得分	评卷人

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填在题后的括号内。错选或未选均无分。

1．某人打靶 3 发，事件 Ai 表示“击中 i 发”，i=0,1,2,3. 那么事件 A=A1∪A2∪A3 表示(　　　)。

A. 全部击中.　　　　B. 至少有一发击中.

C. 必然击中　　　　D. 击中 3 发

2．对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 E(XY)=E(X)E(Y)，则有(　　)。

A. X 和 Y 独立。　　　　B. X 和 Y 不独立。

C. D(X+Y)=D(X)+D(Y)　　　　D. D(XY)=D(X)D(Y)

3．下列各函数中可以作为某个随机变量的概率密度函数的是（　　）。

A. $f(x)=\begin{cases}2(1-|x|) & |x|\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$。　　B. $f(x)=\begin{cases}0.5 & |x|\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$,

4．设随机变量 $X\sim N(\mu,\ 4^2)$，$Y\sim N(\mu,\ 5^2)$，$P_1=P\{X\le\mu-4\}$，

$P_2=P\{Y\ge\mu+5\}$，则有（　　）

A. 对于任意的 μ，　$P_1=P_2$　　　　B. 对于任意的 μ，　$P_1<P_2$

C. 只对个别的 μ，才有 $P_1=P_2$　　　　D. 对于任意的 μ, $P_1>P_2$

5．设 X 为随机变量，其方差存在，c 为任意非零常数，则下列等式中正确的是（　　　）

A. D(X+c)=D(X).　　　B.　D(X+c)=D(X)+c.

C. D(X−c)=D(X)−c　　　D.　D(cX)=cD(X)

得分	评卷人

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

6. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为-1，1，2，它的伴随矩阵记为 A*， 则 |A*+3A－2E|=________。

7. 设 A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $x=$________。

8. 设有 3 个元件并联，已知每个元件正常工作的概率为 P，则该系统正常工作的概率为________________。

9. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} 2x & 0<x<A \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，则概率

$P(X \geq \frac{1}{2})=$______ 。

10. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(3x+4y)} & \text{当} x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，则系数 $k=$____________ 。

得分	评卷人

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．求函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}$ 的傅氏变换（这里 $\beta>0$），并由此证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$$

12．发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“1”和“0”。由于通讯系统受到干扰，当发出信号“1”时，收报台未必收到信号“1”，而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号“1”和“0”；同时，当发出信号“0”时，收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号“0”和“1”。求

（1）收报台收到信号“1”的概率；

（2）当收报台收到信号“1”时，发报台确是发出信号“1”的概率。

13．设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率函数是

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(2x+4y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求：（1）常数 c；（2）概率 $P(X\geqslant Y)$；（3）X 与 Y 相互独立吗？请说出理由。

14．将 n 个球随机的放入 N 个盒子中去，设每个球放入各个盒子是等可能的，求有球盒子数 X 的数学期望。

15．设一口袋中依此标有 1，2，2，2，3，3 数字的六个球。从中任取一球，记随机变量 X 为取得的球上标有的数字，求

(1)X 的概率分布律和分布函数。(2)EX

得分	评卷人

四、证明题（共 10 分）

16. 设 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$，$a_1 \neq 0$, 其长度为‖a‖，又 $A=aa^T$,
(1) 证明 $A^2=\|a\|^2 A$;
(2) 证明 a 是 A 的一个特征向量，而 0 是 A 的 n-1 重特征值;
(3) A 能相似于对角阵 Λ 吗？若能, 写出对角阵 Λ.

得分	评卷人

五、应用题（共 10 分）

17. 设在国际市场上每年对我国某种出口商品的需求量 X 是随机变量，它在[2000,4000]（ 单位：吨 ）上服从均匀分布，又设每售出这种商品一吨，可为国家挣得外汇 3 万元，但假如销售不出而囤积在仓库，则每吨需保养费 1 万元。问需要组织多少货源，才能使国家收益最大。

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．B　　2．C　　3．D　　4．A　　5．A

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 9　　7. 1　　8. $1-(1-P)^3$　　9. 3/4　　10. 12

三、计算题（每题 10 分，共 50 分）

11. 解答： 函数 f(t)的付氏变换为：

$$F(w)=\Re[e^{-\beta|t|}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|t|}e^{-j\varpi t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-(\beta+j\varpi)t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-(\beta-j\varpi)t}dt \quad （3 分）$$

$$=\frac{1}{\beta+j\varpi}+\frac{1}{\beta-j\varpi}=\frac{2\beta}{\beta^2+\varpi^2} \quad （2 分）$$

由付氏积分公式有

$$f(t)=\Re^{-1}[F(w)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\varpi)e^{j\varpi t}d\varpi \quad （2 分）$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\varpi^2}(\cos\varpi t+j\sin\varpi t)d\varpi$$

$$==\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\varpi^2}\cos\varpi t d\varpi=\frac{2\beta}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\varpi t}{\beta^2+\varpi^2}d\varpi \quad （2 分）$$

所以
$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|} \quad （1 分）$$

12. 解答：

设　A1=“发出信号 1”，A0=“发出信号 0”，A=“收到信号 1”　（2 分）

(1)由全概率公式　（1 分）

有　P(A)=P(A|A1)P(A1)+P(A|A0)P(A0)　（2 分）

=0.8x0.6+0.1 x0.4=0.52　（1 分）

(2) 由贝叶斯公式　（1 分）

有　P(A1|A)=P(A|A1)P(A1)/ P(A)　（2 分）

=0.8x0.6/0.52=12/13　（1 分）

13. 解答:

(1) 由联合概率密度的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=1$$

即
$$\int_{0}^{+\infty}dx\int_{0}^{+\infty}ce^{-(2x+4y)}dy=1$$
（2 分）

从而　$c=8$　（2 分）

(2) $P(X\geq Y)=\iint\limits_{x\geq y}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}dx\int_{0}^{x}8e^{-(2x+4y)}dy=\frac{2}{3}$　（2 分）

(3) 当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{\infty}8e^{-(2x+4y)}dy=2e^{-2x}$　（2 分）

当 $x<=0$ 时，$f_X(x)=0$

同理有
$$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y} & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$
（1 分）

因　$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\quad\forall x,y$

故 X 与 Y 相互独立　（1 分）

14. 解答:

设
$$X_i=\begin{cases}1 & 第i个盒子有球\\ 0 & 否则\end{cases}$$
i =1, 2, …, N　(2 分)

则
$$X=\sum_{i=1}^{N}X_i$$
(1 分)

因
$$P(X_i=0)=\frac{(N-1)^n}{N^n}$$
(2 分)

$$P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-\frac{(N-1)^n}{N^n}$$ （2 分）

因而 $$EX_i=0\cdot P(X_i=0)+1\cdot P(X_i=1)=1-\frac{(N-1)^n}{N^n}$$ （2 分）

所以 $$EX=\sum_{i=1}^{N}EX_i=N(1-(1-\frac{1}{N})^n)$$ （2 分）

15. 解答：

（1）随机变量 X 的取值为 1，2，3。 （1 分）

依题意有：$P\{X=1\}=\frac{1}{6}$ ；$P\{X=2\}=\frac{3}{6}$ ；$P(X=3)=\frac{2}{6}$ （3 分）

X 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$ （1 分）

由条件知：当 $x<1$ 时，$F(x)=0;$ （1 分）

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=P(X=1)=\frac{1}{6};$ （1 分）

当 $2\le x<3$ 时，$F(x)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{2}{3};$ （1 分）

当 $x\ge 3$ 时，$F(x)=1;$ （1 分）

（2）EX=1 x 1/6+2 x 3/6+3 x 2/6= 13/6 （1 分）

四、证明题（共 10 分）

(1) $A^2=aa^T\cdot aa^T=a^Ta\ \cdot aa^T=\|a\|^2A$ （2 分）

(2) 因 $Aa=aa^T\ \cdot a=a^Ta\cdot a=\|a\|^2a$ （2 分）

故 a 是 A 的一个特征向量。

又 A 对称，故 A 必相似于对角阵 （1 分）

设 $A\backsim \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=B$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值 （1 分）

因 rank(A)=1，所以 rank(B)=1 （1 分）

从而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中必有 n-1 个为 0，即 0 是 A 的 n-1 重特征值 （1 分）

(3) A 对称，故 A 必相似于对角阵 Λ，

$\Lambda=\mathrm{diag}(\|a\|^2,\ 0,\cdots,0)$ （2 分）

五、应用题（共 10 分）

解答:

设 y 为预备出口的该商品的数量，这个数量可只介于 2000 与 4000 之间，用 Z 表示国家的收益（万元）， （1 分）

则有 $$Z = g(X) = \begin{cases} 3y & X \ge y \\ 3X-(y-X) & X < y \end{cases}$$ （4 分）

因 X 服从 R(2000,4000)，故有

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2000 & 2000 < x < 4000 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$ （1 分）

所以

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_{2000}^{y} \frac{3x-(y-x)}{2000} dx + \int_{y}^{4000} \frac{3y}{2000} dx$$

$= -(y^2 - 7000y + 4 \cdot 10^6)/1000$ （3 分）

求极值得 $y=3500$ (吨) （1 分）

工程数学（本）10 秋模拟试题（一）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A,B 都是 n 阶方阵，则下列命题正确的是($|AB|=|A||B|$).

2．向量组 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\7\end{bmatrix}$ 的秩是（ 3 ）.

3． n 元线性方程组 $AX=b$ 有解的充分必要条件是（ $r(A)=r(A\vdots b)$ ）.

4． 袋中有 3 个红球，2 个白球，第一次取出一球后放回，第二次再取一球，则两球都是红球的概率是（ $\frac{9}{25}$ ）.

5．设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则（ $\frac{1}{5}x_1+\frac{1}{5}x_2+\frac{3}{5}x_3$ ）是 μ 无偏估计.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．设 A,B 均为 3 阶方阵，$|A|=2,|B|=3$，则 $|-3A'B^{-1}|=$ __-18__.

7．设 A 为 n 阶方阵，若存在数λ和非零 n 维向量 X，使得 $AX=\lambda X$ ___，则称λ为 A 的特征值.

8．设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & a \end{pmatrix}$，则 $a=$ __0.3__.

9．设 X 为随机变量，已知 $D(X)=3$，此时 $D(3X-2)=$__27__.

10．设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的一个无偏估计量，则有__$E(\hat{\theta})=\theta$__.

三、(每小题 16 分，共 64 分)

11．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 5\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$**，且有** $AX=B'$**，求** X**．**解：利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -9 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

即 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 7 & -2 & -1\\ 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$ 由矩阵乘法和转置运算得 $X=A^{-1}B'=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 7 & -2 & -1\\ 5 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 11 & -3\\ 6 & -2\end{bmatrix}$

12．求线性方程组

$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-x_4=1\\ -2x_1+7x_2-2x_3+x_4=-2\\ x_1-4x_2+3x_3+2x_4=1\\ 2x_1-4x_2+8x_3+2x_4=2\end{cases}$**的全部解．**解： 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & -1 & 1\\ -2 & 7 & -2 & 1 & -2\\ 1 & -4 & 3 & 2 & 1\\ 2 & -4 & 8 & 2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 6 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$\to\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$方程组的一般解为 $\begin{cases}x_1=1+5x_4\\ x_2=x_4\\ x_3=-x_4\end{cases}$ （其中 x_4 为自由未知量）

令 x_4=0，得到方程的一个特解 $X_0=(1\quad 0\quad 0\quad 0)'$.方程组相应的齐方程的一般解为

$\begin{cases}x_1=5x_4\\ x_2=x_4\\ x_3=-x_4\end{cases}$ （其中 x_4 为自由未知量）令 x_4=1，得到方程的一个基础解系

$X_1=(5\quad 1\quad -1\quad 1)'$.于是，方程组的全部解为 $X=X_0+kX_1$（其中 k 为任意常数）

13．设 $X\sim N(3,4)$**，试求：** **(1)** $P(5<X<9)$**；(2)** $P(X>7)$**．(已知** $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(3)=0.9987$**）**

解：(1) $P(5<X<9)=P(\frac{5-3}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{9-3}{2})=P(1<\frac{X-3}{2}<3)$

$=\Phi(3)-\Phi(1)=0.9987-0.8413=0.1574$ (2) $P(X>7)=P(\frac{X-3}{2}>\frac{7-3}{2})$

$=P(\frac{X-3}{2}>2)=1-P(\frac{X-3}{2}\le 2)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$

14．据资料分析，某厂生产的一批砖，其抗断强度 $X\sim N(32.5\,,1.21)$，今从这批砖中随机地抽取了 9 块，测得抗断强度（单位：kg / cm²）的平均值为 31.12，问这批砖的抗断强度是否合格（$\alpha=0.05, u_{0.975}=1.96$）.

解： 零假设 $H_0\!:\mu=32.5$．由于已知 $\sigma^2=1.21$，故选取样本函数 $U=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

已知 $\bar{x}=31.12$，经算得 $\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=\frac{1.1}{3}=0.37$，$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{31.12-32.5}{0.37}\right|=3.73$ 由已知条件

$u_{0.975}=1.96$，$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=3.73>1.96=u_{0.975}$ 故拒绝零假设，即这批砖的抗断强度不合格。

四、证明题（本题 6 分）

15．设 A,B 是 n 阶对称矩阵，试证：$A+B$ 也是对称矩阵． 证明：A,B 是同阶矩阵，

由矩阵的运算性质可知 $(A+B)'=A'+B'$ 已知 A,B 是对称矩阵，故有

$A'=A,B'=B$，即 $(A+B)'=A+B$ 由此可知 $A+B$ 也是对称矩阵，证毕．

工程数学（本）10 秋模拟试题（二）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．若 A 是对称矩阵，则等式（ $A'=A$ ）成立．

2．$\begin{bmatrix}3&7\\4&5\end{bmatrix}^{-1}=$（ $\begin{bmatrix}7&-5\\-4&3\end{bmatrix}$ ）．

3．若（$r(A)=n$ ）成立，则 n 元线性方程组 $AX=O$ 有唯一解．

4．若条件（ $AB=\varnothing$ 且 $A+B=U$ ）成立，则随机事件 A，B 互为对立事件．

5．对来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（μ 未知）的一个样本 X_1,X_2,X_3，记

$\overline{X}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i$，则下列各式中（$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mu)^2$ ）不是统计量．

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．设 A,B 均为 3 阶方阵，$|A|=-6,|B|=3$，则 $\left|-(A'B^{-1})^3\right|=$ __8__．

7．设 A 为 n 阶方阵，若存在数λ和非零 n 维向量 X，使得___ $AX=\lambda X$ ___，则称 X 为 A 相应于特征值λ的特征向量．

8．若 $P(A)=0.8, P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(AB)=$ __0.3__．

9．如果随机变量 X 的期望 $E(X)=2$，$E(X^2)=9$，那么 $D(2X)=$ __20.

10．不含未知参数的样本函数称为__统计量__．

三、（每小题 16 分，共 64 分）

11．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$**，求 $A^{-1}B$．** 解：利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -6 & -4 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1\end{bmatrix}$$ 即 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}$ 由矩阵乘法得

$$A^{-1}B=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -15 & 5\\ -10 & -15 & 5\\ 12 & 20 & -5\end{bmatrix}$$

12．．当 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3-x_4=-2\\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4=6\\ 9x_1+7x_2+4x_3+x_4=\lambda+1\end{cases}$ **有解，在有解的情况下求方程组的全部解．**

解：将方程组的增广矩阵化为阶梯形 $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 7 & 3 & 6\\ 9 & 7 & 4 & 1 & \lambda+1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 11 & 5 & 10\\ 0 & -2 & 22 & 10 & \lambda+19\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 11 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 9 & 4 & 8\\ 0 & 1 & -11 & -5 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

由此可知当 $\lambda\neq 1$ 时，方程组无解。当 $\lambda=1$ 时，方程组有解。此时齐次方程组化为

$$\begin{cases}x_1=-9x_3-4x_4\\ x_2=11x_3+5x_4\end{cases}$$

分别令 $x_3=1, x_4=0$ 及 $x_3=0, x_4=1$，得齐次方程组的一个基础解系

$X_1=[-9\quad 11\quad 1\quad 0]', X_2=[-4\quad 5\quad 0\quad 1]'$ 令 $x_3=0, x_4=0$，得非齐次方程组的一个特解

$X_0=[8\quad -10\quad 0\quad 0]'$ 由此得原方程组的全部解为

$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2$ （其中 k_1 , k_2 为任意常数）

13．设 $X \sim N(3,4)$ ，试求：(1) $P(X<1)$ ；(2) $P(5<X<7)$ ．（已知

$\Phi(1)=0.8413, \Phi(2)=0.9772, \Phi(3)=0.9987$ ）解：(1) $P(X<1)=P(\frac{X-3}{2}<\frac{1-3}{2})$

$=P(\frac{X-3}{2}<-1)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587$

(2) $P(5<X<7)=P(\frac{5-3}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{7-3}{2})=P(1<\frac{X-3}{2}<2)$

$=\Phi(2)-\Phi(1)=0.9772-0.8413=0.1359$

15.1mm，若已知这批滚珠直径的方差为 0.06^2 ，试找出滚珠直径均值的置信度为 0.95 的置信区 $(u_{0.975}=1.96)$.

