

摘 要

（机器人是人类 21 世纪最伟大的发明之一。由于其卓越的性能, 机器人被广泛应用于工业生产中, 对人类社会产生了巨大的影响。可以预见, 随着机器人技术的进步, 机器人将在人类生活中发挥更加重要的作用。在我国开发成本低、技术更加先进的机器人将成为科技人员的追求。

随着计算机仿真技术向面向对象方向发展以及计算机图形技术的进步, 在 WINDOWS 环境下运用 OpenGL 能够非常真实地虚拟机器人现实。这个工具在机器人领域的应用, 将大幅度降低机器人研制成本, 这正是本课题选题的初衷。同时, 机器人运动学是机器人动力学、机器人控制和规划的基础, 在机器人研究中占有重要的地位。因此, 寻求简单而有效的方法来研究机器人的运动学, 具有重要的意义。

本课题在学习和吸收 RV12L 6R 焊接机器人的基础上^[6], 对其焊接过程中涉及的运动学正问题、逆问题、工作空间及轨迹规划进行了研究。在前人的基础上, 利用坐标平移的方法, 把机器人的杆件坐标系尽可能地集中在一起, 简化了机器人杆件之间运动的数学建模, 减小了求解的难度; 在求解机器人逆问题时, 巧妙地将逆矩阵法与几何法结合起来, 降低了高阶方程的次数, 减小了计算的难度, 提高了计算的准确性; 应用矩阵法计算了机器人的工作空间, 规定了其运动范围; 为机器人直线轨迹提供了规划算法; 最后, 在计算机上用 OpenGL 建立的仿真模型对上述机器人数学模型进行了仿真。仿真的结果与机器人理论值完全符合, 证明本文提出的方法的正确性及为 RV12L 6R 机器人所建立的数学模型的合理性。同时, 在没有硬件投入的情况下, 初步掌握了该机器人的运动学特性。为进一步深入研究打下了重要的基础。

关键词: 工业机器人; 运动学; 工作空间; 轨迹规划; 仿真; 动态仿真;

Abstract

Robot is one of the most glorious inventions of human beings in 20 century. For its superexcellent performances, robot is widely used to industrial productions, and brings about great economic benefit. It is predicted that with the development of robotic technology, robot will play a more important role in the life of people. At the same time, developing more economical and more advanced robots will be the pursuit of scientists in China.

With computer simulation's development towards object-oriented and the advancement of computer graphics, using OpenGL in WINDOWS environment gives us a very performance tool to reduce the cost in robots designs. That is the original intention of the thesis. Otherwise, the kinematics of robot has basal status in robotics. It is the base of dynamic analysis, control and path planning. Thus, it is very significant to seek some simple and effective methods to simplify the robotic kinematics analysis.

Having studied and absorbed the RV12L 6R welding robot, the thesis brings forth a series of simple and effective ways to solve kinematics problems which involves in the process of welding: By converging the coordinate systems fixed with corresponding links, the movement relations among links can be simplified by translation transformation and the difficulties are reduced in the direct kinematics problem. Combining skilful methods of inverse matrix and geometry, the order of the inverse kinematics equations are reduced, so the calculation is more accurate. This paper has also calculated the working space through matrix method and has provided an algorithm for rectilinear trajectory. The computer simulation models of the mathematical models above are established by using OpenGL. The result of simulation conforms to that of the theoretic, it illuminates the methods put forward are reasonable and the mathematical models established in the thesis are true. At the same time, we have tested the kinematics property of RV12L 6R welding robot without using the hardware experiment, which is rather economical in early researching of robots.

Keywords: robot, kinematics, working space, trajectory planning, simulation

第一章 绪论

1.1 本课题的选题背景

1.1.1 国内外机器人的发展态势

机器人是 20 世纪人类最伟大的发明之一，它融现代机械学、自动控制、计算机科学与工程、人工智能、微电子学、光学、通讯技术、仿生技术、社会学等多种学科和技术于一体，具有高度的综合性。从某方面而言，它就是衡量一个国家科学发展水平的重要尺度，是一个国家综合国力的重要体现。因此，世界各国竞相发展本国的机器人行业，机器人技术将成为本世纪世界科技核心之一。

由于机器人工作具有速度快，效率高，质量稳定，疲劳极限大，能够从事人类不能或难以胜任的工作，以及适应产品的多样化等特点，因此机器人被广泛地应用于社会的许多领域。随着技术的进一步发展，以及其性能、智能的进一步提高，机器人的应用领域也相应地拓展到了工业、军事、医疗、娱乐、家用、地下、水下、空间。尤其在工业上，工业机器人品种已多达几百种，如焊接机器人、采矿机器人、挖掘机器人、井下喷浆机器人、搬运机器人、核工业机器人等等。机器人的应用领域出现了前所未有的多元化趋势。在应用需求推动下，现代机器人技术正向高智能化、一体化、微型化、仿生化方向发展。机器人技术生机勃勃，方兴未艾。

机器人产业在我国起步较晚。自 70 年代以来，我国的工业机器人大致经历了萌芽期、开发期及实用化时期。在国家和政府的重视与支持下，我国已完成了对工业机器人及其零部件进行攻关、示教再现式工业机器人成套技术的开发，研制出了喷涂、点焊、弧焊以及搬运机器人。同时，也系统地开展了机器人基础科学、关键技术与机器人元部件、目标产品、先进机器人系统集成技术及机器人在自动化工程中的应用的研究，并成功地研制出了一批居世界领先水平特种机器人，如水下机器人。同时，我国的工业机器人也在实践中迈进一大步，先后研制出了点焊、弧焊、装配、喷漆、切割、搬运、包装码垛等各种用途的工业机器人，并实施了一批机器人应用工程，形成了一批机器人产业化基地，为我国机器人产业的腾飞奠定了基础。

但是由于起步晚，我国的机器人水平与西方发达国家的先进机器人技术相比仍有很大的差距，机器人技术的应用普及程度也不高，与国外先进水平间的差距很大。因此，从世界范围内的发展看，我国的机器人仍是一个弱势行业。寻求和探讨研究机器人的新方法、新途径具有重要的现实意义。

1. 1. 2 机器人运动学的基础地位

机器人之所以能够按人类要求去完成给定的任务，这是因为人类预先对其结构、运动的方式方法、运动路线、动力学特性以及运动控制模式作了必要的限定。此即机器人学中的运动学、动力学以及机器人控制。其中，包含对机器人杆件分析、机器人正逆问题的求解、机器人工作空间限定等的机器人运动学及机器人运动轨迹规划，决定了机器人的作业方式、路线及作业空间，是机器人动力学和机器人控制的重要基础。在机器人的研究中，如果机器人的运动学出现差错，那么其后续的动力学研究、运动控制都将建立在错误的基础上，机器人的运动将会偏离人类预想的结果。因此，寻求简便而有效的方法来研究机器人运动学，不仅对运动学重要，而且对后续的工作也非常有益。

