

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

2-6 题解:

$$\rho = le^{\varphi k}$$

$$(1) \quad v_{\rho} = le^{\varphi}, \quad v_{\varphi} = \frac{l}{k} e^{\varphi}$$

$$a_{\rho} = le^{\varphi} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad a_{\varphi} = 2 \frac{l}{k} e^{\varphi}$$

$$\rho = l(1 + \cos \varphi)$$

$$v_{\rho} = -l\omega \sin \omega t, \quad v_{\varphi} = l\omega(1 + \cos \omega t)$$

$$(2) \quad a_{\rho} = -l\omega^2(1 + 2\cos \omega t)$$

$$a_{\varphi} = -2l\omega^2 \sin \omega t$$

$$\rho = l\sqrt{2\cos 2\varphi}$$

$$v_{\rho} = \frac{-l\sin t}{\sqrt{2\cos t}}, \quad v_{\varphi} = \frac{l}{2}\sqrt{2\cos t}$$

$$(3) \quad a_{\rho} = -l(1 + 2\cos^2 t)(2\cos t)^{-3/2},$$

$$a_{\varphi} = -l\sin t / \sqrt{2\cos t}$$

$$\rho = l(\sin \varphi \cdot \lg \varphi - \cos \varphi)$$

$$(4) \quad v_{\rho} = \frac{lt(t^2 + 3)}{(t^2 + 1)^{3/2}}, \quad v_{\varphi} = \frac{t^2 - 1}{(1 + t^2)\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$a_{\rho} = \frac{4l(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^{5/2}}, \quad a_{\varphi} = \frac{8lt}{(1 + t^2)^{5/2}}$$

2-5 题解: 由题意可知: $OB = \sqrt{x^2 + H^2}$

$\therefore$ 吊桶上升运动: $S = OB - H = \sqrt{x^2 + H^2} - H$

将 $x = V_b t$ 代入并对 S 求时间导数

$$\begin{aligned} V_A = \dot{S} &= \frac{d}{dt}(\sqrt{x^2 + H^2} - H) = \frac{d}{dt}(\sqrt{(V_b t)^2 + H^2} - H) \\ &= \frac{V_b^2 t}{\sqrt{(V_b t)^2 + H^2}} = \frac{V_b \cdot x}{\sqrt{x^2 + H^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{加速度 } a_A &= \frac{dV_A}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_b^2 t}{\sqrt{(V_b t)^2 + H^2}} \right) \\ &= \frac{V_b^2 \sqrt{x^2 + H^2} - \frac{V_b^2 x^2}{\sqrt{x^2 + H^2}}}{x^2 + H^2} = \frac{V_b^2 H^2}{(x^2 + H^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

2-14 题解: 由 $a = -f(t)$ 并设初速度为 v_0

则

$$v(t) = v_0 - \int_0^t f(t) dt$$

$$v(T) = v_0 - \int_0^T f(t) dt = 0$$

$$ds = v \cdot dt$$

$$\therefore s = \int_0^T \left[v_0 - \int_0^t f(t) dt \right] dt$$

$$= v_0 T - \int_0^T \left(\int_0^t f(t) dt \right) dt$$

而 $\int_0^T \left[\int_0^t f(t) dt \right] dt$ 采用分步积分法,

$$\int_0^T \left(\int_0^t f(t) dt \right) dt = t \int_0^t f(t) dt \Big|_0^T - \int_0^T t \cdot d \left(\int_0^t f(t) dt \right)$$

$$s = v_0 T - t \int_0^t f(t) dt \Big|_0^T + \int_0^T t \cdot a \left(\int_0^t f(t) dt \right)$$

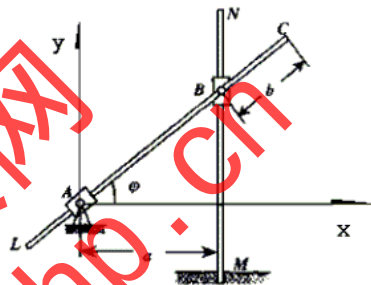
$$v_0 T - T \int_0^T f(t) dt = (v_0 - \int_0^T f(t) dt) \cdot T$$

$$= v(T) \cdot T = 0$$

$$\therefore s = \int_0^T t \cdot f(t) dt$$

2-15 题解:

建立图示参考坐标系 Axy 。写出 C 点的运动规律为:



$$x_c = b \cos \varphi + a = b \cos \omega t + a$$

$$y_c = b \sin \varphi + atg \varphi = b \sin \omega t + atg \omega t$$

C 点的速度 v_x , v_y 分别为:

$$v_x = \dot{x}_c = -b\omega \sin \omega t$$

$$v_y = \dot{y}_c = b\omega \cos \omega t + a\omega / \cos^2 \omega t$$

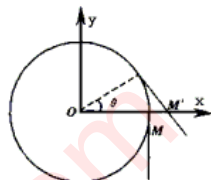
C 点的加速度 a_x , a_y 分别为:

$$a_x = \ddot{x}_c = -b\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \ddot{y}_c = (-b\omega^2 + 2a\omega^2 / \cos^3 \omega t) \sin \omega t$$

2-16. 解: 设此固定轮的半径为 R .
初始位于 x 轴上 $(R, 0)$, 任一时刻 M 点的坐标为 (x, y)

当圆心角为 θ 时, 利用渐开线公式, 易得:



$$\begin{cases} x = \frac{R}{\cos \theta} - (R \tan \theta - R \theta) \sin \theta = R \cos \theta + R \theta \sin \theta \\ y = R \sin \theta - R \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= \left(\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[(R \cos \theta)^2 + (R \theta \sin \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = R \theta \end{aligned}$$

$$S = \int_0^{\theta} R \theta d\theta = \frac{1}{2} R \theta^2$$

$$\text{即: } S(\theta) = \frac{1}{2} R \theta^2$$

2-17 题解:

设上岸地在距 A 处 x 公里的 E 处。

由 A 处出发经 E 到 B 处用时为 T

$$T = \frac{x}{5.4} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + 9^2}}{4.32} = T(x)$$

$$l = \sqrt{41^2 + 9^2}$$

求最少用时, 即求 T 的最小值

$$\frac{dT}{dx} = 0, \quad \frac{4.32}{5.4} = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + 9^2}}$$

求得:

$$x = 28 \text{ 公里处.}$$

2-20 题解:

$\therefore A, B$ 两点在垂直于 AB 连线的速度分量是相等的。
 $\therefore AB$ 之间的连线始终平行于原来的连线。

A 沿直线运动, 即 φ_1 恒定 (V_1, V_2 恒定)

又 $\therefore V_1 \sin \varphi_1 = V_2 \sin \varphi_2 \quad \therefore \varphi_2$ 恒定

即 B 也一定沿直线运动。

$$B \quad \begin{cases} x_B = V_2 \sin \varphi_2 \cdot t \\ y_B = V_2 \cos \varphi_2 \cdot t \end{cases} \quad t=0 \text{ 时 } s_B = 0$$

$$\therefore \frac{ds_B}{dt} = (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2)^{\frac{1}{2}} = V_2 \quad \therefore s = \int_0^t V_2 dt = V_2 t$$

对于 $A \quad \begin{cases} x_A = V_1 \sin \varphi_1 t \\ y_A = V_1 \cos \varphi_1 t \end{cases}$

$$\therefore AB = r_0 + y_A - y_B = r_0 + V_1 t \cos \varphi_1 - V_2 t \cos \varphi_2$$

$$AB = 0 \quad \text{时相遇} \quad \text{此时 } y_B = r_0 + y_A$$

$$\text{即 } V_2 t \cos \varphi_2 = V_1 t \cos \varphi_1 + r_0$$

$$\therefore t = \frac{r_0}{V_2 \cos \varphi_2 - V_1 \cos \varphi_1}$$

2-35 题解

解。当小球以高 H 处滑下时, 小球在 D 点的速度为 v

$$\text{则由动能定理} \quad mgH = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

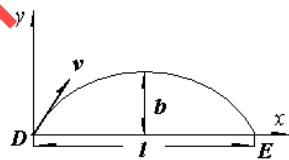
$\therefore$ 要求最小高度 H , 应使 v 最小而使小球正好落在 E 点,

以 D 为原点, DE 为 x 轴建立坐标

系如图示。

由几何关系, $\vec{v}$ 与 x 轴的夹角为 45°

$$\therefore \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}v(\vec{i} + \vec{j})$$



$$\text{设经 } t \text{ 秒由 } D \text{ 到 } E, \text{ 则 } \frac{t}{2} \text{ 时 } v_y = 0, \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}v = g \frac{t}{2} \quad (2)$$

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2}vt \quad (3)$$

$$b = \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad (4)$$

连立求解 (1), (2), (3), (4) 可得

$$H_{\min} = \frac{1}{2}l = 20 \text{ cm}$$

$$h = b = \frac{1}{4}l = 10 \text{ cm}$$

2-38 题解

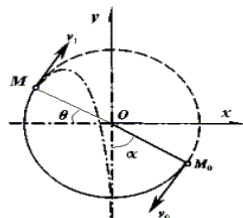
解 (1) 建立 Oxy 坐标系, 利用机械能守恒 (绳的拉力与运动方向垂直, 不做功) 可得

$$-mgR(\sin\theta + \cos\alpha) = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

$$mg\sin\theta = \frac{mv_1^2}{R}$$

解方程组, 得 $v_1 = 1.57 \text{ m/s}$, $\theta = 30^\circ$

M 点的坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$



(2) 之后, 小球以初速度 v_1 作斜上抛运动, 一直到小球到达最低点, 绳子又重

新拉直. 设当小球运动到任一位置 (x, y) 有

$$x = x_0 + v_1 \sin\theta \cdot t = -R \cos\theta + v_1 \sin\theta \cdot t$$

$$y = y_0 + v_1 \cos\theta - \frac{1}{2}gt^2 = R \sin\theta + v_1 \cos\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\begin{cases} x = -0.433 + 0.783t \\ y = 0.250 + 1.356t - 4.900t^2 \end{cases}$$

走完这段轨迹时 $x^2 + y^2 = R^2 = 0.25$

将轨迹方程代入求得 $t = 0.55 \text{ (s)}$.

或取 M 点为新坐标原点, 在 Mxy 坐标系中描写以后的运动:

$$x = v_1 \sin\theta \cdot t$$

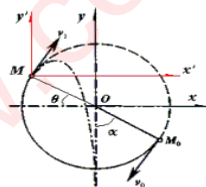
$$y = v_1 \cos\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

老坐标的原点为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}l, -\frac{l}{2})$, 当绳子再拉直的时候一定在圆上, 有

$$(x - \frac{\sqrt{3}}{2}l)^2 + (y + \frac{l}{2})^2 = l^2$$

代入 x, y 并利用 $t \neq 0$ 得: $\frac{1}{2}gt^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_1gt + (v_1^2 - \frac{1}{2}gl) = 0$

解得 $t = 5.5$



2-36 题解

解. 建立如图所示的坐标系

$$\overline{AB} = \frac{\pi}{2}R = \frac{\pi}{2} \times 20 = 10\pi \text{ cm}$$

$$BM = l - \overline{AB} = 36.9 \text{ cm}$$

$t = 0$ 时, M 点的初位置

$(36.9 \text{ cm}, -20 \text{ cm}) \quad v = 0$

当转动角度为 α 时, M 点坐标

$$\begin{cases} x = (R\alpha + 36.9)\cos\alpha - R\sin\alpha \\ y = -(R\alpha + 36.9)\sin\alpha - R\cos\alpha \end{cases}$$

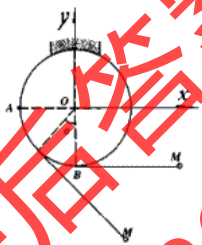
$\therefore \alpha = 60^\circ$ 即 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 代入得

$$\begin{cases} x = 11.58 \text{ cm} \\ y = -60.06 \text{ cm} \end{cases}$$

在此过程中只有重力做功, 机械能守恒

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y) = mg(-20 + 60.06) \times 10^{-2}$$

$$v = 2.83 \text{ m/s}$$



3.2 解

- (a) 刚体 B 既受到绳的柔性约束, 又受到墙壁的面约束, 同时刚体 B 上各质点之间存在着刚性约束; 其特征是: 柔性约束不可伸长、刚性约束两点间距离不变、面约束是面接触。
- (b) 杆 BE 既受到绳 AB 的柔性约束, 又受到点 E 的柱铰链约束, 同时杆 BE 上各质点之间存在着刚性约束, 其特征是: 柔性约束不可伸长、刚性约束两点间距离不变、柱铰链约束限制杆 BE 在 BDE 平面内运动; 刚体 D 只受到绳的柔性约束, 同时刚体 D 上各质点之间存在着刚性约束, 其特征是柔性约束不可伸长、刚性约束两点间距离不变。
- (c) 杆 BE 既受到墙角 E 的点约束和刚体 A 的线约束, 又受到点 B 的球铰链约束, 同时杆 BE 上各质点之间存在着刚性约束, 其特征是: 点约束是点接触、线约束是线接触、球铰链约束限制杆的自由端只能在以 B 为中心以杆长为半径的球面上的运动。刚性约束是杆上两点间距离不变; 刚体 A 受到杆 BE 的线约束和墙壁的面约束, 同时刚体 A 上各质点之间存在着刚性约束, 其特征是: 线约束是线接触、面约束是面接触、刚性约束两点间距离不变。
- (d) 质点 D 只受到绳的柔性约束, 其特征是不可伸长; 动滑轮只受到绳的线约束, 其特征是线接触。定滑轮既受到绳的线约束又受到点 E 的柱铰链约束, 其特征是: 线约束是线接触、柱铰链约束限制滑轮在某一平面内运动; 同时作为刚体, 两滑轮上各质点间存在刚性约束, 其特征是两点间距离不变。

3.4 解

- 注: 1, 每一自由刚体在平面内有三个自由度;
2, 平面内两个刚体有一公共节点, 则存在两个约束方程
3, 每一铰链约束对刚体有两个约束方程
- 本系统有三个刚体, 若不考虑约束, 系统有 9 个自由度, 实际上系统受到两个铰链约束, 两个节点, 故系统有 $9 - 2 \times 2 - 2 \times 2 = 1$ 个自由度, 其广义坐标可选择 AC 和 AB 的连线的夹角 α 。

3.6 解

系统共有三个刚体, 若不考虑约束系统有 9 个自由度, 实际上系统受到一个铰链约束、两个节点约束、滑块受到一个位移约束和一个转动约束, 故系统有 $9-2-2 \times 2-1-1=1$ 个自由度, 其广义坐标可选择 OA 与水平线的夹角 α 。

3.12 解

如图所示, 将 V_B 在 OB 以及在与 OB 垂直的方向分解, 有

$$V_B \sin \varphi = \omega \cdot OB$$

$$OB = h / \sin \varphi$$

$$\therefore \omega = v \sin^2 \varphi / h = \frac{1}{9} \sin^2 \varphi \quad (1/s)$$

$$\begin{aligned} \therefore \varepsilon = \dot{\omega} &= v^2 \sin 2\varphi \sin \varphi / h^2 \\ &= \sin^2 \varphi \sin 2\varphi / 81h^2 \quad (1/s^2) \end{aligned}$$

3.15 解

如图, 设 $\angle OCB = \theta$, 并以 CB 与 CO 重合时 θ 为零, 有

$$r / \sin \varphi = h / \sin(\pi - \theta - \varphi)$$

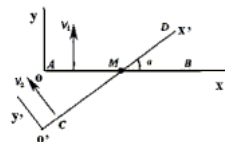
$$\Rightarrow r / \sin \varphi = h / \sin(\theta + \varphi)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = r \sin \theta / (h - r \cos \theta)$$

$$\text{又 } \theta = \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{r \sin \theta}{h - r \cos \theta} \right]$$

3-19. 解: 建立固连在 AB 杆上的平动坐标系 xOy
固连在 CD 杆上的平动坐标系 $x'O'y'$, 在 xOy 中



$\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_1 + \vec{V}_r$, 在 $x'O'y'$ 中

$$\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_2 + \vec{V}_r'$$

$$\text{即 } \vec{V}_1 + \vec{V}_r = \vec{V}_2 + \vec{V}_r'$$

在 Oy , Ox 方向上投影, 得

$$V_1 = V_2 \cos \alpha + V_r' \sin \alpha \quad (1)$$

$$V_r = V_r' \cos \alpha - V_2 \sin \alpha \quad (2)$$

由(1)式, 可得 $V_r' = -(V_2 \cos \alpha - V_1) / \sin \alpha$

$$\therefore \vec{V}_M = \vec{V}_2 + \vec{V}_r' = \vec{V}_2 - \vec{V}_2 \cot \alpha + \frac{\vec{V}_1}{\sin \alpha}$$

$$V_M = \sqrt{(\vec{V}_2)^2 + (\vec{V}_r')^2} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \alpha}$$

设 V_M 与 x' 轴的夹角为 β , 则 $\sin \beta = \frac{V_2}{V_M}$

3.16 解

解: 任一瞬时两轮啮合处总有 $v_1 = v_2$

$$\Rightarrow \omega_1 r = \omega_2 R$$

$$\text{又 } \omega_1 = \omega_0 + \varepsilon_1 t$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{(\omega_0 + \varepsilon_1 t) r}{R}$$

3-21 题解:

P 点沿直线 AB 运动为定系中的运动 V_p . P 点相对圆环的运动 V_r , 如

右图, 设 OP 的长度为 2d 如

右图, 建立定轴转动坐标系 $x'O'y'$ 则 P 点运动

$\vec{V}_p = \vec{V}_e = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ 沿 OP 和垂直 OP 方向投影有:

$$V_p = V_r \sin \alpha, \quad V_e = V_r \cos \alpha$$

$$V_r = \frac{V_e}{\cos \alpha} = \frac{2d\omega}{r/d} = 2r\omega$$

$$V_p = V_r \sin \alpha = 2r\omega \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r} = 2\omega \sqrt{r^2 - d^2}$$

下面求 P 点的加速度 $\vec{a}_p$,

$$\vec{a}_p = \vec{a}_e + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{rt} + \vec{a}_k$$

$$a_{rn} = \frac{V_r^2}{r}, \quad a_k = 2\omega V_r = 4r\omega^2$$

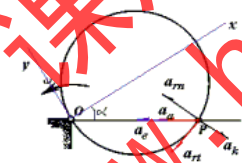
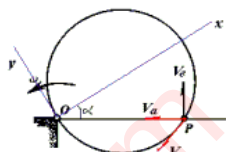
沿垂直 OP 方向投影有:

$$\therefore 0 = a_m \sin \alpha + a_{rt} \cos \theta - a_r \sin \theta \Rightarrow a_{rt} = 0$$

沿 OP 方向投影有:

$$a_p = a_e + a_m \cos \alpha - a_k \cos \alpha, \quad \Rightarrow a_p = a_e = 2d\omega^2$$

$$a_r = \sqrt{a_{rn}^2 + a_{rt}^2} = 4r\omega^2$$



3-27 题解:

平动坐标系 O_1xy 中, 牵连速度

$V_e = V_0$ P 点相对于 O 点作定轴

转动 则 $V_p \perp OP$ 轴. P 点的相

对速度沿 $y = f(x)$ 的切线如图, $OP = l$, 任一时刻 t, P

点所在位置 x 有: $\vec{V}_p = \vec{V}_0 + \vec{V}_r$, $V_p = l\omega$

在水平和竖直方向上投影得

$$\begin{cases} V_p \sin \alpha = -V_0 \cos \beta + V_0 \\ V_p \cos \alpha = V_r \sin \beta \end{cases}$$

$$\sin \alpha = f'(x)/l, \quad \tan \beta = f'(x)$$

$$\sin \beta = f' / \sqrt{f'^2 + 1}, \quad \cos \beta = 1 / \sqrt{f'^2 + 1}$$

代入, 得

$$V_p = V_0 (\cos \alpha \cdot \tan \beta + \sin \alpha)^{-1} = V_0 (\cos \alpha / f' + \sin \alpha)^{-1}$$

$$\omega = \frac{V_p}{l} = \frac{V_0}{l (\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta)}$$

当 $\omega = \omega_0$ 是常数时, 即 $\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta$ 是常数

即 $V_0 / (\omega_0 l) = \sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta$ 恒成立.

$$\left(\frac{V_0}{\omega_0 l} - \sin \alpha \right) \frac{d\alpha}{dx} = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{f}{l}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - f^2}}{l}$$