解：由于已知 σ^2 ，故选取样本函数 $U=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 已知 $\bar{x}=15.1$ ，经计算得

$\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=\frac{0.06}{3}=0.02$ 滚珠直径均值的置信度为 0.95 的置信区间为

$[\bar{x}-u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{9}}, \bar{x}+u_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{9}}]$ ，又由已知条件 $u_{0.975}=1.96$ ，故此置信区间为

$[15.0608, 15.1392]$

四、证明题（本题 6 分）

15．设随机事件 A,B 相互独立，试证：$\overline{A},B$ 也相互独立.

证明：$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))$

$=P(\overline{A})P(B)$ 所以 $\overline{A},B$ 也相互独立．证毕.

工程数学（本）（10 春）模拟试题 2010 年 6 月

一、单项选择题（每小题 3 分，本题共 15 分）

1. 若 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & x-3 \end{vmatrix}=0$ ，则 $x=$ （3 ）.

2. 已知 2 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ ，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 至多是（ 2 ）.

3. 设 A,B 为 n 阶矩阵，则下列等式成立的是（ $(A+B)'=A'+B'$ ）.

4. 若 A,B 满足（ $P(AB)=P(A)P(B)$ ），则 A 与 B 是相互独立.

5. 若随机变量 X 的期望和方差分别为 $E(X)$ 和 $D(X)$，则等式（

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ ）成立.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，逆矩阵分别为 A^{-1},B^{-1}，则 $(B^{-1}A')^{-1}=$__$(A^{-1})'B$.
.

2. 向量组 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 0),\alpha_2=(0,\ 1,\ 1),\alpha_3=(1,\ 0,\ k)$ 线性相关，则 $k=$______.-1

3. 已知 $P(A)=0.8,P(AB)=0.2$，则 $P(A-B)=$___0.6__.

4. 已知随机变量 $X\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & 5\\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.5\end{bmatrix}$，那么 $E(X)=$___2.4__.

5. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 是来自正态总体 $N(\mu,4)$ 的一个样本，则 $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i\sim$.

$N(\mu,\frac{4}{10})$___.

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

1 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 5\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}$，求（1）$|A|$，（2）$A^{-1}$. 解： （1）

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 5\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=1$$

利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -9 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$$ 即 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 7 & -2 & -1\\ 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

2. 当λ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = \lambda + 2 \end{cases}$$ 有解，在有解的情况下求方程组的全部解.

解：将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \lambda+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

由此可知当$\lambda \neq 3$时，方程组无解。当$\lambda = 3$时，方程组有解。 ………8 分

此时相应齐次方程组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = x_3 + 3x_4 \end{cases}$ （x_3, x_4是自由未知量）

分别令$x_3 = 1, x_4 = 0$及$x_3 = 0, x_4 = 1$，得齐次方程组的一个基础解系

$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}'$， $X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$ 令$x_3 = 0, x_4 = 0$，得非齐次方程组的一个特解

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

由此得原方程组的全部解为$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2$ （其中k_1, k_2为任意常数）

3. 设$X \sim N(3, 4)$，试求⑴$P(5 < X < 9)$；⑵$P(X > 7)$.（已知

$\Phi(1) = 0.8413$,

$\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$）

解：⑴$P(5 < X < 9) = P(\frac{5-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{9-3}{2}) = P(1 < \frac{X-3}{2} < 3)$

$= \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574$ ⑵

$P(X > 7) = P(\frac{X-3}{2} > \frac{7-3}{2}) = P(\frac{X-3}{2} > 2) = 1 - P(\frac{X-3}{2} \le 2)$

$=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$

4. 已知某种零件重量 $X\sim N(15,0.09)$，采用新技术后，取了 9 个样品，测得重量（单位：kg）的平均值为 14.9，已知方差不变，问平均重量是否仍为 15（

$\alpha=0.05, u_{0.975}=1.96$**）？**

解：　　　　零假设 $H_0:\mu=15$．由于已知 $\sigma^2=0.09$，故选取样本函数

$U=\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　已知 $\overline{x}=14.9$，经计算得

$\dfrac{\sigma}{\sqrt{9}}=\dfrac{0.3}{3}=0.1$，$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{14.9-15}{0.1}\right|=1$　　由已知条件 $u_{0.975}=1.96$，

$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=1<1.96=u_{0.975}$

故接受零假设，即零件平均重量仍为 15

四、证明题（本题 6 分）

设 A,B 是两个随机事件，试证：$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$．

证明：由事件的关系可知　$B=BU=B(A+\overline{A})=AB+\overline{A}B$ 而 $(AB)(\overline{A}B)=\varnothing$，

故由加法公式和乘法公式可知

$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$ 证毕.

工程数学（本）(09 秋模拟试题 2009 年 12 月

一、单项选择题（每小题 3 分，本题共 15 分）

1. 设 A 为 3×4 矩阵，B 为 5×2 矩阵，当 C 为（2×4　）矩阵时，乘积 $AC'B'$ 有意义.

2. 向量组 $\alpha_1=[0,0,0],\alpha_2=[1,0,0],\alpha_3=[1,2,0],\alpha_4=[1,2,3]$ 的极大线性无关组是（$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　）.

3. 若线性方程组的增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&\lambda&2\\2&1&4\end{bmatrix}$，则当 $\lambda=$（　$\dfrac{1}{2}$　）时线性方程组

有无穷多解.

4. 掷两颗均匀的骰子，事件“点数之和为 4”的概率是（ $\frac{1}{12}$ ）.

5. 在对单正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的假设检验问题中，T 检验法解决的问题是（未知方差，检验均值 ）.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 均为 3 阶矩阵，且 $|A|=|B|=3$，则 $|-2AB^{-1}|=$__ -8________.

2.设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&4&0\\0&7&0\end{bmatrix}$，则 $r(A)=$__________________ . 2

3. 设 A, B, C 是三个事件，那么 A 发生，但 B,C 至少有一个不发生的事件表示为.

$A(\overline{B}+\overline{C})$____________.

4. 设随机变量 $X\sim B(100,0.15)$，则 $E(X)=$__15_____.

5. 设 x_1 , x_2 , $\cdots$, x_n 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则

$D(\overline{x})=$__ $\frac{\sigma^2}{n}$ _______.

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

1 已知 $AX=B$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&5&7\\5&8&10\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&3\\5&8\\0&1\end{bmatrix}$，求 X . 解：利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\3&5&7&0&1&0\\5&8&10&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-3&1&0\\0&-2&-5&-5&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&3&-1&0\\0&0&-1&1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&4&-6&3\\0&1&0&5&-5&2\\0&0&1&-1&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-6&4&-1\\0&1&0&5&-5&2\\0&0&1&-1&2&-1\end{bmatrix}$$ 即

$A^{-1}=\begin{bmatrix}-6&4&-1\\5&-5&2\\-1&2&-1\end{bmatrix}$ 由矩阵乘法运算得 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-6&4&-1\\5&-5&2\\-1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\5&8\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&13\\-15&-23\\8&12\end{bmatrix}$

2.求线性方程组$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-x_4=1\\-2x_1+7x_2-2x_3+x_4=-2\\x_1-4x_2+3x_3+2x_4=1\\2x_1-4x_2+8x_3+2x_4=2\end{cases}$的全部解．．

解： 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$\begin{bmatrix}1&-3&1&-1&1\\-2&7&-2&1&-2\\1&-4&3&2&1\\2&-4&8&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1&-1&1\\0&1&0&-1&0\\0&-1&2&3&0\\0&2&6&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1&-1&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&2&2&0\\0&0&6&6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1&-1&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$方程组的一般解为

$\begin{cases}x_1=1+5x_4\\x_2=x_4\\x_3=-x_4\end{cases}$ （其中x_4为自由未知量）

令x_4=0，得到方程的一个特解$X_0=(1\quad 0\quad 0\quad 0)'$． 方程组相应的齐次方程的一般解为

$\begin{cases}x_1=5x_4\\x_2=x_4\\x_3=-x_4\end{cases}$ （其中x_4为自由未知量）令x_4=1，得到方程的一个基础解系

$X_1=(5\quad 1\quad -1\quad 1)'$． 于是，方程组的全部解为$X=X_0+kX_1$（其中$k$为任意常数）

3. 设$X\sim N(3,2^2)$，求$P(X<5)$和$P(|X-1|<1)$．（其中$\Phi(0.5)=0.6915$, $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.5)=0.9332$, $\Phi(2)=0.9772$）

解：设$Y=\dfrac{X-3}{2}\sim N(0,1)$ $P(X<5)=P(\dfrac{X-3}{2}<\dfrac{5-3}{2})=\Phi(1)=0.8413$

$P(|X-1|<1)=P(0<X<2)=P(\dfrac{0-3}{2}<\dfrac{X-3}{2}<\dfrac{2-3}{2})=$

$P(-1.5<Y<-0.5)=\Phi(-0.5)-\Phi(-1.5)$

$=\Phi(1.5)-\Phi(0.5)=0.9332-0.6915=0.2417$

4. 某一批零件重量$X\sim N(\mu,0.04)$，随机抽取4个测得重量（单位：千克）为14.7, 15.1, 14.8, 15.2 可否认为这批零件的平均重量为15千克$(\alpha=0.05)$（已知$u_{0.975}=1.96$）?

解：零假设 $H_0: \mu = 15$．由于已知 σ^2，故选取样本函数 $U = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 经计算得

$\bar{x} = 14.95$，$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{14.95-15}{0.2/\sqrt{4}}\right| = 0.5$

已知 $u_{0.975} = 1.96$，$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = 0.5 \le 1.96 = u_{0.975}$ 故接受零假设，即可以认为这批零件的平均重量为 15 千克.

四、证明题（本题 6 分）

设 A, B 为随机事件，试证：$P(A-B) = P(A) - P(AB)$．

证明：由事件的关系可知 $A = AU = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B} = AB + (A-B)$ 而

$(A-B)(AB) = \varnothing$，故由概率的性质可知 $P(A) = P(A-B) + P(AB)$ 即

$P(A-B) = P(A) - P(AB)$ 证毕

工程数学（本）模拟练习

一、单项选择题

1. 若 A, B 都是 n 阶矩阵，则等式（ $|AB| = |BA|$ ）成立.

2. 向量组 $\alpha_1 = [1, 0, 0], \alpha_2 = [1, 2, 0], \alpha_3 = [0, 0, 3], \alpha_4 = [1, 2, 3]$ 的秩是（ 2 ）.

3. 设线性方程组 $AX = b$ 有惟一解，则相应的齐次方程组 $AX = O$（只有 0 解）.

4. 设 A, B 为随机事件，下列等式成立的是（ $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ ）.

5. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则（ $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3$ ）是 μ 无偏估计.

二、填空题

1. 设 A, B 是 3 阶矩阵，其中 $|A| = 3, |B| = 2$，则 $|2A'B^{-1}| =$ __12_______.

2. 当 $\lambda =$ __1__时，方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - \lambda x_2 = -1 \end{cases}$ 有无穷多解..

3. 若 $P(A+B) = 0.9, P(A) = 0.6, P(B) = 0.5$，则 $P(AB) =$ __0.2_______.

4. 若连续型随机变量 X 的密度函数的是 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，则 $E(X)=$ __$\frac{2}{3}$__.

.

5. 若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的__无偏估计________.

三、计算题

1 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ -2 & -2 & -7\\ -3 & -4 & -8\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}$**，$I$ 是 3 阶单位矩阵，且有 $(I-A)X=B$，求 X.**

解：由矩阵减法运算得 $I-A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ -2 & -2 & -7\\ -3 & -4 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 7\\ 3 & 4 & 9\end{bmatrix}$

利用初等行变换得 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -2 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

即 $(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ 由矩阵乘法运算得

$$X=(I-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -9 & -15\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

2. 求线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\ x_2-2x_3-3x_4=-4\\ -3x_1+2x_2-x_3-9x_4=-5\\ 2x_1-x_2+3x_3+8x_4=8\end{cases}$$ **的全部解.**

解：将方程组的增广矩阵化为阶梯形 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4\\ -3 & 2 & -1 & -9 & -5\\ 2 & -1 & 3 & 8 & 8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 5 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -3 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&2&3\\0&1&-2&-3&-4\\0&0&12&12&24\\0&0&-5&-5&-10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&2&3\\0&1&-2&-3&-4\\0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&2&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$此时相应齐次方程组的一般解为 $\begin{cases}x_1=-2x_4\\x_2=\quad x_4\\x_3=-x_4\end{cases}$ x_4 是自由未知量

令 $x_4=1$，得齐次方程组的一个基础解系 $X_1=[-2\quad 1\quad -1\quad 1]'$ 令 $x_4=0$，得非齐次方程组的一个特解

$X_0=[1\quad 0\quad 2\quad 0]'$ 由此得原方程组的全部解为 $X=X_0+kX_1$ （其中 k 为任意常数）

3.设 $X\sim N(2,9)$，试求(1) $P(X<11)$；(2) $P(5<X<8)$．（已知

$\Phi(1)=0.8413$，

$t_{0.05}(8)=2.306$）

解：(1) $P(X<11)=P(\frac{X-2}{3}<\frac{11-2}{3})=P(\frac{X-2}{3}<3)=\Phi(3)=0.9987$

(2) $P(5<X<8)=P(\frac{5-2}{3}<\frac{X-2}{3}<\frac{8-2}{3})=P(1<\frac{X-2}{3}<2)$

$=\Phi(2)-\Phi(1)=0.9772-0.8413=0.1359$

4. 某钢厂生产了一批管材，每根标准直径100mm，今对这批管材进行检验，随机取出9根测得直径的平均值为99.9mm，样本标准差s = 0.47，已知管材直径服从正态分布，问这批管材的质量是否合格（检验显著性水平 $\alpha=0.05$，$\Phi(2)=0.9773$，$\Phi(3)=0.9987$）

解：零假设 $H_0:\mu=100$．由于未知 σ^2，故选取样本函数 $T=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

已知 $\bar{x}=99.9$，经计算得 $\frac{s}{\sqrt{9}}=\frac{0.47}{3}=0.16$，$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{99.9-100}{0.16}\right|=0.625$

由已知条件 $t_{0.05}(8)=2.306$，

$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| = 0.625 < 2.306 = t_{0.05}(8)$ 故接受零假设，即可以认为这批管材的质量是合格的

四、证明题

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的，证明，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_3$ 也线性无关

证明：设有一组数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=0$ 成立，即 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$，由已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有

$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$ 该方程组只有零解，得 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$ 是线性无关的．证毕

工程数学（本）08 秋模拟试题

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，则下列等式成立的是($\left|(AB)^{-1}\right| = \dfrac{1}{|BA|}$)．

2．方程组 $\begin{cases} x_1-x_2 \quad =a_1 \\ \quad x_2+x_3=a_2 \\ x_1 \quad +x_3=a_3 \end{cases}$ 相容的充分必要条件是($a_1+a_2-a_3=0$)，其中 $a_i \neq 0$，$(i=1,2,3)$．

3．设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为 0，2，则 3A 的特征值为（ 0，6 ）．

4． 设 A，B 是两事件，则下列等式中（ $P(AB)=P(A)P(B)$，其中 A，B 互不相容 ）是不正确的．

5．若随机变量 X 与 Y 相互独立，则方差 $D(2X-3Y)$=（ $4D(X)+9D(Y)$ ）．

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x^2-2 \\ 2 & x^2+1 & 4 \end{vmatrix}$，则 $f(x)=0$ 的根是________________．

2．设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，则表示方法唯一的充分必要条件是

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$__________.