鉴于上述背景以及焊接机器人在工业中占有重要的地位，本课题研究和吸收了从德国引入的 RV12L 6R 焊接机器人，试图在已有的基础上，寻求更有效的研究方法和途径来解决机器人运动学。这符合我国的“引进—消化—吸收—发展”的道路，对于振兴国有机器人技术，发展机器人产业具有重要的意义。

1. 2 本课题的研究对象及内容

本课题所研究的对象是德国莱斯机器人公司开发研制的，能进行点、弧焊操作 RV12L 6R 焊接机器人（其结构图和尺寸图分别如图 1-1, 1-2 所示），非常适用于汽车、船舶生产中的焊接自动化。本课题是在学习、分析该机器人的基础上，通过对传统方法的改进和综合，对其焊接过程中涉及的运动学正问题、逆问题、路径优化、轨迹规划及机器人的雅可比矩阵进行理论分析及数学建模。同时，利用 Visual C++ 和 OpenGL 混合编程，用计算机上虚拟的机器人模型，对上述内容进行仿真。因此，本课题的主要工作内容是：

a) 对机器人正问题、逆问题、工作空间的传统解决方法进行分析，寻求一种更有效的方法来对本课题所研究的机器人进行处理。

b) 分析了机器人雅可比矩阵的求法，并计算本机器人的雅可比矩阵，为其运行速度提供了理论上的依据。

c) 对本机器人的运动轨迹进行规划，提出规划的步骤及算法。

d) 用 OpenGL 对本机器人进行建模，在计算机上对其正逆问题，工作空间和轨迹规划进行仿真。

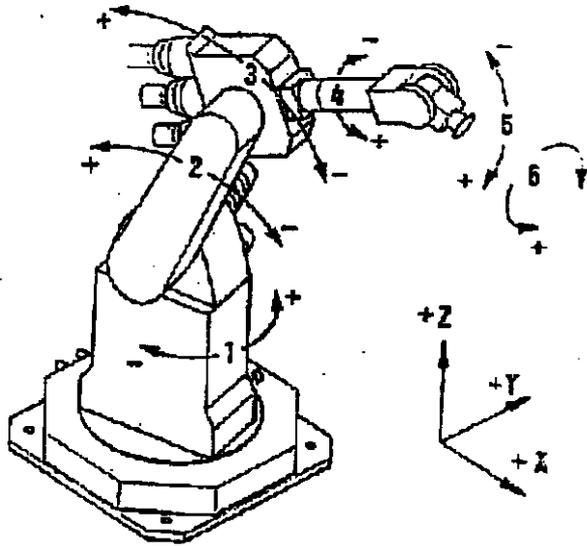


图 1-1 RV12L 6R 焊接机器人的关节结构图

RV12L 6R 焊接机器人的主体关节由回转主体、小臂、大臂、手腕等几部分组成，一共有六个自由度。机器人的回转主体由固定底座及回转工作台组成，实现机器人的主体回转 (θ_1)。机器人大臂的台座安装在机器人的回转工作台上，并可以绕其下关节作前后摆动 (θ_2)。机器人的大臂上端关节支撑着机器人小臂，可以带动小臂做上下俯仰运动 (θ_3)。机器人的腕部位于小臂的前端，具有转动 (θ_4)、摆动 (θ_5)、捻动 (θ_6) 三个自由度。这是一个典型的 6R 机器人，其三基轴三手副结构保证了机器人的手端和焊枪具有良好的可移动性，能达到工作区间的任意焊接点。其尺寸指标如下图：

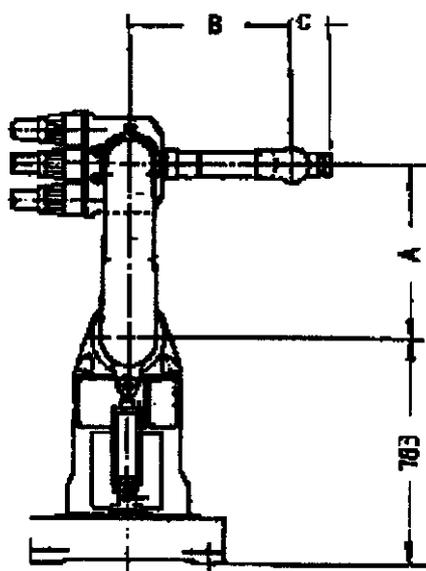


图 1-2 机器人各杆件尺寸图

其中 $A=703\text{mm}$

$B=651\text{mm}$

$C=133\text{mm}$

相关性能指标是:

(1) 结构形式: 空间垂直关节式

(2) 工作范围:

腰转	$\pm 165^\circ$	大臂摆	$\pm 165^\circ$
小臂摆	$\pm 130^\circ$	手腕转	$\pm 180^\circ$
手腕摆	$\pm 115^\circ$	手腕捻	$\pm 180^\circ$

(3) 轨迹控制方式: 点到点 (PTP)、连续轨迹 (CP)

(4) 轨迹形式: 直线

第二章 系统数学模型的建立

本课题一方面要对 RV12L6R 机器人的运动学涉及的问题进行理论上的分析，另一方面也要将其理论方法通过计算机仿真的形式表现出来，以达到验证其正误的目的。根据计算机仿真的步骤，必须先将机器人模型进行简化，再在简化的基础上为该机器人系统建立数学模型，以便仿真模型的建立及机器人运动的仿真控制。由于机器人运动学涉及正、逆两方面的问题，以及仿真须对工作空间、运动路径作必要的限定，故本章提出了对机器人的正问题、逆问题、工作空间的分析和求解方法。

2.1 机器人运动学基本知识及常用方法

2.1.1 机器人简介

从结构上，机器人大都由机身、手臂和末端操作器组成。机身用来支撑机器人的操作手臂和末端操作器，同时也能提供一定的运动；机器人的操作手臂如人的手臂一样，可以实现上下、左右、前后方向的运动，是机器人系统重要的机械运动部分；机器人的末端操作器可在手臂的带动下，实现一定姿态的操作，如焊接、组装、提升重物等。研究机器人的运动学，即对机器人工作中各个运动部位的位置、姿态、速度、加速度以及各构件间的关系描述出来。

机器人终要执行某项作业，因此无论哪一类机器人，从机构学的观点看，其实质都是由若干以关节连接在一起的杆件所组成的具有多个自由度的开链型空间连杆机构。它们的一端固定在机座上，另一端为末端执行器，中间由一些构件通过转动关节或移动关节串联而成。因此，机器人的前一构件的运动不可避免地会影响着后一构件的运动。对于一个由多构件组成的复杂机器人来说，如果用传统的理论力学、解析几何等方法来解决其运动学问题中涉及的位置、姿态、速度和加速度，不仅无法解决其姿态问题，而且其复杂程度也难以设想，求解的正确性大大降低。为了有效地研究机器人各构件运动的位置、姿态、速度和加速度等问题，必须采用一系列简洁而有效的数学方法。

2. 1. 2 位姿表示法

结构复杂的机器人机构，其几何关系也相应比较复杂。即使对于一个已给定其位置的机械手，其取向也各不相同。因此在研究机器人的运动和操作时，不仅要描述其位置关系，还要描述其取向，即位置和姿态二个方面。