或

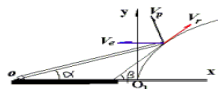
$$\left(\frac{V_0}{\omega_0 l} - \frac{y}{l} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{l^2 - y^2}}{l}$$

$$\therefore \left(\frac{V_0}{\omega_0 \sqrt{l^2 - y^2}} - \frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}} \right) dy = dx$$

$$\text{积分得} \quad \frac{V_0}{\omega_0} \arcsin \frac{y}{l} - \sqrt{l^2 - y^2} = x + c$$

$$f(0) = 0 \text{ 得} \quad c = -l \quad \therefore \text{轮廓方程为}$$

$$\frac{V_0}{\omega_0} \arcsin \frac{y}{l} + \sqrt{l^2 - y^2} - x + l = 0$$



3-33 题解

三角形转过一周用时 $t = \frac{2\pi}{\omega}$, 因为匀速, 所以

$$v_r = \frac{a}{t} = \frac{a\omega}{2\pi} \quad \text{假定从 A 向 B 运动}$$

在 A 点时 $v_e = AO \cdot \omega = \sqrt{2}a\omega$ 方向垂直于 AO

$$\therefore \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e = (v_r + v_e \sin 45^\circ)\vec{r} - v_e \cos 45^\circ \vec{n}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{2}a\omega + \frac{a\omega}{2\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{r} - \frac{a\omega}{2\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{n} \\ &= a\omega \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \right) \vec{r} - \frac{\sqrt{2}a\omega}{4\pi} \vec{n} \end{aligned}$$

$$|\vec{v}| = a\omega \sqrt{2 + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi}} = \frac{a\omega}{2\pi} \sqrt{8\pi^2 + 4\pi + 1}$$

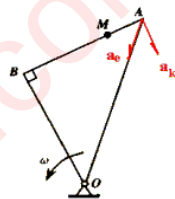
求加速度时, 以 O 为基点求 $\vec{a}_e$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{OA} = -\sqrt{2}a\omega^2 \vec{n}$$

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \Rightarrow |\vec{a}_k| = 2\omega \cdot \frac{a\omega}{2\pi} = a\omega^2 / \pi$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \\ &= -a_k \sin 45^\circ \vec{r} + (a_e + a_k \cos 45^\circ) \vec{n} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} a\omega^2 \vec{r} + a\omega^2 \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right) \vec{n} \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = a\omega^2 \sqrt{2 + \frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{\pi}}$$



3-29 题解: 取定轴转动的动坐标系 xoy

$$V_e = \omega r \quad V_r = \dot{r}$$

$$\therefore \vec{V}_p = \omega r \vec{e}_\varphi + \dot{r} \vec{e}_r \quad \text{又} \because V_p = c \text{ 为一常数}$$

$$\text{即} \quad \omega^2 r^2 + \dot{r}^2 = c^2$$

设 $t=0$ 时 $r=0$, $\dot{r}=c=v_0$

$$\therefore \frac{dr}{\sqrt{c^2 - \omega^2 r^2}} = dt \quad \text{积分得} \quad \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega r}{c} = t + c_2$$

由 $t=0$ 时 $r=0$, $\Rightarrow c_2=0$

$$r = \frac{c}{\omega} \sin \omega t \quad \text{其中} \quad c = v_0 \Rightarrow r = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$\text{由} \quad \tan \varphi = \frac{\omega r}{\dot{r}} = \frac{\omega \frac{c}{\omega} \sin \omega t}{\omega \frac{c}{\omega} \cos \omega t} = \tan \omega t \Rightarrow \varphi = \omega t$$

$\therefore r = \frac{v_0}{\omega} \sin \varphi$ 是 P 点的轨迹方程。

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \\ &= -2v_0 \sin \omega t \vec{e}_r + 2\omega v_0 \cos \omega t \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

是 P 点的加速度

3-35 题解

动系在盘 O_1 上，盘 O_2 边缘上的

点 A 的绝对速度，绝对加速度已知

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

绝对速度 $v_a = \omega_2 r$

(方向垂直于 $O_1 O_2$ 杆向下)，牵连速度 $v_e = (l-r)\omega_1$

方向垂直于 $O_1 O_2$ 杆向下，

$$\therefore v_r = v - v_e = -(l-r)\omega_1 + r\omega_2 = r(\omega_1 + \omega_2) - l\omega_1$$

绝对加速度 $a = \omega_2^2 r$ 方向指向 O_2

牵连加速度 $a_e = \omega_1^2 (l-r)$ 方向指向 O_1

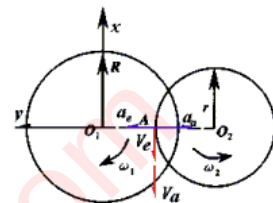
$$a_k = 2\omega_1 v_r = 2\omega_1 [-(l-r)\omega_1 + r\omega_2]$$

设 v_r 的方向与 v_a 相同，即 $\frac{r}{l} > \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$ ， a_k 指向 O_1 ，

由 $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_2 + \vec{a}_k$ 取 $\overrightarrow{O_1 O_2}$ 为正方向

$$a_r = a - a_e - a_k = \omega_2^2 r + \omega_1^2 (l-r) + 2\omega_1 [r\omega_2 - (l-r)\omega_1]$$

$$= \omega_2^2 r - \omega_1^2 (l-r) + 2r\omega_1 \omega_2$$



3-40 解：

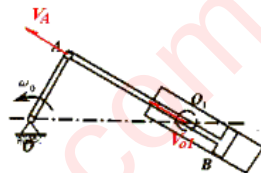
如图示， V_A 垂直于 OA 沿着 AB ，

AB 杆上 O_1 点的速度必沿着 AB ，所以 AB 刚体瞬时平动。

活塞的速度 $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ ，汽缸的角速度等于 AB 杆的角速度。

$$\omega = \omega_{AB} = 0$$

$$V_B = OA\omega_0 = 225 \text{ cm/s}$$



3-42 题解

证明 以观察点为极点, 船 B 的速度 v_B 的方向为极轴, 建立动极坐标系, 因为 v_B 的方向不变, 动系为平动坐标系 $\vec{a}_k = 0$, 又 v_B 作匀直线速航行 $\vec{a}_e = 0$

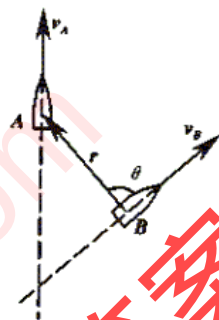
$$\therefore \vec{a}_A = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$$

观察 A 点时, A 船以 v_A 作匀速直线航行 $\vec{a}_A = 0$

$$\therefore \vec{a}_r = 0$$

$$\text{即 } (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\varphi = 0$$

$$\text{于是有 } \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \quad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$



4-1 题解

只要写出 C 点的运动规律 $x_c(t)$, $y_c(t)$ 以及 $\angle OBA$ 的变化规律 $\varphi(t)$ 就是写出了刚体 AB 的运动方程。

$$\because OC = CB = r \quad \therefore \angle COB = \angle CBO$$

$\therefore AB$ 杆平面运动的运动方程

$$\begin{cases} x_c = r \cos \varphi \\ y_c = r \sin \varphi \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \end{cases}$$

4-6 题解:

对两个接触点 A_1 、 A_2 它们绝对速度的大小分别是

$$|v_1| = 6 \text{ m/s} \quad |v_2| = 2 \text{ m/s}$$

以 A_2 为基点分析 A_1 点, A_1 的速度为:

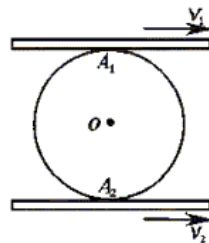
$$v_1 = v_2 + 2a\omega, \quad \therefore \omega = \frac{v_1 - v_2}{2a}$$

以 A_2 为基点分析 O 点

$$v_o = v_2 + a\omega = 4 \text{ m/s}$$

$$\therefore \text{圆柱的角速度 } \omega = \frac{2}{a} \text{ (rad/s),}$$

$$\text{圆柱中心 } O \text{ 的速度 } v_o = 4 \text{ m/s}$$



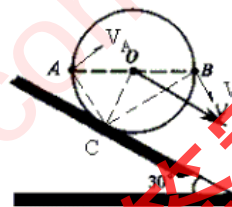
解 4.2 轮子沿斜面滚下, 斜面倾角为 30° , 轮心速度 $v=2\text{m/s}$, 速度瞬心为 C , A , B 点的速度如图示, 设轮半径为 r , 轮子角速度为:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\text{则: } \overline{AC} = r, \quad \overline{BC} = r\sqrt{3}$$

$$V_A = \overline{AC} \cdot \omega, \quad V_B = \overline{BC} \cdot \omega$$

$$V_A = v, \quad V_B = \sqrt{3}v$$

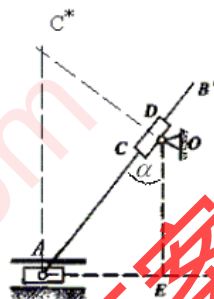


4.10 解：AB 杆在套筒处的速度方向已知，A 点的速度和速度方向已知，可找出瞬心如图，求得 AB 杆的角速度为：

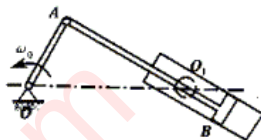
$$AC = \frac{OE}{\sin 60^\circ},$$

$$AC^* = \frac{AC}{\cos 30^\circ} = \frac{OE}{(\cos 30^\circ)^2},$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC^*} = \frac{80}{\frac{4 \times 30}{3}} = 2$$



4-13 解：因为曲柄垂直于连杆，
A 点的速度沿着 AB，而 O_1 处
的速度也是沿着连杆，所以连杆
AB 瞬时平动，



$$\begin{aligned}v_B &= v_A = \overline{OA} \cdot \omega_0 \\&= 15 \times 15 = 225 \text{ cm/s} \\ \omega_{AB} &= 0\end{aligned}$$

4-15 解: 如右图 A_1 的

速度方向为水平向右

$$v_{A_1} = \omega_0 a$$

I 以 ω_0 为角速度

匀速转动时 II 也等角速转动 ω_2

$$\omega_2 r_2 = \omega_0 r_1 \quad \text{即} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0 r_1}{r_2}$$

则 v_{A_2} 也是水平向右 $v_{A_2} = \omega_2 a = \frac{\omega_0 r_1}{r_2} a$

C 点的速度为水平向右 $\alpha = 90^\circ$

对刚杆 $B_1 C B_2$ 由速度投影定理可知 V_{B_1}, V_{B_2} 必水平向右

对刚杆 $A_2 B_2$, 有 $V_{A_2} \cos \theta_1 = V_{B_2} \cos \theta_2$, $\theta_1 = \theta_2$ 可

知 $V_{A_2} = V_{B_2} = \frac{\omega_0 r_1}{r_2} a$, 同理可知 $V_{A_1} = V_{B_1} = \omega_0 a$

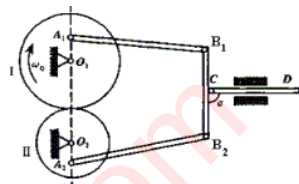
以刚杆 $B_1 C B_2$ 为研究对象,

$$\omega_{B_1 C B_2} = \frac{V_{B_2} - V_{B_1}}{|B_1 B_2|} = \frac{V_{B_2} - V_{B_1}}{|B_1 C| + |C B_2|}$$

又 $\therefore$ $C B_1 = C B_2$ 即

$$V_c = \frac{V_{B_1} + V_{B_2}}{2}$$

$$V_c = \frac{\omega_0 a (r_1 + r_2)}{2 r_2}$$



4-21 由题意可得

$$R\omega - r\omega = V$$

$$R\varepsilon - r\varepsilon = \alpha$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{R-r} \cdot \varepsilon$$

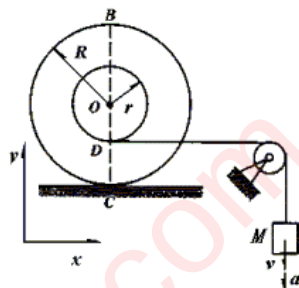
$$= \frac{\alpha}{R-r}$$

$$\vec{\alpha}_o = R\varepsilon \vec{i} = \frac{\alpha R}{R-r} \vec{i}$$

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_o + R\varepsilon \vec{i} - R\omega^2 \vec{j} = \frac{2\alpha R}{R-r} \vec{i} - \frac{Rv^2}{(R-r)^2} \vec{j}$$

$$\vec{\alpha}_o = \vec{\alpha}_o - R\varepsilon \vec{i} + R\omega^2 \vec{j} = \frac{Rv^2}{(R-r)^2} \vec{j}$$

$$\vec{\alpha}_o = \vec{\alpha}_o - r\varepsilon \vec{i} + r\omega^2 \vec{j} = \alpha \vec{i} + \frac{rv^2}{(R-r)^2} \vec{j}$$



4-22 解：

不失一般性，设 AB 两点间的距离为 L，AB 两点的速度有图示两种情况，即在 AB 的同侧和 AB 的不同侧两种情况，C 为瞬心。

对 (a) 种情况：

设 $CA = l_1$, $CB = l_2$

$$\omega = (V_2 \sin \alpha_2 - V_1 \sin \alpha_1) / \overline{AB}$$

$$= (V_2 \sin \alpha_2 - V_1 \sin \alpha_1) / L$$

$$l_1 \cos \alpha_1 = h$$

$$l_2 \cos \alpha_2 = h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}$$

$$l_2 \sin \alpha_2 - l_1 \sin \alpha_1 = L$$

同理对 (b) 有

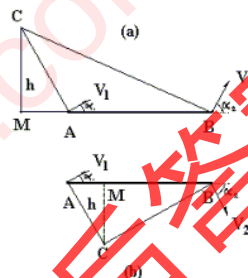
$$\omega = (V_2 \sin \alpha_2 + V_1 \sin \alpha_1) / \overline{AB}$$

$$= (V_2 \sin \alpha_2 + V_1 \sin \alpha_1) / L$$

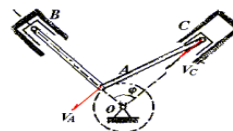
$$l_1 \cos \alpha_1 = h$$

$$l_2 \cos \alpha_2 = h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L}{\tan \alpha_2 + \tan \alpha_1}$$

$$l_2 \sin \alpha_2 + l_1 \sin \alpha_1 = L$$



4-24. 解：由题意，当 $\angle AOC = \varphi = 90^\circ$ 时，整个装置如右图所示 A 点在 OB 上，($\because \angle BOC = 90^\circ$) C 点



速度沿着 OC 轴线， V_A 垂直

于 AO 可知 $V_A \parallel V_C$ ，即 $V_A \cos \alpha = V_C \cos \alpha$

$$\therefore V_C = V_A = \omega_0 \cdot AO = 10 \times 0.1 = 1 \text{ m/s}$$

以 A 点作为基点，则 $\overline{V_C} = \overline{V_A} + \omega_{AC} \times \overline{AC}$ 且 $\overline{V_A} = \overline{V_C}$

$$\omega_{AC} = 0$$

先下面分析 C 点的加速度

$$\sin \alpha = \frac{AO}{AC} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\overline{a_C} = \overline{a_A} + \overline{\varepsilon_{AC}} \times \overline{AC} + \overline{\omega_{AC}} \times (\overline{\omega_{AC}} \times \overline{AC})$$

$$= \overline{a_A} + \overline{\varepsilon_{AC}} \times \overline{AC}$$

沿着 AC 杆的方向分解，得 $a_C \cos \alpha = a_A \sin \alpha$

$$a_C = a_A \tan \alpha = a_A \tan \frac{\pi}{4} = a_A = \omega_0^2 r = 10 \text{ m/s}^2$$

V_B 沿着 AB 杆， $V_A \perp AB$ 杆，由速度投影定理，

可知 $V_B = 0$ 即 AB 杆的速度瞬心是 B

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{\omega_0 AO}{AB} = 5\sqrt{2} \text{ rad/s}$$

以 A 为基点分析 B 点的加速度

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{\varepsilon_{AB}} \times \overline{AB} + \overline{\omega_{AB}} \times (\overline{\omega_{AB}} \times \overline{AB})$$

沿着 AB 杆的方向分解，得

$$a_B = a_A + \omega_{AB}^2 \overline{AB}$$

$$= 10 + (5\sqrt{2})^2 \times 10\sqrt{2} \times 10^{-2} = (10 + 5\sqrt{2}) \text{ m/s}^2$$

4-26 解: BE 刚体平动, 只要求 B 点的速度和加速度即可。

先分析 BCD 刚体如图, 由 B, D 处的速度方向已知可求的瞬心 C*, 因此可决定 C 处的速度 V_C 方向, 由 A 点的速度大小和方向已知, AC 刚体, 利用速度投影定理可求得 V_C 的大小

$$V_A \cos 30^\circ = V_C \cos 60^\circ$$

$$V_C = 2V_A \cos 30^\circ$$

$$\omega_{AC} = (V_C \cos 30^\circ - V_A \sin 30^\circ) / \overline{AC}$$

由 V_C 可求得 BCD 杆得角速度 ω_{BD} , 也就可求得 B 点的速度 V_B

$$\omega_{BD} = \frac{V_C}{CC^*}, \quad V_B = \omega_{BD} \cdot C^*B$$

由几何关系可得: $\overline{CC^*} = 2r$, $\overline{C^*B} = 2\sqrt{3}r$

加速度分析, 以 A 为基点分析 C 点和在套筒上建立的极坐标分析 C

$$\dot{\rho} = -V_B \sin 30^\circ = -V_C \sin 60^\circ$$

点的加速度为: $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AC} \times \overline{AC} - \omega_{AC}^2 \overline{AC}$

$$\vec{a}_C = (\ddot{\rho} - \rho \omega_{BC}^2) \vec{e}_r + (\rho \varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho} \omega_{BC}) \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AC} \times \overline{AC} - \omega_{AC}^2 \overline{AC} \\ = (\ddot{\rho} - \rho \omega_{BC}^2) \vec{e}_r + (\rho \varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho} \omega_{BC}) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$-a_A \sin 30^\circ + \omega_{AC}^2 \overline{AC} = \rho \varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho} \omega_{BC}$$

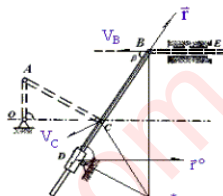
在 AC 方向投影: $\varepsilon_{BC} = (\omega_{AC}^2 \overline{AC} - a_A \sin 30^\circ - 2\dot{\rho} \omega_{BC}) / \rho$

$$\rho = r$$

B 点的加速度为: $\rho = 3r$

$$a_B \sin 60^\circ = \rho \varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho} \omega_{BC}$$

$$a_B = (\rho \varepsilon_{BC} + 2\dot{\rho} \omega_{BC}) / \sin 60^\circ$$



4.27 解:

$$\text{当 } \varphi = 45^\circ \Rightarrow \overline{AC}^2 = 612$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \frac{\pi}{4}$$

同样经过几何证明知

$$OA \perp OC$$

$\Rightarrow OA$ 延长线 $\perp BC$ 于 D

$$\angle ABD = \angle BAD = \frac{\pi}{4} \Rightarrow AD = BD$$

又。刚体 AB 的速度瞬心恰好在 D
 $\Rightarrow V_B = V_A = 6\sqrt{2}\pi$ V_B 方向如图所示。

$$\omega_{AB} = \frac{-6\sqrt{2}\pi}{BD} = \frac{-6\sqrt{2}\pi}{9\sqrt{2}} = -\frac{2}{3}\pi$$

$$\omega_{CB} = \frac{-6\sqrt{2}\pi}{24\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \overline{AB} + \omega_{AB}^2 \overline{AB} \quad (1)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{\varepsilon}_{BC} \times \overline{BC} + \omega_{BC}^2 \overline{BC} \quad (2)$$

(1) 和 (2) 在 AB 方向投影, 则有

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_{CB} CB + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_{CB}^2 CB = \frac{\sqrt{2}}{2} a_A + \omega_{AB}^2 AB$$

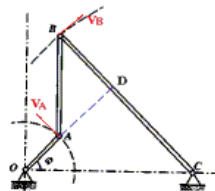
$$\Rightarrow \varepsilon_{CB} = \frac{25\pi^2}{48} \text{ 方向逆时针}$$