3．若事件 A，B 满足 $A\supset B$，则 $P(A-B)=$________________.

4．．设随机变量的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{1+x^2}, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则常数 $k=$____________.

5．若样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来自总体 $X\sim N(0,1)$，且 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，则 $\overline{x}\sim$____________

.

三、（每小题 16 分，共 64 分）

1．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{bmatrix}$，求：（1）$|AB|$；（2）$A^{-1}$.

解：（1）因为 $|A|=\begin{vmatrix}2&3&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=-2$ $\quad |B|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&2\\0&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1$ 所以

$|AB|=|A||B|=2$.

（2）因为 $[A\quad I]=\begin{bmatrix}2&3&-1&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix}2&3&0&1&0&1\\0&-1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1/2&3/2&-1\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&3/2&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

2．求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3+2x_4+x_5=0\\2x_1+6x_2+9x_3+5x_4+3x_5=0\\-x_1-3x_2+3x_3\qquad\quad+2x_5=0\end{cases}$ **的通解.**

解：$A=\begin{bmatrix}1&3&3&2&1\\2&6&9&5&3\\-1&-3&3&0&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&3&2&1\\0&0&3&1&1\\0&0&6&2&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&3&2&1\\0&0&3&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&0&1&0\\0&0&3&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$ 一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - x_4 \\ x_3 = -\dfrac{1}{3}x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

，其中 x_2，x_4 是自由元　令 $x_2 = 1$，$x_4 = 0$，得 $X_1 = (-3, 1, 0, 0, 0)'$；$x_2 = 0$，$x_4 = 3$，得 $X_2 = (-3, 0, -1, 3, 0)'$ 所以原方程组的一个基础解系为｛X_1，X_2｝．原方程组的通解为：$k_1X_1 + k_2X_2$，其中 k_1，k_2 是任意常数

3．设随机变量 $X \sim N(4,1)$．（1）求 $P(|X-4|>2)$；（2）若 $P(X>k)=0.9332$，求 k 的值．（已知 $\Phi(2)=0.9775, \Phi(1)=0.8413, \Phi(1.5)=0.9332$）．

解：（1）$P(|X-4|>2) = 1 - P(|X-4| \le 2) = 1 - P(-2 \le X-4 \le 2) = 1 -$（$\Phi(2) - \Phi(-2)$）$= 2$（$1 - \Phi(2)$）$= 0.045$．

（2）$P(X>k) = P(X-4>k-4) = 1 - P(X-4 \le k-4) = 1 - \Phi(k-4) = 0.9332 = \Phi(1.5)$

$\Phi(k-4) = 1 - \Phi(1.5) = \Phi(-1.5)$ 即　$k-4=-1.5$，　$k=2.5$．

4．某切割机在正常工作时，切割的每段金属棒长服从正态分布，且其平均长度为 10.5 cm，标准差为 0.15cm. 从一批产品中随机地抽取 4 段进行测量，测得的结果如下：（单位：cm）10.4，10.6，10.1，10.4 问：该机工作是否正常（$\alpha = 0.05$，$u_{0.975} = 1.96$）？

解：零假设 $H_0: \mu = 10.5$．由于已知 $\sigma = 0.15$，故选取样本函数 $U = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

经计算得 $\bar{x} = 10.375$，$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0.15}{\sqrt{4}} = 0.075$，$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{10.375-10.5}{0.075}\right| = 1.67$　由已知条件 $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$，且 $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = 1.67 < 1.96 = \mu_{1-\frac{\alpha}{2}}$

故接受零假设，即该机工作正常．

四、证明题（本题 6 分）

设向量组α_1 , α_2 , α_3线性无关，令$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_2=3\alpha_2+2\alpha_3$，

$\beta_3=4\alpha_3-\alpha_1$，证明向量组$\beta_1$, β_2 , β_3线性无关。

证明：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即

$$k_1(\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(3\alpha_2+2\alpha_3)+k_3(4\alpha_3-\alpha_1)=0$$

$(k_1-k_3)\alpha_1+(2k_1+3k_2)\alpha_2+(2k_2+4k_3)\alpha_3=0$因为$\alpha_1$, α_2 , α_3线性无关，所以

$$\begin{cases}k_1-k_3=0\\2k_1+3k_2=0\\2k_2+4k_3=0\end{cases}$$

解得 k_1=0, k_2=0, k_3=0，从而β_1 , β_2 , β_3线性无关.

工程数学（本）综合练习题

一、填空题

1.行列式$\begin{vmatrix}2&3&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$______ -5 __________。

2.设二阶矩阵$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，其伴随矩阵$A^*=$___$\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$_____。

3.设A,B均为4阶矩阵，且$|A|=3,|B|=-2$，$|-(A'B^{-1})^2|=$_$\dfrac{9}{4}$_______。

4.若A为4×3矩阵，B为2×4矩阵，C为4×2矩阵，则$A'B'C'$为__3×4_____矩阵。

5.一个向量组中如有零向量，则此向量组一定线性____**相关**______。

6.若$P(A)=0.4,P(\overline{A}B)=0.3$，则$P(A+B)=$____**0.7**___________。

7.设A,B互不相容，且$P(A)>0$，则$P(B|A)=$____**0**_____。

8.连续型随机变量X的密度函数是$f(x)$，则$P(a<X<b)=$_$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ _______。

9.设X为随机变量，已知$D(x)=2$，那么$D(3X-5)=$__**18**_______。

10.样本是由若干个______**样品**_____组成的集合。

11.参数θ的估计量$\hat{\theta}$满足____ $E(\hat{\theta})=\theta$ ______，则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量。

二、单项选择题

1.由$\begin{bmatrix}3 & 6 & 2\\5 & 4 & 1\\0 & -6 & 2\\9 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 1 & 9\\5 & 0 & 3\\2 & 6 & 4\end{bmatrix}$得到的矩阵中的元素$a_{32}=$（ 12）。

2.$\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 7\end{bmatrix}^{-1}=$（$\begin{bmatrix}7 & -5\\-4 & 3\end{bmatrix}$ ）。

3.若A是对称矩阵，则条件（$A'=A$ ）成立。

4.设A,B均为n阶方阵，则等式（$|AB|=|BA|$ ）成立。

5.设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，$\lambda$既是$\boldsymbol{A}$又是$\boldsymbol{B}$的特征值，$\boldsymbol{x}$既是$\boldsymbol{A}$又是$\boldsymbol{B}$的属于$\lambda$的特征向量，则结论（$\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的特征向量 ）成立.

6.对任意两个事件A,B，等式（$(A+B)-B\subset A$ ）成立。

7.若等式（$P(B)=P(B|A)$ ）成立，则事件A,B相互独立。

8.下列函数中，能作为随机变量密度函数的是（$f(x)=\begin{cases}\sin x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\0, \quad 其它\end{cases}$ ）。

9.设随机变量$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\0.6 & 0.3 & 0.1\end{pmatrix}$，则$E(X)=$（0 ）。

10.设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，则（x_1+x_2 ）是统计量。

11.设x_1,x_2,x_3是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$（μ,σ^2均未知）的样本，则统计量（$x_1-x_2-x_3$ ）不是μ的无偏估计。

工程数学（本）07 春模拟试题 2007 年 5 月

一、单项选择题（每小题 3 分，本题共 15 分）

1. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶矩阵，则下列命题正确的是（$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ）.

2. 已知 2 维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，则$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$至多是（2 ）.

3. 设$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$是$n$元线性方程组，其中$\boldsymbol{A}$是$n$阶矩阵，若条件（$\boldsymbol{A}$是行满秩矩阵）成立，则该方程组没有非 0 解.

4. 袋中放有 3 个红球，2 个白球，第一次取出一球，不放回，第二次再取一球，则两次都是

红球的概率是（$\dfrac{3}{10}$ ）.

5. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则（$\dfrac{1}{5}x_1 + \dfrac{1}{5}x_2 + \dfrac{3}{5}x_3$ ）是 μ 无偏估计.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| = -6, |\boldsymbol{B}| = 3$，$\left|-(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}^{-1})^3\right| =$ ___8___.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在数 λ 和非零 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的

特征值________.

3. 已知 $P(A) = 0.8, P(AB) = 0.2$，则 $P(A - B) =$ _____0.6_____.

4. 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & a \end{bmatrix}$，则 $a =$ ___0.3______.

5. 若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的___**无偏估计**_____.

三、计算题（每小题 16 分，共 64 分）

1 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -7 \\ -3 & -4 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{I}$ 是 3 阶单位矩阵，且有 $(\boldsymbol{I} - A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解：由矩阵减法运算得

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -7 \\ -3 & -4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ 即

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法运算得 $X=(I-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\\ -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -9 & -15\\ 5 & 6\end{bmatrix}$

2. 求线性方程组

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -4 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - 9x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 8 \end{cases}$ 的全部解.

解：将方程组的增广矩阵化为阶梯形 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4\\ -3 & 2 & -1 & -9 & -5\\ 2 & -1 & 3 & 8 & 8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 5 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -3 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 12 & 12 & 24\\ 0 & 0 & -5 & -5 & -10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 此时齐次方程组化为 $\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = \quad x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$ 令 $x_4=1$，得齐次方程组的一个基础解系

$X_1=[-2 \quad 1 \quad -1 \quad 1]'$ 令 $x_4=0$，得非齐次方程组的一个特解

$X_0=[1 \quad 0 \quad 2 \quad 0]'$

由此得原方程组的全部解为 $X=X_0+kX_1$ （其中 k 为任意常数）

3. **设 $X \sim N(3,4)$，试求(1) $P(5<X<9)$；(2) $P(X>7)$．（已知**

$\Phi(1)=0.8413$,

$\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(3)=0.9987$ ）

解：(1) $P(5<X<9)=P(\frac{5-3}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{9-3}{2})=P(1<\frac{X-3}{2}<3)$

$=\Phi(3)-\Phi(1)=0.9987-0.8413=0.1574$ ………8 分

(2) $P(X>7)=P(\frac{X-3}{2}>\frac{7-3}{2})=P(\frac{X-3}{2}>2)=1-P(\frac{X-3}{2}\le 2)$

$=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$

4. 某钢厂生产了一批管材，每根标准直径 100mm，今对这批管材进行检验，随机取出 9 根测得直径的平均值为 99.9mm，样本标准差 s = 0.47，已知管材直径服从正态分布，问这批管材的质量是否合格（检验显著性水平 $\alpha=0.05$，$t_{0.05}(8)=2.306$）

解：零假设 $H_0:\mu=100$．由于未知 σ^2，故选取样本函数 $T=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

已知 $\bar{x}=99.9$，经计算得

$\dfrac{s}{\sqrt{9}}=\dfrac{0.47}{3}=0.16$，$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{99.9-100}{0.16}\right|=0.625$ 由已知条件 $t_{0.05}(8)=2.306$，

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right|=0.625<2.306=t_{0.05}(8)$$

故接受零假设，即可以认为这批管材的质量是合格的。

四、证明题（本题 6 分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的，证明，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_3$ 也线性无关.

证明：设有一组数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=0$

成立，即 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$，由已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故有 $\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$

该方程组只有零解，得 $k_1=k_2=k_3=0$，故 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$ 是线性无关的．证毕

工程数学（本）模拟试题（06 秋-2）

一、单项选择题（每小题 3 分，本题共 15 分）

1. 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则等式（ $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$ ）成立.

2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0],\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,0],\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,3],\boldsymbol{\alpha}_4=[1,2,3]$ 的秩是（ 3 ）.

3. 甲、乙二人射击，A,B 分别表示甲、乙射中目标，则 $\overline{AB}$ 表示（至少有一人没射中

）的事件．

4. 在下列数组中，（ $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}$ ）中的数组可以作为离散型随机变量的概率分布．

5. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)(\mu,\sigma^2$ 均未知）的样本，则（ x_1 ）是统计量．

二、填空题（每小题3分，共15分）

1. 若 A 为 4×3 矩阵，B 为 2×4 矩阵，C 为 4×2 矩阵，则 $A'B'C'$ 为__3×4 矩阵．

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在数 λ 和非零 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，使得___ $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ _______，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．

3. 若 $P(A)=0.5, P(B\overline{A})=0.2$，则 $P(A+B)=$ __0.7_______．

4. 已知随机变量 $X\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & 5\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$，那么 $E(X)=$ __3________．

5. 设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的一个无偏估计量，则有__ $E(\hat{\theta})=\theta$ ____________．

三、计算题（每小题16分，共64分）

1 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 5\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$**，且有 $AX=B'$，求 X．**

解：利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -9 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

即 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 7 & -2 & -1\\ 5 & -1 & -1\end{bmatrix}$ 由矩阵乘法和转置运算得 $X=A^{-1}B'=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 7 & -2 & -1\\ 5 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 11 & -3\\ 6 & -2\end{bmatrix}$

2. 当 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6 \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = \lambda + 1 \end{cases}$$ **有解，在有解的情况下求方程组的一般解.**

解：将方程组的增广矩阵化为阶梯形 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 6 \\ 9 & 7 & 4 & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & 22 & 10 & \lambda+19 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -11 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$ 由此可知当 $\lambda \neq 1$ 时，方程组无解。

当 $\lambda = 1$ 时，方程组有解．此时方程组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = -9x_3 - 4x_4 + 8 \\ x_2 = 11x_3 + 5x_4 - 10 \end{cases}$

3. **设 $X \sim N(5, 9)$，试求(1) $P(X > 8)$；(2) $P(5 < X < 14)$．（已知 $\Phi(1) = 0.8413$，$\Phi(2) = 0.9772$，$\Phi(3) = 0.9987$）**

解：(1) $P(X > 8) = P(\frac{X-5}{3} > \frac{8-5}{3}) = P(\frac{X-5}{3} > 1) = 1 - P(\frac{X-5}{3} \leq 1)$

$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

(2) $P(5 < X < 14) = P(\frac{5-5}{3} < \frac{X-5}{3} < \frac{14-5}{3}) = P(0 < \frac{X-5}{3} < 3)$

$= \Phi(3) - \Phi(0) = 0.9987 - 0.5 = 0.4987$

4.　对一种产品的某项技术指标进行测量，该指标服从正态分布，今从这种产品中随机地抽取了 16 件，测得该项技术指标的平均值为 31.06，样本标准差为 0.35，求该项技术指标置信度为 0.95 的置信区间（$t_{0.05}(15) = 2.131$）

解：由于未知 σ^2，故选取样本函数 $T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$　已知 $\bar{x} = 31.06, s = 0.35$，经计算得 $\frac{s}{\sqrt{16}} = 0.0875$　该项技术指标置信度为 0.95 的置信区间为 $[\bar{x} - t_{0.05}(15)\frac{s}{\sqrt{16}}, \bar{x} + t_{0.05}(15)\frac{s}{\sqrt{16}}]$，又由已知条件 $t_{0.05}(15) = 2.131$，故此置信区间为 $[30.87, 31.25]$　.

四、证明题（本题 6 分）

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s<m)$线性相关，证明

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

证明：因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，故存在一组不全为 0 的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

成立．于是存在不全为 0 的数$k_1,k_2,\cdots,k_s,\underbrace{0,\cdots,0}_{m-s}$，使

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+0\alpha_{s+1}+\cdots+0\alpha_m=0$成立，由相性定义知$\alpha_1$

$,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关．证毕．

工程数学（本）模拟试题

一、单项选择题（每小题 3 分，共 21 分）

1．设 A 是$m\times n$矩阵，B是$s\times t$矩阵，且$AC'B$有意义，则C是($s\times n$)矩阵．

2．若 X_1、X_2 是线性方程组 $AX=B$ 的解，而η_1、η_2是方程组 $AX = O$ 的解，则（ $\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$ ）是 $AX=B$ 的解．

3．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$，则 A 的对应于特征值$\lambda=2$的一个特征向量α=($\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ ）．

4．下列事件运算关系正确的是（$B=BA+B\overline{A}$ ）．

5．若随机变量$X\sim N(0,1)$，则随机变量$Y=3X-2\sim$（$N(-2,3^2)$ ）．

6．设x_1,x_2,x_3是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，则（$\frac{1}{5}x_1+\frac{1}{5}x_2+\frac{3}{5}x_3$ ）是μ的无偏估计．

7 对给定的正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，σ^2未知，求μ的置信区间，选用的样本函数服从（t 分布）．

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设三阶矩阵 A 的行列式$|A|=\frac{1}{2}$，则$|A^{-1}|$=____2_______．

2．若向量组：$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\k-2\end{bmatrix}$，能构成 R^3 一个基，则数 k __$\neq 2$____.