1. 位置的确定法

在研究机器人时，机器人位置最通用的表示方法是用矢量 $[x, y, z]^T$ 来表示， x, y, z 为机器人某一刚体相对于空间某一固定直角坐标系的坐标值。另外，也可以根据机器人不同的运动模式选择不同的方法，如柱面坐标表示法和球坐标表示法，可使确定位置的过程简化^[1]。

2. 姿态的确定法

在机器人的研究中，除了要准确表述出组成机器人的各构件的位置之外，还要表示出其姿态。对于姿态的表示方法有多种。其一是用姿态角来表示，如仿照船的航向，用横滚、俯仰和侧摆三个概念来描述；其二用欧拉角 Φ, θ, Ψ 来表示；其三，可用圆柱坐标法和球面坐标法来表示，这两种方法在本课题中没有涉及，作略。

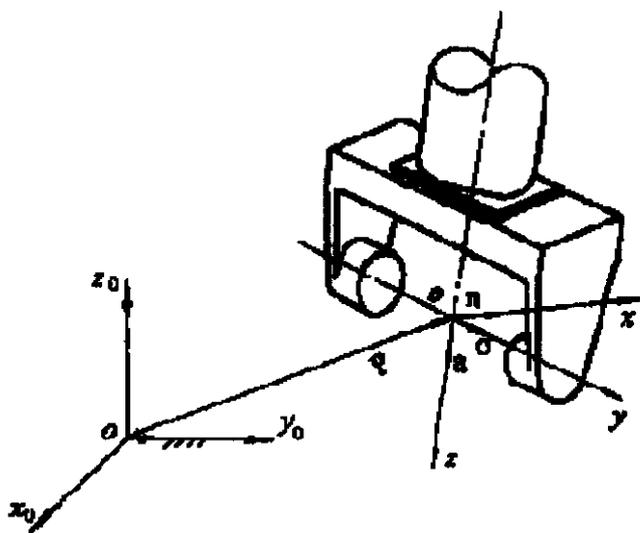


图 2-1 机器人的手部姿态

然而，最常见的是用姿态向量来表示，如图 2-1。这种方法是用被研究的构件坐标系相对于某一参考坐标系的姿态向量 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 来确定， $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 分别表示被研究的坐标系

的三个轴 ox, oy, oz 在参考坐标系中的三个方向余弦。通过这 3 个姿态参数，物体的姿态就被唯一确定了。加上前述的三个位置参数 x, y, z ，就可相当明确地描述出一个物体某一时刻在空间的状态。

2. 1. 3 研究机器人构件间关系的方法

机器人是由一系列用关节相互连接起来的刚性连杆组成，连杆和关节共同形成一个运动学链系。大部分机械手的关节都是旋转式或移动式的，由某种类型的驱动器驱动。连杆在其一端关节驱动器的驱动下，绕该端关节运动，并带动与本连杆的另一端相连的另一杆运动。机器人手臂的复杂操作就是通过多个这种运动累加形成的。因此，整个机器人的各连杆之间必然存在着某种相对的运动关系。如果建立起各运动杆件及末端执行器相互之间的位姿关系，就可为机器人的运动控制提供分析的手段和依据。为了明确地表示出组成机器人系统的各个杆件之间的位置和姿态，杆件之间的运动关系，我们采用基于齐次坐标的坐标变换法（矩阵法），它可以把机器人运动过程中的运动、变换、映射与矩阵运算联系起来，有利于机器人复杂运动的计算。

1. 坐标变换

A. 平移坐标变换

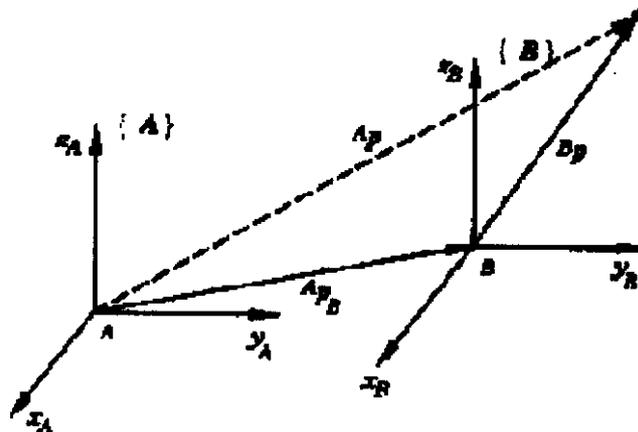


图 2-2 平移变换

设坐标系 $\{A\}$ 与坐标系 $\{B\}$ 具有相同的方位，不同的位置。其中坐标系 $\{B\}$ 在坐标系 $\{A\}$ 中的位置矢量为 ${}^A P_B$ ，即坐标系 $\{B\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 的平移矢量。空间中的某一

个点 P 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置为 ${}^B P$ 。那么它相对于坐标系 $\{A\}$ 的位置矢量为 ${}^A P$ 。从图 2-2 中所示可得：

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_B \quad (2-1)$$

可见，坐标系 $\{A\}$ 的位置可用坐标系 $\{B\}$ 的位置 ${}^B P$ 及两系间的平移矩阵 ${}^A P_B$ 表示。

B. 旋转变换

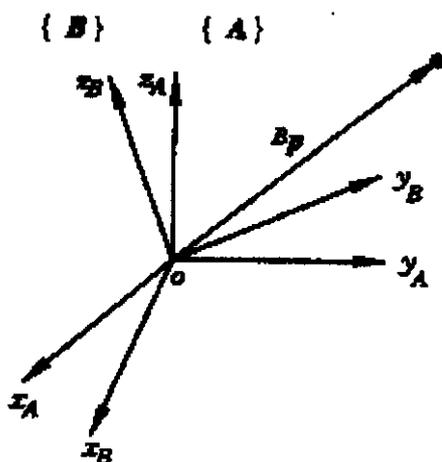


图 2-3 旋转变换

设坐标系 $\{A\}$ 与坐标系 $\{B\}$ 有共同的坐标原点，但两者方位不同，如图 2-3 所示。用旋转矩阵 ${}^A R_B$ 描述 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的方位。空间中的一点 P 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置为 ${}^B P$ ，在坐标系 $\{A\}$ 的位置矢量为 ${}^A P$ 。根据图 2-3 中所示可以得出下面的旋转关系式：