(1) 和 (2) 在垂直于 AB 方向投影, 则有

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_{CB} CB - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_{CB}^2 CB = \frac{\sqrt{2}}{2} a_A + \varepsilon_{AB} AB$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{5\pi^2}{18} \text{ 方向逆时针}$$

$$\Rightarrow \alpha_B = \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi^2 \vec{n} + \frac{25}{2} \sqrt{2} \pi^2 \vec{\tau}$$



4-29 解:

以 A 为基点分析 B 的加速度

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A + \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_n$$

分别向 AB 方向和垂直 AB 方向投影

$$a_B = a_r, \quad 0 = -a_A + a_n$$

$$\Rightarrow \alpha_B^n = a_B = 10 \text{ cm/s}^2 \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{\alpha_B^n}{AB} = 1$$

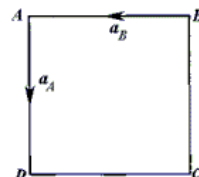
$$\alpha_r = AB\varepsilon = \alpha_A = 10 \text{ cm/s}^2 \quad \Rightarrow \varepsilon = \frac{\alpha_r}{AB} = 1$$

$$\lg \varphi = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1 \quad \varphi = 45^\circ$$

将 AD 逆时针旋转 45° 。BA 逆时针旋转 45° 交于 O。
而 O 是正方形的中心。所以

α_D, α_C 方向一定分别沿 DC, CB 方向。由对称性可知

$$\alpha_D = \alpha_C = 10 \text{ cm/s}^2$$



4.28 解:

假定作平面运动的刚体 AB 的运动已知, 不失一般性, 假定 ω 不为零。因此可找到速度瞬心 C, 过 C 点作 AB 的垂线交于 O, 以 OC 为 X 轴并作 Y 轴如右图, 以瞬心为焦点

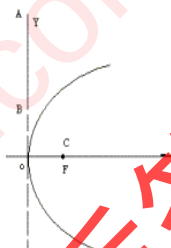
$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad p = 2 \cdot \overline{OC}$$

可作抛物线方程

$$y^2 = 2px$$

由抛物线性质 4 可知: 从焦点 F 作抛物线在 M 点 (M 为任一点) 的垂线, 则垂足的轨迹为在顶点的切线。

在我们的图中就是 Y 轴, 也就是 AB 刚体, 也就是说, 而 AB 刚体上任一点速度和该点与瞬心的连线垂直, 也就一定和抛物线相切。

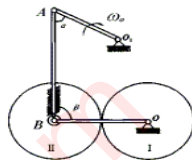


4.30 解:

$$v_A = \omega_O \cdot O_1A = 450 \text{ cm/s}$$

以 A 点分析 B 点速度

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}$ 沿垂直 AB 方向投影



$$V_A \sin 30^\circ = \omega_{AB} AB$$

$$\Rightarrow \omega_{AB} = 1.5 (\text{rad/s}) \quad \text{方向与 } \vec{\omega}_o \text{ 一致}$$

$$\omega_{OB} = \frac{V_B}{2r} = \frac{15}{4} (\text{rad/s})$$

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A^e + \vec{\alpha}_A^n + \vec{\alpha}_{AB}^e + \vec{\alpha}_{AB}^n$$

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_{BO}^e + \vec{\alpha}_{BO}^n$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_A^e + \vec{\alpha}_A^n + \vec{\alpha}_{AB}^e + \vec{\alpha}_{AB}^n = \vec{\alpha}_{BO}^e + \vec{\alpha}_{BO}^n \quad (1)$$

(1) 式沿 AB 方向投影

$$\omega_o^2 \cdot OA \sin 30^\circ - \omega_{AB}^2 \cdot AB = \varepsilon_{BO} \cdot BO$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{BO} = \frac{\omega_o^2 \cdot OA \sin 30^\circ - \omega_{AB}^2 \cdot AB}{2r} = \frac{45\sqrt{3}}{8} \text{ rad/s}^2$$

方向与 $\vec{\omega}_o$ 方向相反, (1) 式沿 BO 方向投影

$$\Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{\omega_o^2 \cdot OA \cos 30^\circ - \omega_{OB}^2 \cdot OB}{AB} = \frac{27\sqrt{3}}{8} \text{ rad/s}^2$$

方向与 $\vec{\omega}_o$ 方向一致。设两齿轮接触点为 E, 由上面求

得 $V_B = 225\sqrt{3} (\text{cm/s})$

$$\vec{a}_E \cdot \vec{AB} / |\vec{AB}| = r \varepsilon_I, \quad \text{即} \quad \varepsilon_I = 2\varepsilon_{BO} + \varepsilon_{AB}$$

$$\varepsilon_I = \frac{117\sqrt{3}}{8} \text{ rad/s}^2 \quad \text{方向与 } \vec{\omega}_o \text{ 方向相反}$$

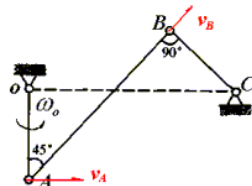
4-32 解: 分析 B 点速度 $\vec{V}_B$

垂直 BC, 沿 AB 方向由投影

$$\text{定理 } V_A \cdot \cos 45^\circ = V_B$$

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega_o \cdot OA$$

$$V_B = \omega_o \cdot OA \cos 45^\circ, \quad \omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = \omega_o \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_o$$



$$\omega_{AB} = v_A \sin 45^\circ / AB = \frac{(2 - \sqrt{2})\omega_o}{2}$$

分别以 A, C 分析 B 的加速度

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A^e + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AB} - \omega_{AB}^2 \vec{AB},$$

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\varepsilon}_{BC} \times \vec{BC} - \omega_{BC}^2 \vec{BC}$$

$$\therefore \vec{\alpha}_A^e + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \vec{AB} - \omega_{AB}^2 \vec{AB} = \vec{\varepsilon}_{BC} \times \vec{BC} - \omega_{BC}^2 \vec{BC}$$

沿 AB 方向投影

$$\omega_o^2 \cdot OA \cos 45^\circ - \omega_{AB}^2 \cdot AB = \varepsilon_{BC} \cdot BC$$

$$\text{求得: } \varepsilon_{BC} = \frac{\omega_o^2}{2}$$

4-36 解:

设轮 I, II, III 的角速分别为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, 角加速度为

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 取固连在 OA 上的动系 OXY, 轮子相对动系的

角速度分别为 $\omega_{r1}, \omega_{r2}, \omega_{r3}$, 相对角加速度为 $\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}, \varepsilon_{r3}$,

取逆时针转动为正方向, 有:

$$R\omega_{r1} = -\frac{R}{2}\omega_{r2} = R\omega_{r3}$$

$$R\varepsilon_{r1} = -\frac{R}{2}\varepsilon_{r2} = R\varepsilon_{r3}$$

对轮 I 有: $\omega_0 = -\omega_0 + \omega_{r1}$

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon_0 + \varepsilon_{r1}$$

对轮 III 有: $\omega_3 = -\omega_0 + \omega_{r3}$

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_0 + \varepsilon_{r3}$$

由此可解得: $\omega_3 = \omega_0, \varepsilon_3 = \varepsilon_0$

M 点的速度分析如上图:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega}_3 \times \overline{AM}$$

$$V_A = 3R\omega_0, \quad |\vec{\omega}_3 \times \overline{AM}| = R\omega_0$$

$$V_M = \sqrt{10}R\omega_0$$

M 点的加速度分析如图示: $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_3 \times \overline{AM} - \omega_3^2 \overline{AM}$

在水平方向和垂直方向投影有:

$$a_{Mx} = a_{Ax} - R\varepsilon_0 = 3R\omega_0^2 - R\varepsilon_0$$

$$a_{My} = a_{Ay} - R\omega_3^2 = 3R\varepsilon_0 - R\omega_0^2$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{10R^2\omega_0^4 - 12R^2\omega_0^2\varepsilon_0 + 10R^2\varepsilon_0^2}$$

$$= R\sqrt{10\omega_0^4 - 12\omega_0^2\varepsilon_0 + 10\varepsilon_0^2}$$

4.39 解: 如图所示, 定坐标系与地面固联, 动坐标系与杆 OA 固联。则牵连角速度

$\omega_e = \omega_0$, 且设为逆时针方

向。

轮 1 固定不动, 故 $\omega_1 = 0$,

又 $\omega_1 = \omega_e + \omega_{r1} \Rightarrow \omega_{r1} = -\omega_0$

在动坐标系中, 轮 1 与轮 2 外啮合, 故 $\omega_{2r}r = -\omega_{1r}R$

$$\Rightarrow \omega_{2r} = -\frac{\omega_{1r}R}{r} = \frac{\omega_0 R}{r}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_{2r} + \omega_e = \frac{\omega_0 R}{r} + \omega_0 = \frac{R+r}{r}\omega_0$$

同理, 轮 2 与轮 3 外啮合, 故 $\omega_{3r}r = -\omega_{2r}R$

$$\Rightarrow \omega_{3r} = -\frac{\omega_{2r}r}{R} = -\omega_0$$

$$\Rightarrow \omega_3 = \omega_{3r} + \omega_e = -\omega_0 + \omega_0 = 0$$

同理, 轮 3 与轮 4 外啮合, 故 $\omega_{4r}R = -\omega_{3r}r$

$$\Rightarrow \omega_{4r} = -\frac{\omega_{3r}r}{R} = \frac{\omega_0 R}{r}$$

$$\Rightarrow \omega_4 = \omega_{4r} + \omega_e = \frac{\omega_0 R}{r} + \omega_0 = \frac{R+r}{r}\omega_0$$

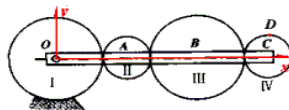
$$\text{又 } \vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{\omega}_4 \times \overline{CD}$$

$$\text{且 } v_C = 3(R+r)\omega_0 \quad \left| \vec{\omega}_4 \times \overline{CD} \right| = (R+r)\omega_0$$

$$\Rightarrow v_D = \sqrt{10(R+r)^2\omega_0^2} = \sqrt{10}(R+r)\omega_0$$

设 $\vec{V}_D$ 方向与 $\vec{V}_C$ 方向夹角为 θ , 则

$$\cos\theta = \frac{v_C}{v_D} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

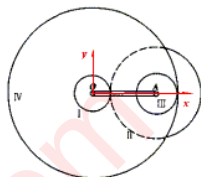


4.40 解：设 1、2、3、4 轮的半径分别为

r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 ，则有

$$r_4 = r_1 + r_2 + r_3$$

$$\Rightarrow Z_4 = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 180$$



设定坐标系与地面固联，动坐标系与杆 OA 固联。

则牵连角速度 $\omega_e = \omega_0$ ，且设为逆时针方向

$$\text{由 } \omega_4 = \omega_{4r} + \omega_0 \Rightarrow \omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0$$

又在动坐标系中，轮 2 与轮 1 外啮合，轮 3 与轮 4 内啮合，有

$$\omega_{2r} r_2 = -\omega_{1r} r_1 \quad ; \quad \omega_{3r} r_3 = \omega_{4r} r_4$$

$$\text{且 } \omega_{2r} = \omega_{3r}; \quad \omega_{1r} = \frac{(\omega_0 - \omega_4) r_2 r_4}{r_1 r_3}$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_{1r} = \omega_0 + \frac{(\omega_0 - \omega_4) r_2 r_4}{r_1 r_3}$$

$$\text{又 } \omega_0 = \frac{30 \cdot 2\pi}{60} = \pi \text{ (rad/s)}; \quad \omega_4 = -\frac{20 \cdot 2\pi}{60} = -\frac{2}{3}\pi \text{ (rad/s)}$$

$$\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} = 12 \Rightarrow \omega_1 = \pi + 12 \left(\pi + \frac{2}{3}\pi \right) = 21\pi$$

$$\text{则轮 1 转速为 } n_1 = \frac{21\pi \cdot 60}{2\pi} = 630 \text{ (r/min)}$$

5.1 解

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = 25 \left(0\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k} \right) \times (3\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k})$$

$$= 25 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -50\vec{i} + 60\vec{j} - 45\vec{k}$$

5.4 解 $\vec{\omega} = \omega \left(\frac{\sqrt{3}}{15} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{j} + \frac{7\sqrt{3}}{15} \vec{k} \right)$

$$\vec{\omega} \times \vec{OM} = \omega \left(\frac{\sqrt{3}}{15} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{j} + \frac{7\sqrt{3}}{15} \vec{k} \right) \times (2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$$

已知 $v_{Mx} = 1$, 则 $\omega \left(\sqrt{3} - \frac{14}{15} \sqrt{3} \right) = 1$

$\therefore$ 对 N 点 (a, b, c)

$$\vec{v}_N = \vec{\omega} \times \vec{ON}$$

$$= 5\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{15} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{j} + \frac{7\sqrt{3}}{15} \vec{k} \right) \times (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

$$= (5c - 7b)\vec{i} - (c - 7a)\vec{j} + (b - 5a)\vec{k}$$

5.7 解 进动角速度 ω_e 即

OC 绕 OB 转动之角速度

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5s} = 4\pi \text{ rad/s}$$

自转角速度 ω_r 为圆锥

绕其自轴旋转之角速度

全角速度 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$ 由

A 点纯滚动知 $\vec{\omega}$ 沿 OA, 方向矢量合成由正弦定理

$$\frac{\omega_r}{\sin 135^\circ} = \frac{\omega_e}{\sin 22.5^\circ} = \frac{\omega}{\sin 22.5^\circ}$$

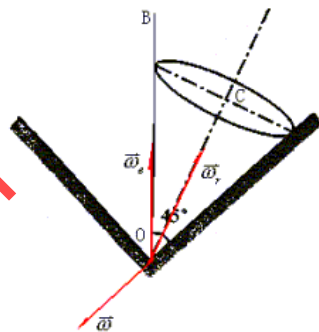
$$\omega_r = 7.39\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_e = \omega = 4\pi \text{ rad/s}$$

规则进动, 角加速度

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \omega_e \cdot \omega_r \cdot \sin 157.5^\circ \vec{k}$$

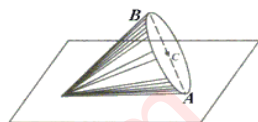
$$\varepsilon = 111.66 \text{ rad/s}^2$$



5.9 解 进动角速度

$$\omega_e = \frac{v_e}{OC \cdot \cos \alpha} = \frac{v_e}{OA \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{30 \text{ cm/s}}{\frac{40}{\sqrt{3}} \text{ cm} \times \cos^2 30^\circ} = \sqrt{3} \text{ rad/s}$$



$$\therefore \text{角速度} \quad \omega = \sqrt{3} \omega_e = 3 \text{ rad/s}$$

$$\text{自转角速度} \quad \omega_r = 2 \omega_e = 2\sqrt{3} \text{ rad/s}$$

$$A \text{ 点速度} \quad \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA} = 0$$

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OA}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA}$$

$$\text{角加速度} \quad \vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \sqrt{3} \vec{j} \times (-3\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}) = 3\sqrt{3} \vec{k}$$

$$\therefore \quad \vec{a}_A = 3\sqrt{3} \vec{k} \times \frac{40}{\sqrt{3}} \vec{i} = 120 \vec{j} \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

$$B \text{ 点速度} \quad \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OB} = (-3\vec{i}) \times \left(\frac{40}{\sqrt{3}} \cos 60^\circ \vec{i} + \frac{40}{\sqrt{3}} \sin 60^\circ \vec{j} \right)$$

$$= -60 \vec{k} \text{ (cm/s)}$$

$$B \text{ 点的加速度} \quad \vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OB})$$

$$= 3\sqrt{3} \vec{k} \times \left(\frac{20}{\sqrt{3}} \vec{i} + 20 \vec{j} \right) - 9(20 \vec{j})$$

$$= -60(\sqrt{3} \vec{i} + 2 \vec{j}) \text{ cm/s}^2$$

5.13 解

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \vec{i} + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{j}$$

$$+ (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \vec{k} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 6t \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 6t \vec{j} + \frac{11}{2} \vec{k}$$

θ 不变, 则

$$\dot{\omega}_x = \ddot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \ddot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$= -3\sqrt{3} \sin 6t$$

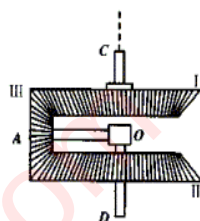
$$\dot{\omega}_y = \ddot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \ddot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi = 3\sqrt{3} \sin 6t$$

$$\dot{\omega}_z = \ddot{\psi} \cos \theta - \ddot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} = 0$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k}$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为随体坐标系各坐标轴上的单位矢量)

5.14 解 不妨设上下两齿轮分别作逆时针转动, 行星齿轮上 A 上顶底 B、C 两点速度方向相同



$$\begin{aligned} v_B &= \omega_1 R & v_C &= \omega_2 R \\ &= 35 \text{ cm/s} & &= 21 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

$$\text{则 } \omega_r = \frac{v_B - v_C}{2r} = 3.5 \text{ rad/s}$$

A 点速度为

$$v_A = \frac{v_C + v_B}{2} = 28 \text{ cm/s}$$

$$OA \text{ 的角速度为: } \omega_e = v_A / R = 4$$

另解: A 刚体绕 OA 轴转动, OA 轴绕 CD 固定轴转动, 刚体是规则进动, 则: 行星齿轮 A 的角速度为:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \text{ 且 } \vec{\omega}_e \text{ 垂直 } \vec{\omega}_r$$

$$v_A - r\omega_r = v_B = 35$$

$$v_A + r\omega_r = v_C = 21$$

$$v_A = R\omega_e$$

$$\text{解得: } v_A = 28 \text{ cm/s; } \omega_r = -3.5 \text{ rad/s}$$

5.18 解: 设 $R = 1000 \text{ m}$
重心 O 速度为 200 m/s

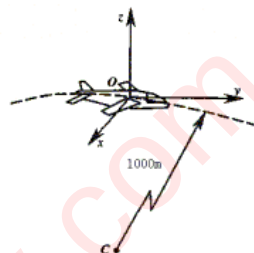
$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$= 0.1\vec{i} + 0.15\vec{j} - 0.2\vec{k}$$

$$\therefore \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = 0; \quad \vec{a}_0 = 40\vec{i}$$

$$\text{飞行员加速度 } \vec{a}_p = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{Op})$$

$$\text{求得: } \vec{a}_p = 40.03\vec{i} - 0.1\vec{j} - 0.06\vec{k}$$



6-3 题

解：AB 杆是对称的，则 AB 杆的质心在 C 点。且 $V_C = \omega l$

$$\therefore P_1 = mV_C = 2(m_1 + m_2)\omega l$$

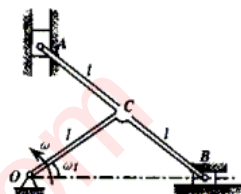
OC 杆也是均质的，其质心在 OC 的中点

$$V'_C = \frac{l}{2} \omega \quad \therefore P_2 = m_1 V'_C = \frac{1}{2} m_1 \omega l$$

且 P_1, P_2 的方向相同，垂直于 OC 杆向上

$$P = P_1 + P_2$$

$$\therefore P = 2(m_1 + m_2)\omega l + \frac{1}{2} m_1 \omega l = \frac{1}{2} \omega l (5m_1 + 4m_2)$$



6-4 解：

质心距 AC 转轴的距离为 AB/3，所以动量 P 的大小为：

$$p = \frac{1}{3} AB \cdot \omega \cdot m = \frac{0.49}{3} * 3\pi * \frac{20}{9.8} = \pi$$

6-8 题.

解: 子弹射进 A 的瞬间, 水平方向上, 子弹 A 组成的系统不受力, 水平方向上动量守恒

$\therefore$

$$m_1 V_1 = (m_1 + m_A) V_A$$

$$\therefore V_A = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_A} = \frac{0.3 \times 500}{45 + 0.3} \approx \frac{10}{3} \text{ m/s}$$

之后, 子弹与 A 作为一个整体向左运动. 取小车、子弹、A 组成的整体为对象, 在水平方向上不受力, 动量守恒, 取向左为正方向.

$$(m_1 + m_A) V_A = (m_1 + m_A) V_2 + m_{\text{车}} V_3$$

单独取小车为研究对象 $f = u N_1 = u g (m_1 + m_A)$

$$\therefore f s_1 = \frac{1}{2} m_{\text{车}} V_3^2 \quad \text{联立}$$

$$\begin{cases} m_1 V_1 = (m_1 + m_A) V_2 + m_{\text{车}} V_3 & (1) \\ f s_1 = \frac{1}{2} m_{\text{车}} V_3^2 & (2) \end{cases}$$

当 f 消失时, 即车与 A 上有一个具有相同的未速度 $u = V_2 = V_3$.