3．设 A, B 互不相容，且 $P(A)>0$，则 $P(B|A)=$ ____0_______.

4．若随机变量 $X\sim U[0\,,2]$，则 $D(X)=$ ____$\dfrac{1}{3}$__________.

5．设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的一个估计，且满足 $E(\hat{\theta})=\theta$，则 $\hat{\theta}$ 称为 θ 的__无偏_________估计.

三、（每小题 10 分，共 60 分）

1．已知矩阵方程 $X=AX+B$，其中 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$，**求 X．**

解：因为 $(I-A)X=B$，且 $(I-A\,\vdots\,I)=\begin{bmatrix}1&-1&0&1&0&0\\1&0&-1&0&1&0\\1&0&-2&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&1&-2&-1&0&1\end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1&0\\0&1&-1&-1&1&0\\0&0&-1&0&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&2&-1\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&0&1&-1\end{bmatrix}$

即 $(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-1&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$ 所以 $X=(I-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-1&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3\\-2&4\\-3&3\end{bmatrix}$

2．设向量组 $\alpha_1=(1,-2,4,-1)'$，$\alpha_2=(-4,8,-16,4)'$，$\alpha_3=(-3,1,-5,2)'$，$\alpha_4=(2,3,1,-1)'$，求这个向量组的秩以及它的一个极大线性无关组．

解：因为

$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)=\begin{bmatrix}1&-4&-3&2\\-2&8&1&3\\4&-16&-5&1\\-1&4&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-4&-3&2\\0&0&-5&7\\0&0&7&-7\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-4&-3&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

所以，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ =3． 它的一个极大线性无关组是 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$（或 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$）．

3．用配方法将二次型$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+5x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$化为标准型，并求出所作的满秩变换

解：$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+5x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$=(x_1+2x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3$

$=(x_1+2x_2+x_3)^2+(x_2-x_3)^2+x_3^2$令

$y_1=x_1+2x_2+x_3$，$y_2=x_2-x_3$，$y_3=x_3$　　　　（*）

即得　　$f(x_1, x_2, x_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　　由（*）式解出x_1, x_2, x_3，即得

$\begin{cases}x_1=y_1-2y_2-3y_3\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$ 或写成 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$.

4．罐中有12颗围棋子，其中8颗白子，4颗黑子．若从中任取3颗，求：（1）取到3颗棋子中至少有一颗黑子的概率；（2）取到3颗棋子颜色相同的概率．

解：设A_1=“取到3颗棋子中至少有一颗黑子”，A_2=“取到的都是白子”，A_3=“取到的都是黑子”，B =“取到3颗棋子颜色相同”，则（1$P(A_1)=1-P(\overline{A_1})=1-P(A_2)$

$=1-\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=1-0.255=0.745$.（2）$P(B)=P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)$

$0.255+\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=0.255+0.018=0.273$

5．设随机变量$X\sim N$（3，4）．求：（1）P（$1<X<7$）；（2）使P（$X<a$）=0.9成立的常数a．（$\Phi(1.0)=0.8413$，$\Phi(1.28)=0.9$，$\Phi(2.0)=0.9973$）．

解：（1）P（$1<X<7$）$=P(\frac{1-3}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{7-3}{2})=P(-1<\frac{X-3}{2}<2)=$

$\Phi(2)-\Phi(-1)$ = 0.9973 + 0.8413 – 1 = 0.8386　（2）因为 P（$X<a$）=

$P(\frac{X-3}{2}<\frac{a-3}{2})=\Phi(\frac{a-3}{2})=0.9$ 所以 $\frac{a-3}{2}=1.28$，$a=3+2\times1.28=5.56$

6．从正态总体N（μ，9）中抽取容量为64的样本，计算样本均值得$\overline{x}=21$，求μ的置信

度为95%的置信区间．（已知 $u_{0.975}=1.96$）

解：已知$\sigma=3$，$n=64$，且$u=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　　因为 $\bar{x}=21$，$u_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$，

且

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{64}}=0.735$　所以，置信度为95%的μ的置信区间为

$[\bar{x}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}]=[20.265,21.735]$

四、证明题（本题4分）

设A是n阶矩阵，若$A^3=0$，则$(I-A)^{-1}=I+A+A^2$

证明：因为　$(I-A)(I+A+A^2)=I+A+A^2-A-A^2-A^3$　$=I-A^3=I$

所以　$(I-A)^{-1}=I+A+A^2$

试卷代号:1080 中央广播电视大学2007—2008学年度第一学期“开放本科”期末考试工程数学(本)　试题

一、单项选择题(每小题3分，本题共15分)

1．设A，B都是n阶矩阵(n>1)，则下列命题正确的是（ C．$(A-B)'=A'-B'$ ）．

2．向量组 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\7\end{bmatrix}$的秩是（ ．3 ）．

3．若线性方程组AX=0只有零解，则线性方程组AX=b（ 解的情况不能断定 ）．

4．袋中有3个红球，2个白球，第一次取出一球后放回，第二次再取一球，则两球都是红球的概率是（ $D.\dfrac{9}{25}$ ）．

5．设f(x)和F(x)分别是随机变量X的分布密度函数和分布函数，则对任意a<b，有

$P(a<X\leqslant b)=($　　$).B.\int_a^b f(x)dx$

二、填空题(每小题3分，共15分)

1．设A是2阶矩阵，且$|A|=9,|3(A^{-1})'|=$____．1

2．设A为押阶方阵，若存在数A和非零”维向量x，使得(Ax=λx　　)，则称x为A相应于特征值A的特征向量．

3．若$P(A)=0.8,P(A\bar{B})=0.5$,则 P(AB)=（ 0．3 ），

4．设随机变量X，若D(X)=3，则D(一X+3)=（3　　）．

5．若参数θ的两个无偏估计量$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$满足$D(\hat{\theta}_1) > D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$更(有效

)．

三、计算题(每小题】6分，共64分)

1．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$**，求$A^{-1}B$**

解：利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -6 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

即 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}$由矩阵乘法得 $A^{-1}B=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -15 & 5\\ -10 & -15 & 5\\ 12 & 20 & -5\end{bmatrix}$

2．求线性方程组

$$\begin{cases}x_1-3x_2-2x_3-x_4=1\\ 3x_1-8x_2-4x_3-x_4=0\\ -2x_1+x_2-4x_3+2x_4=1\\ -x_1-2x_2-6x_3+x_4=2\end{cases}$$

的全部解．解：将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & -2 & -1 & 1\\ 3 & -8 & -4 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -4 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -6 & 1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3\\ 0 & -5 & -8 & 0 & 3\\ 0 & -5 & -8 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 10 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -15 & 16\\ 0 & 1 & 0 & -8 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

此时齐次方程组化为

$$\begin{cases}x_1=15x_4\\ x_2=8x_4\\ x_3=-5x_4\end{cases}$$

令 z_4=1，得齐次方程组的一个基础解系$X_1=[15\quad 8\quad -5\quad 1]'$令 z_4=o，得非齐次方程组的一个特解

$X_0=[16\quad 9\quad -6\quad 0]'$由此得原方程组的全部解为$X=X_0+kX_1$(其中志为任意常数)

3．设$X\sim N(2,9)$，试求(1)$P(X<11)$；(2)$P(5<X<8)$．(已知

$\Phi(1)=0.8413,\Phi(2)=0.9772,\Phi(3)=0.9987)$

解：(1)$P(X<11)=P(\frac{X-2}{3}<\frac{11-2}{3})=P(\frac{X-2}{3}<3)=\Phi(3)=0.9987$

(2) $P(5<X<8)=p(\frac{5-2}{3}<\frac{X-2}{3}<\frac{8-2}{3})=P(1<\frac{X-2}{3}<2)=$ ϕ（2）-ϕ(1)=0.9772-0.8413=0.1359

4・据资料分析，某厂生产的一批砖，其抗断强度X～N(32．5，1．21)，今从这批砖中随机地抽取了9块，测得抗断强度(单位：kg／cm²)的平均值为31.12，问这批砖的抗断强度是否合格（$\alpha=0.05, u_{0.975}=1.96$）

解：零假设 $H_o:\mu=32.5$．由于已知 $\sigma^2=1.21$，故选取样本函数

$$U=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

已知：$\bar{x}$=31.12，经计算得 $\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=\frac{1.1}{3}=0.37, \left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{31.12-32.5}{0.37}\right|=3.73$ 由已知条件

$u_{0.975}=1.96$

$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=3.73>1.96=u_{0.975}$ 故拒绝零假设，即这批砖的抗断强度不合格．

四、证明题(本题6分)

设A，B为随机事件，试证：P(A)=P(A—B)+P(AB)

证明：由事件的关系可知

$A=A\bigcup U=A\bigcup(B+\bar{B})=AB+A\bar{B}=(A-B)+AB$ 而(A--B)$\bigcup$ AB=ϕ，故由概率的性质可知P(A)=P(A—B)+P(AB) 证毕．

试卷代号：1080　　中央广播电视大学

2006—2007学年度第二学期“开放本科”期末考试　工程数学(本)　试题2007年7月

一、单项选择题【每小题3分。本题共15分)

1．设A，B为咒阶矩阵($n>1$)，则下列等式成立的是(D．$(A+B)'=A'+B'$　)．

2．向量组 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ 的秩是(3　　)．

3．线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 解的情况是(有无穷多解　)．

4．下列事件运算关系正确的是(A．$B=B\bar{A}+BA$　　)．

5．设 x_1,x_2,x_3 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ,σ^2 是未知参数，则(

B. $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$)是统计量.

二、填空题(每小题 3 分。共 15 分)

1．设 A，B 是 3 阶矩阵；其中$|A|=3,|B|=2$,则$|2A'B^{-1}|=12$

2·设 A 为"阶方阵，若存在数 A 和非零咒维向量 z，使得$Ax=\lambda x$,则称 2 为 A 相应于特征值．λ 的__特征向量_______

3．若$P(A+B)=0.9,P(A)=0.8,P(B)=0.4$,则$P(AB)=0.3$

4．设随机变量 X，若$E(X)=\sqrt{3},E(X^2)=5$,则$D(X)=2$

5．设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，则$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sim$5. $N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

三、计算题【每小题 16 分，共 64 分)

1．已知$AX=B$,其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&5&7\\5&8&10\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&3\\5&8\\0&1\end{bmatrix},$$

求 X.

解：利用初等行变换得$\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\3&5&7&0&1&0\\5&8&10&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-5&-5\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&0&4&-6&3\\0&1&0&5&-5&2\\0&0&1&-1&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-6&4&-1\\0&1&0&5&-5&2\\0&0&1&-1&2&-1\end{bmatrix}$$

即 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-6&4&-1\\5&-5&2\\-1&2&-1\end{bmatrix}$由矩阵乘法和转置运算得$\begin{matrix}0&0\\1&0\\0&1\end{matrix}\Bigg]\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&3&-1&0\\0&0&-1&1&-2&1\end{bmatrix}$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-6&4&-1\\5&-5&2\\-1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\5&8\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&13\\-15&-23\\8&12\end{bmatrix}.$$

2．当 A 取何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2\qquad\quad+x_4=2\\x_1-2x_2+x_3+4x_4=3\\2x_1-3x_2+x_3+5x_4=\lambda+2\end{cases}$**有解，在有解的情况下求方程组的一般解.**

解：将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&1&2\\1&-2&1&4&3\\2&-3&1&5&\lambda+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1&2\\0&-1&1&3&1\\0&-1&1&3&\lambda-2\end{bmatrix}$$

$\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1&2\\0&-1&1&3&1\\0&0&0&0&\lambda-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&1\\0&1&-1&-3&-1\\0&0&0&0&\lambda-3\end{bmatrix}$由此可知当 A≠3 时，方程组无解．当

A 一 3 时，方程组有解．方程组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 + 3x_4 - 1 \end{cases}$

3．设随机变量 X 具有概率密度 $f(x) = \begin{cases} 3x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$ **求 E(X)，D(X).**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 3x^3 \mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4} \cdots$$

解：由期望的定义得 $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 3x^4 \mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{5}$ 由方差的计算公式

有 $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$

4．已知某种零件重量 $X \sim N(15, 0.09)$**，采用新技术后，取了 9 个样品，测得重量(单位：kg)的平均值为 14．9，已知方差不变，问平均重量是否仍为** $15 (\alpha = 0.05, u_{0.975} = 1.96)$？

解：零假设 H。：卢一 l5．由于已知 cr2 一 O．09，故选取样本函数

$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 已知 X 一一 l4．9，经计算得

$\frac{\sigma}{\sqrt{9}} = \frac{0.3}{3} = 0.1, \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{14.9 - 15}{0.1} \right| = 1$ 由已知条件 U㈣，。一 1．96，

$\left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = 1 < 1.96 = u_{0.975}$ 故接受零假设，即零件平均重量仍为 l5

四、证明题(本题 6 分)

设 A，B 是两个随机事件，试证：P(B)=P(A)P(B1A)+P(万)P(B1 页)

证明：由事件的关系可知 $B = BU = B(A + \overline{A}) = AB + \overline{A}B$ 而 $(AB)(\overline{A}B)$=p，故由加法公式和乘法公式可 $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$ 证毕.

工程数学（本）04 秋模拟试题（1）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 21 分）

1．设 A, B 都是 n 阶矩阵 $(n > 1)$，则下列命题正确的是（ $AB = 0$，且 $|A| \neq 0$，则 $B = 0$ ）.

2．在下列所指明的各向量组中，（任何一个向量都不能被其余的向量线性表出）中的向量组是线性无关的.

3．设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，则 A 的对应于特征值 $\lambda = 2$ 的一个特征向量 α =($\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$)

.

4.　甲、乙二人射击，A, B 分别表示甲、乙射中目标，则 $\overline{AB}$ 表示（至少有一人没射中）的事件.

5．设 $X \sim N(0,1)$，$\Phi(x)$ 是 X 的分布函数，则下列式子不成立的是（

$\Phi(-a) = \Phi(a)$　）.

6．设 x_1, x_2, x_3 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则（$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3$　）是 μ 无偏估计.

7．对正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的假设检验问题中，U 检验解决的问题是（已知方差，检验均值）.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A 是 2 阶矩阵，且 $|A| = 9$，$|3(A^{-1})'| =$ __1_____.

2．已知齐次线性方程组 $AX = 0$ 中 A 为 3×5 矩阵，且该方程组有非零解，则 $r(A) \le$ ___3______.

3．$P(A) = 0.5, P(B\overline{A}) = 0.2$，则 $P(A+B) =$ ____0.7_____.

4．若连续型随机变量 X 的密度函数的是 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，则 $E(X) =$ __$\frac{2}{3}$_____.

5．若参数 θ 的两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 满足 $D(\hat{\theta}_1) > D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 更__有效___.

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

1．设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，问：$A$ 是否可逆？若 A 可逆，求 $A^{-1}B$.

解：因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

所以 A 可逆。利用初等行变换求 A^{-1}，即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

即 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}$ 由矩阵乘法得 $A^{-1}B=\begin{bmatrix}-4 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\\ 6 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -15 & 5\\ -10 & -15 & 5\\ 12 & 20 & -5\end{bmatrix}$

2．线性方程组的增广矩阵为$\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ -1 & 3 & -12 & 1\end{bmatrix}$求此线性方程组的全部解

解：将方程组的增广矩阵化为阶梯形$\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ -1 & 3 & -12 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & -7 & 2\\ 0 & 2 & -7 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & -7 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

此时齐次方程组化为 $\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2}x_3\\ x_2=\frac{7}{2}x_3\end{cases}$，（其中 x_3 为自由未知量）. 分别令 $x_3=1$，得齐次方程组的一个基础解系

$X_1=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 1\end{bmatrix}'$ 令 $x_3=0$，得非齐次方程组的一个特解 $X_0=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}'$ 由此得

原方程组的全部解为 $X=X_0+kX_1$ （其中 k 为任意常数）

3．用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$ 化为标准型，并求出所作的满秩变换.