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P \quad (2-2)$$

可见，坐标系 $\{A\}$ 的姿态可用坐标系 $\{B\}$ 的姿态向量 ${}^B P$ 和两系间的变换矩阵 ${}^A R_B$ 共同表示。

C. 复合变换

另外，现实生活最常见的情形是：两坐标系的原点不重合，两坐标系方位也不相同。因此两坐标系间既存在一个平移关系，又存在一个旋转关系，如图 2-4。若坐标系 $\{B\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 的位置平移量为 ${}^A P_B$ ，其相对于坐标系 $\{A\}$ 的方位用旋转矩阵 ${}^A R_B$ 表示，则空间任一点 P 在坐标系 $\{B\}$ 中的表示 ${}^B P$ 与在坐标系 $\{A\}$ 中的表示 ${}^A P$ 存在如下关系：

$${}^A P = {}^A R_B {}^B P + {}^A P_B \quad (2-3)$$

上式实际上是一个旋转变换与平移变换的合成。

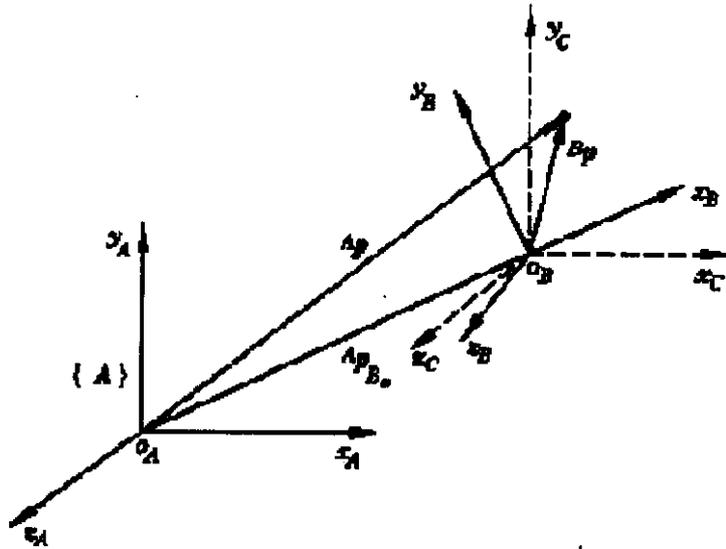


图 2-4 复合变换

2、齐次坐标及齐次变换

A. 齐次坐标

齐次坐标实际上是在矢量表示的基础上增加一个定标因数。如点 $P(x, y, z)$ 的齐次坐标为 $P(x', y', z', s)$ ，它们间存在如下关系：

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{s} \\ y = \frac{y'}{s} \\ z = \frac{z'}{s} \end{cases} \quad (2-4)$$

其中 s 为非零定标因数，为简化计算一般为 1。如果定标因数 $s=1$ ，则点 $P(x, y, z)$

就可以表示成 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

B. 齐次变换

若前述的空间变换是在齐次坐标系中进行，则空间中的点 P 在齐次坐标系 $\{A\}$ 中的齐次坐标为 $[x' \ y' \ z' \ 1]$ ，在齐次坐标系 $\{B\}$ 中的齐次坐标为 $[x \ y \ z \ 1]$ 。将点 P 的齐次坐标代入前面推导出的式(2-1)，(2-2)，(2-3)，就可得到相应的齐次变换。

① 平移齐次坐标变换

如果将点 ${}^A P[x' \ y' \ z' \ 1]^T$, ${}^B P[x \ y \ z \ 1]^T$ 代入(2-1)式, 则等式(2-1)相应地变为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

令 $Trans(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $Trans(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 即为平移齐次坐标变换矩

阵, 表示坐标系 $\{B\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 在 x 轴向上平移 Δx , 在 y 轴向上平移 Δy , 在 z 轴向上平移 Δz 。

② 旋转齐次坐标变换

i 若将点 ${}^A P[x' \ y' \ z' \ 1]^T$, ${}^B P[x \ y \ z \ 1]^T$ 代入式(2-2), 并使 ${}^A R$ 分别表示为绕 x 轴转动、绕 y 轴转动、绕 z 轴转动的旋转矩阵, 则等式相应地变为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

即 $Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为坐标系 $\{B\}$ 绕坐标系 $\{A\}$ 的 x 轴旋转角度 θ 的

旋转矩阵, $Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为坐标系 $\{B\}$ 绕坐标系 $\{A\}$ 的 y 轴旋转角度

θ 的旋转矩阵, $Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为坐标系 $\{B\}$ 绕坐标系 $\{A\}$ 的 z 轴旋转角

度 θ 的旋转矩阵。

ii 上述的所有旋转变换无一例外地是绕一个轴的旋转。但是在实际生活中却经常碰到绕多个坐标轴旋转的情况。对于这种情况可以理解为两个旋转的迭加。如坐标系 i 先绕 z_i 轴旋转 θ 角, 达到 $x_k - y_k - z_i$, 再绕 x_k 轴转 α 角到达坐标系 j 。若坐标空间有一点 P , 则根据式(2-2)可得, 坐标系第一次旋转的关系式为

$${}^i P = {}^i R(z_i, \theta) {}^k P \quad (2-9)$$

$${}^k P = {}^k R(x_k, \alpha) {}^j P \quad (2-10)$$

联立式(2-9)(2-10)得

$${}^i P = {}^i R(z_i, \theta) {}^k R(x_k, \alpha) {}^j P \quad (2-11)$$

由前面推导的公式(2-6)(2-8)可得, 这个绕多个轴的旋转变换矩阵为

$$R^{\theta, \alpha} = {}^i R(z_i, \theta) {}^k R(x_k, \alpha) {}^j = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

(1) (2)

式中下标(1)(2)表示旋转的次序。因为矩阵的乘法不满足交换律, 故式中矩阵的顺序不可换。

③复合齐次坐标变换

若将点 ${}^A P [x' \ y' \ z' \ 1]^T$, ${}^B P [x \ y \ z \ 1]^T$ 及相应的 ${}^A_B R$ 代入式(2-3), 则式(2-3)就可变换成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = {}^A_B R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

其中 $\Delta = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T$, 是平移矩阵。可见, 齐次坐标系的复合变换同样也可以同一般的复合变换一样, 表示成一个平移变换与一个旋转变换之和。

④绕任意轴的旋转变换

以上公式是绕坐标系中一轴或者多轴旋转变换和平移变换，但它们对绕坐标系中任意矢量旋转却并不适用，必须采用通用旋转变换来解决。

i 通用旋转

按广义的观点，空间坐标系的坐标轴实际上是所有矢量中的三个特殊的矢量。绕一个或多个坐标轴旋转，实际上就是绕一个或多个矢量旋转。当某一坐标绕多个坐标轴旋转后，其状态可以等价于其绕某一个任意矢量 \vec{f} 旋转某个角度 θ ^[1]，此即通用旋转变换。其公式为：

$$Rot(f, \theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x v\theta + c\theta & f_y f_x v\theta - f_z s\theta & f_z f_x v\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y v\theta - f_z s\theta & f_y f_y v\theta + c\theta & f_z f_y v\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z v\theta + f_y s\theta & f_y f_z v\theta - f_x s\theta & f_z f_z v\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

其中 f_x, f_y, f_z 为矢量 \vec{f} 的三个单位分量， $v\theta$ 表示 $Versin\theta = 1 - \cos\theta$ 。通过这个通用旋转变换公式，能够求出各个基本旋转变换。如当 $f_z = 1, f_y = 0, f_x = 0$ 时， $Rot(f, \theta)$ 即为 $Rot(z, \theta)$ 。

ii 等效转角与转轴

若令通用旋转变换 $Rot(f, \theta) = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，则有