代入 (1) 得

$$u = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_A + m_{\text{车}}} = \frac{0.3 \times 500}{0.3 + 45 + 35} = 1.87 \text{ m/s}$$

将 u 代入 (2), 得

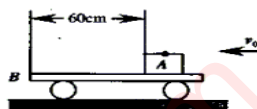
$$s_1 = \frac{m_{\text{车}} u^2}{2f} = \frac{35 \times 1.87^2}{2 \times 0.5 \times 9.8 \times (4.5 + 0.3)} \approx 27.7 \text{ cm}$$

同理, 算出 A 与子弹的相对位移

$$s_2 = \frac{\frac{1}{2} (m_A + m_1) V_A^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_1) u^2}{0.5 \times 9.8 \times (4.5 + 0.3)} \approx 76.9 \text{ cm}$$

$\therefore$ 车与物体的未速度 $u = 1.87 \text{ m/s}$ 距 B 端的最终距离为

$$s_1 + l - s_2 = 10.8 \text{ cm}$$



6-9 解:

如图弹头两片为系统, 不考虑外力作用, 系统动量守恒, 有

$$m_A \cdot 0 + m_B V_B \cos 30^\circ = 5 \cdot 60 \quad (1)$$

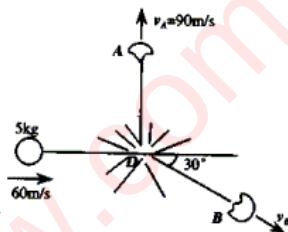
$$m_A \cdot 90 - m_B V_B \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\therefore m_A + m_B = 5$$

$$m_A = \frac{10}{9} \sqrt{3},$$

连立求解可得:

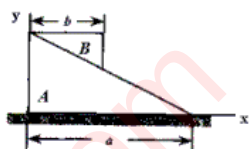
$$V_B = \frac{360}{3\sqrt{3} - 2}$$



6-11 题解.

设 B 的质量为 m . A 的质量为 $3m$. 以 A, B 组成的系统

为研究对象, 此质心系在水平方向上不受力即 x 方向动量守恒. 设开始时坐标如图



A, B 质心的坐标分别是 $x_A = \frac{a}{3}$ $x_B = \frac{2b}{3}$

$\therefore$ 此质系的质心位置

$$x_C = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{3m x_A + m x_B}{4m} = \frac{3x_A + x_B}{4}$$

当 B 滑至水平面时 A 移动了 s_A , 则 B 为 $s_B = s_A + a - b$

$\therefore$ 质系的质心位置 x_C 不变

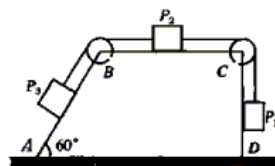
$$\frac{a + \frac{2b}{3}}{4} = \frac{3m\left(\frac{a}{3} + s_A\right) + m\left(\frac{2b}{3} + s_A + a - b\right)}{4m}$$

$$\therefore s_A = -\frac{1}{4}(a-b)$$

即三菱柱 A 的位移大小为 $\frac{1}{4}(a-b)$, 方向向左。

6-12 解

因为系统在水平方向上不受力, 假定初始静止. 质心位置不变, 设四棱柱的位移为 S



$$0 = m_4 s + m_1 s + m_2(s+1) + m_3(s + \cos 60^\circ)$$

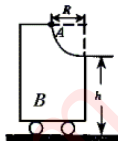
$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)s = -(m_2 + m_3 \cos 60^\circ)$$

$$\text{求得 } S = -\frac{m_2 + \frac{1}{2}m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = -0.138m$$

即: 四棱柱向左移动了 0.138 米。

6-14 解

系统在水平方向上不受力，假定初始静止。质心位置不变，设 x 坐标原点在起始小球 A 处，小车的质心位置位 e ，当小球到最低位置时的位移为 s ，小球得位移为



$$s_A \text{ 则: } m_B e = m_A \left(s + \frac{1}{2} \right) + m_B (e + s)$$

$$\text{求得 } s = -\frac{1}{6}$$

$$\text{小球的位移为 } s_A = s + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{由 } x \text{ 方向的动量守恒 } m_B v_B + m_A (v_B + v_r) = 0 \quad (1)$$

$$\text{机械能守恒: } \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_A (v_B + v_r)^2 = m_A g \cdot R \quad (2)$$

$$\text{解得: } v_B = -\sqrt{\frac{g}{6}}, \quad v_r = 3\sqrt{\frac{g}{6}}$$

$$v_A = v_B + v_r = 2\sqrt{\frac{g}{6}}$$

$$\text{小球下落 } h \text{ 用时 } t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\text{小球 } x \text{ 方向总的位移 } x_r = s_A + v_A t = \frac{1}{3} (1 + 2\sqrt{3h})$$

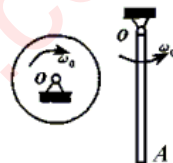
圆弧面对小球的法向反力为：

$$\frac{m_A v_r^2}{R} = N - m_A g; \quad \Rightarrow N = \frac{7}{4} g$$

6-15 题解

$$(1) H = J_0 \cdot \omega = \frac{1}{2} m R^2 \omega_0$$

$$(2) H = J_0 \cdot \omega = \frac{1}{3} m l^2 \omega_0$$



6.18 解：取圆盘和质点 M 为系统，则系统所受的外力矩在 Z 轴上的投影为 0，故关于 Z 轴动量矩守恒

M 在 A 处时，动量矩为：

$$H_z = \left(\frac{P}{2g} r^2 + \frac{Q}{g} r^2 \right) \omega_0$$

当 M 点离中心 C 的距离 a 最小时，不难看出 M 应在 AB 的中点，设此时圆盘的角速度为 ω ，则有：

$$v_M = \omega \cdot a + u$$

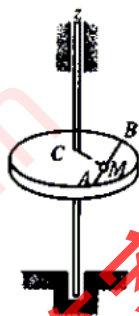
动量矩为：

$$H'_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} r^2 \cdot \omega + \frac{Q}{g} (\omega \cdot a + u) \cdot a$$

由于：

$$H_c = H'_c$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\left(\frac{P}{2} + Q \right) \omega_0 r^2 - Qua}{\frac{P}{2} r^2 + Qa^2}$$



6.19 解：取整个系统为研究对象，并设系统绕 O 轴的转动惯量为 I_O ，角加速度为 ε

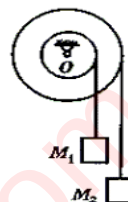
由对 O 轴的动量矩定理：

$$I_O \varepsilon = P_1 r_1 + P_2 r_2$$

又

$$I_O = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_1}{g} r_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_2}{g} r_2^2 + \frac{P_1}{g} r_1^2 + \frac{P_2}{g} r_2^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{2g(P_1 r_1 + P_2 r_2)}{(Q_1 + 2P_1) r_1^2 + (Q_2 + 2P_2) r_2^2}$$



6. 31 解:

1) 建立如图所示坐标系, 在三角形面内

任取一面元 $dx dy$, 不难求得三角形的两

腰边所在直线为

$$y = \pm \frac{2h}{b}x, \text{ or } x = \pm \frac{b}{2h}y, \text{ 又面元的质量为 } \frac{2m}{bh} dx dy,$$

则板对 AA' 轴 (即 y 轴) 的转动惯量为:

$$I_{AA'} = \int_0^h \int_{-\frac{b}{2h}y}^{\frac{b}{2h}y} \frac{2m}{bh} x^2 dx dy = \frac{1}{24} mb^2$$

板对 x 轴的转动惯量为:

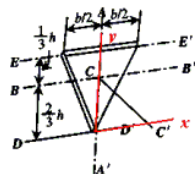
$$I_x = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2h}x}^{\frac{b}{2h}x} \frac{2m}{bh} y^2 dx dy = \frac{1}{2} mh^2$$

又 BB' 轴过质心 C , 由平行轴定理可知

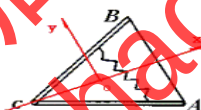
$$I_{BB'} = I_x - m\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{18} mh^2$$

2) 由 1) 的结果可知

$$I_C = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{m}{72} (3b^2 + 4h^2)$$



6.21 解: 取整个系统为研究对象, 设系统的质心为 O 点, 过质心建立坐标系如图, 整个系统放在光滑水平面上, 故动量守恒, 又系统初始静止, 故质心位置不变。



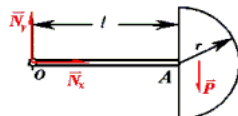
由于对称性, C 点一定沿 x 轴运动, 且 A 、 C 两点的 x 坐标绝对值相等。

设 A 点坐标为 (x, y) , 则 C 点坐标为 $(-x, 0)$, AC 长为 $2l$

$$\text{则有: } [x - (-x)]^2 + (y - 0)^2 = (2l)^2$$

$$\text{即 } A \text{ 点运动轨迹为: } 4x^2 + y^2 = 4l^2$$

6. 41 解：系统绕 O 点转动，取整体分析，根据动量矩定理



$$I_o \varepsilon = P \cdot (\ell + x_c)$$

$$I_o = \frac{1}{2} m r^2 - m x_c^2 + m (\ell + x_c)^2$$

$$x_c = \frac{\iint x dm}{m}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^r \rho r^2 \sin \theta dr d\theta}{\rho \pi r^2 / 2} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{P(\ell + x_c)}{I_o} = \frac{2g(3\pi^2 + 4r)}{(6\pi^2 + 16\pi r + 3\pi^2)}$$

再取半圆盘为对象分析

$$N_{Ax} = m\ddot{x}_c = 0$$

$$P - N_{Ay} = m\ddot{y}_c$$

$$I_c \varepsilon = N_y x_c - M$$

$$\ddot{y}_c = \varepsilon(\ell + x_c)$$

解以上方程

$$\Rightarrow N_{Ay} = \frac{P(9\pi^2 - 32)r^2}{9\pi^2 r^2 + 18\pi^2 \ell^2 + 48\pi \ell}$$

竖直向上

$$N_{Ax} = 0$$

$$M = \frac{-P\ell(9\pi^2 - 32)r^2}{9\pi^2 r^2 + 18\pi^2 \ell^2 + 48\pi \ell}$$



6. 33 解：建立如图所示直角坐标系，z

轴向下，则任一等边三角形的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 。

四面体的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，体积为 $v = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ，

在四面体中任取体积元其高为 dh ，体积元的边长为 $\frac{3}{4}h$ 则体积

元的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}h^2$ ，在结合 6.31 题中的结论，有：

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}a} \frac{m}{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}h^2 dh \cdot \frac{1}{72} \left[3 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{6}}h \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{6}}h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{20} m a^2$$

6.45 解: 如图, 对圆柱体进行受力分析, 设最低位置时圆柱体的角速度为 ω , 角加速度为 ε ,

质心的速度为 v_1 , 圆柱体对质心的转动惯量为

$$I_{O_1}, \text{ 则 } I_{O_1} = \frac{1}{2}mr^2$$

圆柱体作纯滚动, 故 $v_1 = \omega \cdot r$

运动过程中只有重力做功, 机械能守恒, 有

$$mg(R-r)(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{O_1}\omega^2$$

$$\frac{mv_1^2}{R-r} = \frac{4mg(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{3} \quad \text{当 } \varphi = 0 \text{ 时有}$$

$$\Rightarrow \frac{mv_1^2}{R-r} = \frac{4mg(1 - \cos\varphi_0)}{3}; \quad \varepsilon = 0$$

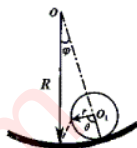
$$\begin{aligned} \text{圆柱受到圆槽的约束反力为: } N &= mg + \frac{4mg(1 - \cos\varphi_0)}{3} \\ &= \frac{7}{3}mg - \frac{4}{3}mg\cos\varphi_0 \end{aligned}$$

即圆柱对圆槽的压力为:

$$N' = N = \frac{7}{3}mg - \frac{4}{3}mg\cos\varphi_0, \quad \text{方向垂直向下。}$$

又在最低位置时 $\varepsilon = 0$, 设摩擦力为 f ,

$$\text{由关于质心动量矩定理: } I_{O_1}\varepsilon = fr \Rightarrow f = 0$$

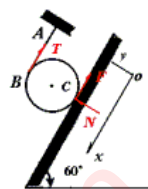


6.46 解: 如图示, 建立坐标系, 并对圆柱体进行受力分析, 设圆柱体的角加速度为 ε (顺时针), 则有:

$$m\ddot{x}_c = mg\sin 60^\circ - T - F \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_c = N - mg\cos 60^\circ \quad (2)$$

$$I_c\varepsilon = Tr - Fr \quad (3)$$



$$\text{补充方程: } F = fN, \quad \ddot{x}_c = r\varepsilon, \quad \ddot{y}_c = 0$$

代入方程, 联立求解

$$a_c = \ddot{x}_c = \frac{(3\sqrt{3} - 2)g}{9}$$

6.47 解: 长方体受力分析如图, 质心为 C, 建立坐标系

1) 由质心动量矩定理, 有

$$I_C \varepsilon = \frac{3}{5} P \cdot 15 + N \cdot x - f \cdot 30 - \frac{4}{5} P \cdot 30$$

又有条件:

$$\varepsilon = 0, \quad N = (mg - \frac{3}{5}P), \quad f = \mu \cdot N,$$

$$\mu = 0.2, \quad g = 9.8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

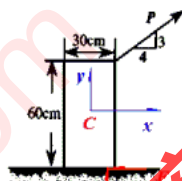
$$\text{解得: } \Rightarrow P = \frac{490(x-6)}{11.4+0.6x} \quad (0 \leq x \leq 15)$$

可知, 当 $x=15$ 时, $P_{\max} = 216.2 \text{ N}$

2) 设质心加速度为 a_{CX}

$$ma_{CX} = \frac{4}{5} P_{\max} - f = 100.9$$

$$\Rightarrow a_{CX} = 2.02 \text{ m/s}^2$$



6.49 解: 如图示, 建立坐标系, 并对杆进行受力分析, 设杆的角加速度为 ε , 在刚释放的瞬间, 由动量和动量矩定理:

$$m\ddot{x}_C = N \sin \alpha$$

$$m\ddot{y}_C = mg - N \cos \alpha$$

$$J_C \varepsilon = 2lb$$

$$J_C = \frac{1}{12} ml^2$$

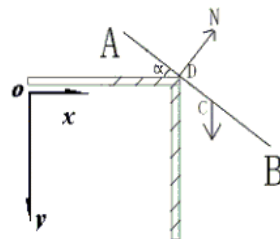
$$\ddot{x}_C \sin \alpha - \ddot{y}_C \cos \alpha + b\varepsilon = 0$$

联立求解

$$\varepsilon = \frac{12gb \cos \alpha}{l^2 + 12b^2}; \quad N = \frac{mgl^2 \cos \alpha}{l^2 + 12b^2}$$

$$\ddot{x}_C = \frac{gl^2 \cos \alpha \sin \alpha}{l^2 + 12b^2}; \quad \ddot{y}_C = g - \frac{gl^2 \cos^2 \alpha}{l^2 + 12b^2}$$

$$\vec{a}_C = \frac{gl^2 \cos \alpha \sin \alpha}{l^2 + 12b^2} \vec{i} + (g - \frac{gl^2 \cos^2 \alpha}{l^2 + 12b^2}) \vec{j}$$



6. 54 解:

滚子做纯滚动。

∵ 摩擦力不作功

∴ 滚子与手柄组成的系统机械能守恒



$$ph + Qh = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} p v_o^2 + \frac{1}{2} Q v_A^2$$

$$\because OA \text{ 平动} \Rightarrow V_o = V_A$$

又 ∵ 滚子做纯滚动

$$V_o = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{V_o}{r}$$

$$I_o = \frac{1}{2} p r^2$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{S} \Rightarrow h = S \sin \alpha$$

代入方程解得

$$S = \frac{(3p + 2Q)V^2}{4g(p + Q)\sin \alpha}$$

6. 59 解: 杆绕轴转动时机械能守恒。

$$mg \sqrt{\ell_2^2 - \ell_1^2} = \frac{1}{2} m V_o^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

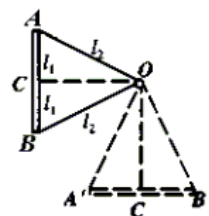
$$I = \frac{1}{12} m (2\ell_1)^2 = \frac{m\ell_1^2}{3}$$

$$V_o = \omega \sqrt{\ell_2^2 - \ell_1^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{V_o}{\sqrt{\ell_2^2 - \ell_1^2}}$$

代入以上方程

$$\Rightarrow V_o = \sqrt{\frac{6g(\ell_2^2 - \ell_1^2)^{3/2}}{3\ell_2^2 - 2\ell_1^2}}$$



6. 60 解: 在连杆机构运动过程中机械能守恒

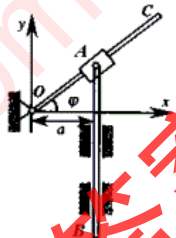
$$P_1 \frac{\ell}{2} \sin \varphi_0 + P_2 a g \varphi_0 \\ = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} V^2$$

$$I_1 = \frac{1}{3} \frac{P_1}{g} \ell^2$$

$$V = a \omega$$

解以上方程得

$$\omega = \sqrt{\frac{3gP_1\ell \sin \alpha_0 + 6gP_2 a g \alpha_0}{P_1 \ell^2 + 3P_2 a^2}}$$



6.65 解:

如有图所示, 当 BD 水平时, D 点速度为竖直方向。有投影定理知 $\vec{v}_B = 0$ (B 绕 A 作定轴转动, 它只能由垂直 AB 方向的速度) 这一瞬时, D 绕 B 作定轴转动。

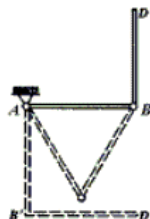
有动能定理, 有

$$P_1 \cdot \frac{\ell}{2} + P_2 \cdot \frac{3\ell}{2} = \frac{1}{2} I \alpha^2 - 0$$

$$\text{即 } P \cdot 2\ell = \frac{1}{2} \cdot \frac{P\ell^2}{3g} \omega^2$$

$$\alpha = \sqrt{12lg} = 10.8 \text{ m/s}$$

$$\text{即 } v_D = 10.8 \text{ m/s}$$



6. 67 解: 如图示, 设圆盘的偏角为 φ , 圆盘的角加速度为 $\ddot{\varphi}$ 。

在接触点 B 处, 圆盘在地面上只滚不滑, 是理想约束, 主动力有势, 机械能守恒:

设质心位置为 C, 则 AC 为

$$AC = e = \frac{\int_0^\pi \int_0^R \frac{1}{2} \pi R^2 r dr d\theta \cdot r \sin \theta}{m} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$J_A = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\Rightarrow J_C = \frac{1}{2} m R^2 - m e^2$$

由机械能守恒 ($\varphi = 0$ 处为势能零点)

$$\frac{1}{2} m g (R^2 + e^2 2eR \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2 = e m g (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

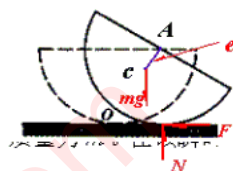
且在微小摆动时, φ , $\dot{\varphi}$ 是小量, $\cos \varphi \approx 1, \sin \varphi \approx \varphi$,

上式对时间求导后略去高阶小量得:

$$[m g (R^2 + e^2 - 2Re) + J_C] \ddot{\varphi} + m g e \varphi = 0$$

即
$$\omega = \sqrt{\frac{m g e}{m g (R^2 + e^2 - 2Re) + J_C}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m g (R^2 + e^2 - 2Re) + J_C}{m g e}}$$

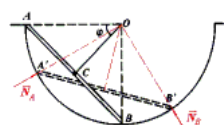


6. 69 解: 如图。棒下滑过程中机械能守恒

$$P a \sin \varphi - P a \sin \varphi_0$$

$$= \frac{1}{2} P V_c^2 + \frac{1}{2} I_B \omega^2$$

$$\omega \cdot a = V_c$$



$$I_B = \frac{P(2a)^2}{12g}, \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g \left(\sin \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{2a}}$$

对杆作受力分析如图

$$\frac{P}{g} a_r = \frac{\sqrt{2}}{2} N_A + P \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} N_B$$

$$\frac{P}{g} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} (N_A + N_B) - P \sin \varphi$$

$$I \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} N_A a + \frac{\sqrt{2}}{2} N_B a$$

$$I = \frac{1}{12} m (2a)^2, a_r = \varepsilon \cdot a, a_n = \omega^2 a$$

解以上方程得

$$N_B = P \left(\frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{8} + \frac{5\sqrt{2} \sin \varphi}{4} - \frac{3}{4} \right)$$

$$N_A = P \left(\frac{5\sqrt{2} \sin \varphi}{4} - \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{8} - \frac{3}{4} \right)$$