解：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$

$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{1}{2}x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$

$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2+4x_3)^2-4x_3^2$ 令

$y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2$， $y_2=x_2+4x_3$， $y_3=x_3$ 即得

$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2-y_3^2$ 由（*）式解出 x_1,x_2,x_3，即得

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$ 或写成 $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

4．两台车床加工同样的零件，第一台废品率是 1%，第二台废品率是 2%，加工出来的零件放在一起。已知第一台加工的零件是第二台加工的零件的 3 倍, 求任意取出的零件是合格品的概率．

解：设 A_i："是第 i 台车床加工的零件" $(i=1,2)$，B："零件是合格品". 由全概公式有

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$　　显然 $P(A_1) = \dfrac{3}{4}$，$P(A_2) = \dfrac{1}{4}$，

$P(B|A_1) = 0.99$，$P(B|A_2) = 0.98$，故

$$P(B) = \frac{3}{4} \times 0.99 + \frac{1}{4} \times 0.98 = 0.9875$$

5．设 $X \sim N(3, 4)$，试求⑴ $P(5 < X < 9)$；⑵ $P(X > 7)$．（已知

$\Phi(1) = 0.8413$，$\Phi(2) = 0.9772$，$\Phi(3) = 0.9987$）

解：⑴ $P(5 < X < 9) = P(\frac{5-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{9-3}{2}) = P(1 < \frac{X-3}{2} < 3)$

$= \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574$

⑵ $P(X > 7) = P(\frac{X-3}{2} > \frac{7-3}{2}) = P(\frac{X-3}{2} > 2) = 1 - P(\frac{X-3}{2} \le 2)$

$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

6．设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 来自指数分布 $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$，其中 θ 是未知参数，求 θ 的最大似然估计值．

解：答案：解：　似然函数为 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \cdots f(x_n; \theta)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

取对数得　　$\ln L = -n \ln\theta - \dfrac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 求导得　　$\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=0$得$\theta$的最大似然估值

$\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

四、证明题（本题4分）

设A,B是随机事件，试证：$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)$

证明：由事件的运算得 $A+B=A+\overline{A}B$，且A与$\overline{A}B$互斥，由加法公式得

$P(A+B)=P(A)+P(\overline{A}B)$，

又有 $A=AB+A\overline{B}$，且AB与$A\overline{B}$互斥，由加法公式得

$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$综合而得$P(A+B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$，证毕.

工程数学11春试题

一、单项选择题（每小题3分）

1．设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，则下列等式成立的是（　　）.

A．$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$　　　　B．$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

C．$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　　　D．$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$

2．方程组$\begin{cases}x_1-x_2=a_1\\ \phantom{x_1-{}}x_2+x_3=a_2\\ x_1+x_3=a_3\end{cases}$相容的充分必要条件是(　　)，其中$a_i\neq 0$，

$(i=1,2,3)$.

A．$a_1+a_2+a_3=0$　　　　B．$a_1+a_2-a_3=0$

C．$a_1-a_2+a_3=0$　　　　D．$-a_1+a_2+a_3=0$

3．下列命题中不正确的是（　　）.

A．A与A'有相同的特征多项式

B．若λ是A的特征值，则（$\lambda I-A$）$X=O$的非零解向量必是A对应于

λ 的特征向量

C．若 λ=0 是 A 的一个特征值，则 $AX=O$ 必有非零解

D．A 的特征向量的线性组合仍为 A 的特征向量

4．若事件 A 与 B 互斥，则下列等式中正确的是（　　）.

A．$P(A+B)=P(A)+P(B)$　　B．$P(B)=1-P(A)$

C．$P(A)=P(A|B)$　　D．$P(AB)=P(A)P(B)$

5．设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自正态总体 $N(5,1)$ 的样本，则检验假设

$H_0:\mu=5$ 采用统计量 $U=$（　　）.

A．$\dfrac{\bar{x}-5}{\sqrt{5}}$　　B．$\dfrac{\bar{x}-5}{1/\sqrt{5}}$

C．$\dfrac{\bar{x}-5}{1/\sqrt{n}}$　　D．$\dfrac{\bar{x}-5}{1}$

二、填空题（每小题 3 分）

1．设 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & x^2-2\\ 2 & x^2+1 & 4\end{vmatrix}$，则 $|A|=0$ 的根是________________.

2．设 4 元线性方程组 $AX=B$ 有解且 r（A）=1，那么 $AX=B$ 的相应齐次方程组的基础解系含有________个解向量.

3．设 A,B 互不相容，且 $P(A)>0$，则 $P(B|A)=$____________.

4．设随机变量 $X\sim B$（n，p），则 E（X）= ________________.

5．若样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来自总体 $X\sim N(0,1)$，且 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则 $\bar{x}\sim$_

.

三、计算题（每小题 16 分）

1．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$，求 $(AA')^{-1}$.

2．求下列线性方程组的通解.

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=5\\3x_1-6x_2+5x_3+2x_4=5\\4x_1-8x_2+15x_3+11x_4=15\end{cases}$$

3．设随机变量 $X\sim N$（3，4）．求：（1）P（1< X < 7）；（2）使 P（X < a）=0.9 成立的常数 a ． (已知 $\Phi(1.0)=0.8413$，$\Phi(1.28)=0.9$，$\Phi(2.0)=0.9773$).

4．从正态总体 N（μ，4）中抽取容量为 625 的样本，计算样本均值得 $\bar{x}=2.5$，求 μ 的置信度为 99%的置信区间.（已知 $u_{0.995}=2.576$）

四、证明题（本题 6 分）

4．设 n 阶矩阵 A 满足 $(A-I)(A+I)=0$，则 A 为可逆矩阵.

工程数学（本）11 春模拟试卷

参考解答

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．A　2．B　3．D　4．A　5．C

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．1，-1，2，-2　2．3　3．0　4．np　5．$N(0,\dfrac{1}{n})$

三、（每小题 16 分，共 64 分）

1．解：由矩阵乘法和转置运算得

$$AA' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

………6 分

利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

即

$$(AA')^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

………16 分

7-2．**解**　利用初等行变换，将方程组的增广矩阵化成行简化阶梯形矩阵，即

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & -8 & 15 & 11 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组的一般解为：$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = \quad\quad -x_4 + 1 \end{cases}$，其中 x_2， x_4是自由未知量.

……8 分

令 $x_2 = x_4 = 0$，得方程组的一个特解 $X_0 = (0\quad 0\quad 1\quad 0)'$.

方程组的导出组的一般解为：

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = \qquad -x_4 \end{cases}$$，其中 x_2，x_4 是自由未知量.

令 $x_2 = 1$，$x_4 = 0$，得导出组的解向量 $X_1 = (2\quad 1\quad 0\quad 0)'$；

令 $x_2 = 0$，$x_4 = 1$，得导出组的解向量 $X_2 = (1\quad 0\quad -1\quad 1)'$.

……13 分

所以方程组的通解为：

$$X = X_0 + k_1X_1 + k_2X_2 = (0\quad 0\quad 1\quad 0)' + k_1(2\quad 1\quad 0\quad 0)' + k_2(1\quad 0\quad -1\quad 1)',$$

其中 k_1，k_2 是任意实数.

……16 分

3．解：（1）P（1< X < 7）$= P(\frac{1-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{7-3}{2}) =$

$P(-1 < \frac{X-3}{2} < 2)$

$= \Phi(2) - \Phi(-1) =$ 0.9773 + 0.8413 − 1 = 0.8186

……8 分

（2）因为 P（$X < a$）$= P(\frac{X-3}{2} < \frac{a-3}{2}) = \Phi(\frac{a-3}{2}) = 0.9$

所以 $\frac{a-3}{2} = 1.28$，a = 3 + 2×1.28 = 5.56

……16 分

4．解：已知 $\sigma = 2$，n = 625，且 $u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ~ $N(0, 1)$

……5 分

因为 $\bar{x} = 2.5$，$\alpha = 0.01$，$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$，$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.576$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.576\times\frac{2}{\sqrt{625}}=0.206$$

……10 分

所以置信度为 99%的 μ 的置信区间为：

$$[\bar{x}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\bar{x}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]=[2.294\,,2.706].$$

……16 分

四、（本题 6 分）

证明： 因为 $(A-I)(A+I)=A^2-I=0$，即 $A^2=I$.

所以，A 为可逆矩阵.

……6 分

05 年 12 月试卷 4 学分

一． 选择题（每题 2 分，共 10 分）

1．设 k 为整数，满足方程 $e^z=-1$ 的全部解为________。

A　0；　　B　$k\pi i$；　　C　$(2k+1)\pi i$；　　D　$2k\pi i$　。

2. 函数 $f(z)=f(x+iy)=3x^2+2y^3i$ 在______处不可导。

A　$y^2\neq x$；　B　$y^2\neq -x$；　C　$x^2+y^2\neq 0$；　D　整个复平面。

3.　　映射 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 将 z 平面区域 $|w|<1,\mathrm{Im}\,z>0$ 映射成 w 平面区域。

A　$0<\mathrm{Argw}<\pi$；B　$\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Argw}<\pi$；C　$\pi<\mathrm{Argw}<\dfrac{3\pi}{2}$；D　$\pi<\mathrm{Argw}<2\pi$。

4. 设 $f(t)=1+\delta(t)$，则 $\mathscr{F}[f(t)]=$_______。

A　$2\pi\delta(w)+1$；　B　$\delta(w)+2\pi$；　C　$\delta(w)+1$；　D　$2\pi[\delta(w)+1]$。

5．数量场 $u(x,y,z)=xy^2z^3$ 在 $(2,1,-1)$ 处沿矢量 $\vec{l}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ 的方向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=$______。

A　$\dfrac{19}{3}$；　B　19；　C　$\dfrac{21}{3}$；　D　1。

二.　填空题（每题 3 分，共 24 分）

1.　复数 $z=\dfrac{1}{-1+\sqrt{3}i}$ 的三角表示式为__________。

2.　设 $f(z)=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$，$C$ 是从 $t=-1$ 沿曲线 $z=(1-t^2)+ti$ 到 $t=1$ 一段，则 $\int_C f(z)dz=$____________。

3.　设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-2-\sqrt{3}i)^n$ 在 $z=1$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n2^n}z^n$ 的收敛半径 $R=$_____。

4.　已知 $f(z)=2+v(x,y)i$ 为解析函数，且 $f(0)=2+i$，则 $f(z)=$ 。

5.　设 $f(t)=\begin{cases}e^{-t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$，且 $\mathscr{F}[f(t)]=\dfrac{1}{1+iw}$，则 $\mathscr{F}[tf(t)]=$ 。

6.　设 $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+4}$，则 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=$___________。

7. 矢量场 $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 的矢量线方程为__________。

8. 矢量场 $\vec{A}=xz^3\vec{i}-2x^2yz\vec{j}+2yz^4\vec{k}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处沿矢量 $n=i-j$ 方向的环量面密度= ______________ 。

三. 计算下列积分（每题 6 分，共 18 分）

1. $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z-1}{z^2(z-1)}dz$； 2. $\oint_{|z|=2}\dfrac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-3)(z-1)}dz$； 3. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^4}dx$。

四.（8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-6}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数

1 $0<|z+2|<5$； 2 $|z-3|>5$。

五. 计算下列各题（每题 6 分，共 12 分）

1. 求 $\mathscr{F}^{-1}[e^{-2|w|}]$； 2. 求 $\mathscr{L}[t\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau\, d\tau]$。

六.（8 分）已知平面调和场的力函数 $u=x^2-y^2+xy$，求场的势函数及场矢量。

七.（7 分）用积分变换法求解常微分方程初始值问题：

$$\begin{cases} y''+y'-2y=3e^t \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}。$$

八.（7 分）求一个将 z 平面的区域 $|z|<1, \operatorname{Re}z>0, \operatorname{Im}z>0$ 映射成 w 平面区域 $\operatorname{Im}w>0$ 的共形映射。

九.（6 分）设 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，且 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=2$，证明

$$\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{(z-z_0)f^2(z)},z_0]=-\frac{1}{2}$$。

05 年 12 月试卷答案

一. C A B A A

二. 1 $\frac{1}{2}[\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}]$； 2 $i(e-\frac{1}{e})$； 3 4； 4. 2+i

5 $\frac{1}{(1+iw)^2}$； 6 $\delta(t)-2\sin 2t$； 7 $y=c_1x, z=c_2x$； 8

$-\frac{5}{\sqrt{2}}$。

三 1 $原式=\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z-1}dz-\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z}dz-\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z^2}dz=2\pi i(e-2)$

2 $原式=-2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\}$

$=-3\pi ie^{\frac{1}{3}}+2\pi i\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$

$=-3\pi ie^{\frac{1}{3}}+2\pi i$

3 $原式=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

$=\pi i\{\mathrm{Res}[\frac{z^2}{1+z^4},\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)]+\mathrm{Res}[\frac{z^2}{1+z^4},\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)]=$

$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

四．1 $|z+2|<5$ $\frac{1}{(z+2)(z-3)}=\frac{-1}{5(z+2)(1-\frac{z+2}{5})}$

2 $|z-3|>5$ $\frac{1}{(z+2)(z-3)}=\frac{1}{(z-3)(1+\frac{5}{z-3})}$

$$=\frac{1}{(z-3)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{(z-3)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(z-3)^{n+1}}$$

五．1 $\mathscr{F}$

$$^{-1}[e^{-2|w|}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|w|}e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{0}e^{2w}e^{iwt}dw+\int_{0}^{+\infty}e^{-2w}e^{iwt}dw]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{2+it}e^{(2+it)w}\Big|_{w=-\infty}^{w=0}+\frac{1}{-2+it}e^{(-2+it)w}\Big|_{w=0}^{w=+\infty}]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{2+it}+\frac{1}{2-it}]=\frac{2}{\pi(t^2+4)}$$

2 $\mathscr{L}[t\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau\,d\tau]=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}[\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau\,d\tau=-\frac{d}{ds}\{\frac{1}{s}\mathscr{L}[e^{-t}\sin t]\}$

3’

$$=-\frac{d}{ds}\frac{1}{s[(s+1)^2+1]}=\frac{3s^2+4s+1}{s^2(s^2+2s+2)^2}$$

六．此矢量场为

$$A=-gradv=-\frac{\partial v}{\partial x}i-\frac{\partial v}{\partial y}j=\frac{\partial u}{\partial y}i-\frac{\partial u}{\partial x}j=(-2y+x)i+(-2x-y)j；$$

4’
力函数为

$$v(x,y)=-\int_{((0,0)}^{(x,y)} A\cdot dr=\frac{1}{2}(y^2-x^2)+2xy+c$$

七．记 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，方程两边求拉氏变换得

$$s^2Y(s)-1+Y(s)-2Y(s)=\frac{3}{s-1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^2},$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)\}=te^t$$

八．

$$\xrightarrow{w_1=z^2} \quad |w_1|<1,\operatorname{Im}w_1>0 \qquad \xrightarrow{w_2=\frac{1+w_1}{1-w_2}} \quad \operatorname{Im}w_2>0,\operatorname{Re}w_2>0$$

$$\xrightarrow{w=w_2^2} \quad \operatorname{Im}w>0,$$

$$w=\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2$$

九．设 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$, $2=\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\varphi(z_0)$

$$f'(z)=\frac{-\varphi(z)}{(z-z_0)^2}+\frac{\varphi'(z)}{z-z_0},$$

$$\frac{f'(z)}{(z-z_0)f^2(z)}=\frac{-\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{(z-z_0)\varphi^2(z)}$$

$$\operatorname{Res}[\frac{f'(z)}{(z-z_0)f^2(z)},z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{f^2(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{-\varphi(z)+(z-z_0)\varphi(z)}{\varphi^2(z)}=-\frac{1}{2}$$

07 年 6 月工程数学试卷（4 学分）

一． 填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．$(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^i=$__________ 。

2．若 $f(z)=x^2+axy-y^2+i(y^2+2xy-x^2)$ 在复平面内处处解析，则常数 $a=$_____。

3．已知 C 为曲线 $z=3e^{it}$ 上，从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的一条有向曲线段，则 $\int_c(x^2-y^2+2xyi)dz=$______。

4．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-4i)^n}{n^2}z^n$ 的收敛半径 $\boldsymbol{R}=$__________________ 。 5．$\mathrm{Res}[(z-1)e^{\frac{z}{z-1}},1]=$___________ 。

6．映射 $w=e^z$ 将 $\boldsymbol{z}$ 平面区域 $\boldsymbol{0<\mathrm{Im}\,z<\pi}$ 映射成 $\boldsymbol{w}$ 平面区域_________。

