第一章 作业

参考答案

1－1. 求模拟结构图，并建立其状态空间表达式。

解：状态方程：

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = \frac{K_b}{J_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{J_1}\left(x_5 + K_p\left(x_6 - x_3\right) - x_4\right)$$

$$= -\frac{K_p}{J_1} x_3 - \frac{1}{J_1} x_4 + \frac{1}{J_1} x_5 + \frac{K_p}{J_1} x_6$$

$$\dot{x}_4 = K_n x_3 \quad \dot{x}_5 = K_1(x_6 - x_3) = -K_1 x_3 + K_1 x_6$$

$$\dot{x}_6 = \left[\left(u - x_1\right)\frac{K_1}{K_p} - \frac{K_1}{K_p} x_6\right]$$

$$= -\frac{K_1}{K_p} x_1 - \frac{K_1}{K_p} x_6 + \frac{K_1}{K_p} u$$

输出方程：$\theta = x_1$

矩阵形式：$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

其中：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{K_b}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{K_p}{J_1} & -\dfrac{1}{J_1} & \dfrac{1}{J_1} & \dfrac{K_p}{J_1} \\ 0 & 0 & K_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & K_1 \\ -\dfrac{K_1}{K_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{K_1}{K_p} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{K_1}{K_p} \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

1－3．图 1－29 机械系统。$M_1 M_2$受外力作用 $f_1\ f_2$作用，求$M_1 M_2$运动速度输出的状态空间表达式。

解：微分方程

$$M_1\dot{y}_1 = f_1 - K_1(c_1 - c_2) - B_1(y_1 - y_2)$$

$$M_2\dot{y}_2 = f_2 - K_2 c_2 - B_2 y_2 + K_1(c_1 - c_2) + B_1(y_1 - y_2)$$

设状态变量 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T，\ \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}^T$$

令 $x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$，$x_3 = y_1$，$x_4 = y_2$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_1}{M_1}x_1 + \frac{K_1}{M_1}x_2 - \frac{B_1}{M_1}x_3 + \frac{B_1}{M_1}x_4 + \frac{1}{M_1}f_1$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_1}{M_2}x_1 - \frac{K_1 + K_2}{M_2}x_2 - \frac{B_1 + B_2}{M_2}x_4 + \frac{B_1}{M_2}x_3 + \frac{1}{M_2}f_2$$

所以 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$

其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{K_1}{M_1} & \dfrac{K_1}{M_1} & -\dfrac{B_1}{M_1} & \dfrac{B_1}{M_1} \\ \dfrac{K_1}{M_2} & -\dfrac{K_1+K_2}{M_2} & \dfrac{B_1}{M_2} & -\dfrac{B_1+B_2}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{M_2} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1－5. 根据微分方程，写状态方程，画模拟结构图。

（1）$\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\dot{u}+2u$

解：相当于传递函数中有零点的情况。

即$G(s)=\dfrac{s+2}{s^3+5s^2+7s+3}$

即：$a_0=3$ $a_1=7$ $a_2=5$

$b_0=2$，$b_1=1$，$b_2=0$，$b_3=0$

所以

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -5\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad C=\left[(b_0-a_0b_n)\cdots(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

或者$\begin{pmatrix}\beta_3\\\beta_2\\\beta_1\\\beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\a_2&1&&\\a_1&a_2&1&\\a_0&a_1&a_2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}b_3\\b_2\\b_1\\b_0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&&&\\-a_2&1&&\\a_2{}^2-a_1&-a_2&1&\\2a_1a_2-a_2{}^3-a_0&a_2{}^2-a_1&-a_2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_3\\b_2\\b_1\\b_0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-5&1&0&0\\5^2-7&-5&1&0\\70-125-3&5^2-7&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\beta_2&\beta_1&\beta_0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&1&-3\end{pmatrix}^T$

$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$

（2）$\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\ddot{u}+3\dot{u}+2u$

$$G(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+7s+3}$$

因为分母未变，故状态方程不变，只输出方程不同。

$b_3=0$，$b_2=1$，$b_1=3$，$b_0=2$

$C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}$

或者

$$\begin{pmatrix}\beta_3\\ \beta_2\\ \beta_1\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0 & 0\\ 5^2-7 & -5 & 1 & 0\\ 70-125-3 & 5^2-7 & -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\\ -5\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$$