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x f_x v\theta + c\theta & f_y f_x v\theta - f_z s\theta & f_z f_x v\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y v\theta + f_z s\theta & f_y f_y v\theta + c\theta & f_z f_y v\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z v\theta + f_y s\theta & f_y f_z v\theta - f_x s\theta & f_z f_z v\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

经过对上式进行化简得：

(1)若绕矢量 \vec{f} 的正向旋转，且 $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ 时，转角 θ 被唯一确定为

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(o_x - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_x - o_x)^2}}{n_x + o_y + a_z - 1} \quad (2-16)$$

(2)矢量 \vec{f} 的分量 f_x, f_y, f_z 为

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{o_z - a_y}{2s\theta} \\ f_y &= \frac{a_x - n_z}{2s\theta} \\ f_z &= \frac{n_y - o_x}{2s\theta} \end{aligned} \quad (2-17)$$

当式(2-17)中的 θ 很小时可能导致单位矢量 \vec{f} 的模大于1,需对矢量 \vec{f} 单位化。同时也会使计算精度变差以及出现 $\frac{0}{0}$ 的形式,使 \vec{f} 无法确定;

因此当旋转角 θ 大于 90° 时,就需用不同的方法来求 \vec{f} 。如矢量 \vec{f} 的最大分量可按如下公式确定,它对应于 n_x, o_y 和 a_z 中的最大正元素:

$$\begin{aligned} f_x &= \text{sign}(o_z - a_x) \sqrt{\frac{n_x - \cos\theta}{v\theta}} \\ f_y &= \text{sign}(a_x - n_z) \sqrt{\frac{o_y - \cos\theta}{v\theta}} \\ f_z &= \text{sign}(n_y - o_x) \sqrt{\frac{a_z - \cos\theta}{v\theta}} \end{aligned} \quad (2-18)$$

其中 sign -----符号函数。剩余两个分量的计算可如下进行:

① 当 f_x 为最大时

$$\begin{cases} f_y = \frac{n_y + o_x}{2f_x v\theta} \\ f_z = \frac{a_x + n_z}{2f_x v\theta} \end{cases} \quad (2-19)$$

② 当 f_y 为最大时

$$\begin{cases} f_x = \frac{n_y + o_x}{2f_y v\theta} \\ f_z = \frac{o_z + a_y}{2f_y v\theta} \end{cases} \quad (2-20)$$

③ 当 f_z 为最大时

$$\begin{cases} f_x = \frac{n_y + a_x}{2f_z v\theta} \\ f_y = \frac{o_z + a_y}{2f_z v\theta} \end{cases} \quad (2-21)$$

C. 齐次矩阵的几何意义

当坐标系 i 经过一系列的平移、旋转变化之后, 到达坐标系 j (如前所述)。如果坐标系 j 是机械手的末端执行器的位姿, 坐标系 i 是其参考坐标系, 则坐标系 j 相对于坐标系 i 的位置和姿态就相当于机械手的末端执行器的位姿相对于其参考坐标系的位姿, 用矢量 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}, \bar{p}$ 来表示 ($\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 分别表示末端执行器的坐标系 j 的三个轴 ox, oy, oz 在参考坐标系 i 中的三个方向余弦, \bar{p} 为其在参考系中的位置矢量)。因此, 这两个坐标系之间的关系也可用下式描述

$$\begin{cases} x_i = n_x x_j + o_x y_j + a_x z_j + p_x \\ y_i = n_y x_j + o_y y_j + a_y z_j + p_y \\ z_i = n_z x_j + o_z y_j + a_z z_j + p_z \end{cases}$$

式中 p_x, p_y, p_z 为坐标系 j 的原点在坐标系 i 中的坐标。 n_x, n_y, n_z 为坐标系 j 的 x_j 轴对坐标系 i 的三个方向余弦, 用于描述机械手的位姿时为法向矢量; o_x, o_y, o_z 为坐标系 j 的 y_j 轴对坐标系 i 的三个方向余弦, 用于描述机械手的位姿时为姿态矢量; a_x, a_y, a_z 为坐标系 j 的 z_j 轴对坐标系 i 的三个方向余弦, 用于描述机械手的位姿时为接近矢量;

于是, 则上述的变换用齐次坐标表达可写成:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

上式中的 T 显然是一个 4×4 齐次矩阵。把 $T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 分割为 $\begin{bmatrix} R & P \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 则

子阵 $R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$ 对应于旋转变换, 表示坐标系间的姿态变换关系; 而子阵

$P = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ 对应于平移变换, 说明了坐标系中心间的位置变换关系, 子阵 $I=1$ 为其比例因子。

D. 绝对变换与相对变换

在齐次变换中, 绝对变换指某一坐标系始终都参照某一固定坐标系作变换, 相对变换则总是以自身为参考系作变换。简而言之, 绝对变换是以固定坐标系为参考系的变换, 而相对变换是以当前坐标为参考坐标系的变换。相对变换与绝对变换间有区别的。

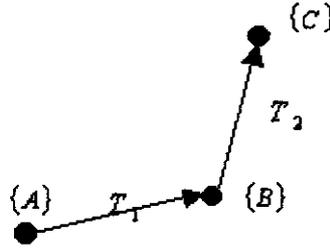


图 2-6 绝对变换与相对变换

如图 2-6 所示, 如果从坐标系 $\{A\}$ 按 T_1 所描述的变换可以变换到坐标系 $\{B\}$, 再从坐标系 $\{B\}$ 按 T_2 所描述的变换, 可以变换到坐标系 $\{C\}$ 。显然这是一个相对变换过程, 它们之间的变换可以表示如下:

$$\begin{cases} A = T_1 B \\ B = T_2 C \end{cases}$$

化简可得

$$A = T_1 T_2 C \quad (2-23)$$

若图 2-6 中所示的是: 坐标系 $\{A\}$ 绕本系作 T_1 所描述的变换, 到达坐标系 $\{B\}$, 然后将坐标系 $\{B\}$ 绕坐标系 $\{A\}$ 再按 T_2 所描述的变换, 变换到坐标系 $\{C\}$ 。则第一次变换可用式 $A = T_1 B$ 描述。第二次变换是将前一次的变换结果 $T_1 B$ 进一步作变换, 即 $A = T_2 (T_1 B)$ 。于是可得, 绝对变换的结果为:

$$A = T_2 T_1 B \quad (2-24)$$

从式(2-23)(2-24)可知, 当坐标系间的变换是相对变换时, 变换矩阵是右乘关系; 当坐标系间的变换是绝对变换时, 变换矩阵间是左乘关系。

如果在组成机器人的每一杆件上设立一个坐标系来代表本杆的位置和状态, 则机

机器人的杆件之间的运动就可以用杆件坐标系相对于某一参考杆件坐标系的齐次变换来描述。因此，在分析机器人的运动的时候，若建立起各杆件坐标后，根据坐标系之间的关系，就可得出机器人各杆件之间的相对运动关系。