7．函数 $f_1(t)=\sin t$ 和单位脉冲函数 $f_2(t)=\delta(t)$ 的卷积 $f_1(t)*f_2(t)=$______ 。

8．$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & |t|\geq 1\end{cases}$,求 $\mathscr{F}[f(t)]=$________。

9．$\vec{A}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 为管形场，则 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=$_ 。

10．数量场 $u=xy+yz+zx$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿其矢径方向的方向导数=______ 。

二．计算（每题 6 分，共 12 分）

1． $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z^2+5)(z^2+1)}dz$ ；   2． $\int_0^{2\pi}\frac{2}{5+3\cos\varphi}d\varphi$

三．（8 分）将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内展开成洛朗级数。

四．（每题 6 分，共 12 分）

（1）求矩形脉冲函数：$f(t)=\begin{cases}a, & 0\leq t\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的 $\mathscr{F}[f(t)]$;

（2）已知 $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2t dt$, 求 $f(t)$ 的 *Laplace* 变换 $\mathscr{L}[f(t)]$。

五．（8 分）求一个把角形域 $D=\{z|\ -\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{6}\}$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的映射。

六．（10 分）证明：矢量 $\vec{A}=2xyz^2\vec{i}+(x^2z^2+\cos y)\vec{j}+2x^2yz\vec{k}$ 为有势场，并求它的势函数。

七．用积分变换法求解：（每题 7 分，共 14 分）

(1) $\begin{cases} y''+2y'+y=te^{-t} \\ y(0)=1,\ y'(0)=-2 \end{cases}$。　　（2）$\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau=t\cos t$，$(t\geq 0)$

八．(6 分)设复函数 $f(z)$ 为复平面上解析函数，z_0 为 $f(z)$ 的一个三级零点，除 z_0 外，$f(z)$ 在 $|z-z_0|=1$ 内无其它零点。证明：$\oint_{|z-z_0|=1}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=6\pi iz_0$。

07 年 6 月工程数学试卷答案

一． 填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. $e^{\frac{\pi}{3}-2k\pi}$；**2.** 2；3. -18；4. $\frac{1}{5}$；5. $\frac{1}{2}e$；6. $0<\arg w<\pi$；7. $\sin t$；8. $\frac{2\sin w}{w}$；9. 0；10. $2\sqrt{3}$。

二．计算（每题 6 分，共 12 分）

1. $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z^2+5)(z^2+1)}dz$；　　2. $\int_0^{2\pi}\frac{2}{5+3\cos\varphi}d\varphi$

1．原式 $=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]$

$$=2\pi i\{\frac{\frac{e^z}{z^2+5}}{z-i}\Big|_{z=-i}+\frac{\frac{e^z}{z^2+5}}{z+i}\Big|_{z=i}=\frac{\pi i}{2}\sin 1$$

2．原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{2}{5+3\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{iz}dz=-i\oint_{|z|=1}\frac{4}{(3z+1)(z+3)}dz$

$$=2\pi\mathrm{Res}[\frac{4}{(3z+1)(z+3)},-\frac{1}{3}]=\pi$$

三．（8 分）将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内展开成洛朗级数。

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

四．（每题 6 分，共 12 分）

（1）求矩形脉冲函数：$f(t)=\begin{cases}a, & 0\le t\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 的 $\mathscr{F}[f(t)]$；

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^1 ae^{-jwt}dt=\frac{ae^{-jwt}}{-jw}\Big|_0^1=\frac{a(1-e^{-j\omega})}{jw}$$

（2）已知 $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2tdt$，求 $f(t)$ 的 $Laplace$ 变换 $\mathscr{L}[f(t)]$。

$$\because\ \mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+3)^2+4},$$

$$\therefore \mathscr{L}[te^{-3t}\sin 2t]=-\left(\frac{2}{(s+3)^2+4}\right)'=\frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2},$$

$$\therefore \mathscr{L}[\int_0^t te^{-3t}\sin 2tdt]=\frac{1}{s}\cdot\frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}$$

五．（8 分）求一个把角形域 $D=\{z|\ \ -\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{6}\}$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的映射。

$w_1=z^3$ 将 D 映成角形域 $D_1=\left\{z\middle|-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$，

$w_2=\frac{w_1-1}{w_1+1}$ 将 D_1 映成单位圆 $|w|<1$，

故所求映射为：$W=\frac{z^3-1}{z^3+1}$

六．（10 分）证明：矢量 $\vec{A}=2xyz^2\vec{i}+(x^2z^2+\cos y)\vec{j}+2x^2yz\vec{k}$ 为有势场，并求它的势函数。

解：$rot\vec{A}=\vec{0}$，所以 $\vec{A}$ 为有势场。

$$u=\int_0^x 0dx+\int_0^y\cos ydy+\int_0^z 2x^2yzdz=\sin y+x^2yz^2$$

$\vec{A}$ 的势函数为 $v=-u+c=-\sin y-x^2yz^2+c$；

七．用积分变换法求解：（每题 7 分，共 14 分）

(1) $\begin{cases}y''+2y'+y=te^{-t}\\ y(0)=1,\ y'(0)=-2\end{cases}$。　记 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，

则 $s^2Y(s)-s+2+2[sY(s)-1]+Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)^4}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}$$

$$y=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{3!}t^3e^{-t}-te^{-t}+e^{-t}=e^{-t}(\frac{1}{6}t^3-t+1)$$

（2） $\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau=t\cos t$，$(t\geq 0)$

$\because L(\cos t)=\dfrac{s}{s^2+1},\therefore L(t\cos t)=-(\dfrac{s}{s^2+1})'=\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$，

令 $L[y(t)]=Y(s)$, 方程两边取 $Laplace$ 变换，得：

$L[\cos t*y(t)]=L[t\cos t]$，即：$\dfrac{s}{s^2+1}Y(s)=\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

$\therefore Y(s)=\dfrac{s^2-1}{s(s^2+1)}=\dfrac{2s}{s^2+1}-\dfrac{1}{s}$，

故 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=2\cos t-1$.

八．(6 分)设复函数 $f(z)$ 为复平面上解析函数，z_0 为 $f(z)$ 的一个三级零点，

证明：$\oint\limits_{|z-z_0|=1}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}dz=6\pi i z_0$

证明：因为 $f(z)=(z-z_0)^3h(z)$，其中 $h(z)$ 解析，且 $h(z_0)\neq 0$，

所以 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}=\dfrac{z[3h(z)+(z-z_0)h'(z)]}{(z-z_0)h(z)}$　　　2 分

$$\mathrm{Res}[\frac{zf'(z)}{f(z)},z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{z[3h(z)+(z-z_0)h'(z)]}{(z-z_0)h(z)}=3z_0$$

$$\therefore \oint\limits_{|z-z_0|=1}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{zf'(z)}{f(z)},z_0]=6\pi i z_0$$

07 年 12 月试卷 3 学分

一．填空题（每题 2 分，共 20 分）

1．复数 $(-1-i)^i$ 的三角表示式为____________；

2．函数 $f(z)=f(x+iy)=x^3+(3y-y^3)i$ 仅在_______处可导；

3. $\oint_{|z|=2} \bar{z}\, e^{z}\, dz =$ ______________；

4. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$ 在 $z=\sqrt{3}$ 处收敛，在 $z=2+i$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=3$ 处______________(填收敛、发散、可能收敛可能发散)；

5. $\mathrm{Res}[\cos\frac{z}{z-2}, 2] =$ __________；

6. 分式线性映射 $w=\frac{z-i}{z+i}$ 将 z 平面区域 $\mathrm{Re}z>0$ 共形地映射成 w 平面区域__________；

7. 设 $\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{1+i\omega}$，则 $\mathscr{F}[t\,f(t)]=$ __________；

8. 设 $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)\cos\omega+1$，则 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=$ ____________；

9. $\mathscr{L}[\delta(t)+te^{-t}]=$ ___________；

10. $\mathscr{L}^{-1}[\ln\frac{s}{s+1}]=$ ____________。

二.（6 分）设 $v(x,y)=e^{x}\cos y+x^{2}-y^{2}$，求解析函数 $f(z)$，使得 $\mathrm{Im}\,f(z)=v(x,y)$，且 $f(0)=1$。

三.（15 分）计算下列积分

1. $\oint_{|z|=2} \frac{e^{z}}{(z-3)(z+1)(z-1)}dz$ ；

2. $\oint_{|2z-1|=2} \frac{z}{\sin \pi z}dz$

3． $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}dx$

四.（8 分）将函数 $f(z)=\frac{1}{z(z-3)}$ 在下列指定的圆环域内展开成洛朗级数

1． $|z|>3$；　　　　2． $1<|z-1|<2$。

五.（8 分）设 $f(t)=e^{-|t|}$，

1．求 $\mathscr{F}[f(t)]$；　　　　2．求 $\mathscr{F}^{-1}[\frac{\cos\omega}{\omega^2+1}]$。

六.（5 分）计算 $\mathscr{L}[\int_0^t\frac{e^{-2t}\sin t}{t}dt]$。

七.（6 分）求一个将 z 平面区域 $|z|<1,\mathrm{Re}\,z>0$ 映射成 w 平面区域 $\mathrm{Im}\,w>0$ 的共形映射。

八.（6 分）用积分变换法求解常微分方程初始值问题：

$$\begin{cases}y''+2y'-3y=-4e^{-3t}\\y(0)=0;y'(0)=1\end{cases}$$

九.（6 分）设 $f(z)$ 为复平面上有界解析函数，证明：

1．对任意复数 a 有 $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint\limits_{|z|=R}\frac{f(z)}{z(z-a)}dz=0$；

2． $f(z)$ 为常数函数。

07 年 12 月试卷答案

一．1． $e^{\frac{3}{4}\pi-2k\pi}(\cos\ln\sqrt{2}+\sin\ln\sqrt{2})$；　　2． $x^2+y^2=1$;　　3． $8\pi i$;

4．发散；　5． $-2\sin 1$;

6．$\operatorname{Im} w<0$;　7．$\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}$；　8．$1+\delta(t)$;　9．$1+\dfrac{1}{(s+1)^2}$；　10．$\dfrac{e^{-t}-1}{t}$。

二．$u_x=v_y=-e^x\sin y-2y,\ u=-e^x\sin y-2xy+g(y),$

$$-e^x\cos y-2y+g'(y)=u_y=-v_x=-e^x\cos y-2x,$$

$g'(y)=0,\quad g(y)=C$

$$f(z)=-e^x\sin y-2xy+C+i(e^x\cos y+x^2-y^2)，\ f(0)=i, C=0$$

$$f(z)=-e^x\sin y-2xy+i(e^x\cos y+x^2-y^2)$$

三．1．原式$=\dfrac{1}{2}\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\frac{e^z}{z-3}}{z-1}dz-\dfrac{1}{2}\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\frac{e^z}{z-3}}{z+1}dz=\pi i[-\dfrac{e}{2}+\dfrac{1}{4e}]$

2．原式$=2\pi i[\operatorname{Re}s[\dfrac{z}{\sin\pi z},0]+\operatorname{Re}s[\dfrac{z}{\sin\pi z},1]]=2\pi i\left.\dfrac{z}{\pi\cos\pi z}\right|_{z=1}=-2i$

3．原式$=2\pi i\operatorname{Re}s[\dfrac{1}{(z^2+2z+2)^2},-1+i]=2\pi i(\dfrac{1}{(z+1+i)^2})'\Big|_{z=-1+i}=\dfrac{\pi}{2}$

四．$f(z)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z-3})$，

1．$|z|>3,\ f(z)=\dfrac{1}{3z}-\dfrac{1}{3z}\dfrac{1}{1-\frac{3}{z}}=\dfrac{1}{3z}-\dfrac{1}{3z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{z^n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}}{z^{n+1}}$

2．

$$1<|z-1|<2,\quad f(z)=\frac{1}{3}\frac{1}{1+(z-1)}+\frac{1}{3}\frac{1}{2-(z-1)}=\frac{1}{3(z-1)}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}+\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

五．1. $\mathscr{F}[e^{-|t|}]=\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{-i\omega t}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{1+i\omega}+\frac{1}{1-i\omega}=\frac{2}{1+\omega^2}$

2. $\mathscr{F}^{-1}[\frac{\cos\omega}{1+\omega^2}]=\frac{1}{4}\mathscr{F}^{-1}[\frac{2}{1+\omega^2}e^{i\omega}]+\frac{1}{4}\mathscr{F}$

$^{-1}[\frac{2}{1+\omega^2}e^{-i\omega}]=\frac{e^{-|t-1|}+e^{-|t+1|}}{4}$

六．原式

$=\frac{1}{s}\mathscr{L}[\frac{e^{-2t}\sin t}{t}]=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\ \mathscr{L}$

$[e^{-2t}\sin t]ds=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\frac{1}{(s+2)^2+1}ds=\frac{1}{s}[\frac{\pi}{2}-\arctan(s+2)]$

七．

$|z|<1,\mathrm{Re}z>0\xrightarrow{w_1=\frac{z-i}{z+i}}-\pi<\arg w_1<-\frac{\pi}{2}\xrightarrow{w_2=-w_1}0<\arg w_2<\frac{\pi}{2}\xrightarrow{w=w_2^2}\mathrm{Im}\,w>0$

$$w=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2$$

八．记 $\mathscr{L}[y]=Y$，$s^2Y-1+2sY-3Y=-4\frac{1}{s+3},Y=\frac{1}{(s+3)^2}$，

$$y=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2}]=te^{-3t}$$

九．

1．

$$|\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z(z-a)}dz|\le\oint_{|z|=R}\frac{|f(z)|}{|z|(|z|-|a|)}ds\le\oint_{|z|=R}\frac{M}{R(R-|a|)}ds=\frac{2\pi RM}{R(R-|a|)}\to 0(R\to+\infty)$$

2.

$$a \neq 0, 0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z(z-a)} dz = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{a}[\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz - \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z} dz] = \frac{2\pi i}{a}[f(a) - f(0)]$$

所以 $f(a) = f(0)$，即 $f(z)$ 为常数。

08 年 2 月试卷 4 学分

一．填空题 （每题 3 分，共 30 分）

1. 方程 $e^z = -1$ 的全部根为__________；

2. 设 $z = x + iy$ ，则 $\left|e^{i-2z}\right| =$____________；

3. 设 $f(z) = x^2 + 2y^3 i$ 则 $f'(3+i) =$__________；

4. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ 的收敛半径 $R =$_________；

5. $\mathrm{Res}[\frac{e^z - 1}{z^4}, 0] =$__________；

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)(\sin t + t^2) dt =$______________；

7. 设 $F\,[f(t)] = \frac{1}{1+i\omega}$，则 $\mathscr{F}\,[f(2t)] =$__________；

8. $\mathscr{L}[t * \cos t] =$____________；

9. 函数 $u = xyz$ 在点 $A(5,1,2)$ 处沿从点 A 到点 $B(9,4,1)$ 方向的方向导数为__________；

10. 矢量场 $\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ 通过点 $(0,1,0)$ 的矢量线方程为

;

二．（每题 6 分，共 12 分）设 C 正向圆周：$|z|=2$，计算下列各积分：

(1). $\oint_C \frac{z\cos\pi z}{(z^2-1)(z^2-9)}dz$；　　　　(2). $\oint_C \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-1)(z-3)}dz$。

三．（8 分）将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

(1) $0<|z-i|<2$；　　　　(2) $2<|z+i|<\infty$。

四．计算下列各题（每题 6 分，共 12 分）

(1) 设 $\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$，求 $\mathscr{F}[t(2u(t)-1)]$；

(2) 设 $f(t)=\frac{\sin t}{t}$，求 $\mathscr{L}[f'(t)]$。

五．(8 分)证明矢量场

$\vec{A}=(y^2+2xz-x^2)\vec{i}+(z^2+2xy-y^2)\vec{j}+(x^2+2yz-z^2)\vec{k}$ 为调和场，并求其一个调和函数。

六．(8 分)设平面调和场 $\vec{A}$ 的力函数 u 与势函数 v，满足：

$u+v=y^2-x^2+2xy+2x-2y$，求场矢量 $\vec{A}$ 及其力函数 u 与势函数 v。

七．(8 分)用积分变换法求解微分积分方程：

$$\begin{cases} y'+2y-3\int_0^t y\,dt=\frac{1}{3}(4e^{-3t}-1) \\ y(0)=0 \end{cases},$$

八．(8 分)求一个共形映射将 z 平面的区域 $\mathrm{Re}\,z>0$、$\mathrm{Im}\,z>0$ 映射成

w 平面上的区域 $|w-1|<2$。

九. (6 分)设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|f(z)|<\dfrac{1}{1-|z|}$，证明

$|f^{(n)}(0)|\le(n+1)!(1+\dfrac{1}{n})^n$。

08 年 2 月试卷答案

一. 填空题 （每题 3 分，共 30 分）

1. $(2k+1)\pi i$；　2. e^{-2x}；　3. 6；　4. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　5. $\dfrac{1}{6}$；　6. $\sin 1+1$；　7.