1—7. 已知状态空间表达式，画模拟结构图，求传递函数。

解：这是一个单输入单输出系统：

$$W(s)=C(SI-A)^{-1}B+d$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}(SI-A)^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S & -1 & 0\\ 2 & S+3 & 0\\ 1 & -1 & S+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}(S+3)^2 & S+3 & 0\\ -2(S+3) & S(S+3) & 0\\ -S-5 & S-1 & S^2+3S+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}}{S(S+3)^2+2(S+3)}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}-S-5 & S-1 & S^2+3S+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}^T}{S^3+6S^2+11S+6}$$

$$=\frac{2S^2+7S+3}{S^3+6S^2+11S+6}=\frac{2S+1}{(S+1)(S+2)}$$

1—9. 化状态空间表达式成约当标准型

（1）$|\lambda I - A| = 0 \quad \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -3$

$$AP_1 = \lambda P_1 \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad AP_2 = \lambda P_2 \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B' = T^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C' = CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）$|\lambda I - A| = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 1$

$$AP_1 = \lambda_1 P_1 \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\lambda_1 P_2 - AP_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 \boldsymbol{P}_3 = A\boldsymbol{P}_3 \qquad \boldsymbol{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$CT = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1-11. 求传递函数

$$W(s)=W_1(s)\left[I+W_2(s)W_1(s)\right]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{S+1} & -\frac{1}{S}\\ 0 & \frac{1}{S+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{S+2}{S+1} & -\frac{1}{S}\\ 0 & \frac{S+3}{S+2}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{S+1}{S+3}\begin{bmatrix}\frac{1}{S+1} & -\frac{1}{S}\\ 0 & \frac{1}{S+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{S+3}{S+2} & \frac{1}{S}\\ 0 & \frac{S+2}{S+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{S+1} & -\frac{1}{S}\\ 0 & \frac{1}{S+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{S+1}{S+2} & \frac{S+1}{S(S+3)}\\ 0 & \frac{S+2}{S+3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{S+2} & \frac{-S-1}{S(S+3)}\\ 0 & \frac{1}{S+3}\end{bmatrix}$$

存在问题：

1．作业不能没有中间步骤；

2．状态空间表达式应写成矩阵型式；

第二章 作业

参考答案

2－4. 用三种方法计算e^{At}（定义法，约当标准型，拉氏反变换，凯莱哈密顿）

（1） $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

直接法（不提倡使用，除非针对一些特例）：

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-4\cdot\frac{t^2}{2!}+16\cdot\frac{t^4}{4!}-64\frac{t^6}{6!}+\cdots, & -t+4\cdot\frac{t^3}{3!}-16\cdot\frac{t^5}{5!}+\cdots\\ 4t-16\cdot\frac{t^3}{3!}+64\cdot\frac{t^5}{5!}+\cdots, & 1-4\cdot\frac{t^2}{2!}+16\cdot\frac{t^4}{4!}-64\frac{t^6}{6!}\cdots\end{bmatrix}$$

约当型法：

$$|\lambda I-A|=0 \quad \lambda_{1,2}=\pm 2j$$

$$AP_1=\lambda_1 P \qquad P_1=[1 \quad -2j]^T$$

$$AP_2=\lambda_2 P_2 \qquad P_2=[1 \quad 2j]^T$$

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2j & 2j\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\cos 2t & -\sin 2t\\ 4\sin 2t & 2\cos 2t\end{bmatrix}$$

拉氏反变换法：

$$(SI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}S & 1\\ -4 & S\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{S^2+4}\begin{pmatrix}S & -1\\ 4 & S\end{pmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\left[(SI-A)^{-1}\right]=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}$$

凯莱哈密顿法：$\lambda_{1,2}=\pm 2j$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2(e^{2jt}+e^{-2jt})\\ -j(e^{2jt}-e^{-2jt})\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\cos 2t & -\sin 2t\\ 4\sin 2t & 2\cos 2t\end{bmatrix}$$