2. 1. 4 机器人运动学

机器人的运动学就是建立起机器人末端执行器与机器人其它各杆件之间的运动关系。据齐次变换的原理，空间中任一坐标系相对于某个参考坐标系的位置和姿态完全可以由这两个坐标系间的变换获得。故若在机器人的每一杆件上建立一个与该杆件固连的坐标系，则杆与杆之间的位姿关系就可以通过固连在各杆件上的坐标系之间的变换获得。例如，若第一杆件上的坐标系相对于机座坐标系的位置和姿态用齐次矩阵 A_1 描述，第二杆件上的坐标系相对于第一杆件上的坐标系的位置和姿态用 A_2 描述，则根据公式(2-19),(2-20),(2-21)可以推导出杆件一相对于机座的变换矩阵为 $T_1 = A_1$ ，而杆件二相对于机座坐标系的位置和姿态的矩阵为 $T_2 = A_1 A_2$ 。因此，运用这种方法可以方便地描述机器人运动学中杆件间关系的问题。但是，上述方法成立的条件是各个杆件坐标系都能正确地表示出杆件的位姿。因此，如何正确地建立杆件坐标系对于研究整个机器人运动学是至关重要的问题。

1、杆件坐标系的建立

通过研究机器人杆件坐标系间的变换关系可以明确机器人杆件间的运动。因此，机器人的各杆件坐标系必须正确地表示出与其对应的杆件信息。因此机器人的杆件坐标系必须用科学的方法来建立。建立杆件坐标系的原则是，一方面要反映出本杆的结构，另一方面又要反映出本杆与和它相连的其它杆件间的关系。通常有两种建立杆件坐标系的方法：在上关节处建立和在下关节处建立。这两种不同的方法虽然会使将来在这两种不同坐标系下导出的 A 矩阵有所不同，但对最终各杆的位姿无影响。建立杆件坐标系时应遵循 D-H 法。

2、D-H 参数的意义及确定

D-H 法是研究机器人常用的一种方法。D-H 矩阵可以明确地表示出杆件间的运动关

系，因此在研究机器人的运动时，常用这种方法来求表示机器人的 A 矩阵。D-H 矩阵常与如下几个参数有关：

① 杆件长度 a_i —— 杆件 i 两端关节轴线之间的公垂线的长度。

当两关节轴交错时，只有唯一的公垂线；当某杆件一端为旋转关节，另一端为移动关节时，规定其杆件长度为零。同时，规定机座、末端执行器等只有一个关节的杆件的长度为零。这个参数表示出了本杆件的信息。

② 杆件的扭角 α_i —— 杆件 i 两端关节轴线的夹角。

机座与末端杆件的夹角为零。扭角 α_i 是绕 x_i 轴从 z_{i-1} 轴到 z_i 轴测量的，方向满足右手定则。在这里， α_i 的下标 $i = 0, 1, 2, \dots, n$ 是杆件的编号，并且是从机座依次向后标，末端执行器为 n 。本参数也是表示本杆件的信息的量。

③ 关节变量 q_i —— 关节变量是指两相邻杆件相对位置的变化量。

当两杆件以旋转关节相连时，关节变量为转角 θ_i ；当两杆件以移动关节相连时，其关节变量是两杆件沿该关节轴线的相对线位移 d_i 。这是一个表示杆件间关系的参数。

确定关节变量 θ_i ，可将杆件 i 的长度线 a_i 平移至杆件 $i-1$ 的长度线 a_{i-1} 处与其相交。 θ_i 的起始线为 a_{i-1} 的延长线，终止线为 a_i 的平行线。 θ_i 的方向在 i 轴上满足右手定则；因为 x_{i-1} 和 x_i 都垂直于 z_{i-1} ，所以也可以说 θ_i 是绕 z_{i-1} 轴测得的从 x_{i-1} 到 x_i 轴的角度，方向满足右手法则。对于偏移量 d_i ，实际上是两杆件间的距离，即沿着 z_{i-1} 轴从 x_i 轴到 x_{i-1} 轴测得的距离。若关节为移动到关节时， d_i 为关节变量，若关节是旋转变量，则 d_i 为一个不一定为零的定量。

3、 A 矩阵（用 D-H 矩阵）

A 矩阵就是描述某一杆件与另一个杆件间相对关系的齐次变换矩阵，即描述两个坐标系间相对平移和旋转的齐次变换。如果建立了各杆件坐标系及确定了杆件的结构参数后，各坐标系间的关系通过变换矩阵就可以求出。求 A 矩阵的方法有很多种，一般采用 D-H 矩阵法。尽管候琳琪^[17]指出，用 D-H 矩阵法解决相邻两关节公称平行，而实际有微小差别时可能会引起很大的杆件偏移量误差，从而影响机器人的位置精度。但因本模型中各杆件轴间严格为平行或垂直，因此用 D-H 矩阵法对本机器人的精度不存在影响。用

D-H 矩阵法求 A 矩阵必须按以下步骤进行:

①建立杆件坐标系, 确定杆件的几何参数及关节变量。

②根据杆件的几何参数及关节变量得出各个 A 矩阵。

如杆件 i 坐标系 i 与杆件 $i-1$ 坐标系 $i-1$ 之间存在如下变换:

(1) 绕 z_{i-1} 轴旋转 θ_i 角, 使 x_{i-1} 轴转到与 x_i 同一平面内。

(2) 沿 z_{i-1} 轴平移距离 d_i , 把 x_{i-1} 移到与 x_i 同一直线上。

(3) 沿新的 $i-1$ 轴平移距离 a_{i-1} , 把连杆 $i-1$ 的坐标系移到使其原点与连杆 i 的坐标系原点重合。

(4) 绕 x_{i-1} 轴旋转 α_{i-1} 角, 使 z_{i-1} 轴转到与 z_i 同一直线上。

通过这一系列的变换, 使杆 $i-1$ 的坐标系转到与杆 i 的坐标系重合。根据上述转换过程, 用 D-H 法可以列出坐标系 i 相对于坐标系 $i-1$ 的变换矩阵 A_i :

$$A_i = Rot(z_{i-1}, \theta_i) Trans(0, 0, d_i) Trans(a_i, 0, 0) Rot(x_i, \alpha_i) \quad (2-25)$$

可见, 矩阵 A_i 只与参数 $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$ 相关。一旦建立了各杆件坐标系后, 这些参数就唯一确定了, 从而各个杆件的 A_i 矩阵也随之而定。