6. 70 解:

因为外力对 AC 轴的矩为, 有关于 AC 轴的动量矩守恒, 又因为约束理想, 整个过程有机械能守恒

$$I\omega_B + mr^2\omega_B = I\omega$$

$$\Rightarrow \omega_B = \frac{I\omega}{I + mr^2}$$

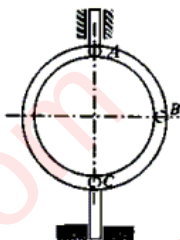
$$\frac{1}{2}I\omega^2 + mgr = \frac{1}{2}I\omega_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gr + \frac{I\omega^2}{m} - \frac{I^3\omega^2}{m(I + mr^2)^2}}$$

$$I\omega_c = I\omega \Rightarrow \omega_c = \omega$$

$$2mgr + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega_c^2$$

$$\Rightarrow v_c = 2\sqrt{gr}$$



6.71 解:

1) 固结在一起, 圆盘与杆具有相同的角速度, 运动过程中机械能守恒

$$m_1g\frac{l}{2}(1 - \sin\alpha) + m_2gl(1 - \sin\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}I_A\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_B^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_1^2$$

$$v_B = \omega_1 l \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_B}{l}$$

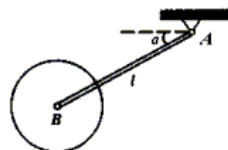
$$\Rightarrow v_B = 1.52m/s \quad \omega = 6.33rad/s$$

2) 不固结时, 由于 B 盘外力对质心的矩为零, 故 B 盘不转动, 运动过程中机械能守恒

$$m_1g\frac{l}{2}(1 - \sin\alpha) + m_2gl(1 - \sin\alpha) = \frac{1}{2}I_A\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_2v_B^2$$

$$v_B = \omega_2 l \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_B}{l}$$

$$\Rightarrow v_B = 1.58m/s \quad \omega = 6.60rad/s$$



6. 73 解: 如图示, 平衡时为 x 原点建立坐标系, 一、(1) 对 O 点取动量矩定理有:

$$\rho l R^2 \ddot{\phi} = 2x \rho g R$$

$$x = R\phi; \quad \dot{x} = R\dot{\phi}$$

$$\text{当 } x \leq \frac{l - \pi R}{2} \text{ 时成立。}$$



$$\text{解得: } \phi = \sqrt{\frac{2g}{2}} \phi, \quad v = \sqrt{\frac{2g}{2}} x$$

$$\text{当 } x = \frac{l - \pi R}{2} \text{ 时, } v = v_1 = \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{l - \pi R}{2}$$

(2) 由于约束是理想的, 主动力有势, 可用动能定理或机械能守恒:

$$\frac{1}{2} \rho l \dot{x}^2 = -(l - \pi R - 2x) \rho g \frac{1}{2} \left(\frac{l - \pi R}{2} + x \right) + (l - \pi R) \rho g \left(\frac{l - \pi R}{4} \right)$$

$$\text{解得: } \dot{x} = \sqrt{\frac{2g}{l}} x$$

$$\text{当 } x = \frac{l - \pi R}{2} \text{ 时, } v_1 = \dot{x} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \frac{l - \pi R}{2}$$

二、当 $\frac{l - \pi R}{2} < x \leq \frac{l}{2}$ 和 $\frac{l}{2} < x \leq \frac{l + \pi R}{2}$ 将分别计算。

(1) 当 $\frac{l - \pi R}{2} < x \leq \frac{l}{2}$ 时

$$\rho l R^2 \ddot{\phi} = (l - \pi R) \rho g R + \rho g R^2 \phi + \int_0^\phi \rho g R^2 \cos \phi d\phi$$

$$\phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$l R^2 \ddot{\phi} = g R l - \pi g R^2 + g R^2 \phi + g R^2 \sin \phi$$

$$R^2 \dot{\phi}^2 - R^2 \dot{\phi}_0^2 = [2g R l \phi - 2g R^2 (\pi \phi - \frac{\phi^2}{2} + \cos \phi - 1)] / l$$

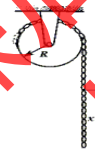
$$v^2 = v_1^2 + [2g R l \phi - 2g R^2 (\pi \phi - \frac{\phi^2}{2} + \cos \phi - 1)] / l$$

$$v = \left\{ v_1^2 + [2g R l \phi - 2g R^2 (\pi \phi - \frac{\phi^2}{2} + \cos \phi - 1)] / l \right\}^{1/2}$$

$$\text{当 } \phi = \frac{\pi}{2} \text{ 时 } v = v_2$$

$$v_2 = [v_1^2 + g R \pi - g R^2 \frac{3\pi^2 - 8}{4l}]^{1/2}$$

(2) $\frac{l}{2} < x \leq \frac{l + \pi R}{2}$ 情况可类似计算.....



6. 74 解: 如图示。

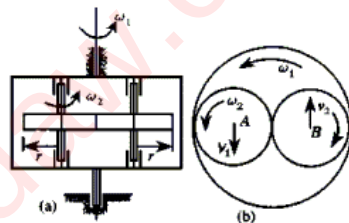
$$\text{动量 } \vec{p} = 0$$

关于 Z 轴的动量矩为:

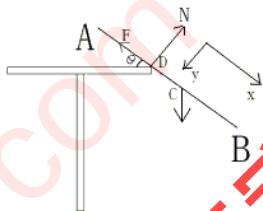
$$H_Z = 3mr^2 \omega_1$$

系统的动能:

$$T = \frac{3}{2} mr^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} mr^2 \omega_2^2$$



6. 78 解: 如图示, 建立坐标系, 并对杆进行受力分析, 设杆的角加速度为 ε 。C 为质心、杆长为 l 、质量为 m 。在该瞬时杆可看成绕 D 点的定轴转动, 由动量矩定理则有:



$$I_D \varepsilon = mgCD \cos \theta$$

$$\text{又} \quad I_D = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} ml^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

又由质心动量矩定理有:

$$I_C \varepsilon = N \cdot CD \quad \Rightarrow N = \frac{3}{4} mg \cos \theta$$

$$m\ddot{x}_c = -F + mg \quad \Rightarrow m\omega^2 \cdot CD = -mg \sin \theta + F$$

又系统只有重力做功, 由能量守恒

$$\frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot CD^2 = mgCD \sin \theta$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3g \sin \theta}{l} \quad \Rightarrow fN = F = mg \sin \theta + m\omega^2 CD$$

$$\Rightarrow f = 2tg \theta$$

6. 80 解: 设 A, B, C 的角加速度分别为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 方向均为逆时针方向。研究 D、E、F、G 这四点的运动状态。

$$\vec{a}_F = \vec{a}_D = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{AD};$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_E = \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{AE}$$

以 F 为基分析 B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_F + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{FB}$$

$$\text{写成标量形式:} \quad a_B = -\varepsilon_1 r_1 - \varepsilon_2 r_2 \quad (1)$$

$$\text{以 G 为基分析 C:} \quad \vec{a}_C = \vec{a}_G + \vec{\varepsilon}_3 \times \vec{GC}$$

$$\text{写成标量形式:} \quad a_C = \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_3 r_3 \quad (2)$$

$$\text{对轮 II 用动量定理:} \quad T_1 - m_2 g = m_2 a_B \quad (3)$$

$$\text{动量矩定理:} \quad T_1 r_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \varepsilon_2 \quad (4)$$

$$\text{对轮 III 用动量定理:} \quad T_2 - m_3 g = m_3 a_C \quad (5)$$

$$\text{动量矩定理:} \quad -T_2 r_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \varepsilon_3 \quad (6)$$

$$\text{对轮 I 用角动量定理:} \quad T_1 r_1 - T_2 r_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \varepsilon_1 \quad (7)$$

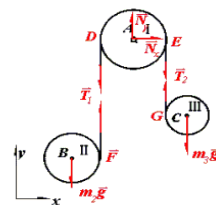
联立 (1) ~ (7) 式, 解得:

$$\varepsilon_1 = \frac{2(m_2 - m_3)g}{(3m_1 + 2m_2 + 2m_3)r_1}$$

$$a_B = -\frac{2(3m_1 + 3m_2 + m_3)}{3(3m_1 + 2m_2 + 2m_3)} g$$

$$a_C = -\frac{2(3m_1 + m_2 + 3m_3)}{3(3m_1 + 2m_2 + 2m_3)} g$$

(负号表示与 y 方向相反)



6. 82 解:

1) 对 AC 杆分析

$$mg \sin 30^\circ \cdot l/2 = I \varepsilon_{AC}$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{4mgl}{I} = \frac{3g}{4l} \quad (\text{顺时针})$$

2) 对 BC 杆分析

$$m\ddot{x}_p = N_x$$

$$m\ddot{y}_p = mg - N_y$$

$$I_2 \varepsilon_2 = N_y \cdot l/2$$

对 AB 杆分析

$$I_1 \varepsilon_1 = mgl/4 + N_y \cdot l/2 - N_x \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

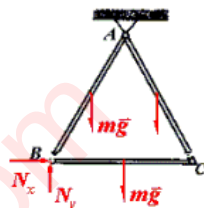
$$\ddot{x}_p = \ddot{x}_B = \varepsilon_1 l \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\ddot{y}_p = \ddot{y}_B + \varepsilon_2 l/2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} l$$

解以上方程得:

$$\varepsilon_1 = \frac{18g}{55l} \quad (\text{逆时针})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{69g}{55l} \quad (\text{顺时针})$$



由对称性, 在电线中点断开, 受力分析如图示

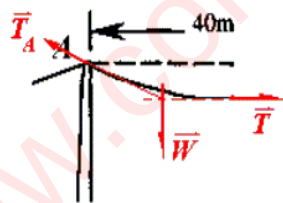
$$T_A \sin \alpha = W$$

$$T_A \cos \alpha = T$$

$$tg^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$W=200$$

$$\text{所以 } T=10W=2000 \quad (N)$$



7-17 解:

设

$$a = 0.03; \quad b = 0.25; \quad \theta = 53.13^\circ$$

则

$$L = (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \theta))^{1/2}$$

$$\frac{a}{\sin \beta} = \frac{L}{\sin \theta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{a}{L} \sin \theta$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{a}{L} \sin \theta \right)$$

当 $\alpha - \beta = 0$ 时, 力矩最小 $M_{\min} = 0$

当 $\alpha - \beta = 90^\circ$ 时, 力矩最大

$$M_{\max} = 80L$$



7.19 解: 原题有误。

这里给出将 E 处约束和 C 处约束交换一下后的解答。

各件的受力分析如图所示。

对第一个元件, 有

$$\Sigma Y = 0: P - \frac{\sqrt{2}}{2} N_A - \frac{\sqrt{2}}{2} N_B = 0$$

$$\Sigma X = 0: \frac{\sqrt{2}}{2} N_B - \frac{\sqrt{2}}{2} N_A = 0$$

$$\text{解得 } N_A = N_B = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

对第二个元件, 有

$$\Sigma X = 0: \frac{\sqrt{2}}{2} N_D - \frac{\sqrt{2}}{2} N_B = 0$$

$$\Sigma Y = 0: N_C - \frac{\sqrt{2}}{2} N_B - \frac{\sqrt{2}}{2} N_D = 0$$

$$\text{解得 } N_C = P, \quad N_D = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

对第三个元件, 有

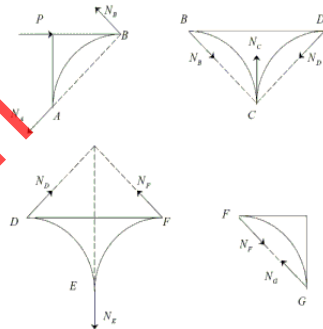
$$\Sigma X = 0: \frac{\sqrt{2}}{2} N_D - \frac{\sqrt{2}}{2} N_F = 0$$

$$\Sigma Y = 0: \frac{\sqrt{2}}{2} N_D + \frac{\sqrt{2}}{2} N_F - N_E = 0$$

$$\text{解得 } N_E = P, \quad N_F = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

对最后一个元件, 有

$$N_G = N_F = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$



7-38 解:

由球受力分析图可知

$$N_2 = N_1$$

对 c 取矩心, $L_c = 0$

$$N_2 2r \cos \alpha = P 2r \sin \alpha$$

$$N_2 = P \tan \alpha$$

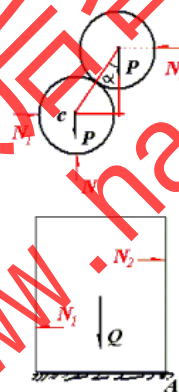
分析圆筒受力如图, 筒要倾倒的临界条件为约束反力集中在 A 处,

对 A 取矩心, $L_A = 0$

$$N_2 2r \cos \alpha - Q R = 0$$

$$Q = \frac{2r}{R} N_2 \cos \alpha = \frac{2r}{R} P \sin \alpha$$

$$Q = \frac{2r}{R} P \frac{R-r}{r} = \frac{2(R-r)}{R} P$$



7-39 题解

解 当 $\vec{P}$ 为铅垂方向且过 C 点时, 整个系统对 C 点取矩

$$L_c = 0,$$

$$N_{By} = 0$$

由图可知 ABC 为等腰直角三角形 $\vec{N}_B \perp AC$ 对 DF 杆对

D 点取矩, $L_D = 0$

$$\therefore N_B \sin 45^\circ = 2Pa \Rightarrow N_B = \frac{2P}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}P$$

由主向量 $\vec{R} = 0$ 得:

$$\begin{cases} N_B \cos 45^\circ - N_D \cos \alpha = 0 \\ N_B \sin 45^\circ - P - N_D \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_D \cos \alpha = 2P \quad \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow N_D \sin \alpha = P \quad N_D = \sqrt{5}P$$

可见 N_D 沿着水平方向斜向上方向且成 $\arctan \alpha = \frac{1}{2}$ 角,

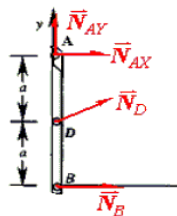
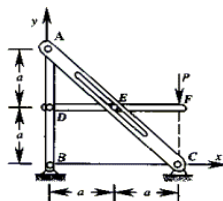
N_D 的大小为 $\sqrt{5}P$; 对 ADB 杆, $L_A = 0$; $\vec{R} = 0$ 有

$$\begin{cases} N_B 2a + N_D \cos \alpha \cdot a = 0 \\ N_{Ax} - N_D \cos \alpha - N_B = 0 \\ N_{Ay} - N_D \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_B = P$$

$$\Rightarrow N_{Ax} = 3P$$

$$\Rightarrow N_{Ay} = P$$



7-40 解: 由受力分析图可知, CD 杆是二力构件, 拉力为 T , 分析圆轮受力如图所示:

$$N_E \sin 45^\circ = Q$$

$$N_E = \sqrt{2}Q$$

整体分析对 A 取矩心,

$$L_A = 0$$

$$4N_B - (1.5 + 2)N_E \cos 45^\circ = 0$$

$$4N_B = \frac{7}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}Q$$

$$N_B = \frac{7}{8}Q$$

$$R_X = 0 \Rightarrow N_{AX} = N_E \cos 45^\circ = Q$$

$$R_Y = 0 \Rightarrow N_{AY} + N_B = N_E \cos 45^\circ = Q$$

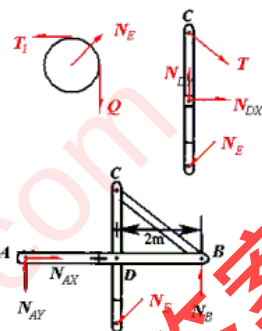
$$N_{AY} = \frac{1}{8}Q$$

分析 CE 杆受力如图, 对 D 取矩心, $L_D = 0$

$$N_E \cos 45^\circ + T \sin 45^\circ = 0$$

$$T = -N_E = -\sqrt{2}Q$$

说明 CD 杆是受压。



7-41 解: 由受力分析图可知, D 是汇交力系平衡, 拉力为 T , 分析圆轮受力如图所示:

$$T_2 \sin \alpha + P = 0$$

$$T = T_2 \cos \alpha$$

$$T_1 = 2P$$

$$T_2 = \sqrt{5}P$$

截面法分析 T_4, T_5, T_6 ,

$$L_B = 0 \Rightarrow \frac{a}{2}T_6 \cos \alpha - 2aP = 0$$

$$T_6 = 2\sqrt{5}P$$

$$L_E = 0 \Rightarrow \frac{a}{2}T_4 + aP = 0$$

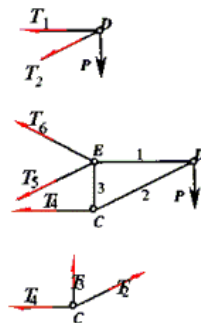
$$L_C = 0 \Rightarrow \frac{a}{2}(T_5 + T_6) \cos \alpha - aP = 0;$$

分析 C 节点的受力如图,

$$T_3 + T_2 \sin \alpha = 0$$

$$T_3 = -P$$

说明 EC 杆是受压。



7-43 解: 如图整体分析求 B 处的约束反力

$$L_A = 0$$

$$N_B = 0.5P$$

截面法分析三角形 DEF, 设边长 DE=1

$$L_D = 0:$$

$$T_E l \sin 75^\circ - P \frac{l}{2} +$$

$$T \cos 15^\circ l \sin 60^\circ -$$

$$T \frac{l}{2} \sin 15^\circ = 0$$

$$L_E = 0:$$

$$T_D l \sin 45^\circ + P \frac{l}{2} + T \cos 15^\circ l \sin 60^\circ + T \sin 15^\circ \frac{l}{2} = 0$$

$$L_F = 0:$$

$$T_E l \cos 45^\circ + T_D l \cos 15^\circ = 0$$

求得

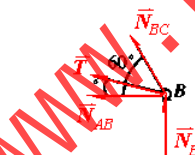
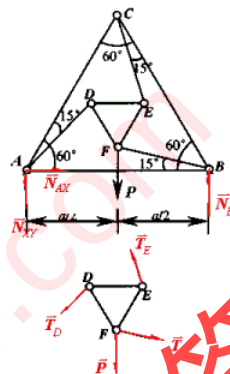
$$T = -0.165P$$

再分析 B 节点汇交力系:

$$N_B + N_{BC} \sin 60^\circ + T \sin 15^\circ = 0$$

$$N_{AB} + N_{BC} \cos 60^\circ + T \cos 15^\circ = 0$$

$$N_{AB} = 0.42P$$



7-55 解: 如图受力分析, 关于垂直轴 Z 的力矩平衡

$$L_Z = 0$$

$$M - T 2r \sin \beta = 0$$

再由 $R_Z = 0$ 得:

$$2T \cos \beta - P = 0$$

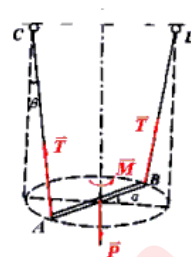
再假定 $l \gg r$, 由几何关系:

$$\sin \beta = 2r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) / l$$

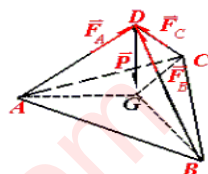
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4r^2}{l^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

解得:

$$T = \frac{P}{2\sqrt{1 - \frac{2r}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}; \quad M = \frac{2P \frac{r^2}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2r}{l} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$



7-57 解: 四球心连线构成一正四面体, 边长为 $2r=R$, A, B, C 三点是下面三球的球心连线, G 是三角形的中心, D 是顶球的球心, 受力分析如图示。



设 $\overrightarrow{AD} = \vec{r}_A$, $\overrightarrow{BD} = \vec{r}_B$, $\overrightarrow{CD} = \vec{r}_C$
 $\overrightarrow{GD} = h\vec{k}$

$$\vec{r}_A = h\vec{k} + \overrightarrow{AG}, \quad \vec{r}_B = h\vec{k} + \overrightarrow{BG}, \quad \vec{r}_C = h\vec{k} + \overrightarrow{CG},$$

由对称性可知, $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$ 的大小相同, 方向不同, 所以:

$$\vec{F}_A = F\vec{r}_A/R; \quad \vec{F}_B = F\vec{r}_B/R; \quad \vec{F}_C = F\vec{r}_C/R;$$