（2） $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

直接法： $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots$

$$=\begin{bmatrix}1+t+5\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{13}{6}t^3\cdots, & t+t^2+\frac{7}{6}t^3\cdots\\ 4t+4t^2+\frac{28}{6}t^3\cdots, & 1+t+5\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{13}{6}t^3\cdots\end{bmatrix}$$

约当法 $T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix};T^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

$$e^{At}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2(e^{3t}+e^{-t}), & e^{3t}-e^{-t}\\ 4(e^{3t}-e^{-t}) & 2(e^{3t}+e^{-t})\end{bmatrix}$$

拉氏反变换法

$$[SI-A]^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2(\frac{1}{S-3}+\frac{1}{S+1}), & (\frac{1}{S-3}-\frac{1}{S+1})\\ 4(\frac{1}{S-3}-\frac{1}{S+1}), & 2(\frac{1}{S-3}+\frac{1}{S+1})\end{bmatrix}$$

e^{At}同上

凯莱哈密顿： $\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{3t}+3e^{-t}\\ e^{3t}-e^{-t}\end{bmatrix}$

$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 T$同上

2－6．求下列状态空间表达式的解：

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u$$

$$y = (1,0)\vec{x}$$

初始状态$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,输入$u(t)$是单位阶跃函数。

根据直接法求e^{At}.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{At}} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}1(\tau)d\tau$$

$$= \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1 \end{pmatrix}d\tau = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+2t+t^2 \\ 2+2t \end{pmatrix}$$

2—7. 证明 2—3 中，状态方程的解：

1.

即当$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\delta(t)$，$x(0_)=x_0$时

$x(t)=e^{At}x_0+e^{At}\boldsymbol{BK}$,

式中$\boldsymbol{K}$与$\boldsymbol{u}(t)$同维的常数矢量。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BK\delta(\tau)d\tau \\
&= e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\delta(\tau)d\tau BK \\
&= e^{At}\boldsymbol{x}_0+e^{A(t-\tau)}\big|_{\tau=0}\ BK \\
&= e^{At}\boldsymbol{x}_0+e^{At}BK
\end{aligned}
$$

2． $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\times 1(t)$， $\boldsymbol{x}(0\_)=\boldsymbol{x}_0$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BK1(t)d\tau \\
&= e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}d\tau BK \\
&= e^{At}\boldsymbol{x}_0+A^{-1}e^{A(t-\tau)}\big|_0^t\ BK \\
&= e^{At}\boldsymbol{x}_0+A^{-1}(e^{At}-I)BK
\end{aligned}
$$

3． $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{k}1(t) \qquad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{x}(\mathrm{t})=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BK\tau 1(t)d\tau$$

$$=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \tau e^{-A\tau}d\tau e^{At}BK$$

$(\tau e^{-A\tau})'=e^{-A\tau}-A\tau e^{-A\tau}$，两边 $\int_0^t$

$$\tau e^{-A\tau}\Big|_0^t=\int_0^t e^{-A\tau}d\tau-A\int_0^t \tau e^{-A\tau}d\tau$$

所以

$$-\int_0^t \tau e^{-A\tau}d\tau=A^{-1}\left[\tau e^{-A\tau}\Big|_0^t-\int_0^t e^{-A\tau}d\tau\right]$$

$$=A^{-1}\left[te^{-A\tau}+A^{-1}e^{-A\tau}\Big|_0^t\right]$$

$$=A^{-1}\left[te^{-A\tau}+A^{-1}(e^{-At}-I)\right]$$

代入

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\left[A^{-2}(-e^{-At}+I)-A^{-1}te^{-At}\right]e^{At}BK$$

$$=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\left[A^{-2}(e^{At}-I)-A^{-1}t\right]BK$$

2-9. 有系统如图 2-2 所示，试求离散化的状态空间表达式。设采样周期分别为 $T=0.1s$ 和 1s，而 u_1 和 u_2 为分段常数。

（一）标准离散化

1）根据系统结构图得到系统的状态空间表达式

$$\dot{x}_1=-x_1+Ku_1$$
$$\dot{x}_2=x_1-u_2$$
$$y=2x_1+x_2$$

即
$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$
$$y=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