$\dfrac{1}{2+i\omega}$；

8. $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$；　9. $\dfrac{33}{\sqrt{26}}$；　10. $x^2-y^2=-1, y^2-z^2=1$。

二. (1). 因 $\dfrac{z\cos\pi z}{(z^2-9)(z^2-1)}=\dfrac{\cos\pi z}{z^2-9}\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z+1})$，所以

$$原式=\frac{1}{2}[\oint_{|z|=2}\frac{\frac{\cos\pi z}{z^2-9}}{z-1}dz+\oint_{|z|=2}\frac{\frac{\cos\pi z}{z^2-9}}{z+1}dz]=\frac{1}{2}[2\pi i(\left.\frac{\cos\pi z}{z^2-9}\right|_{z=1}+\left.\frac{\cos\pi z}{z^2-9}\right|_{z=-1})]=\frac{\pi i}{4}$$

(2). 解：被积函数 $f(z)$ 奇点是：0，1，3 与∞。C 内有本性奇点 $z=0$ 和一级极点 $z=1$，而

$$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 4}(z-3)\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-1)(z-3)}=\frac{3e^{\frac{1}{3}}}{2}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=-\mathrm{Res}[\frac{e^z}{z(1-3z)(1-z)},0]=-1$$

所以 $原式=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\}$

$$=-2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\}=-2\pi i\{\frac{3e^{\frac{1}{3}}}{2}-1\}=3\pi i e^{\frac{1}{3}}+2\pi i$$

三. 解：（1）当 $0<|z-i|<2$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{2i(z-i)}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}=\frac{1}{2i(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^{n-1}}{2^{n+1}i^{n+1}};$$

（2）当$2<|z+i|<\infty$时，

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)^2}\frac{1}{1-\frac{2i}{z+i}}=\frac{1}{(z+i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n}{(z+i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n}{(z+i)^{n+2}}。$$

四．(1) $\mathscr{F}[2u(t)-1]=2(\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega))-2\pi\delta(\omega)=\frac{2}{i\omega}$

$$\mathscr{F}[t(2u(t)-1)]=i\,\mathscr{F}[-it(2u(t)-1)]=i\frac{d}{d\omega}\mathscr{F}[2u(t)-1)]=i(\frac{2}{i\omega})'=-\frac{2}{\omega^2}$$

(2) $\mathscr{L}[f'(t)]=s\,\mathscr{L}[\frac{\sin t}{t}]-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=s\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+1}ds-1=s(\frac{\pi}{2}-\arctan s)-1$

五．$\mathrm{div}\vec{A}=(2z-2x)+(2x-2y)+(2y-2z)=0,\mathrm{rot}\vec{A}=0$，所以$\vec{A}$为调和场。

其调和函数$u=\int_0^x(-x^2)dx+\int_0^y(2xy-y^2)dy+\int_0^z(x^2+2yz-z^2)dz$

$$=xy^2+x^2z+yz^2-\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)$$

六．$u+v=y^2-x^2+2xy+2x-2y$，且$u_x=v_y,u_y=-v_x$，

$u_x+v_x=-2x+2y+2,$

$u_y+v_y=2y+2x-2,$所以$u_x=2y,u_y=2x-2,\ \vec{A}=(2x-2)\vec{i}-2y\vec{j}$，

$u=2xy-2y+c,v=y^2-x^2+2x-c$

七．记$\mathscr{L}[y]=Y$，$sY+2Y-\frac{3}{s}Y=\frac{1}{3}[\frac{4}{s+3}-\frac{1}{s}],Y=\frac{1}{(s+3)^2}$，$y=\mathscr{L}$

$^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2}]=te^{-3t}$

八.

$$\operatorname{Re} z>0、\operatorname{Im} z>0 \xrightarrow{w_1=z^2} \operatorname{Im} w_1>0 \xrightarrow{w_2=\frac{w_1-i}{w_1+i}} |w_2|<1 \xrightarrow{w_3=2w_2} |w_3|<2$$

$\xrightarrow{w=w_3+1} |w-1|<2$，所求映射为 $w=2\dfrac{z^2-i}{z^2+i}+1$。

九．证明：由于 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，取 $|z|=\dfrac{n}{n+1}$，则由高阶导数公式，有：

$$\left|f^{(n)}(0)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}ds\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\frac{1}{1-|z|}\frac{1}{|z|^{n+1}}ds$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}2\pi\frac{n}{n+1}=(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

08 年 12 月试卷 (3 学分)

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1．$(1+i)^i=$________；

2．设 $f(z)=x^3+y^3+ix^2y^2$，则 $f'(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i)=$__________；

3．$\oint_C\dfrac{\cos z}{z+i}dz=$__________，其中 C 为圆周 $|z+3i|=1$；

4．设函数 $\dfrac{e^z}{\cos z}$ 的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径 $R=$__________；

5．$\operatorname{Res}\left[\sin\dfrac{z}{z-2},2\right]=$__________；

6．映射 $w=ze^{-z}$ 在点 $z=1+i$ 处的伸缩率为__________；

7．$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(\sin t)\ln(1+t^2)}{2+t^2}\delta(t+1)dt=$__________；

8．设 $\mathscr{F}[f_1(t)]=\dfrac{1}{1+i\omega}$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=\dfrac{\sin\omega}{\omega}$，

$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$，则 Fourier 变换 $\mathscr{F}[f(t)]=$__________；

9．设 $F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$，则拉氏逆变换 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=$__________；

10．$\mathscr{L}^{-1}\left[\arctan\dfrac{a}{s}\right]=$__________。

二．（8 分）已知一调和函数 $u=2xy-2y$，求一解析函数 $f(z)=u+iv$，使 $f(2)=-i$。

三．计算下列积分（每小题 5 分，共 15 分）：

1．$\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^5} dz$；2．$\oint\limits_{C} \dfrac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-1)(z-3)} dz$，其中 C：$|z|=2$ 正向；3．

$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^2} dx$。

四．（8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域内展开成洛朗级数：

1．$0<|z-1|<1$；　　　　2．$1<|z-2|<+\infty$。

五．计算下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1．设 $f(t)=e^{i\omega_0 t} t\, u(t)$，求 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}[f(t)]$；

2．设 $f(t)=\int_0^t \dfrac{e^{-2\tau}\sin 3\tau}{\tau} d\tau$，求 $f(t)$ 的拉氏变换 $\mathscr{L}[f(t)]$。

六．（8 分）用拉氏变换解微分方程：$\begin{cases} y''-y=4\sin t+5\cos 2t \\ y(0)=-1,\ y'(0)=-2 \end{cases}$。

七．（7 分）求一共形映射 $w=f(z)$，将 z 平面的区域：$|z|<1$，$0<\arg z<\dfrac{\pi}{6}$ 映射成 w 平面上的区域：$|w|<1$。

八．（4 分）设 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，在 $|z|\le 2$ 上连续，且

$M=\max\limits_{|z|=2}|f(z)|$，

证明：$|f(z)|\le M$，$(|z|\le 2)$。

08 年 12 月试卷 (3 学分)答案

一. 填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. $e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{4})}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2})$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；2. $\frac{27}{4}-\frac{27}{4}i$ ；3. 0 ；4. $\frac{\pi}{2}$ ；

5. $2\cos 1$ ；6. e^{-1} ；7. $\frac{\sin(-1)\ln 2}{3}$ ；8. $\frac{\sin\omega}{(1+i\omega)\omega}$ ；9. $t+(t-2)u(t-2)$ ；

10. $\frac{\sin at}{t}$ 。

二.（共 8 分）

解：由 $v_x=-u_y=2-2x$，得 $v=\int(2-2x)dx=2x-x^2+g(y)$，

$v_y=g'(y)$，由 $v_y=u_x=2y$，得 $g'(y)=2y$，

所以 $g(y)=\int 2ydy=y^2+c$，因此 $v(x,y)=2x-x^2+y^2+c$。从而得解析函数

$f(z)=2xy-2y+i(2x-x^2+y^2+c)=i(2z-z^2+c)$。

由 $f(2)=-i$，得 $c=-1$，所以 $f(z)=-i(z-1)^2$。

三.（每小题 5 分，共 15 分）

解：1. 原式 $=2\pi i\frac{1}{4!}(e^z)^{(4)}\Big|_{z=0}=\frac{\pi}{12}i$

2. 被积函数 $f(z)$奇点是：0，1，3 与∞。C 内有本性奇点 $z=0$ 和一级极点 $z=1$，而

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),3]=\lim_{z\to3}(z-3)\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-1)(z-3)}=\frac{3e^{\frac{1}{3}}}{2}$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=-\mathrm{Re}\,s[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=-\mathrm{Re}\,s[\frac{e^z}{z(1-3z)(1-z)},0]=-1$$

所以 $\oint\limits_C\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-1)(z-3)}dz=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+\mathrm{Re}\,s[f(z),1]\}$

$$= -2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),3] + \mathrm{Res}[f(z),\infty]\} = -2\pi i\{\frac{3e^{\frac{1}{3}}}{2} - 1\} = 3\pi i e^{\frac{1}{3}} + 2\pi i$$

3. $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在上半平面有二级极点 i，

故有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}[\frac{1}{(1+z^2)^2}, i]$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i}\left((z-i)^2 \frac{1}{(1+z^2)^2}\right)' = 2\pi i \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)' = 2\pi i \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}$$

四．（共 8 分） 解：1． $0 < |z-1| < 1$

$f(z) = \frac{1}{(z-1)} \frac{-1}{1-(z-1)}$ --------（2 分）

$$= \frac{1}{(z-1)}(-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n) = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1}$$

2． $1 < |z-2| < +\infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-2+1)} = \frac{1}{(z-2)^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$

$$= \frac{1}{(z-2)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+2}}$$

五．（每小题 5 分，共 10 分）

解： 1．因 $\mathscr{F}[tu(t)] = i(\mathscr{F}[u(t)])' = i(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega))' = \frac{-1}{\omega^2} + i\pi\delta'(\omega)$

所以 $\mathscr{F}[e^{i\omega_0 t} t u(t)] = \frac{-1}{(\omega-\omega_0)^2} + i\pi\delta'(\omega-\omega_0)$

2．因 $\mathscr{L}[\frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}] = \int_s^{\infty} \mathscr{L}[e^{-2t}\sin 3t] ds$

$$= \int_s^{\infty} \frac{3}{(s+2)^2+9} ds = \arctan\frac{s+2}{3}\bigg|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s+2}{3} = arc\cot\frac{s+2}{3}$$

所以 $\mathscr{L}[\int_0^t \frac{e^{-2\tau}\sin 3\tau}{\tau} d\tau] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[\frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}] = \frac{1}{s} arc\cot\frac{s+2}{3}$

六.（共 8 分） 解：设 $\mathscr{L}\,[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

$$s^2Y(s)+s+2-Y(s)=4\frac{1}{s^2+1}+5\frac{s}{s^2+4}$$

由此可得

$$Y(s)=\frac{4}{(s^2-1)(s^2+1)}+\frac{5s}{(s^2-1)(s^2+4)}-\frac{s+2}{s^2-1}=-\frac{2}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}$$

取拉氏逆变换得 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\,[Y(s)]=-2\sin t-\cos 2t$

七.（共 7 分）解：

$$|z|<1\,,0<\arg z<\frac{\pi}{6}\xrightarrow{w_1=z^6}|w_1|<1\,,\mathrm{Im}\,w_1>0$$

$$\xrightarrow{w_2=-\frac{w_1+1}{w_1-1}}\mathrm{Re}\,w_2>0\,,\mathrm{Im}\,w_2>0$$

$$\xrightarrow{w_3=w_2^2}\mathrm{Im}\,w_3>0\xrightarrow{w=\frac{w_3-i}{w_3+i}}|w|<1$$

复合以上四个映射，即得所求的一个映射为 $w=\dfrac{(z^6+1)^2-i(z^6-1)^2}{(z^6+1)^2+i(z^6-1)^2}$。

八.（共 4 分）证明：对函数 $[f(z)]^n$ 应用柯西积分公式得

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C:|\xi|=2}\frac{[f(\xi)]^n}{(\xi-z)}d\xi\quad(z\in|\xi|<2)$$

设 d 为 z 到 $C:|\xi|=2$ 的最短距离，则由积分估值定理，有

$$\left|[f(z)]^n\right|=|f(z)|^n=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|\xi|=2}\frac{[f(\xi)]^n}{(\xi-z)}d\xi\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|\xi|=2}\frac{|f(\xi)|^n}{|\xi-z|}ds\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|\xi|=2}\frac{M^n}{d}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{M^n}{d}4\pi=\frac{2M^n}{d}$$

两边开 n 次根得 $\dfrac{|f(z)|}{M}\le\left(\dfrac{2}{d}\right)^{\frac{1}{n}}$，令 $n\to+\infty$，并注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}a^{\frac{1}{n}}=1\,(a>0)$，易知

$$\frac{|f(z)|}{M}\le\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{1}{n}}=1，即|f(z)|\le M，\quad(|z|\le 2)$$

08.012 工程数学(A) (4.0)学分

一．填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. $(-1)^{-i}=$________;

2. 已知$f(z)=2xy+i\,v(x,y)$为解析函数，且$f(0)=i$，则$f(z)=$_____
;

3. 设$f(z)=\oint\limits_{|\xi|=2}\dfrac{e^{\xi}}{\xi-z}d\xi$，则$\int_0^i f(z)dz=$__________;

4. 函数$f(z)=\int_0^z e^{\xi^2}d\xi$在$z=0$点的泰勒展开式为__________;

5. 映射$w=e^{iz^2}$在点$z=i$处的伸缩率为_________;

6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(t^2+\sin t)}{2+t^2}\delta(t-1)dt=$__________;

7. 设$f(t)=t^3e^{-2t}+5\delta(t)$，则拉氏变换$\mathscr{L}[f(t)]=$__________;

8. 数量场$u=x^2z-2xy+3z^2$在点$M(1,-1,1)$处沿曲线
$x=t,y=-t^2,z=t^3$朝t增一方的方向导数为__________;

9. 矢量场$\vec{A}=xz^3\vec{i}-2x^2yz\,\vec{j}+2yz^4\vec{k}$在点$M(1,-2,1)$处沿矢量
$\vec{n}=\vec{i}-\vec{j}$方向的环量面密度为__________;

10. 已知矢量场$\vec{A}=(x+3y)\vec{i}+(y-2z)\,\vec{j}+(x+az)\vec{k}$为管形场，则$a=$
。

二．计算下列积分（每小题 5 分，共 15 分）：

1. $\int\limits_C(x^2+iy)dz$，C 是 0 到$1+i$的直线段；

2. $\oint\limits_C\dfrac{e^z-1}{z^2(z-1)}dz$，其中 C：$|z|=2$正向；　　　3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{1+x^2}dx$。

三．（8 分）将函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在下列圆环域内展开成洛朗级数：

1. $1<|z-1|<+\infty$；　　　2. $0<|z-2|<1$。

四．计算下列各题（每小题 5 分，共 10 分）：

1. 设$f(t)=e^{i\omega_0 t}u(t-t_0)$，求$f(t)$的 Fourier 变换$\mathscr{F}[f(t)]$；

2. 设$f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 3t\,dt$，求$f(t)$的拉氏变换$\mathscr{L}[f(t)]$。

五.（第一小题 4 分，第二小题 6 分，共 10 分）：

1．证明矢量场 $\vec{A} = u\, grad u$ (u 为数性函数)是无旋场;

2．证明矢量场 $\vec{A} = 2xz\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + (x^2 + 2y^2 z - 1)\vec{k}$ 为有势场，并求其势函数。

六.（7 分）用拉氏变换解微分方程：$\begin{cases} y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-t} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ 。

七.（6 分）求一共形映射 $w = f(z)$，将 z 平面的区域：$|z| < 1$，$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ 映射成 w 平面上的区域：$0 < \operatorname{Im} w < \pi$ 。

