) \qquad (1)$$

方程（1）变形为

$$\Delta y_x + (1-a) y_x = 0 (a \neq 0 \text{为常数})$$

根据 $\Delta \lambda^x = (\lambda - 1)\lambda^x$,

可以看出 y_x 的形式一定为某一指数函数.

设 $y_x = \lambda^x (\lambda \neq 0)$，代入（1）得

$$\lambda^{x+1} - a\lambda^x = 0$$

即 $\lambda - a = 0$ 特征方程

$\lambda = a$ 特征根

于是 $y_x = a^x$ 是（1）的一个解，

从而 $y_x = Ca^x$ 是（1）的通解.

用特征根法求例 1 的通解.

解 特征方程 $2\lambda + 1 = 0$ 特征根 $\lambda = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ 差分方程的通解为 $Y_x = C\left(-\frac{1}{2}\right)^x$.

例 2 求 $3y_x - y_{x-1} = 0$ 满足 $y_0 = 2$ 的特解 .

解 原方程可改写为 $3y_{x+1} - y_x = 0$

特征方程为 $3\lambda - 1 = 0$

特征根 $\lambda = \frac{1}{3}$

$\therefore$ 差分方程的通解为 $Y_x = C\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

代入 $y_0 = 2$，得 $C = 2$

$\therefore$ 所求差分方程的特解为 $Y_x = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

二、一阶常系数非齐次线性差分方程的求解

$$y_{x+1} - ay_x = f(x) \qquad (2)$$

$(a \neq 0$ 为常数， $f(x) \neq 0)$

一阶常系数非齐次线性差分方程的通解由两项的和组成：

一项是该方程的一个特解 y_x^*，

另一项是对应的齐次差分方程的通解 Y_x.

即差分方程（2）的通解为 $y_x = Y_x + y_x^*$.

下面讨论特解 y_x^* 的求法：

当右端 $f(x)$ 是某些特殊形式的函数时，采用待定系数法求其特解 y_x^* 较为方便.

待定系数法 假定待定的特解 y_x^* 与 $f(x)$ 的形式相同.然后将它们代入差分方程,求出待定系数即可求出特解.

1. $f(x)=p_n(x)$型

方程 (2)为 $y_{x+1}-ay_x=p_n(x)$

即 $\Delta y_x+(1-a)y_x=p_n(x)$

设y_x^*是它的解，代入上式得

$$\Delta y_x^*+\underline{(1-a)}y_x^*=p_n(x)$$

由于 $p_n(x)$是多项式，因此 y_x^*也应该是多项式，

且y_x^*是n次多项式，Δy_x^*是$(n-1)$次多项式.

(1) 1不是特征方程的根，即 $\quad 1-a\neq 0$

$$\text{令} y_x^* = Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

(2) 1是特征方程的根，即 $\quad 1-a=0$

$$\text{令} y_x^* = xQ_n(x) = x\left(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n\right)$$

综上讨论

$$\text{设 } y_x^* = x^kQ_n(x),\quad k=\begin{cases}0 & 1\text{不是特征方程的根}\\ 1 & 1\text{是特征方程的根}\end{cases}$$

例 3 求差分方程 $y_{x+1}-2y_x=3x^2$的通解.

解 特征方程 $\lambda-2=0$,

特征根 $\lambda=2$,

对应齐次方程通解 $Y_x=C\cdot 2^x$

$\because$ 1不是特征方程的根, 设 $y_x^*=Ax^2+Bx+C$,

代入方程, 得 $A=-3$, $B=-6$, $C=-9$

于是 $y_x^*=-3x^2-6x-9$

原方程通解为 $y_x=C\cdot 2^x-3x^2-6x-9$.

例 4 求差分方程 $y_{x+1}-5y_x=3, y_0=\frac{7}{3}$ 的特解.