2）根据 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)=0$

得 $\lambda_1=0;\lambda_2=-1.$

据 $(\lambda_1 I-A)P_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}P_1=0$

得到$P_1=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^T$；

根据 $(\lambda_2 I-A)P_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}P_2=0$ 得到

$$P_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\text{，于是}T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

于是

$$G(T)=e^{AT}=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-T}\end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix}e^{-T} & 0\\ 1-e^{-T} & 1\end{pmatrix}$$

$$H(T)=\int_0^T e^{At}dtB=\int_0^T\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 1-e^{-t} & 1\end{pmatrix}dt\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-e^{-T} & 0\\ T-1+e^{-T} & T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}K(1-e^{-T}) & 0\\ K(T-1+e^{-T}) & -T\end{pmatrix}$$

于是得到离散时间状态空间表达式为：

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = G(T)\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + H(T)\begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1-e^{-T} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} K(1-e^{-T}) & 0 \\ K(T-1+e^{-T}) & -T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

当$T = 0.1s$时我们可以得到

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-0.1} & 0 \\ 1-e^{-0.1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} K(1-e^{-0.1}) & 0 \\ K(e^{-0.1}-0.9) & -0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

当$T = 1s$时我们可以得到

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1-e^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} K(1-e^{-1}) & 0 \\ Ke^{-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

（二）近似离散化

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = (TA+I) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + TB \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-T & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} KT & 0 \\ 0 & -T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

当$T = 0.1s$时我们可以得到

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 0.1K & 0 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

当$T = 1s$时我们可以得到

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix}$$

存在问题：

1． e^{At}： ① 一定是 t 的矩阵函数

② 三种方法结果应一致

2． 证明：

① 应有中间过程，不能只抄写一遍

② 注意矩阵不一定满足 $AB = BA$

第三章 作业

参考答案

3-1

（1）

法一：根据系统模拟结构图可以看出；对应状态 x_2 的方块是一个与输入 u 无联系的孤立部分，于是不能控；状态 x_4 对输出 y 不产生任何影响， 于是不能观。所以系统不能控不能观，系统中 a, b, c, d 的取值对能控性与能观性没有影响。

法二： 由系统模拟图可得状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

可控性矩阵

$$M = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a-c & a^2+ac+c^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a-c-d \end{bmatrix}$$

显然 $rankM < 4$ 所以系统不可控,系统中 a, b, c, d 的取值对能控性与能观性没有影响。

能观性矩阵

$$N=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -c & 0 \\ -a-c & -b-c & c^2 & 0 \\ a^2+ac+c^2 & b^2+bc+c^2 & -c^3 & 0 \end{bmatrix}$$

显然 $rankN<4$ 所以系统不可观，系统中 a, b, c, d 的取值对能控性与能观性没有影响。

（2）由系统模拟结构图可以得到状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & b \\ -c & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

于是可控性矩阵为

$$M=\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & b-a \\ 1 & -c-d \end{bmatrix}$$ 若可控

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & b-a \\ 1 & -c-d \end{vmatrix}=a-b-c-d\neq 0$$ 即

$$a\neq b+c+d$$

于是可观性矩阵为

$$N=\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & b \end{bmatrix}$$ 若可观即

$$b \neq 0$$

（3）

由于系统矩阵具有约旦标准型，于是不难得出：当 ab ≠ 0 时系统能控，当 ab = 0时系统不能控；当cd ≠ 0时系统能观，当cd = 0时系统不能观。

3—3

（1） 求得能控性矩阵

$$M=[b \quad Ab]=\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$，系统能控

等价于$|M|=\alpha_2-\alpha_1 \neq 0$ 即 $\alpha_2 \neq \alpha_1$。

能观性矩阵

$$N=\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$，于是系统

能观等价于$|N|=\alpha_2-\alpha_1 \neq 0$ 即 $\alpha_2 \neq \alpha_1$。

于是系统能控能观等价于 $\alpha_2 \neq \alpha_1$。

（2） $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$

$M=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \alpha_1+\alpha_2\\ 1 & \alpha_3+\alpha_4\end{bmatrix}$，$rankM=2$。