由汇交力系平衡条件:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{P} = 0$$

$$(3F\frac{h}{R} - P)\vec{k} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG})\frac{F}{R} = 0$$

因为后三项之和在三角形 ABC 平面内, 和 $\vec{k}$ 无关, 所以得到

$$(3F\frac{h}{R} - P) = 0$$

$$(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG})\frac{F}{R} = 0$$

解得:

$$F = \frac{RP}{3h} = \frac{2rP}{3h}$$

由几何关系可知:

$$h = \sqrt{(2r)^2 - (\frac{2}{3}2r\cos 30^\circ)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}r$$

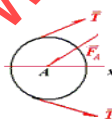
DAG 角为

$$\sin \alpha = \frac{h}{2r}; \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

对 A 球的受力分析如图, 由水平面内, 方向受力平衡得:

$$-F\cos \alpha + 2T\cos 30^\circ = 0$$

$$T = \frac{2rp\cos \alpha}{6h\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{18}P$$



7-62 解: 受力分析如图示板材总的受力 $\vec{R}$ 必须向右, 图示是极限情况. α 必须小于最大摩擦角. 可得:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 - (\frac{d}{2} - (\frac{b-a}{2}))^2}}{\frac{d}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{d}{2} - (\frac{b-a}{2})}{\frac{d}{2}}$$

由几何关系可知:

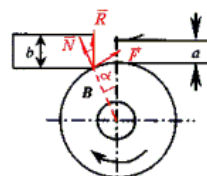
$$\frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 - (\frac{d}{2} - (\frac{b-a}{2}))^2}}{\frac{d}{2} - (\frac{b-a}{2})} = \tan \alpha \leq 0.1$$

$$(\frac{d}{2})^2 - (\frac{d}{2} - (\frac{b-a}{2}))^2 = 0.01(\frac{d}{2} - \frac{b-a}{2})^2$$

$$b = a + (\sqrt{1.01} - 1)d$$

即要求:

$$a < b \leq a + (\sqrt{1.01} - 1)d$$



7-67 解: 极限分析, 受力分析如图所示, 先总体分析知 $T=G$, 再分析 H 点可求出 N,

$$N=G$$

由对称性分析重物可知

$$F_F = G/2$$

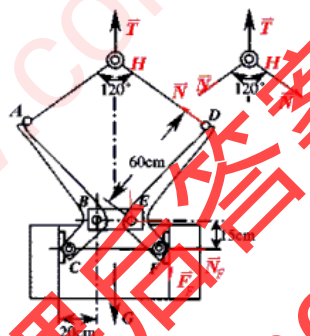
再分析 DEF 曲臂来决定摩擦系数 f 。假定绳的作用力 N 垂直于 DE, 取 E 为矩心,

$$fN_F 20 + N_F 15 = 60N = 60G$$

$$fN_F = G/2$$

求得: $f=0.15$

即摩擦系数要大于 0.15



7-69 解: 受力分析如图所示, A 块重 500N, 轮轴 B 重 1000N, 分析 A 重块可知最大摩擦力

$$F_A = T_A = 0.5 * 500 = 250$$

假定 A 处先达到最大摩擦力时分析 B 轮, 求出 C 重物的重量 $W_C = T_C$

$$T_C (10 + 10 \frac{4}{5}) = 15 T_A = 15 * 250$$

$$T_C = 208.4$$

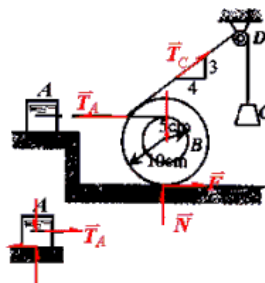
再假定 B 轮先达到最大摩擦力, 求 T_C , 以水平绳和原轮接触点为矩心有

$$10 F = 2 N = (10 - 5 * \frac{4}{5}) T_C = 6 T_C$$

$$\frac{3}{4} T_C + N - 1000 = 0$$

求得 $T_C = 266.7$

所以, 能保持平衡的 C 重物的最大重量为 208.4N



7-71 解: 受力分析如图所示, 在 B 块不下落的临界条件下, B 块的垂直方向的平衡方程为:

$$N \cos \alpha + F \sin \alpha - Q = 0$$

$$F = fN$$

可求得:

$$N = \frac{Q}{(\cos \alpha + f \sin \alpha)}$$

$$F = \frac{fQ}{(\cos \alpha + f \sin \alpha)}$$

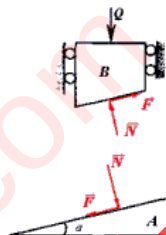
分析 A 重块水平方向平衡条件, 可求得最小推力 $P_{\min}$

$$N \sin \alpha - F \cos \alpha - P_{\min} = 0$$

$$P_{\min} = Q \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

同样的分析对 B 不被上推的临界情况时, F 改变了方向, 相当于把 f 改为 $-f$ 就可求得 $P_{\max}$, 即

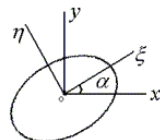
$$P_{\max} = Q \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$



8.1 解 建立图示 oxy , $o\xi\eta$ 坐标系,

在 $o\xi\eta$ 坐标系里的基矢和 oxy 坐标系基矢的关系为

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}$$



$$\vec{r} = [x \ y \ 0] \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = [x \ y \ 0] \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \\ = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \vec{i} + (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \vec{j}$$

$$\therefore J_{\xi\eta} = \sum m_i \xi_i \eta_i =$$

$$\sum m_i (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) (y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha) = 0$$

即

$$\sum m_i x_i y_i (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (\sum m_i x_i - \sum m_i y_i) \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$I_{xy} \cos 2\alpha = \frac{1}{2} (I_y - I_x) \sin 2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

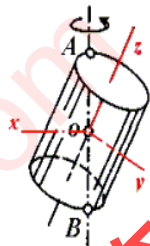
$$\text{即: } \alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right)$$

8.4 解 建立图示 oxy 坐标系

显然 oxy 是中心主坐标,

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}mh^2$$

AB 的方向于:



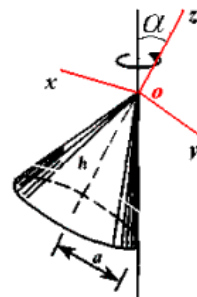
8.5 解 建立图示 $oxyz$ 坐标系, 显然

$oxyz$ 是主坐标,

$$I_x = I_y = \frac{3}{5}(\frac{a^2}{4} + h^2)m$$

$$I_z = \frac{3}{10}ma^2$$

母线的方向和 z 轴的夹角 α :



$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + h^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{h}{\sqrt{4a^2 + h^2}}$$

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$J_{AB} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$$

所以:

$$= \frac{ma^2}{6} \frac{6a^2 + 5h^2}{4a^2 + h^2}$$

$$J_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$$

所以:

$$= \frac{ma^2}{20} \frac{(3a^2 + 18h^2)}{(a^2 + h^2)}$$

8.6 解 建立图示 cXY 坐标系,

可以证明 X, Y 是惯性主轴, 且

$$J_X = J_Y$$

$\therefore y$ 轴是对称轴,

$\therefore J_{XY} = J_{ZY} = 0$, 又因为

xy 平面对称面, 所以

$$J_{XZ} = J_{YZ} = 0, \quad XY \text{ 轴是}$$

主轴。再证明 $J_X = J_Y$

设 J_Y 已求得, 则由对称性知 $J_\xi = J_Y$, 在 cXY 平面内,

$$J_Y = J_\xi = J_X \cos^2 \alpha + J_Y \sin^2 \alpha = J_X \cos^2 \alpha + J_Y \sin^2 \alpha$$

$$J_Y (1 - \sin^2 \alpha) = J_X \cos^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad J_X = J_Y$$

由此可见, 求得 J_Y 就是过质心任一轴的转动惯量。

计算正 n 边形内任一三角形 ACB 的 J_x, J_y

$$J_x = \int_0^{R \cos \alpha} y^2 \rho 2x dy = \frac{m}{2n} R^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

$$J_y = \int_0^{R \cos \alpha} \frac{1}{12} \rho 2x (2x)^2 dy = \frac{m}{6n} R^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

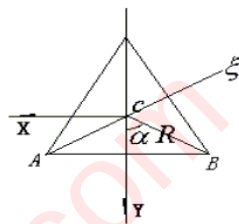
由平面薄板 $J_z = J_x + J_y$, 正 n 边形对过质心 C 的整体 J_z 有

$$J_z = \sum J_z = n(J_x + J_y)$$

$$J_z = J_X + J_Y = 2J_Y = n(J_x + J_y)$$

$$J_Y = \frac{n}{2} (J_x + J_y) = \frac{n}{2} \left(\frac{m}{2n} R^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + \frac{m}{6n} R^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)$$

$$\text{即 } J_Y = \frac{m}{12} R^2 (2 + \cos \frac{2\pi}{n})$$



8.7 解 建立图示 oxy 坐标系

显然 oxy 是主坐标,

$$I_x = m \rho^2$$

$$I_z = I_y = \frac{1}{4} m a^2 + m r^2$$

关于 y 轴的外力矩 $L_y = -Nr + pr$

欧拉动力学方程在 y 轴上的投影为:

$$I_y \varepsilon_y - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z = L_y \quad (1)$$

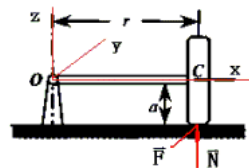
刚体作规则进动: $\vec{\omega} = -\frac{r}{a} \Omega \vec{i} + \Omega \vec{k}$, $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = -\frac{r}{a} \Omega^2 \vec{j}$

代入欧拉动力学方程

$$-I_y \frac{r}{a} \Omega^2 + (I_z - I_x) \frac{r}{a} \Omega \Omega = -Nr + pr$$

化简得: $-\frac{\Omega^2}{a} m \rho^2 = p - N$

$$\therefore N = p + \frac{\Omega^2}{a} m \rho^2 \doteq 2.69 \times 10^4$$



8.10 解 在随体 $oxyz$ 主坐标下, 规则进动时:

$\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = \Omega$, $\dot{\phi} = \omega$ 且 Ω, ω 为常数. 角速度在随体

系上的投影为:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi & \dot{\omega}_x &= \omega \omega_y \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi & \dot{\omega}_y &= -\omega \omega_x \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \omega & \dot{\omega}_z &= 0\end{aligned} \Rightarrow$$

8.9 解 在主坐标下表示角速度, 角加速度, 动量矩和动能:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k}$$

$$\vec{H}_0 = J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k}$$

$$T = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2)$$

动量矩矢量和角加速度矢量垂直有:

$$\vec{H}_0 \cdot \vec{\varepsilon} = 0 = J_x \omega_x \dot{\omega}_x + J_y \omega_y \dot{\omega}_y + J_z \omega_z \dot{\omega}_z$$

$$\text{动能的变化率: } \frac{dT}{dt} = J_x \omega_x \dot{\omega}_x + J_y \omega_y \dot{\omega}_y + J_z \omega_z \dot{\omega}_z = 0$$

即动能 T 为常数

因为 z 为对称轴有: $I_x = I_y = I_1$, $I_z = I_3$

$$I_1 \dot{\omega}_x - (I_1 - I_3) \omega_y \omega_z = L_x$$

由欧拉动力学方程 $I_1 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1) \omega_x \omega_z = L_y$

$$I_3 \dot{\omega}_z = L_z = 0$$

得:

$$L_x = I_3 \dot{\omega}_x + (I_3 - I_1)(\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) = I_3 \dot{\omega}_x (1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3} \frac{\Omega}{\omega} \cos \theta)$$

$$L_y = I_3 \dot{\omega}_y + (I_3 - I_1)(-\omega_x \omega_z - \dot{\omega}_y) = I_3 \dot{\omega}_y (1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3} \frac{\Omega}{\omega} \cos \theta)$$

$$L_z = I_3 \dot{\omega}_z (1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3} \frac{\Omega}{\omega} \cos \theta) = 0$$

$$\therefore \vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k} = I_3 (1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3} \frac{\Omega}{\omega} \cos \theta) \vec{\varepsilon}$$

$$\therefore \vec{L} = I_3 (\vec{\Omega} \times \vec{\omega}) (1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3} \frac{\Omega}{\omega} \cos \theta) \quad \text{得证}$$

8.12 解由欧拉动力学方程:

$$I_1 \dot{\omega}_\xi + (I_3 - I_1) \omega_\eta \omega_\zeta = -\lambda I_3 \omega_\xi \quad (1)$$

$$I_2 \dot{\omega}_\eta + (I_1 - I_3) \omega_\xi \omega_\zeta = -\lambda I_3 \omega_\eta \quad (2)$$

$$I_3 \dot{\omega}_\zeta = -\lambda I_3 \omega_\zeta \quad (3)$$

由 (3) 得: $\frac{d\omega_\zeta}{\omega_\zeta} = -\lambda dt$ 且 $t=0$ 时, $\omega_\zeta = \omega_{\zeta 0}$

$$\therefore \omega_\zeta = \omega_{\zeta 0} e^{-\lambda t} \quad (4)$$

将 (4) 代入 (1) (2) 得:

$$\frac{d\omega_\xi}{dt} = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_\eta \omega_{\zeta 0} e^{-\lambda t} - \lambda \frac{I_3}{I_1} \omega_\xi \quad (5)$$

$$\frac{d\omega_\eta}{dt} = -\frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_\xi \omega_{\zeta 0} e^{-\lambda t} - \lambda \frac{I_3}{I_1} \omega_\eta \quad (6)$$

$$\frac{(5)}{\omega_\xi} + \frac{(6)}{\omega_\eta} \Rightarrow \omega_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} = -\lambda \frac{I_3}{I_1} (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2)$$

$$\text{即 } d(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) = -2\lambda \frac{I_3}{I_1} (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) dt$$

$$\therefore \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = A e^{-\frac{2\lambda I_3}{I_1} t} \quad (A \text{ 为常数})$$

$$\text{设 } \omega_\xi = \sqrt{A} e^{-\frac{\lambda I_3}{I_1} t} \sin \varphi(t)$$

$$\omega_\eta = \sqrt{A} e^{-\frac{\lambda I_3}{I_1} t} \cos \varphi(t)$$

(7) 代入 (5) 式化简得:

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_{\zeta 0} e^{-\lambda t}$$

$$\therefore \varphi = -\frac{I_3 - I_1}{\lambda I_1} \omega_{\zeta 0} e^{-\lambda t} + \varepsilon \quad \text{令 } n = \frac{I_3 - I_1}{\lambda I_1} \omega_{\zeta 0}$$

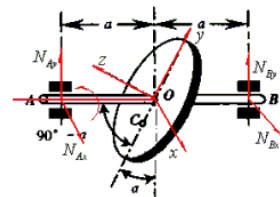
$$\text{则 } \varphi = \frac{n}{\lambda} e^{-\lambda t} + \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ 为常数}) \quad \text{记 } a = \sqrt{A}$$

$$\omega_\xi = a \exp\left(-\frac{\lambda I_3}{I_1} t\right) \sin\left(\frac{n}{\lambda} e^{-\lambda t} + \varepsilon\right)$$

$$\text{即 } \omega_\eta = a \exp\left(-\frac{\lambda I_3}{I_1} t\right) \cos\left(\frac{n}{\lambda} e^{-\lambda t} + \varepsilon\right)$$

$$\omega_\zeta = \omega_{\zeta 0} e^{-\lambda t}$$

8.21 解 建立图示随体坐标 xyz 坐标系, 重力引起的约束反力为非约束反力, 只分析约束反力且在随体标架中分解



$$N_{Ax}, N_{Bx}, N_{Ay}, N_{By}$$

x, y, z 都是惯性主轴:

$$I_x = \frac{1}{2} Mr^2 + Me^2, \quad I_y = \frac{1}{4} Mr^2 + Me^2, \quad I_z = \frac{1}{2} Mr^2 + Me^2$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega \sin \alpha, \quad \omega_z = \omega \cos \alpha \quad \text{且为常数}$$

代入欧拉动力学微分方程:

$$-(I_y - I_z) \omega_y \omega_z = (N_{By} - N_{Ay}) a$$

$$0 = (N_{Ax} - N_{Bx}) a \cos \alpha$$

$$0 = (N_{Ax} - N_{Bx}) a \sin \alpha$$

由质心动量定理:

$$Me \sin \alpha \omega^2 = N_{Ay} + N_{By}$$

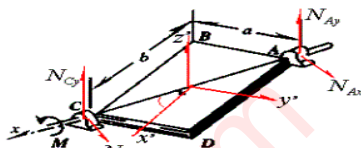
$$N_{Ax} + N_{Bx} = 0$$

可求得: $N_{Ax} = N_{Bx} = 0$

$$N_{By} = \frac{1}{2} Me \sin \alpha \omega^2 + \frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{16a} M (r^2 + 4e^2)$$

$$N_{Ay} = \frac{1}{2} Me \sin \alpha \omega^2 - \frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{16a} M (r^2 + 4e^2)$$

8.22 解 建立如图示固结在板的质心上的中心主坐标 $\alpha x'y'z'$



$$I_x = \frac{1}{12} m a^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

A, C 处的约束反力如图分解为垂直于 x 轴的

$$N_{Ay}, N_{Ax}, N_{Cy}, N_{Cx}$$

平板关于 AC 轴的转动惯量为

$$J_{AB} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{1}{12} m a^2 \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{12} m b^2 \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{m a^2 b^2}{6(a^2 + b^2)}$$

转动角加速度和角速度以及在随体坐标中的分量

$$\varepsilon = \frac{M}{J_{AB}} = \frac{6(a^2 + b^2)M}{m a^2 b^2}; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cos \alpha i + \varepsilon \sin \alpha j$$

$$\omega = \frac{6(a^2 + b^2)M}{m a^2 b^2} t; \quad \bar{\omega} = \omega \cos \alpha i + \omega \sin \alpha j$$

由质心的动量定理和欧拉动力学微分方程 (不考虑静反力):

$$0 = N_{Ax} + N_{Cx}$$

$$0 = N_{Ay} + N_{Cy}$$

$$I_x \varepsilon \cos \alpha = (N_{Ay} - N_{Cy}) \frac{a}{2} + M \cos \alpha$$

$$-I_y \varepsilon \sin \alpha = (N_{Ax} - N_{Cx}) \frac{b}{2} - M \sin \alpha$$

$$(I_x - I_y) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = (N_{Cx} - N_{Ax}) \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

求得:
$$N_{Ay} = -N_{Cy} = \frac{M(a^2 - b^2)}{2ab\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$N_{Cx} = -N_{Ax} = \frac{m}{24} \omega^2 \sin 2\alpha \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

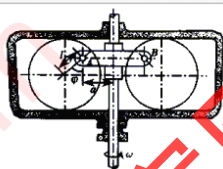
未命名 - 画图

文件(F) 编辑(E) 查看(V) 图像(I)

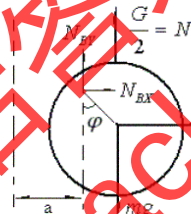
http://202.38.94.225 - 平时作业 - Microsoft Internet Explorer

9.3 调速器由两个质量为 m 的均质圆盘构成, 圆盘偏心地铰接于距转轴为 a 的 A, B 两点. 调速器绕铅垂轴以等角速 ω 转动, 两圆盘中心到悬挂点的距离为 l . 调速器壳重为 G , 并放在两盘上, 如不计摩擦, 试求角速度 ω 与圆盘中心偏离铅垂位置引起的偏角 φ 的关系.

题 目



9.3 解 主动力、约束力和惯性力分析如右图



对 B 点取矩有:

$$\left(\frac{G}{2} + mg\right)l \sin \varphi = m\omega^2(a + l \sin \varphi)l \cos \varphi$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{\left(\frac{G}{2} + mg\right)}{m(a + l \sin \varphi)}} \cdot g \varphi$$

答 案

完毕

Internet

要获得帮助, 请在“帮助”菜单中, 单击“帮助主题”。

633,594

平时作业 - Microsoft Internet Explorer

地址: http://202.38.94.225/webexam/home/work/

收藏夹

添加... 整理...

链接

欢迎光临瀚海星云888站

普特英语听力 - 英语听力的天空

中国科学技术大学

Google

安徽电信Internet业务计费目...

网上营业厅 安徽移动

校内网 - 李勇

中国科学技术大学电子邮件系统

英语世界 英语书刊

http---www.cnn.com-

Subscene - Setting the stage for ...