解 对应齐次方程通解 $Y_x=C\cdot 5^x$

$\because$ 1不是特征方程的根, 设 $y_x^*=A,$

代入方程, 得 $A=-\frac{3}{4},$

方程的通解为 $y_x=-\frac{3}{4}+C\cdot 5^x,$

将 $y_0=\frac{7}{3}$ 代入，则 $C=\frac{7}{3}+\frac{3}{4}=\frac{37}{12}$

故方程的特解 $y_x*=\frac{37}{12}\cdot 5^x-\frac{3}{4}.$

例 5 求差分方程 $y_{x+1} - y_x = x^3 - 3x^2 + 2x$ 的通解 .

解 $\because$ 1是特征方程的根，

这类方程可用另一种较简单的方式求解 .

方程左边为 Δy_x，右边为

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

$$= x(x-1)(x-2) = x^{(3)}$$

故 $\Delta y_x = x^{(3)}$

$\therefore$ 方程的通解为 $y_x = \dfrac{x^{(4)}}{4} + C$.

2. $f(x)=\mu^{x}p_{n}(x)$型

方程 (2)为 $y_{x+1}-ay_{x}=\mu^{x}p_{n}(x)$

(1)$\mu=0,1$ $\boxed{\text{类型 1}}$

(2)$\mu\neq 0,1$ 设$y_x=\mu^x\cdot z_x$

代入方程得 $\mu^{x+1}z_{x+1}-a\mu^{x}z_{x}=\mu^{x}p_{n}(x)$

消去 μ^{x}，即得 $\mu z_{x+1}-az_{x}=p_{n}(x)$ $\boxed{\text{类型 1}}$

于是$y_x^{*}=\mu^{x}\cdot z_x^{*}$.

例 6 求差分方程 $y_{x+1}+y_x=2^x$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda+1=0$,

特征根 $\lambda=-1$,

对应齐次方程通解 $Y_x=C\cdot(-1)^x$

设 $y_x=2^x\cdot z_x$, 原方程化为

$2z_{x+1}+z_x=1$ 求得其特解为 $z_x^*=\dfrac{1}{3}$,

于是 $y_x^*=\dfrac{1}{3}\cdot 2^x$,

所求通解为 $y_x=\dfrac{1}{3}\cdot 2^x+C(-1)^x$.

例 7 求 $y_{x+1} - ay_x = 2^x$ 的通解 .

解 特征方程 $\lambda - a = 0$,

特征根 $\lambda = a$,

对应齐次方程通解 $Y_x = C \cdot a^x$

设 $y_x = 2^x \cdot z_x$，原方程化为

$$2z_{x+1} - az_x = 1$$

即 $z_{x+1} - \dfrac{a}{2} z_x = \dfrac{1}{2}$

(1) 1是特征方程的根，即 $a=2$时

特解 $z_x^*=\frac{1}{2}x$；

(2) 1不是特征方程的根，即 $a\neq 2$时

特解 $z_x^*=\frac{1}{2-a}$；

于是 $y_x^*=\begin{cases}\frac{1}{2}x\cdot 2^x & a=2\\ \frac{1}{2-a}\cdot 2^x & a\neq 2\end{cases}$

即通解 $y_x=\begin{cases}Ca^x+\frac{1}{2}x\cdot 2^x & a=2\\ Ca^x+\frac{1}{2-a}\cdot 2^x & a\neq 2\end{cases}$.