$\det M=\alpha_3+\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2\neq 0$

所以$\alpha_1+\alpha_2\neq\alpha_3+\alpha_4$

$N=\begin{bmatrix}C & CA\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}$

$\det N=\alpha_2\neq 0$

满足： $\alpha_2\neq 0$

$\alpha_1+\alpha_2\neq\alpha_3+\alpha_4$

（3） $M=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\beta_3 & 2\beta_2-8\beta_3\\ \beta_2 & 1-3\beta_3 & -3\beta_2+14\beta_3\\ \beta_3 & \beta_2-4\beta_3 & 1-4\beta_2+13\beta_3\end{bmatrix}$$

所以能控当且仅当

$\det M=1-4\beta_2+10\beta_3-14\beta_2\beta_3+25\beta_3^2+10\beta_2^3-48\beta_2^2\beta_3+66\beta_2\beta_3^2-\beta_2^2+24\beta_3^3\neq 0$

$$N=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 13 \end{bmatrix} \det N \neq 0$$

所以完全能观。

3－9 $W(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=1+\dfrac{2s+5}{s^2+4s+3}$

所以其能控标准 I 型为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}^T \quad d=1$$

所以其能观标准 II 型为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}^T \quad b=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad d=1$$

3－11（2）按能控性分解

$$M=\begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det M=0$ 所以 $rankM<3$

$$R_c=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$（第 3 列为保证 $\det R_c\neq 0$）$R_c^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

所以 $\hat{A}=R_c^{-1}AR_c=\begin{bmatrix}0&-1&-4\\1&-2&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$$\hat{b}=R_c^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}^T$$

$$c=cR_c=\begin{bmatrix}1&-1&-1\end{bmatrix}$$

3－14（2）

法一：

解：首先，将$W(s)$化成严格的真有理分式函数，并写出相应的能控标准型

$$W(s)=\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix}s^2&s\\s&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

可得$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0$

$$\beta_0=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\beta_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

于是得到能控标准型的各系数矩阵：

$$A_c=\begin{pmatrix}0_r & I_r & 0_r\\0_r & 0_r & I_r\\-\alpha_0 I_r & -\alpha_1 I_r & -\alpha_2 I_r\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B_c=\begin{pmatrix}0_r\\0_r\\I_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$C_c=\begin{bmatrix}\beta_0&\beta_1&\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

第二步：判别该能控标准型实现的状态是否完全能观测。

$$N=\begin{bmatrix}C_c\\C_cA_c\\C_cA_c^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$ 于是

$Rank(N)=3<6$，所以该能控标准型实现不是最小实现。为此必须按能观性进行

结构分解。

第三步，构造变换矩阵R_o^{-1}，将系统按能观性进行结构分解。取

$$R_o^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}，求得$$

$$R_o=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&-1\\1&0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是

$$\hat{A} = R_o^{-1} A R_o = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = R_o^{-1} B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C R_o = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经检验

$\sum=\left(\hat{A}_{11} \quad \hat{B}_1 \quad \hat{C}_1\right)$是能控且能观的子系统，

因此$W(s)$的最小实现为：

$$A_m=\hat{A}_{11}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, B_m=\hat{B}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$C_m=\hat{C}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

法二：

解：首先，将$W(s)$化成严格的真有理分式函数，并写出相应的能观标准型

$$W(s)=\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix}s^2&s\\s&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

可得$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0$

$$\beta_0=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}, \beta_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \beta_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

于是得到能控标准型的各系数矩阵：

$$A_o=\begin{pmatrix}0_m & 0_m & -\alpha_0 I_m\\ I_m & 0_m & -\alpha_1 I_m\\ 0_m & I_m & -\alpha_2 I_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$B_0=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&1\\1&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$C_o=\begin{bmatrix}0_m & 0_m & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

第二步：判别该能观标准型实现的状态是否完全能控。

$$M=\begin{bmatrix} B_o & A_oB_o & A_o^2B_o \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 于 是

$rankM=3<6$，所以该能观标准型实现不是最小实现。为此必须按能控性进行结构分解。

第三步，构造变换矩阵 R_c^{-1}，将系统按能控性进行结构分解。取

$$R_c=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ， 求 得

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $\hat{A} = R_c^{-1} A_o R_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{B} = R_c^{-1} B_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C_o R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经检验