网络通

原放英语小说 英语短文 英语...

网易电子邮箱

Computational Methods

060990 16的相册

班级共用ftp

51test 计算机化考试网上报名...

mygmail

中国工商银行中国网站

第二十五次: 第1题 (7-2)

第二十六次: 第1题 (7-1)

第二十七次: 第1题 (7-4)

第二十八次: 第1题 (7-6)

第二学期:

第1次: 第1题 (9-3)

第2次: 第1题 (9-1)

第3次: 第1题 (16-)

第4次: 第1题 (16-)

第5次: 第1题 (6-)

第6次: 第1题 (6-)

第7次: 第1题 (8-2)

第8次: 第1题 (8-7)

第9次: 第2题 (8-2)

第10次: 第1题 (14-)

第11次: 第1题 (10-)

9.8 如图所示, 均质杆 AB 斜靠在汽车上, a, b 两端的静滑动摩擦系数均为 0.4, 试求杆 AB 不致滑动时汽车的最大加速度。



9.8 解 主动力、约束力和惯性力分析如图。

对 A 点取矩有:

$$\left(m \frac{1}{2} + N_B\right) l \sin 60^\circ + (F_B - mg \frac{1}{2}) l \cos 60^\circ = 0$$

对 B 点取矩有:

$$\left(F_A - m \frac{1}{2}\right) l \sin 60^\circ + (mg \frac{1}{2} - N_A) l \cos 60^\circ = 0$$

又 $\sum F_y = N_A + F_B - mg = 0$

利用摩擦临界条件 $F_A = f N_A$, $F_B = f N_B$

解得: $a = 0.24g = 2.37 \text{ (m/s)}$

同时可检查当 $a = 0.24g$, $N_A > 0$, 所以汽车最大加速度为 $a = 2.37 \text{ (m/s)}$

9.9 解：导板 CD 的主动力、约束力和惯性力分析如右图，O 到 CD 的距离为
 $y = r + e \cos \varphi$

$$\dot{y} = -e\omega^2 \cos \varphi$$

惯性力： $S_{CD} = me\omega^2 \cos \varphi$

弹簧的作用力：

$$\begin{aligned} F &= k(b - (r + e - (r + e \cos \varphi))) \\ &= k(b - e(1 - \cos \varphi)) \end{aligned}$$

平衡方程 $N + S_{CD} - F - mg = 0$

$$N = k(b - e(1 - \cos \varphi)) + mg - me\omega^2 \cos \varphi$$

若要 CD 始终和偏心圆盘接触，则要 $N > 0$ 。

$$k(b - e(1 - \cos \varphi)) \geq me\omega^2 \cos \varphi - mg$$

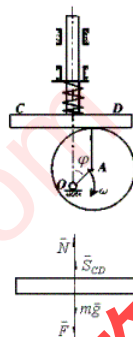
$$k \geq \frac{m(e\omega^2 \cos \varphi - g)}{b - e(1 - \cos \varphi)},$$

只讨论 $b > 2e$ 的情况：

(1) $b > 2e$, $e\omega^2 > g$ 的情况， $\varphi = 0$ 时要满足

$$k \geq \frac{m(e\omega^2 - g)}{b} \text{ 就能满足所有其他 } \varphi \text{ 时的条件。}$$

(2) $b > 2e$, $e\omega^2 < g$ 任意弹簧刚度多能满足条件。



9.10 解：主动力、约束力和惯性力分析如右图，对圆盘 O 取矩有

$$-J_0 \varepsilon - T_1 R + T_2 r = 0 \quad (1)$$

对左边重物：

$$S_1 = m_1 R \varepsilon$$

$$\therefore T_1 = m_1 g + m_1 R \varepsilon$$

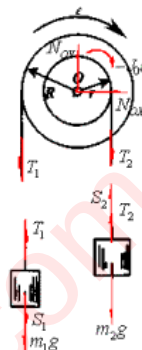
对右边重物：

$$S_2 = m_2 r \varepsilon$$

$$\therefore T_2 = m_2 g + m_2 r \varepsilon$$

T_1, T_2 代入方程 (1) 圆盘的角加速度

$$\varepsilon = \frac{(m_2 r - m_1 R)g}{J_0 + m_2 r^2 + m_1 R^2}$$



9.11 解: 主动力、约束力和惯性力分析和简化如右图。惯性力作用点在距 O 点 $2l/3$

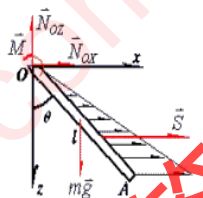
$$S = \frac{1}{2} l \sin \theta m \omega^2$$

对 O 点取矩:

$$M - mg \frac{1}{2} \sin \theta + S \frac{2}{3} l \cos \theta = 0$$

解得:

$$M = mg \frac{l}{2} \sin \theta - \frac{1}{6} ml^2 \omega^2 \sin 2\theta$$



9.13 解: 主动力、约束力和惯性力分析和简化如右图。杆上简化惯性力的作用点分别在距 O 点的 $2a/3$ 和 $2b/3$ 处

$$S_b = m_b \frac{b}{2} \cos \varphi \omega^2$$

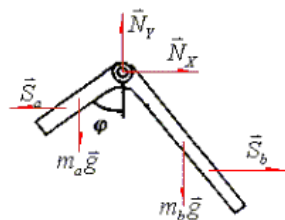
$$S_a = m_a \frac{a}{2} \sin \varphi \omega^2$$

平衡方程取对 O 点取矩:

$$m_a g \frac{a}{2} \sin \varphi - m_b g \frac{b}{2} \cos \varphi + S_b \frac{2}{3} b \sin \varphi - S_a \frac{2}{3} a \cos \varphi = 0$$

解得:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(b^2 \cos \varphi - a^2 \sin \varphi)}{(b^3 - a^3) \sin 2\varphi}}$$

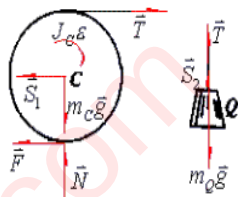


9.16 解: 设重物下落的加速度为 a_Q , 由圆柱只滚不滑的

条件可得: $a_Q = a_C + r\varepsilon$

a_C, ε 分别是柱心的加速度和

圆柱的角加速度, 主动力、约束力和惯性力分析和简化如右图。



$$S_1 = m_C a_C \quad S_2 = m_Q a_Q$$

对圆柱列平衡方程:

$$\begin{aligned} T - m_C a_C - F &= 0 \\ (T + F)r - J_C \varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

对重物列平衡方程: $T + m_Q a_Q - m_Q g = 0$

解得圆柱的角加速度:

$$\varepsilon = \frac{m_Q g}{\left(\frac{3}{4}m_C + 2m_Q\right)r} = \frac{2g}{7r}$$

9.17 解: 主动力、约束力和惯性力分析和简化如右图。

$$\vec{S}_X = -m\vec{a}_X, \quad \vec{S}_Y = -m\vec{a}_Y$$

对火箭列平衡方程:

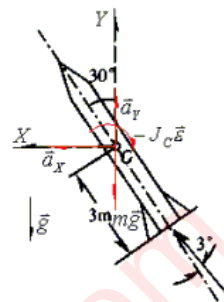
$$\begin{aligned} T \sin 33^\circ - ma_X &= 0 \\ T \cos 33^\circ - ma_Y - mg &= 0 \\ -J_C \varepsilon + 3T \sin 3^\circ &= 0 \end{aligned}$$

解得:

$$a_X = 7.26 \text{ m/s}^2$$

$$a_Y = 1.38 \text{ m/s}^2$$

$$\varepsilon = \frac{628}{J_C} \text{ rad/s}^2$$



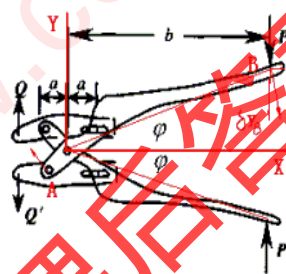
10.1 解 Q 作用力处的虚位移和 A 处相同, 如图示。由对称性只要分析 A, B 两处的虚位移。取 φ 为广义坐标

$$\begin{aligned}\delta y_B &= b\delta\varphi \\ \delta y_A &= a\delta\varphi\end{aligned}\quad (1)$$

由虚位移原理:

$$2p\delta y_B - 2Q\delta y_A = 0 \quad (2)$$

由 (1) (2) 可解得: $Q = \frac{b}{a}p$



10.2 解 机械只有一个自由度, 取广义坐标为轮轴转角 φ , 若转

过角度 $\delta\varphi$, 则 A 点的虚位移如图

$$\begin{aligned}\delta x_A &= \frac{h\delta\varphi}{2\pi}, \\ \delta\alpha &= \frac{\delta x_A}{a \cos \alpha} = \frac{h\delta\varphi}{2\pi a \cos \alpha}\end{aligned}$$

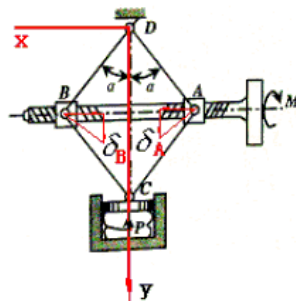
C 点虚位移

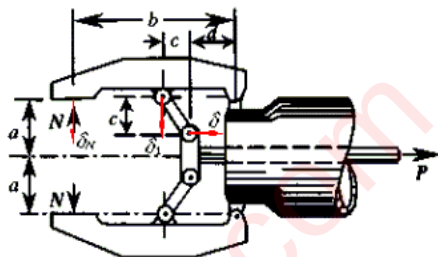
$$\begin{aligned}\delta y_c &= 2a \sin \alpha \delta\alpha = \frac{2a \sin \alpha h \delta\varphi}{2\pi a \cos \alpha} \\ &= \frac{h}{\pi} \operatorname{tg} \alpha \delta\varphi\end{aligned}$$

由虚位移原理

$$M \cdot \delta\varphi - p \delta y_c = 0$$

$$p = \frac{M \delta\varphi}{\delta y_c} = \frac{M \delta\varphi}{\frac{h}{\pi} \operatorname{tg} \alpha \delta\varphi} = \frac{M \pi \operatorname{tg} \alpha}{h}$$





10.3 解 用虚速度法分析如上图所示

$$\delta = \delta_1 = (c+d)\delta\varphi$$

$$\delta_N = b\delta\varphi$$

由对称性和虚位移原理：

$$P \cdot \delta - 2N \cdot \delta_N = 0$$

$$P(c+d)\delta\varphi - 2Nb\delta\varphi = 0$$

$$N = \frac{c+d}{2b} P$$

10.5 解 虚速度法分析如图示

$$\delta_A = \delta / \cos \varphi = \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta\varphi,$$

$$\delta_C = a\delta\varphi$$

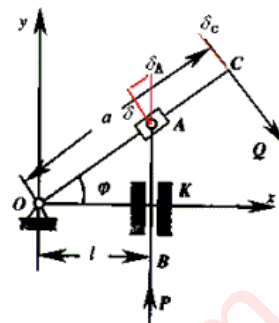
$$\delta_B = \delta_A$$

由虚位移原理：

$$P \cdot \delta_A - Q \cdot \delta_C = 0$$

$$P \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta\varphi - Qa\delta\varphi = 0$$

$$P = \frac{a}{l} Q \cos^2 \varphi$$



10.10 解 虚速度法分析
如图示

$$\delta_A = a\delta\theta = \delta_C,$$

$$\delta_B = 2a\delta\theta$$

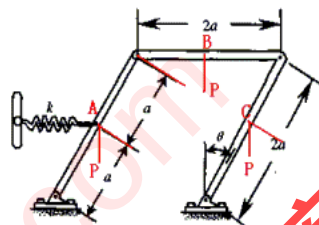
由虚位移原理：

$$-ka \sin \theta \cdot \delta_A \cos \theta + 2P \cdot \delta_A \sin \theta + P \delta_C \sin \theta = 0$$

$$-ka \cdot \delta_A \cos \theta + 4P \cdot \delta_A = 0$$

$$\cos \theta = \frac{4P}{ka}$$

代如具体数值得： $\theta \doteq 11.48^\circ$



10.11 解 取 \$\delta_C\$ 为 \$C\$ 点的
虚位移表示 \$B, D\$ 处的虚位
移如图示。

$$\delta_B \cos 30^\circ = \delta_C \cos 60^\circ$$

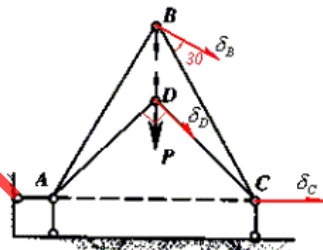
$$\delta_D = \delta_C \cos 45^\circ$$

$$\delta_D = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_C, \quad \delta_B = \frac{\sqrt{3}}{3} \delta_C$$

则由虚位移原理 \$(P-F)\delta_D \cos 45^\circ + F\delta_B \cos 60^\circ = 0\$

解得：

$$F = \frac{3+\sqrt{3}}{2} P$$



10.15 解 取 θ 为广义坐标, 解除 A 处 X 方向的约束, $\delta X_A, \delta Y_I$, 表示 A 和 I 处的虚位移如图所示。

$$X_A = 2L \cos \theta$$

$$Y_I = 5L \sin \theta$$

$$\delta X_A = -2L \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta Y_I = 5L \cos \theta \delta \theta$$

则由虚位移原理 $P \delta Y_I + N_{AX} \delta X_A = 0$

$$P 5L \cos \theta - N_{AX} 2L \sin \theta = 0$$

得:

$$N_{AX} = \frac{5}{2} \cot \theta \frac{P}{L}$$

同理解除 A 处 Y 方向的约束, $\delta Y_A, \delta Y_I$, 表示 A 和 I 处的

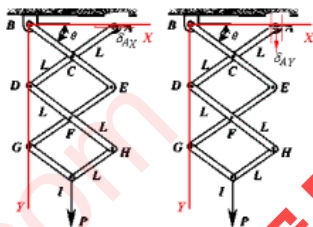
虚位移如图所示。 $\delta Y_A = 2L \cos \theta \delta \theta$, $\delta Y_I = L \cos \theta \delta \theta$

$$P \delta Y_I + N_{AY} \delta Y_A = 0$$

则由虚位移原理

$$N_{AY} = -\frac{P}{2}$$

由对称性可得: $N_{BY} = N_{AY}$, $N_{BX} = -N_{AX}$



10.17 解 定常、完整、理想约束, 系统主动力重力为有势力, 可应用势能原理, 轻分析, 系统自由度为 3, 取 3 个广义坐标 θ_1, θ_3, x_A 以 AD 面为零势能面, 且假定 $x_A = 0$

$$\text{则 } y_{O_1} = -\frac{L_1}{2} \sin \theta_1, \quad y_{O_2} = -L_1 \sin \theta_1 - \frac{L_2}{2} \sin \theta_2$$

$$y_{O_3} = y_{O_2} - \frac{L_2}{2} \sin \theta_2 + \frac{1}{2} L_2 \sin \theta_3 \\ = -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} L_2 \sin \theta_3$$

系统总势能

$$V = mg \cdot y_{O_1} + mg \cdot y_{O_2} + mg \cdot y_{O_3}$$

$$\text{利用 } \sin \theta_2 = \frac{L_2 \sin \theta_3 - L_1 \sin \theta_1}{L_2}$$

$$\text{得 } V = -mg(L_1 \sin \theta_1 + L_3 \sin \theta_3)$$

$$\text{平衡状态 } \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_3} = 0$$

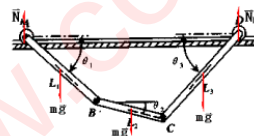
$$\text{得 } \theta_1 = 90^\circ, \quad \theta_3 = 90^\circ \quad \theta_2 = \arcsin \frac{|l_3 - l_1|}{l_2}$$

解法二: 由静力学分析, AB, CD 杆都是三力平衡, 从图可见。仅当

$$\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$$

AB, CD 杆才能平衡。此

$$\text{时 } \theta_2 = \arcsin \frac{|L_3 - L_1|}{L_2}$$



10.23 解 如图建立坐标系, 取 θ 为广义坐标, 则

$$y_A = b \sin \frac{\theta}{2}$$

$$y_B = 3b \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\delta y_A = \frac{b}{2} \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta$$

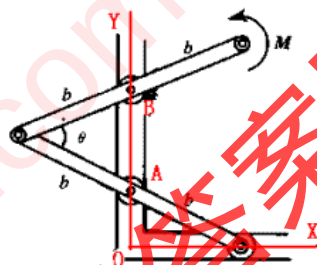
$$\therefore \quad (1)$$

$$\delta y_B = \frac{3b}{2} \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta$$

由虚位移原理: $-(mg \delta y_A + mg \delta y_B) + M \frac{1}{2} \delta \theta = 0 \quad (2)$

将 (1) 代入 (2) 得 $2mgb \cos \frac{\theta}{2} = \frac{M}{2}$

解得: $\theta = 2 \arccos \left(\frac{M}{4mgb} \right)$



10.24 解 如图建立坐标系, 取 θ 为广义坐标, 并假定 C 处机构的内力的虚功

可以忽略, $\bar{F}$ 为活塞的作用力, 和 OC 杆的夹角为 α 。

$$y_G = \frac{l}{4} \cos \theta$$

$$\delta y_G = -\frac{l}{4} \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta B = b \delta \theta, \quad \delta B_F = \delta B \sin \alpha = b \delta \theta \sin \alpha$$

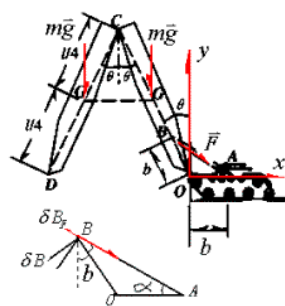
$$\alpha = \frac{90^\circ - \theta}{2}$$

$$\therefore \quad \delta B_F = b \sin \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right)$$

由虚位移原理得: $-2mg \delta y_G - F \delta B_F = 0$

$$\frac{l}{2} mg \sin \theta - b \sin \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right) F = 0$$

$$\therefore \quad F = \frac{mgl \sin \theta}{2b \sin \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right)}$$



10.26 解 如图建立坐标系, 取 θ 为广义坐标, AA' 和 BB' 刚体是平动刚体, 所以有

$$y_A = y_{A'} = d_A \sin \theta$$

$$y_B = y_{B'} = d_B \sin \theta$$

$$\delta y_A = d_A \cos \theta \delta \theta$$

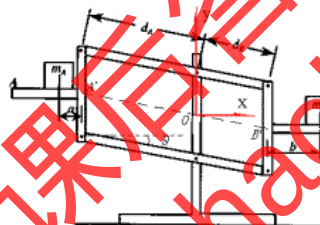
$$\delta y_B = -d_B \cos \theta \delta \theta$$

由虚位移原理:

$$-m_A g \delta y_A - m_B g \delta y_B = 0$$

$$\therefore -m_A g d_A \cos \theta \delta \theta + m_B g d_B \cos \theta \delta \theta = 0$$

即 $m_A d_A = m_B d_B$ 命题得证



10.27 解 如图建立坐标系, 取 θ 为广义坐标, Ox 所在水平面为零势能面, 弹簧原长为势能零点, 则总势能为:

$$V = mg \frac{l}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} k (\overline{AB} - 1.2)^2$$

代入数据 $m = 2 \text{ kg}$, $l = 3 \text{ m}$, $k = 4 \text{ N/m}$

$$V = 9.8 \times 3 \cos \theta + 2(\overline{AB} - 1.2)^2 \quad (1)$$

$$\overline{AB}^2 = 9 + 3.6^2 - 6 \times 3.6 \cos \theta \quad \text{代入 (1) 化简可得}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{21.96 - 21.6 \cos \theta}$$

$$V = 46.8 - 13.8 \cos \theta - 4.8 \sqrt{21.96 - 21.6 \cos \theta}$$

由势能原理:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \text{求的平衡位形}$$

$$13.8 \sin \theta - \frac{2.4 \times 21.6 \sin \theta}{\sqrt{21.96 - 21.6 \cos \theta}} = 0$$

解得: $\theta = 0^\circ$, $\theta = \pi$, $\theta = \arccos(0.3633)$

$$\text{又 } \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 13.8 \cos \theta - 51.84 \left(\frac{\cos \theta}{\overline{AB}} - \frac{10.8 \sin \theta}{\overline{AB}^3} \right) \quad (2)$$

将 $\cos \theta = 0.3633$ 代入 (2) 得: $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 9.15 > 0$