※3. $f(x) = b_1\cos\omega x + b_2\sin\omega x$型

差分方程为

$$y_{x+1} - ay_x = b_1\cos\omega x + b_2\sin\omega x$$

(1) 当 $D = (\cos\omega - a)^2 + \sin^2\omega \neq 0$时

令 $y_x^* = B_1\cos\omega x + B_2\sin\omega x$($B_1, B_2$为待定系数),

代入原方程得到

$$B_1(\cos\omega - a) + B_2\sin\omega = b_1$$

$$-B_1\sin\omega + B_2(\cos\omega - a) = b_2$$

解方程组得 $$B_1 = \frac{1}{D}\left[b_1(\cos\omega - a) - b_2\sin\omega\right]$$

$$B_2 = \frac{1}{D}\left[b_2(\cos\omega - a) - b_1\sin\omega\right]$$

通解为 $y_x = Aa^x + B_1\cos\omega x + B_2\sin\omega x$

(2) 当 $D = 0$ 时，令 $y_x^* = x(B_1\cos\omega x + B_2\sin\omega x)$

代入原方程得

$$\{[(\cos\omega - a)B_1 + B_2\sin\omega]x + (B_1\cos\omega + B_2\sin\omega)\}\cos\omega x +$$
$$\{[(\cos\omega - a)B_2 - B_1\sin\omega]x + (B_2\cos\omega - B_1\sin\omega)\}\sin\omega x$$
$$= b_1\cos\omega x + b_2\sin\omega x \qquad (*)$$

注意到 $D=0$的充要条件为

$$\begin{cases}\cos\omega-a=0\\ \sin\omega=0\end{cases},\text{即}\begin{cases}\omega=2k\pi\\ a=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}\omega=(2k+1)\pi\\ a=-1\end{cases}$$

其中 k为整数，将上式代入 $(*)$得

$$B_1=b_1,B_2=b_2\text{或}B_1=-b_1,B_2=-b_2$$

由于 $a=1$或 $a=-1$，故得方程的通解为

$$y_x=A+x(b_1\cos 2k\pi x+b_2\sin 2k\pi x)$$

或 $y_x=A(-1)^t+[b_1\cos(2k+1)\pi x+b_2\sin(2k+1)\pi x]$

例 8 $y_{x+1} - 4y_x = \sin 3x$的特解形式为

$A.B\cos 3x$ $B.B_1\sin 3x + B_2\cos 3x$

$C.B\sin 3x$ $D.x(B_1\cos 3x + B_2\cos 3x)$

解 显然，只能取 B或D，但是

$$(\cos 3 - 1)^2 + \sin^2 3 \neq 0,$$

故取 B.

例 9 求差分方程 $y_{x+1} - 5y_x = \cos\frac{\pi}{2}x$ 的通解.

解 对应齐次方程的通解 $\bar{y}_x = A \cdot 5^x$

又设 $y_x^* = B_1 \cos\frac{\pi}{2}x + B_2 \sin\frac{\pi}{2}x$, 且 $D \neq 0$,

代入原方程为 $\begin{cases} -5B_1 + B_2 = 1 \\ -B_1 - 5B_2 = 0 \end{cases}$

解之得到 $B_1 = -\frac{5}{26}, B_2 = \frac{1}{26}$

所求通解为 $y_x = A \cdot 5^x + \frac{5}{26}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{26}\sin\frac{\pi}{2}x$

三、小结

1.一阶常系数齐次线性差分方程求通解

（1）写出相应的特征方程;

（2）求出特征根;

（3）写出通解.

2.一阶常系数非齐次线性差分方程求通解

$f(x)=p_n(x)$型

$f(x)=\mu^x p_n(x)$型

练习题

1.求下列差分方程的通解　　　　及特解.

$(1)3y_x - 3y_{x+1} = x \cdot 3^x + 1,$

$(2)y_{x+1} - 5y_x = 3(y_0 = \frac{7}{3}),$

$(3)y_{x+1} + y_x = 2^x(y_0 = 2),$

$(4)y_{x+1} + 4y_x = 2x^2 + x - 1(y_0 = 1)$

练习题答案

1.(1) $y_x = A(-1)^x + (\frac{x}{2} - \frac{3}{4}) \bullet 3^x + (\frac{1}{3})^x$;

(2) $y_x = -\frac{3}{4} + A \bullet 5^x$, $y_x = -\frac{3}{4} + \frac{37}{12} \bullet 5^x$;

(3) $y_x = \frac{1}{3} \bullet 2^x + A(-1)^x$, $y_x = \frac{1}{3} \bullet 2^x + \frac{5}{3}(-1)^x$;

(4) $y_x = -\frac{36}{125} + \frac{1}{25}x + \frac{2}{5}x^2 + A(-4)^x$;

$y_x = -\frac{36}{125} + \frac{1}{25}x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{161}{125}(-4)^x$.