$\sum=\left(\hat{A}_{11} \quad \hat{B}_1 \quad \hat{C}_1\right)$是能控且能观的子系统，

因此$W(s)$的最小实现为：

$$A_m = \hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_m = \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_m = \hat{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

本章问题：

1． $M=\left[b \quad Ab\cdots \quad A^{n-1}b\right]$，$n$的确定（维数应为 A 阶数）。

2．矩阵、向量写法的区分。

3．3-3（3）β_2、β_3讨论较复杂。

第四章 作业

参考答案

4-1．1）$Q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 设

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$代入求得$\Delta_1=-1<0$

$\Delta_2=2>0$ $\Delta_3=-17.75<0$

因为 i 为偶数 $\Delta_2=2>0$，i 为奇数

$\Delta_1=-1<0$ $\Delta_3=-17.75<0$，所以$Q(\boldsymbol{x})$

是负定的

2）$Q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=1>0$ $\Delta_2=3>0$ $\Delta_3=-16<0$

所以$Q(\boldsymbol{x})$不定符号

4-2

法一：

系统的特征方程为：

$$\left|\lambda I - A\right| = \lambda^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

系统大范围渐近稳定等价于方程有两个负实部的共轭复特征值或两个负实特征值，于是可以得到

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} < 0 \\ \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \end{cases}$$

法二：

设对称阵 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12} \\ \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{22} \end{bmatrix}$，设 $Q = I$

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2(a_{11}P_{11} + a_{21}P_{12}) = -1$$

$$(a_{11} + a_{21})P_{12} + a_{21}P_{11} + a_{21}P_{22} = 0$$

$$2(a_{12}P_{12} + a_{21}P_{22}) = -1$$

所以$P_{11}=-\dfrac{|A|+{a_{21}}^{2}+{a_{22}}^{2}}{2t_rA|A|}$

$$P_{22}=-\frac{|A|+{a_{11}}^{2}+{a_{12}}^{2}}{2t_rA|A|}$$

$$P_{12}=-\frac{a_{11}a_{22}+a_{21}a_{11}}{2t_rA|A|}$$

其中t_rA　A阵的迹

$t_rA=a_{11}+a_{22}$主对角线元素之和

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

判别P的正定性：若P正定则：

$P_{11}>0$　　　$P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}>0$

由

$$P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}=\frac{(|A|+{a_{21}}^{2}+{a_{22}}^{2})(|A|+{a_{11}}^{2}+{a_{12}}^{2})}{4{t_r}^{2}A|A|^{2}}-\frac{(a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11})^{2}}{4{t_r}^{2}A|A|^{2}}$$

$$=\frac{(a_{11}+a_{12})^{2}+(a_{12}-a_{21})^{2}}{4{t_r}^{2}A|A|}>0$$

所以$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$

再由$P_{11}>0$，因为$|A|>0$

所以$t_r A < 0$

即$a_{11} + a_{22} < 0$

渐近稳定充分条件：$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$

$a_{11} + a_{22} < 0$

4-3（1）选$v(\boldsymbol{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$，平衡点$x_e = 0$

$v(\boldsymbol{x}) > 0$

$\dot{v}(\boldsymbol{x}) = -2x_1^{\ 2} - 6x_2^{\ 2} + 6x_1x_2 = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$

$P = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = P_{11} < 0$

$\Delta_2 = 3 > 0$

因为i为奇数$\Delta_i < 0$ i为偶数$\Delta_i > 0$，所以P负定。

$\dot{v}(\boldsymbol{x}) < 0$渐近稳定

当$\|x\| \to \infty$ $v(\boldsymbol{x}) \to \infty$所以大范围渐近稳定

或按 $A^T P + PA = -Q$ 取$Q = I$

$P=\begin{bmatrix}\frac{7}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$ $\Delta_1>0$ $\Delta_2>0$ 所以P渐近稳定

（2）$v(\boldsymbol{x})=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$

$\dot{v}(\boldsymbol{x})=-2(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2})<0$ 当 $\|x\|\to\infty$ $v(\boldsymbol{x})\to\infty$所以大范围渐近稳定