4、机器人运动学方程

机器人运动学方程, 是描述机器人的末端执行器在工作空间内, 相对于机座坐标系的位置及姿态的方程。因 A 矩阵表示出了两坐标系间的齐次变换, 则机器人的运动学方程可用 A 矩阵表示出来。例如: 若齐次矩阵 A_1 描述的是第一杆件上的坐标系相对于机座坐标系的位置和姿态, A_2 描述的是第二杆件上的坐标系相对于第一杆件上的坐标系的位置和姿态, 则杆件一相对于机座的变换矩阵可以得出: $T_1 = A_1$, 而杆件二相对于机座坐标系的位置和姿态的矩阵为 $T_2 = A_1 A_2$ 。若整个机器人由 n 个杆件组成, 且末端执行器为第 n 杆, 依此类推, 末端执行器相对机座的位置和姿态的变换矩阵就为: $T_n = A_1 A_2 \cdots A_n$ 。如果机器人的末端执行器与参考坐标系间存在相对变换 Z , 而末端执行器与其端部工具的关系由变换 E 表示, 那么工具端部对参考坐标系的位置和方向可由变换 X 表示出来^[1]:

$$X = Z T_n E \quad (2-26)$$

因此, 机器人各杆件、绝对坐标系、端部工具坐标系与机器人末端执行器之间的位姿存在如下有向变换图 2-7。

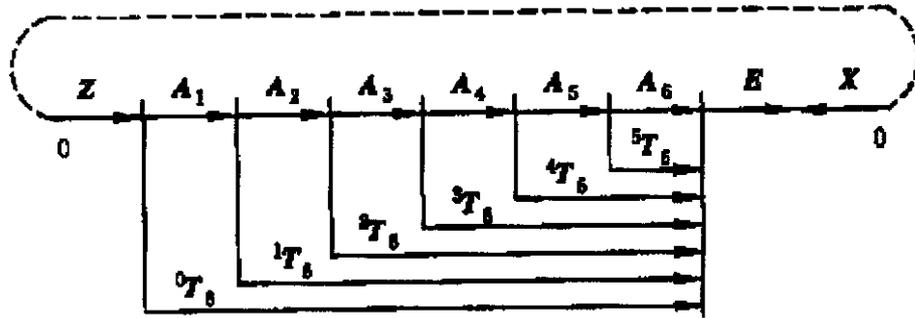


图 2-7 末端执行器有向变换图

2.2 RV12L 6R 机器人运动学正问题

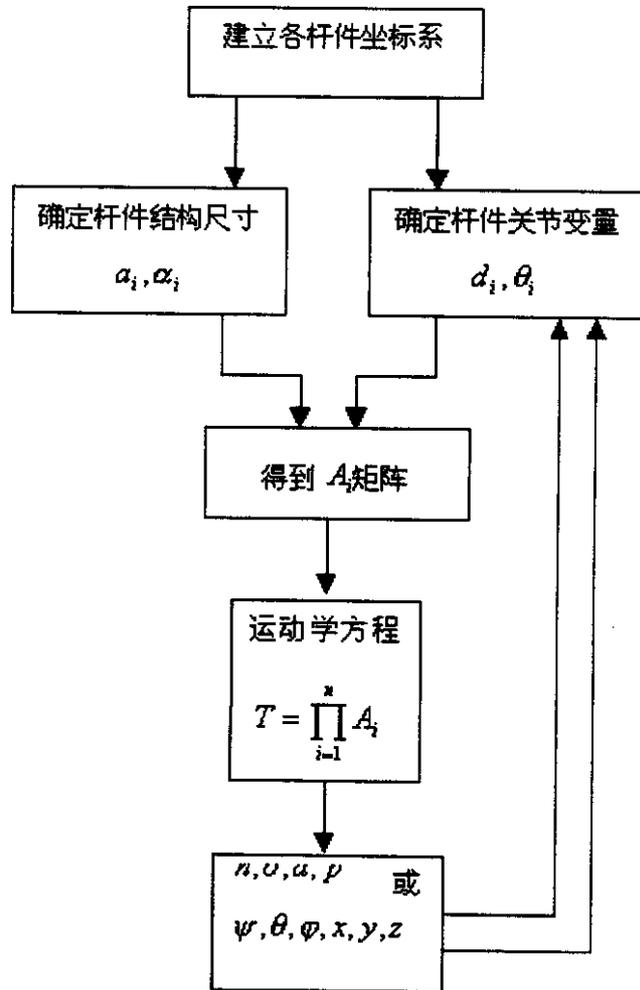


图 2-8 正（逆）解流程图

机器人的正问题是，给定机器人的结构参数及运动关节的运动参数，确定机器人末端执行器在参考坐标系（一般为机座坐标系）中所处的位置和姿态。因此其正问题包括

建立运动学方程并求解，即建立和求解正问题的数学模型。按照传统的方法，求解机器人正问题的典型的求解流程图如图 2-8。

针对上述的步骤，对本课题研究的机器人进行正问题的分析及求解：

1、按照仿真所遵循的相似原则，把系统模型进行如下简化——用直线来代替各杆件，用小圆圈及符号 \otimes 来代表旋转关节。简化后机器人的杆件结构图如图(2-9)所示。

2、采用传统的方法，在各杆的上关节处建立杆件坐标系。从本机器人的结构及运动形式可得：

①杆件一与机座轴向重合，并以旋转关节连接。根据建立坐标系的规则，机座坐标轴 z_0 方向与关节轴向重合， x_0 方向与下一杆方向一致。

②杆件一与杆件二在杆件一的上关节处以垂直于两杆轴向的旋转关节连接，因而关节二的轴向与两杆都垂直，故杆件一坐标系的 z_1 轴的方向如图所示（这里取向外侧，后面的类同）。从后面的分析知道，杆件二的坐标轴 z_2 与 z_1 轴平行，故杆件二的坐标轴 x_1 垂直于 z_1 轴并指向轴 z_2 。在初始状态下即为图 2-9 所示。

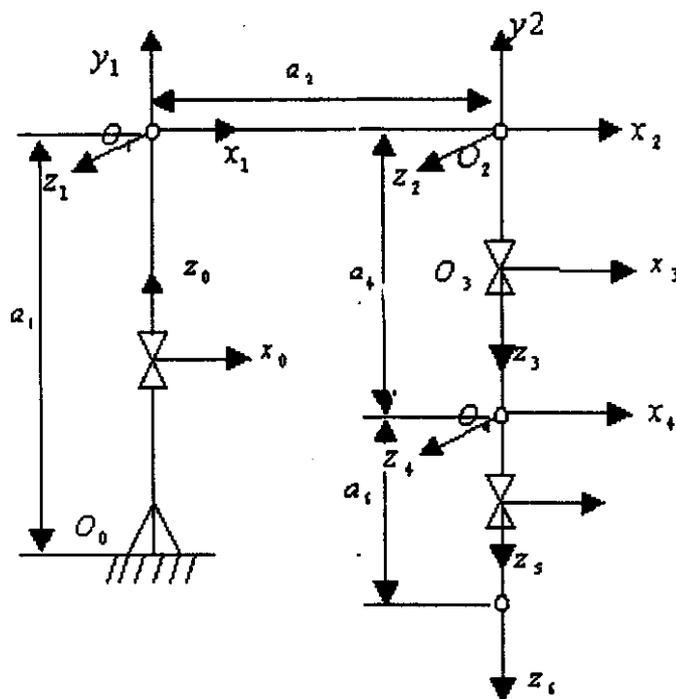


图 2-9 机器人杆件结构图

③从图中可以看出，联接杆件二和杆件三的旋转关节与②中的一样，故轴 z_2 的方向同轴 z_1 一致。 x_2 方向尽可能与后面 x 轴一致。

④杆件三与杆件四的联接方式如图(2-9)所示,可知关节四的轴向与杆三、杆四轴向重合,则轴 z_3 的方向如图(2-9)。因为杆件三两端的关节轴向相交,因此杆三的长度 a_3 为零,此时无法确定 x_3 的方向。这时让 x_3 同时垂直于 z_3 和 z_2 。