第七章 经典计量经济学应用模型

上页

下页

返回

§7.1 生产函数模型(Production Function Models，P.F.)

一、几个重要概念

二、以要素之间替代性质的描述为线索的生产函数模型的发展

三、以技术要素的描述为线索的生产函数模型的发展

四、几个重要生产函数模型的参数估计方法

五、生产函数模型在技术进步分析中的应用

六、建立生产函数模型中的数据质量问题

一、几个重要概念

1. 生产函数

(1) 定义

- 描述生产过程中投入的生产要素的某种组合同它可能的最大产出量之间的依存关系的数学表达式。

$$Y = f(A, K, L, \cdots)$$

- 投入的生产要素
- 最大产出量

(2) 生产函数模型的发展

- 从20年代末，美国数学家Charles Cobb和经济学家Paul Dauglas提出了生产函数这一名词，并用1899-1922年的数据资料，导出了著名的Cobb-Dauglas生产函数。

1928年 Cobb, Dauglas C-D生产函数

1937年 Dauglas,Durand C-D生产函数的改进型

1957年 Solow C-D生产函数的改进型

1960年 Solow 含体现型技术进步生产 函数

1967年	Arrow等	两要素CES生产函数
1967年	Sato	二级CES生产函数
1968年	Sato, Hoffman	VES生产函数
1968年	Aigner, Chu	边界生产函数
1971年	Revanker	VES生产函数
1973年	Christensen, Jorgenson	超越对数生产函数
1980年		三级CES生产函数

(3) 生产函数是经验的产物

- 生产函数是在西方国家发展起来的，作为西方经济学理论体系的一部分，与特定的生产理论与环境相联系。

- 西方国家发展的生产函数模型可以被我们所应用：

　　生产函数反应的是生产中投入要素与产出量之间的技术关系；

生产函数模型的形式是经验的产物；不能照搬。

2. 要素产出弹性（Elasticity of Output）

(1) 要素的产出弹性

- 某投入要素的产出弹性被定义为，当其他投入要素不变时，该要素增加1%所引起的产出量的变化率。

$$E_K = \frac{\Delta Y}{Y} \Big/ \frac{\Delta K}{K} = \frac{\partial f}{\partial K} \Big/ \frac{K}{Y}$$

$$E_L = \frac{\Delta Y}{Y} \Big/ \frac{\Delta L}{L} = \frac{\partial f}{\partial L} \Big/ \frac{L}{Y}$$

- 要素产出弹性的数值区间？为什么？

(2) 规模报酬

- 所有要素的产出弹性之和
- 规模报酬不变
- 规模报酬递增
- 规模报酬递减
- 为什么经常将规模报酬不变作为生产函数必须满足的条件？

3. 要素替代弹性（Elasticity of Substitution）

(1) 要素的边际产量(Marginal Product)

- 其他条件不变时，某一种投入要素增加一个单位时导致的产出量的增加量。用于描述投入要素对产出量的影响程度。

$$MP_K = \partial f / \partial K$$

$$MP_L = \partial f / \partial L$$

$$\vdots$$

- 边际产量不为负。

$$MP_K \geq 0, MP_L \geq 0, \cdots$$

- 边际产量递减。

$$\frac{\partial(MP_K)}{\partial K} = \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} \leq 0$$

$$\frac{\partial(MP_L)}{\partial L} = \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} \leq 0$$

(2) 要素的边际替代率

(Marginal Rate of Substitution)