八.（4 分）设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析，且 $|f(z)| < \dfrac{1}{1-|z|}$，证明 $\left|f^{(n)}(0)\right| \le (n+1)!(1+\dfrac{1}{n})^n$ 。

08.012 工程数学(A)试试题答案

一. 填空题（每小题 2 分，共 20 分）：

1. $e^{(2k+1)\pi}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$；2. $(-z^2 + 1)i$ 或 $2xy + i(y^2 - x^2 + 1)$；

3. $2\pi i(\cos 1 + i\sin 1 - 1)$；4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ ；5. 2；6. $\dfrac{1+\sin 1}{3}$；7. $\dfrac{6}{(s+2)^4} + 5$；

8. $\dfrac{29}{\sqrt{14}}$；9. $-\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ ；10. -2 。

二. （每小题 5 分，共 15 分）

解：1. C 的参数方程为 $z = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$

所以 $\displaystyle\int_C (x^2 + iy)dz = \int_0^1 (t^2 + it)(1+i)dt = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$

2. 被积函数 $f(z)$在 $|z| = 2$ 内只有一级极点 $z = 0$ 和 $z = 1$，而

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\frac{e^z-1}{z^2(z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z(z-1)}=-1$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),1]=\lim_{z\to 2i}(z-1)\frac{e^z-1}{z^2(z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z^2}=e-1$$

所以

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z^2(z-1)}dz=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+\mathrm{Re}\,s[f(z),1]\}=2\pi i(-1+e-1)=2\pi i(e-2)$$

3. $\dfrac{z}{1+z^2}$ 在上半平面有一级极点 i，

所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx=2\pi i\ \mathrm{Res}[\frac{ze^{iz}}{1+z^2},i]=2\pi i\frac{ze^{iz}}{(1+z^2)'}\bigg|_{z=i}=\frac{\pi i}{e}$，

因此，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\mathrm{Im}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx]=\mathrm{Im}(\frac{\pi i}{e})=\frac{\pi}{e}$

三．（共 8 分）解：1．$1<|z-1|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{(z-1)}}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z-1})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$

2．$0<|z-2|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-2+1)}$$

$$=\frac{1}{(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n-1}$$

四．（每小题 5 分，共 10 分）

解：1．因 $\mathscr{F}[u(t-t_0)]=e^{-i\omega t_0}\mathscr{F}[u(t)]=e^{-i\omega t_0}(\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega))$

所以$\mathscr{F}[e^{i\omega_0 t}u(t-t_0)]=e^{-i(\omega-\omega_0)t_0}[\dfrac{1}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)]$

2．因$\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s}\mathscr{L}[te^{-3t}\sin 3t]=\dfrac{1}{s}[-(\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 3t])']$

$$=-\frac{1}{s}\left(\frac{3}{(s+3)^2+9}\right)'=\frac{6(s+3)}{s[(s+3)^2+9]^2}$$

五．（第一小题 4 分，第二小题 6 分，共 10 分）

证明：1． $rot\,\vec{A}=rot\,(u\,grad\,u)=u\,rot\,(grad\,u)+grad\,u\times grad\,u$

$=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$，所以矢量场$\vec{A}$是无旋场。

2．因$D\vec{A}=\begin{pmatrix}2z & 0 & 2x\\ 0 & 2z^2 & 4yz\\ 2x & 4yz & 2y^2\end{pmatrix}$，所以

$rot\,\vec{A}=(4yz-4yz)\vec{i}+(2x-2x)\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}$，因此$\vec{A}$是有势场，

又，$u(x,y,z)=\int_0^x 0dx+\int_0^y 0dy+\int_0^z(x^2+2y^2z-1)dz=x^2z+y^2z^2-z$

于是得势函数$v=-u=-x^2z-y^2z^2+z$，而场的势函数的全体为

$v=-x^2z-y^2z^2+z+C$，其中C为任意常数。

注：此题含两小题，为基本题，第 1 小题考查旋度运算的基本公式，第 2 小题考查有势场的判断和势函数计算。

六．（共 7 分） 解：设$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，对方程两边取拉氏变换得

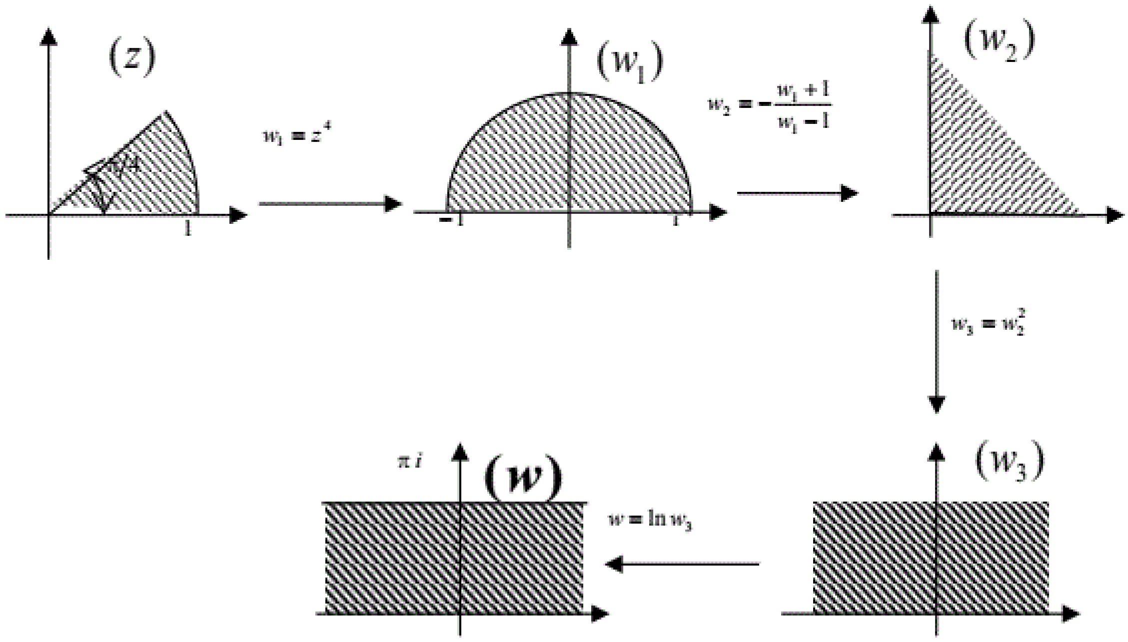
$$s^3Y(s)+3s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=\frac{6}{s+1}$$

由此可得

$$Y(s)=\frac{6}{(s+1)^3(s+1)}=\frac{6}{(s+1)^4}$$

取拉氏逆变换得$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=t^3e^{-t}$

七．（共 6 分）解：



或$|z|<1\,,0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\xrightarrow{w_1=z^4}|w_1|<1\,,\operatorname{Im}w_1>0$

$\xrightarrow{w_2=-\frac{w_1+1}{w_1-1}}\operatorname{Re}w_2>0\,,\operatorname{Im}w_2>0$

$\xrightarrow{w_3=w_2^2}\operatorname{Im}w_3>0\xrightarrow{w=\ln w_3}0<\operatorname{Im}w<\pi$

复合以上四个映射，即得所求的一个映射为$w=\ln\left(\dfrac{z^4+1}{z^4-1}\right)^2$。

八.（共 4 分）证明：由于$f(z)$在$|z|<1$内解析，取$|z|=\dfrac{n}{n+1}$，

则由高阶导数公式，有

$$\left|f^{(n)}(0)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}ds\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\frac{1}{1-|z|}\frac{1}{|z|^{n+1}}ds$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{1-\dfrac{n}{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}2\pi\frac{n}{n+1}=(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2010.1 工程数学(A) (4.0)学分

一．填空题（每小题 2 分，共 24 分）

1．复数$(-1+\sqrt{3}i)^i$的三角表示式为________；

2. 复函数 $f(z)=x^3-(y^3-9y)i$ 当且仅当在___________处可导；

3. 复函数 $f(z)=\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z+1}$ 的 $z-2$ 的幂级数收敛半径 $R=$

；

4. 映射 $w=\frac{z-1}{z+1}$ 将 z 平面区域 $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$ 映射成 w 平面区域

；

5. $\oint_{|z|=1}\frac{\cos 2z}{z^3}dz=$ __________ ；

6. $\int_C e^{-y}(\cos x+i\sin x)\,dz=$ _______，其中 C 为曲线 $z=\cos t+i(1+\sin t)$ 从 $t=-\frac{\pi}{2}$ 到 $t=\frac{\pi}{2}$ 一段；

7. 设 $F[e^{-|t|}]=F(\omega)$，则 $F^{-1}[iF'(\omega)]=$ __________ ；

8. $L[t\cos 2t]=$ __________ ；

9. $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s-3}\right]=$ __________ ；

10. 矢量场 $\vec{A}=\vec{i}-\vec{j}+\frac{1}{2z}\vec{k}$ 通过点(1,−1, 1)的矢量线方程为

；

11. 数量场 $u=\cos x+\sin y-\cos z$，则 div[grad u] $+u=$________；

12. 已知平面调和场的势函数为 $v=e^{-y}\sin x$，则场矢量 $\vec{A}=$ ________ 。

二（每小题 5 分，共 10 分）

计算下列积分

$$(1)\ \oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}dz\ ; \qquad (2)\ \oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4+1}dz$$

三（6 分）将函数 $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-6}$ 在圆环域 $3>|z|>2$ 内展开成洛朗级数。

四 (1) (5 分)用定义求函数 $F(\omega)=e^{-2|\omega|}$ 的傅里叶逆变换

$F^{-1}[F(\omega)]$。

(2) (5 分)设 $f(t)=t\int_0^{\tau}\frac{e^{-\tau}-1}{\tau}d\tau$，求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $L[f(t)]$。

五（7 分）求一个共性映射 $w=f(z)$，将 z 平面区域 $0<\mathrm{Re}z<1$ 映射成 w 平面单位圆 $|w|<1$。

六 (1) (4 分) 求矢量场 $\vec{A}=x(z-y)\vec{i}+y(x-z)\vec{j}+z(y-x)\vec{k}$ 在点 $(1,2,3)$处沿矢量 $\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ 的方向环量面密度

(2) (7 分) 验证矢量场 $\vec{A}=(2z-6x)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(4z+y+2x)\vec{k}$ 为调和场，并求其调和量。

七 (6 分) 用拉普拉斯变换法求解常微分方程初始值问题：

$$\begin{cases} y''-y'-6y=-10e^{3t} \\ y\big|_{t=0}=1,\quad y'\big|_{t=0}=1 \end{cases}$$

八(6 分) 设 $g(z)$ 在 z_0 处解析，且 $g'(z_0)\neq 0,\ w_0(=g(z_0))$ 为函数 $f(w)$ 的一级极点，且 $\mathrm{Re}\,s[f(w),\ w_0]=A,$

(1)证明：z_0 为函数 $f(g(z))$ 的一级极点；

(1)求 $\mathrm{Re}\,s[f(g(z)),\ z_0]$。

2010-1-工程数学 4 学分解答

一 1. $e^{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2)$； 2. $x^2+y^2=3$；3. 1；4. $\frac{\pi}{2}<\arg w<\pi$；5. $-4\pi i$； 6. $i(1-e^{-2})$； 7. $te^{-|t|}$； 8. $\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$； 9. $\frac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t})$ ‘；10. $y+x=0, z^2=x$；

11. 0；12. $-e^{-y}(\cos x\vec{i}-\sin x\vec{j})$。

二(1)

原式

$$=\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^2}dz-\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}dz+\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i[(e^z)'\big|_{z=1}-e^z\big|_{z=1}+e^z\big|_{z=0}]=2\pi i$$

(2) 原式$=-2\pi i\mathrm{Res}[\dfrac{z^3}{z^4+1},\infty]=2\pi i\mathrm{Res}[\dfrac{1}{z(1+z^4)},0]=2\pi i$

三 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{3+z}=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z}}+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$

四 (1) $\mathscr{F}$

$$^{-1}[e^{-2|\omega|}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|\omega|}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{0}e^{(2+ti)\omega}d\omega+\int_{0}^{+\infty}e^{(-2+ti)\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\frac{1}{2+it}+\frac{1}{2-it}]=\frac{2}{\pi(4+t^2)}$$

(2) $\mathscr{L}[f(t)]=-\dfrac{d}{ds}\mathscr{L}\int_0^t\dfrac{e^{-\tau}-1}{\tau}d\tau]=-\dfrac{d}{ds}[\dfrac{1}{s}\mathscr{L}[\dfrac{e^{-t}-1}{t}]]=-\dfrac{d}{ds}[\dfrac{1}{s}\int_s^{\infty}$ $\mathscr{L}$

$[e^{-t}-1]ds]$

$$=-\frac{d}{ds}[\frac{1}{s}\int_s^{\infty}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s})ds]=-\frac{d}{ds}[\frac{1}{s}\ln\frac{s}{s+1}]=\frac{1}{s^2}\ln\frac{s}{s+1}-\frac{1}{s^2(s+1)}$$

五

$0<\mathrm{Re}\,z<1\xrightarrow{w_1=\pi iz}0<\mathrm{Im}\,w_1<\pi\xrightarrow{w_2=e^{w_1}}\mathrm{Im}\,w_2>0\xrightarrow{w=\frac{w_2-i}{w_2+i}}|w|<1$

，$w=\dfrac{e^{i\pi z}-i}{e^{i\pi z}+i}$

六 （1）$\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ 的方向余弦$\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\cos\beta=\dfrac{2}{3},\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$，

$$\mu_n=[(z+y)\frac{1}{3}+(x+z)\frac{2}{3}+(y+x)\frac{2}{3}]\Big|_{(1,2,3)}=\frac{17}{3}$$

（2）雅可比矩阵为$\begin{pmatrix}-6&0&2\\0&2&1\\2&1&4\end{pmatrix}$，所以$\mathrm{div}\vec{A}=0,\mathrm{rot}\vec{A}=0$既$\vec{A}$为调和场。

$$u=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(2z-6x)dx+(2y+z)dy+(4z+y+2x)dz=\int_0^x-6xdx+\int_0^y 2ydy+\int_0^z(4z+y+2x)$$

$$=-3x^2+y^2+2z^2+yz+2xz$$

七 记$\mathscr{L}[y]=Y$，则$s^2Y-s-1-sY+1-6Y=\dfrac{-10}{s-3}$，

$$Y=\frac{s-5}{(s-3)^2}=\frac{1}{s-3}-\frac{2}{(s-3)^2}$$

$$y=e^{3t}-2te^{3t}$$

八 因为w_0为$f(w)$的一级极点，所以$f(w)=\dfrac{\varphi(w)}{w-w_0}$，其中$\varphi(w)$在$w_0$处

解析且$\varphi(w_0)\neq0$，又因为$\mathrm{Res}[f(w),w_0]=A$，所以$\varphi(w_0)=A$

（1） $f(g(z))=\dfrac{\varphi(g(z))}{g(z)-w_0}$，因为$\varphi(g(z_0))=\varphi(w_0)\neq0$，$g(z_0)-w_0=0$

$$(g(z)-w_0)'\Big|_{z=z_0}=$$

$g'(z_0)\neq0$，所以z_0为$f(g(z))$的一级极点。

（2）

$$\mathrm{Res}[f(g(z)),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(g(z))=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(g(z))}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(w_0)}{g'(z_0)}=\frac{A}{g'(z_0)}$$

一、常微分方程边值问题

以二阶常系数非齐次线性常微分方程为例

) (x f py y q y = + ′ + ′ ′

需要两个定解条件才可以确定方程的唯一解。如果在一个自变量点（比如 ）处给出

未知函数函数值和导数值做为定解条件，这类定解条件称为初值条件。初值条件和常微分方程联立构成初值问题

0 0 = x

= ′ =

∞ + ∈ = + ′ + ′ ′

0 0) 0 (,) 0 (

) , 0 ( ), (

µ y y y

x x f py y q y

如果在两个自变量点（比如 和 0 0 = x 1 1 = x ）处给出未知函数的函数值（或导数值）做为

定解条件，这类定解条件称为边值条件。边值条件和常微分方程联立构成边值问题

= =

∈ = + ′ + ′ ′

β α) 1 (,) 0 (

) 1 , 0 ( ), (

y y

x x f py y q y

最简单的两点边值问题是

= =

∈ = ′ ′

β α) 1 (,) 0 (

) 1 , 0 (, 0

y y

x y