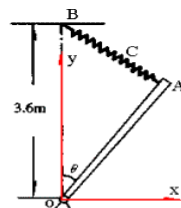
所以 $\theta = \arccos(0.3633) = 68.7^\circ$ 时, 所以平衡是稳定的。

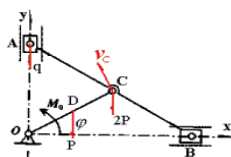
将 $\theta = 0$ 代入 (2) 显然 $\partial^2 V / \partial \theta^2 < 0$,

所以 $\theta = 0$ 时平衡是不稳定的。

将 $\theta = \pi$ 代入 (2) 得 $\partial^2 V / \partial \theta^2 = -5.95 < 0$,

所以 $\theta = \pi$ 时平衡是不稳定的。



$$\therefore \ddot{\phi} = \frac{2M_0 - (5P - 4q)a \cos \phi}{2a^2(3P + 4q)} g$$


11.9 解 约束完整、理想, 自由度为 1, 取广义坐标为 φ , 由速度分析知:

$$v_{O_2} = 2r\dot{\varphi}$$

$$v_{O_3} = 4r\dot{\varphi} = v_D$$

$$v_C = 0$$

$$\omega_2 = \frac{2r\dot{\varphi}}{r} = 2\dot{\varphi}; \quad \omega_3 = 0$$

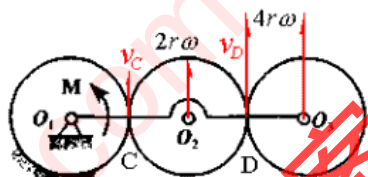
$$\therefore \text{系统动能 } T = \frac{1}{2}mv_{O_2}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2}mv_{O_3}^2 = 11mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$\therefore \delta W = M\delta\varphi; \quad \therefore Q_\varphi = M$$

$$\text{由} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$22mr^2\ddot{\varphi} = M$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{22mr^2}$$



13-1 题解:

(1) 小球从高度 h 处自由下落, 由机械能守恒.

$$mgh = \frac{1}{2}mV_1^2$$

$$\text{可得 } V_1 = \sqrt{2gh}$$

(2) 小球以速度 V_1 与 M 进行碰撞, 由碰撞恢复系数 k , 可得

$$\text{碰后小球的速度 } u_1 = \frac{m - kM}{m + M}V_1$$

$$\text{碰后物体的速度 } u_2 = \frac{m(1+k)}{m+M}V_1$$

当 $k = m/M$ 时, 碰撞后小球 $u_1 = 0$

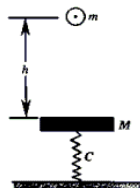
(3) 之后, 木板以速度 u_2 向下运动, 直弹受压缩最大量时, 木板的速度为 0。由机械能守恒得:

$$\frac{1}{2}Mu_2^2 + Mgs = \int_{x_0}^{x_0+s} cx dx \quad \text{其中 } cx_0 = Mg$$

$$\frac{1}{2}M \left(\frac{m(1+k)}{m+M}V_1 \right)^2 + Mgs = \frac{1}{2}c[(x_0+s)^2 - x_0^2]$$

$$\text{即得} \quad \frac{1}{2}cs^2 = \frac{Mm^2(1+k)^2}{(m+M)^2}gh$$

$$\text{解得} \quad S = \sqrt{\frac{2Mgh}{c} \frac{m(1+k)}{m+M}}$$



13-15 题解：

(1) 系统关于 O 点动量矩守恒：

$$mv_0 h = mvh + Mhl\omega$$

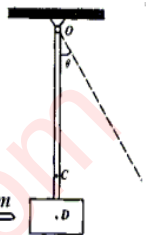
$$v = h\omega$$

$$\text{可得 } \omega = \frac{mv_0}{mh + Ml}$$

(2) 以后的运动过程机械能守恒：

$$Mgl(1 - \cos\theta) + mgh(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{解得 } v_0 = \frac{(Ml + mh)\sqrt{2hg(1 - \cos\theta)}}{mh}$$



13-18 题解：

(1) 系统关于 O 点动量矩守恒有：

$$mv_0 h \sin\varphi = mu_1 h \sin\varphi + Mu_2 h$$

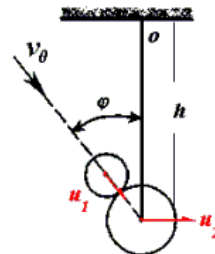
恢复系数定义：

$$u_2 \sin\varphi - u_1 = kv_0$$

连立求解可得：

$$u_1 = \frac{v_0(m \sin^2\varphi - kM)}{m \sin^2\varphi + M}$$

$$u_2 = \frac{mv_0 \sin\varphi(1 + k)}{m \sin^2\varphi + M}$$



13.22 解: 以物体 A 为研究对象。

- (1) 如果 $\frac{1}{2}mv_0^2 \leq mgl$, 即 A 物体上升的最大高度不超过 l , 绳子未拉直, 则

$$\text{由 } \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh, \text{ 得 } h = \frac{v_0^2}{2g}$$



- (2) 如果 $\frac{1}{2}mv_0^2 > mgl$, 则 A 物体达到高度 l 时的上升速度为

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$$

此后 A 物体带动 B 物体一起运动, 由动量守恒得

$$mv_1 = (M + m)v_2$$

设 AB 共同上升的高度为 h' , 则

$$\frac{1}{2}(M + m)v_2^2 = (M + m)gh'$$

解得

$$h' = \frac{m^2}{(M + m)^2} \left(\frac{v_0^2}{2g} - l \right)$$

所以 A 物体上升的最大高度为

$$H = l + h' = \frac{m^2}{(M + m)^2} \frac{v_0^2}{2g} + \frac{M^2 + 2Mm}{(M + m)^2} l$$

13-23 题解:

- (1) 系统关于 O 点动量矩守恒有:

$$0.9m_2u + \frac{1}{12}m_2(0.6^2)\omega + m_1u_1 = m_1v_0$$

- (2) 水平方向动量守恒:

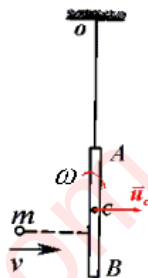
$$m_2u_e + m_1u_1 = m_1v_0$$

- (3) $k = 0$ 的恢复系数定义:

$$u_e + 0.1\omega = u_1$$

$m_2 = 80/g$; $m_1 = 0.5/g$ 代入连立求解可得:

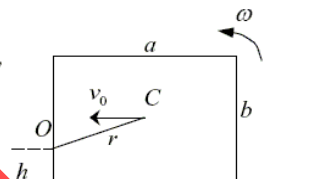
$$u_e = 3.1m/s; \quad \omega = 10.0; \quad u_A = 0.1m/s$$



13.28 解:

设凸台高 h ($h < \frac{b}{2}$),

因为 $k=0$, 则物体在 O 处受约束。



物体关于质心 C 的转动惯量

$$I_C = \iint_S \frac{m}{ab} dx dy \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = \frac{m}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

设 O 点到质心 C 的距离为 r , 则物体关于 O 点的转动惯量为

$$I_O = I_C + mr^2 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) + mr^2$$

由碰撞过程中动量矩守恒, 得

$$mv_0 \left(\frac{b}{2} - h \right) = I_O \omega$$

由机械能守恒, 得

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 + mg \left(\frac{b}{2} - h \right) = mgr$$

当 $b \gg h$ 时, h 可忽略, $r^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$

由以上方程, 可解出

$$v_{\min} = v_0 = \frac{2}{\sqrt{3b}} \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} - b)(a^2 + b^2)g}$$

13.25 解: 设物块碰撞后的速度为 u , 角速度为 ω , 则物块的动力学方程为

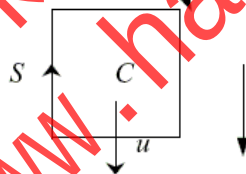
$$m(u - v) = -S$$

$$I_C \omega = S \cdot \frac{a}{2}$$

由于碰撞是完全弹性的, 故

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

$$\text{解得 } u = \frac{v}{5}, \quad \omega = \frac{12v}{5a}$$



13-30 解: B 自由下落与板相碰之前, 板与地面没有相对滑动, 即地面提供的是静摩擦力. 系统的机械能守恒

$$mgR = \frac{1}{2} mV^2$$

$$\therefore V = \sqrt{2gR}$$

水平向左, 为 B 碰撞前的速度。

碰撞是非弹性的. 恢复系数为 $k=0$ 。

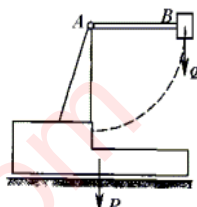
则系统水平方向动量守恒, 碰撞后的系统速度 u

$$u = \frac{PV}{P+Q}$$

$$\text{系统的动能 } T = \frac{1}{2} Mu^2 = \frac{1}{2} \frac{P+Q}{g} \left(\frac{PV}{P+Q} \right)^2 = \frac{P^2 R}{P+Q}$$

$$\text{由 } Fs = f(P+Q)s = \frac{Q^2 R}{P+Q}$$

$$\text{移动距离 } S = \frac{Q^2 R}{(P+Q)^2 f}$$



14.2 解: 受力分析如图

$$\vec{H}_0 = -I_G \alpha \vec{k},$$

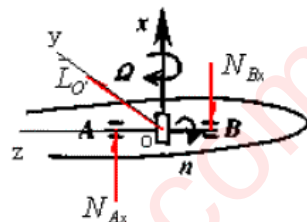
$$\omega = \frac{18000 \cdot 2\pi}{60} = 600\pi$$

陀螺力矩:

$$\vec{L}_G = \vec{H}_0 \times \vec{\Omega} = I \alpha \Omega \vec{j}$$

$$L_G = 12.3 \times 600\pi \times 0.3 = 6955.5$$

$$N_{Ax} = N_{Bx} = L_G / l = 6955.5 / 0.8 = 8694 \text{ (N)}$$



14.6 解 $\vec{H}_0 = I_z \omega \vec{k}$

$$\vec{\Omega} = \beta \vec{j} = \frac{2\pi}{\tau} \beta_0 \cos \frac{2\pi}{\tau} t \vec{j}$$

$$\vec{L}_O = -\vec{\Omega} \times \vec{H}_O$$

$$= -\frac{2\pi}{\tau} I_z \omega \beta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right) \vec{i}$$

最大陀螺力矩

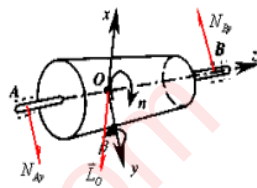
$$L_{O\max} = \frac{2\pi}{\tau} I_z \omega \beta_0 = \frac{2\pi}{\tau} m \rho^2 \omega \beta_0$$

$$= \frac{2\pi}{6} \times 2500 \times 0.9^2 \times \frac{1200 \times 2\pi}{60} \times \frac{6}{180} \times \pi$$

$$= 2.79 \times 10^4 (N \cdot m)$$

最大动压力

$$N_{\max} = \frac{L_{O\max}}{l} = \frac{2.79 \times 10^4}{1.9} = 14.7 (kN)$$



14.10 解 应用陀螺近似理论

$$\vec{H}_0 = I_z \omega \vec{k} = 0.55 m r \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \frac{v}{r_1} \vec{k} = \frac{720}{36 \times 0.75} \vec{k} = 16.7 \vec{k}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{v}{r_1} \vec{k} = \frac{720}{36 \times 200} \vec{k} = 0.1 \vec{k}$$

$$\text{回转力矩 } \vec{L}_O = -\vec{\Omega} \times \vec{H}_O = -0.55 m r \omega \vec{\Omega} = -1542 \vec{i}$$

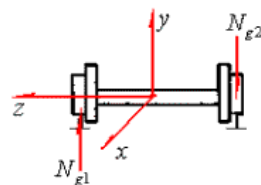
回转力矩引起的动压力

$$N_{\pm} = \frac{L_O}{l} = \frac{1542}{1.5} = 1028 (N)$$

车轮的重量引起的压力

$$N_p = \frac{mg}{2} = 6860 (N)$$

$$\text{所以 } N_{g2} = 7888 (N), \quad N_{g1} = 5832 (N)$$



15.6 解 由变质量物体的动量定理 $M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_r \frac{dM}{dt}$

取向上为运动的正方向, 则 $Ma = -Mg - u \frac{dM}{dt}$

即

$$M(a+g)dt = -u dM \Rightarrow (a+g)dt = -u \frac{dM}{M}$$

对上式求积分, 得 $\int_0^t (a+g)dt = \int_{M_1}^{M_2} u \frac{dM}{M}$

即 $(a+g)t = u \ln \frac{M_1}{M_2}$

当 $M_2 = \frac{1}{3} M_1$ 时

$$t = \frac{u \ln 3}{(a+g)} = \frac{2.5 \times 10^3 \times \ln 3}{4g + g} = 56 (s)$$

15.1 解 设火箭运动方向为 x 的正方向, 则运动方程为:

$$m \frac{dv}{dt} = -fmg - u \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{(a+fg)}{u} dt = -\frac{dm}{m}$$

$$\frac{(a+fg)}{u} T = \ln \frac{(1+k)m_s}{m_s}$$

$$T = \frac{u}{a+fg} \ln(1+k)$$

15-12 解 设取地面向上为正方向, 建立坐标系, 此时, 已拉起长度为 x 的绳子, 绳子即将并入时的速度为 0

$$\therefore m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = R - Q' + F$$

$$\therefore m\ddot{x} + \frac{1}{g} \dot{x} \gamma \frac{dx}{dt} = R - Q' - \beta \dot{x}^2$$

15.9 解 由变质量物体的动量定理

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dm}{dt} = \vec{F} = (mg \sin \beta - mgf \cos \beta) \vec{i}$$

取下滑方向为运动的正方向, 则

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg \sin \beta - mgf \cos \beta$$

即

$$v_0 dm = (mg \sin \beta - mgf \cos \beta) dt$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{g(\sin \beta - f \cos \beta)}{v_0} dt = \alpha dt$$

即

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$$

其中 $m = \frac{Q}{g} + \frac{1}{g} \gamma x \quad Q' = mg = Q + \gamma x$

$$\left(\frac{Q}{g} + \frac{1}{g} \gamma x \right) \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 \gamma}{g} = R - Q - \gamma x - \beta \dot{x}^2$$

$$\frac{Q + \gamma x}{g} \ddot{x} + \frac{\gamma \dot{x}^2}{g} = R - Q - \gamma x - \beta \dot{x}^2$$

$$\therefore (Q + \gamma x) \ddot{x} + (\gamma + \beta g) \dot{x}^2 + \gamma g x + (Q - R)g = 0$$

16.8 解 (1) 方法一: 由 $m\vec{a}_r = \vec{S}_e + \vec{S}_k + \vec{F}$
 $\vec{F} = \vec{0}$

将上式在 $\vec{v}_r$ 方向上投影得

$$m \frac{dv_r}{dt} = S_e \cos \theta \quad \because (\vec{S}_k \perp \vec{v}_r)$$

又

$$\vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\cos \theta = \frac{\dot{r}}{v_r}$$

$$m \frac{dv_r}{dt} = \frac{\dot{r}}{v_r} \cdot m r \omega^2$$

$$\text{积分得} \quad \frac{1}{2} v_r^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + c$$

$$v_r^2 - \omega^2 r^2 = \text{常量}$$

$$\text{即} \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{常量}$$

(1) 方法二: 由科氏惯性力不作功, 牵连惯性力可看成有势力, 势函数为:

$$V = -\frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

非惯性系中机械能守恒:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) = E$$

$$\text{即} \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{常量}$$

(2) 方法一: 由非惯性系中的动量矩定理

$$\frac{d}{dt} (m\vec{r} \times \vec{v}_r) = \vec{r} \times \vec{S}_e + \vec{r} \times \vec{S}_k = \vec{r} \times \vec{S}_k$$

$$\vec{S}_k = -2m\omega\vec{v}_r$$

$$\vec{r} \times \vec{S}_k = 2m\omega v_r \cos \theta \vec{k} = -2m\omega r \dot{\varphi} \vec{k}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}_r) = -2\omega r \dot{\varphi} \vec{k}$$

$$d(\vec{r} \times \vec{v}_r) = -2\omega r d\varphi \vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{v}_r = -(y\dot{x} - x\dot{y})\vec{k}$$

$$\therefore d(y\dot{x} - x\dot{y} - \omega r^2) = 0$$

$$y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{常数}$$

(2) 方法二: 直角坐标直接投影方程积分.....

15-15 解 设初速度为 0, 重力加速度为 9.8 m/s², 由燃料消耗量可知推力作用时间 45 秒。

由变质量体运动微分方程 $m \frac{dv}{dt} = -mg + v_r \frac{dm}{dt}$

$$\text{得:} \quad dv = -gdt + v_r \frac{dm}{m}$$

$$\text{积分可得:} \quad v_1 = 2100 \ln \frac{1000}{550} - 9.8 \times 45 = 814.5 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_1 + 2100 \ln \frac{500}{50} - 9.8 \times 45 = 5208.9 \text{ m/s}$$

16.12 证明:

(1) 取动坐标系 oxy 为参考系, 取

水面上一质点 m 分析

由于 $v_y = 0 \therefore a_y = 0 \quad S_k = 0$

$$\therefore o = \vec{S}_e + \vec{p} + m\vec{g}$$

(假设其他质点对其作用力垂直于表面)

于是有 $S_e \cos \theta = mg \sin \theta, \quad S_e = m\omega^2 x$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{x\omega^2}{g} = \frac{dy}{dx}$$

积分得 $y = \frac{1}{2}x^2\omega^2/g + c$

解: $x=0$ 时 $y=0 \therefore c=0$

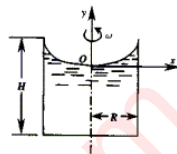
$$y = \frac{1}{2}x^2\omega^2/g \text{ 为所求曲线}$$

(2) 令 $x=R$, 则 $y = \frac{1}{2}R^2\omega^2/g$

设注入液体最大高度 H' , 则

$$\pi R^2 H - \pi R^2 H' = \int_0^y dy \cdot \pi x^2$$

$$H' = H - \frac{R^2\omega^2}{4g}$$



16.16 解:

取动坐标系 axz , 分析质点 m

受力如图

$$S_e = mx\omega^2$$

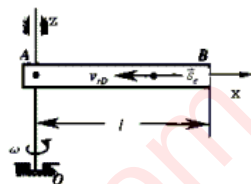
(光滑约束力和重力不影响 x 方向的运动)

于是有

$$m \frac{dv_x}{dt} = m\omega^2 x$$

$$\therefore \quad \int_{-v_{x0}}^0 v_x dv_x = \int_l^0 x\omega^2 dx$$

积分得 $v_{x0} = l\omega$ 即小球应有的初速度.



16.29 解：

取动坐标系 $oxyz$ 南东天系， y 坐标指

向东，由题可知

$$\vec{v} = 5\vec{i}$$

$$\vec{\omega} = -\omega \cos 30^\circ \vec{i} + \omega \sin 30^\circ \vec{k}$$

$$\vec{S}_k = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = -5m\omega \vec{j}$$

分析水面质点受力如图示，

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{S_k}{mg} = \frac{5\omega}{g} \\ &= 3.71 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{500} &= \tan \theta = 3.71 \times 10^{-5} \\ h &\doteq 0.019(m) \end{aligned}$$

即东西水面的高差.

证明：如右图示

$$\vec{r}_A = \vec{r} + l\vec{n}$$

$$l = -\vec{r} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{r}_A = \vec{r} + l\vec{n}$$

$$\dot{\vec{r}}_A = \frac{d}{dt}(\vec{r} + l\vec{n}) = \dot{\vec{r}} + \dot{l}\vec{n} + l\dot{\vec{n}}$$

$$l = -\vec{v} \cdot \vec{n} + \vec{r} \cdot \dot{\vec{n}} = \vec{v} - \vec{r} \cdot \frac{v}{\rho} \vec{n}$$

$$\therefore \dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}} + \left(-v - \frac{v}{\rho} \vec{r} \cdot \vec{n}\right) \vec{n} + l \frac{v}{\rho} \vec{n} = \frac{v}{\rho} (r_A \vec{n} + l \vec{n})$$

$$r_A^2 = r^2 + l^2$$

$$\therefore v_A^2 = \frac{v^2}{\rho^2} (r^2 + l^2) = \frac{r^2 v^2}{\rho^2}$$

$$v_A = \frac{rv}{\rho}$$