或按$A^TP+PA=-Q$ $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

问题： 4-2 讨论对取$v(\boldsymbol{x})=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$，

$\Delta_1=x_1$，$\Delta_2=x_2$不对。

第五章 作业

参考答案

5-2．解法 1：（1）

$$M=\left[b,Ab,A^2b\right]=\begin{bmatrix}0&0&10\\0&10&-110\\10&-100&990\end{bmatrix},$$

$rankM=3$满秩

可以任意极点配置

（2）设$K=\begin{bmatrix}k_0 & k_1 & k_2\end{bmatrix}$

$$f(\lambda)=\det\left[\lambda I-(A+bk)\right]=\lambda^3+(11-10k_2)\lambda^2+(11-10k_1-10k_2)\lambda-10k_0$$

$$f^*(\lambda)=(\lambda+10)(\lambda+1+j\sqrt{3})(\lambda+1-j\sqrt{3})$$

$$=\lambda^3+12\lambda^2+24\lambda+40$$

解之：$K=\begin{bmatrix}-4 & -1.2 & -0.1\end{bmatrix}$

解法 2：（1）

$$M=\left[b,Ab,A^2b\right]=\begin{bmatrix}0&0&10\\0&10&-110\\10&-100&990\end{bmatrix},$$

$rankM=3$满秩

可以任意极点配置

（2）化为能控标准 I 型

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + 11\lambda^2 + 11\lambda$$

$$\alpha_0 = 0 \qquad \alpha_1 = 11 \qquad \alpha_2 = 11$$

$$T_{cI} = \begin{bmatrix} A^2b & Ab & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -110 & 10 & 0 \\ 990 & -100 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ 11 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \quad T_{cI}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{cI} = T_{cI}^{-1} A T_{cI} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = T_{cI}^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

（2）加入$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}_0 & \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \end{bmatrix}$

所以$\bar{A} + \bar{b}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \bar{k}_0 & \bar{k}_1 - 11 & \bar{k}_2 - 11 \end{bmatrix}$

所以

$$f(\lambda)=\lambda^3-(\bar{k}_2-11)\lambda^2-(\bar{k}_1-11)\lambda-\bar{k}_0$$

$$f^*(\lambda)=\lambda^3+12\lambda^2+24\lambda+40$$

所以$\bar{K}=\begin{bmatrix}-40 & -13 & -1\end{bmatrix}$

（3）$K=\bar{K}T_c^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & -1.2 & -0.1\end{bmatrix}$

5-5（1）$M=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

$\det M\neq 0$ $RankM=3$所以系统通过状态反馈能镇定。

5-8(1) $c_1A^0B=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix};c_2A^0B=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$

$c_2A\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$

$\det E=\det\begin{pmatrix}c_1A^0B\\ c_2A\ B\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0$;

所以系统不能用状态反馈实现解耦。

5-10

<u>法一</u>:

(1) 检验能观性

因 $N=\begin{pmatrix} c \\ cA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

满秩，系统能观， 可构造观测器。

(2) 将系统化成能观标准 II 型:

系统特征多项式为

$\det[\lambda I-A]=\lambda^2;$

$a_0=a_1=0;L=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

$T^{-1}=LN=L;T=L;$于是

$\dot{\bar{x}}=T^{-1}AT\bar{x}+T^{-1}bu=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u;$

$y=cT\bar{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\bar{x}$

(3) 引入反馈阵 $\bar{G}=\begin{pmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{pmatrix}$,得观测器特征多项式:

$$f(\lambda)=\det\left[\lambda I-(\bar{A}-\bar{G}\bar{c})\right]=\det\begin{pmatrix}\lambda & \bar{g}_1\\ -1 & \lambda+\bar{g}_2\end{pmatrix}$$

$$=\lambda^2+\bar{g}_2\lambda+\bar{g}_1$$

(4) 根据期望极点得期望特征多项式:

$$f^*(\lambda)=(\lambda+r)(\lambda+2r)=\lambda^2+3r\lambda+2r^2$$

(5) 比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各项系数得:

$$\bar{g}_1=2r^2;\quad \bar{g}_2=3r \text{ 即 } \bar{G}=\begin{pmatrix}2r^2\\ 3r\end{pmatrix}$$