- 当两种要素可以互相替代时，就可以采用不同的要素组合生产相同数量的产出量。要素的边际替代率指的是在产量一定的情况下，某一种要素的增加与另一种要素的减少之间的比例。

$$MRS_{K \to L} = \Delta K / \Delta L$$

- 要素的边际替代率可以表示为要素的边际产量之比。

$$MRS_{K\to L} = MP_L / MP_K$$

$$MRS_{L\to K} = MP_K / MP_L$$

- 从生产函数可以求得要素的边际产量和要素的边际替代率。

(3) 要素替代弹性

- 要素替代弹性定义为两种要素的比例的变化率与边际替代率的变化率之比。

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{(K/L)} \bigg/ \frac{d(MP_L/MP_K)}{(MP_L/MP_K)}$$

- 要素替代弹性是描述生产行为的重要参数，求得要素替代弹性是生产函数的重要应用。
- 要素替代弹性不为负。
- 特殊情况：要素替代弹性为0、要素替代弹性为∞。

4. 技术进步

(1) 广义技术进步与狭义技术进步

- 所谓狭义技术进步，仅指要素质量的提高。
- 狭义的技术进步是体现在要素上的，它可以通过要素的"等价数量"来表示。

- 求得“等价数量”，作为生产函数模型的样本观测值，以这样的方法来引入技术进步因素。
- 所谓广义技术进步，除了要素质量的提高外，还包括管理水平的提高等对产出量具有重要影响的因素，这些因素是独立于要素之外的。
- 在生产函数模型中需要特别处理广义技术进步。

(2) 中性技术进步

- 假设在生产活动中除了技术以外，只有资本与劳动两种要素，定义两要素的产出弹性之比为相对资本密集度，用ω表示。即:

$$\omega = E_L / E_K$$

- 如果技术进步使得ω越来越大，即劳动的产出弹性比资本的产出弹性增长得快，则称之为节约劳动型技术进步；如果技术进步使得ω越来越小，即劳动的产出弹性比资本的产出弹性增长得慢，则称之为节约资本型技术进步；如果技术进步前后ω不变，即劳动的产出弹性与资本的产出弹性同步增长，则称之为中性技术进步。

- 在中性技术进步中，如果要素之比不随时间变化，则称为希克斯中性技术进步；如果劳动产出率不随时间变化，则称为索洛中性技术进步；如果资本产出率不随时间变化，则称为哈罗德中性技术进步。

二、以要素之间替代性质的描述为线索的生产函数模型的发展

1. 线性生产函数模型(Linear P. F.)

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 K + \alpha_2 L$$

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{(K/L)} \bigg/ \frac{d(MP_L/MP_K)}{(MP_L/MP_K)}$$

$$\sigma = \infty$$

- 为什么?

- 如果选择线性生产函数，就意味着承认什么假设?

2. 投入产出生产函数模型(Input-Output P.F.)

$$Y = \min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right)$$

$$\sigma = 0$$

- 为什么?
- 如果选择投入产出生产函数，就意味着承认什么假设?

3. C-D生产函数模型

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$E_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \Bigg/ \frac{K}{Y} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\frac{Y}{K} = \alpha$$

$$E_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \Bigg/ \frac{L}{Y} = AK^{\alpha}\beta L^{\beta-1}\frac{Y}{L} = \beta$$

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{(K/L)} \bigg/ \frac{d(MP_L/MP_K)}{(MP_L/MP_K)}$$

$$= d(\ln(\frac{K}{L})) \bigg/ d(\ln(\frac{MP_L}{MP_K}))$$

$$= d(\ln(\frac{K}{L})) \bigg/ d(\ln(\frac{\beta K}{\alpha L}))$$

$$= d(\ln(\frac{K}{L})) \bigg/ d(\ln(\frac{\beta}{\alpha}) + \ln(\frac{K}{L}))$$

$$= 1$$

- 在C-D生产函数中要素的替代弹性是否随研究对象变化？是否合理？为什么？
- 在C-D生产函数中要素的替代弹性是否随样本区间变化？是否合理？为什么？
- 在C-D生产函数中要素的替代弹性是否随样本点变化？是否合理？为什么？
- C-D生产函数中每个参数的数值范围是什么？为什么？