反变换到 x 状态下:

$$G=T\bar{G}=\begin{pmatrix}3r\\ 2r^2\end{pmatrix}$$

(7) 观测器方程为:

$$\dot{\hat{x}}=(A-Gc)\hat{x}+bu+Gy$$

$$=\begin{pmatrix}-2r & 1\\ -2r^2 & 0\end{pmatrix}\hat{x}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}3r\\ 2r^2\end{pmatrix}y;$$

或者

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + G(y - \hat{y})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\hat{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u + \begin{pmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{pmatrix}(y - \hat{y});$$

法二： (1) 检验能观性

由于系统属于能观I型，显然能观，

于是可构造观测器。

(2)

$$A\text{-}Gc = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 & 1 \\ -g_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = \det[\lambda I - (A\text{-}Gc)]$$

$$=\det\begin{pmatrix} \lambda + g_1 & -1 \\ g_2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + g_1\lambda + g_2$$

与期望特征多项式:

$$f^*(\lambda) = (\lambda + r)(\lambda + 2r) = \lambda^2 + 3r\lambda + 2r^2$$

比较得： $G = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{pmatrix}$

5-12

(1) 由于系统属于能观 I 型,所以能观,故存在状态观测器，且 rank c = 1

(2) 构造变换阵作线性变换，设

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} c_0 \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b}=T^{-1}b=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}=cT=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由于状态分量$\bar{x}_3$可由$\bar{y}$直接提供,故只需设计二维状态观测器。

(3) 引入$\bar{G}=\begin{pmatrix}\bar{g}_1\\ \bar{g}_2\end{pmatrix}$得观测器特征多项式:

$$f(\lambda)=\det\left[\lambda I-(\bar{A}_{11}-\bar{G}\bar{A}_{21})\right]=$$

$$\det\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{g}_1\\ \bar{g}_2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\det\begin{pmatrix}\lambda & \bar{g}_1\\ -1 & \lambda+\bar{g}_2\end{pmatrix}=\lambda^2+\bar{g}_2\lambda+\bar{g}_1$$

期望特征多项式为

$$f^*(\lambda)=(\lambda+4)(\lambda+5)=\lambda^2+9\lambda+20$$

(5) 比较$f(\lambda)$与$f^*(\lambda)$各项系数得:

$$\bar{g}_1=20;\quad \bar{g}_2=9\quad 即\bar{G}=\begin{pmatrix}20\\ 9\end{pmatrix}$$

(6) 可得观测器方程:

$$\dot{\hat{w}} = (\bar{A}_{11} - \bar{G}\bar{A}_{21})\hat{x}_1 + (\bar{A}_{12} - \bar{G}\bar{A}_{22})\bar{y} + (\bar{B}_1 - \bar{G}\bar{B}_2)u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}\hat{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u;$$

$$\hat{x}_1 = \hat{w} + \bar{G}\bar{y} = \hat{w} + \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \end{pmatrix}\bar{y}$$

或得到

$$\dot{\hat{w}} = (\bar{A}_{11} - \bar{G}\bar{A}_{21})\hat{w} + [(\bar{A}_{11} - \bar{G}\bar{A}_{21})\bar{G} + (\bar{A}_{12} - \bar{G}\bar{A}_{22})]\bar{y}$$

$$+(\bar{B}_1 - \bar{G}\bar{B}_2)u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}\hat{w} + \begin{pmatrix} -180 \\ -61 \end{pmatrix}\bar{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u;$$

$$\hat{x}_1 = \hat{w} + \bar{G}\bar{y} = \hat{w} + \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \end{pmatrix}\bar{y}$$

经 线 性 变 换 后 的 状 态 估 计 值 为 ：

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w} + \bar{G}y_1 \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\bar{y}$$

$$=\begin{pmatrix} \bar{w}_1+20\bar{y} \\ \bar{w}_2+9\bar{y} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

(7) 为得到原系统的状态估计， 还要作如下变换：

$$\dot{x}=T\hat{x}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{w}_1+20\bar{y} \\ \bar{w}_2+9\bar{y} \\ \bar{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{w}_2+9\bar{y} \\ \bar{w}_1+20\bar{y} \end{pmatrix}$$