⑤杆四与杆五之间的联接关节如图,可得轴 z_4 的方向。因杆四两端的关节轴向也相交,因此让 x_4 同时垂直于 z_3 和 z_4 。

⑥套用前面的方法,可确定 z_5 , x_5 , z_6 , x_6 的方向。

上述所有坐标系的 y 轴方向都由右手法则确定。于是, RV12L 6R 机器人的杆件坐标图如图(2-9)所示。

上述是一般的建立坐标系的过程,现将其作一些改进:由于坐标轴 z_3 与杆件三的轴向一致,因此可以将坐标中心 O_3 放在轴向任何地方。为了有利于计算,在本论文中,将参考坐标中心 O_0 从杆一的下关节处平移到了底端机座处,让参考坐标系与机座坐标系重合。这样,只需给出 a_1 ,就可以表示出机器人从参考坐标系到杆一坐标系间的平移。同理,也将图 2-9 中的 O_3 平移到 O_4 , O_6 平移到 O_5 。于是, $O_3O_4O_5$ 四点汇交于一点(如图 2-10 所示)。这样,在求解运动学正逆问题时就会减少杆件间的平移运算,简化了计算的过程,提高了求解的正确度,在实时控制中可以节约计算时间,这在实时控制中是相当具有意义的。

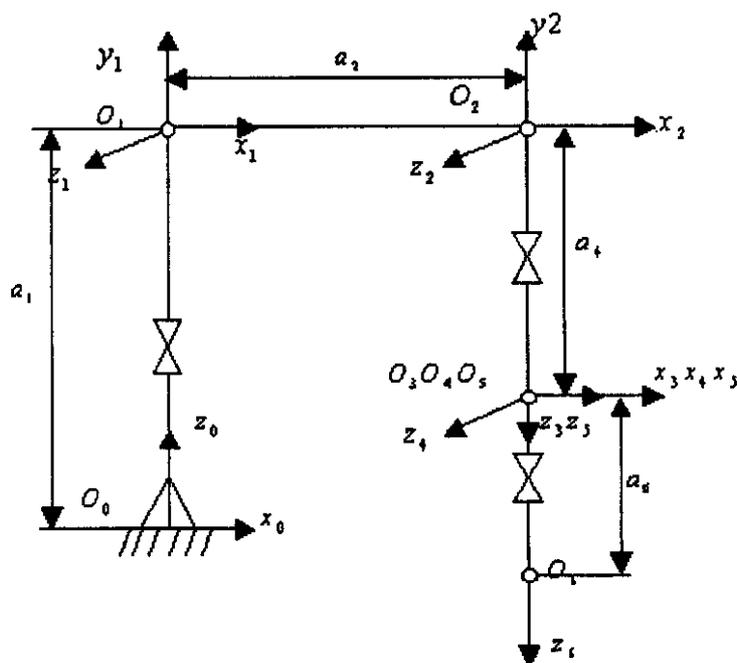


图 2-10 修改后的机器人杆件结构图

事实上，还可以进一步对图 2-10 所示的坐标系进行修改：将机座坐标系、杆件二的坐标系平移到杆一处，使 O_0, O_1, O_2 汇聚于杆一的上关节处；将杆件六的坐标系平移到 O_3 处，使 O_3, O_4, O_5, O_6 汇聚于杆件四的上关节处。于是整个机器人杆件间的运动关系为：机座与参考坐标系间存在一个平移变换 $Trans(0,0,a_1)$ ，杆二与杆三间存在平移变换 $Trans(a_2,-a_4,0)$ 以及杆六与实际的末端执行中心间存在平移变换 $Trans(0,0,a_6)$ 。

3、根据图 2-10 所示的杆件坐标系，获取 A 矩阵所需要的参数（如表 2-1）。

表 2-1 机器人的杆件参数

杆号 i	关节变量 θ_i	扭角 α_i	杆长 a_i	转角范围	偏移量	$\cos \alpha_i$	$\sin \alpha_i$
1	θ_1	90°	0	$\pm 165^\circ$	a_1	0	1
2	θ_2	0°	a_2	$\pm 75^\circ$	0	1	0
3	θ_3	90°	0	$\pm 130^\circ$	0	0	1
4	θ_4	-90°	0	$\pm 180^\circ$	a_4	0	-1
5	θ_5	90°	0	$\pm 105^\circ$	0	0	1
6	θ_6	0°	0	$\pm 180^\circ$	a_6	1	0

4. 根据上表，建立各 A_i 矩阵

从表 2-1 中的数据可知与 A 矩阵相关的参数 $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$ ，因此可以得知各个杆件坐标系间的变换过程，于是各 A 矩阵可求。根据表中的数据可得

$$\begin{cases} A_1 = Rot(z_0, \theta_1) Trans(0,0,a_1) Rot(x_1, 90^\circ) \\ A_2 = Rot(z_1, \theta_2) Trans(a_2, 0, 0) \\ A_3 = Rot(z_2, \theta_3) Rot(x_2, 90^\circ) \\ A_4 = Rot(z_3, \theta_4) Trans(0,0,a_4) Rot(x_4, -90^\circ) \\ A_5 = Rot(z_4, \theta_5) Rot(x_4, 90^\circ) \\ A_6 = Rot(z_5, \theta_6) Trans(0,0,a_6) \end{cases} \quad (2-27)$$

5、求解机器人的运动学方程

利用上面的求解可得，RV12L 6R 焊接机器人的末端执行器相对于机座坐标系的位姿矩阵（运动学方程）为：

$$\begin{aligned}
 T_6 &= A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\
 &= \begin{bmatrix} c1 & 0 & s1 & 0 \\ s1 & 0 & -c1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & a_2 c2 \\ s2 & c2 & 0 & a_2 s2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c3 & 0 & s3 & 0 \\ s3 & 0 & -c3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 \\ s5 & 0 & -c5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2-28)$$

令

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

则根据式(2-28), (2-29)可得如下等式

$$\begin{cases} p_x = a_6 a_x + a_4 c1 s23 + a_2 c1 c2 \\ p_y = a_6 a_y + a_4 s1 s23 \\ p_z = a_6 a_z - a_4 c23 + a_2 s2 + a_1 \end{cases} \quad (2-30)$$

$$\begin{cases} n_x = c1 c23 (c4 c5 c6 - s4 s6) + s1 (s4 c5 c6 + c4 s6) - c1 s23 s5 c6 \\ n_y = s1 c23 (c4 c5 c6 - s4 s6) - c1 (s4 c5 c6 + c4 s6) - s1 s23 s5 c6 \\ n_z = s23 (c4 c5 c6 - s4 s6) + c23 s5 c6 \end{cases} \quad (2-31)$$

$$\begin{cases} o_x = -c1 c23 (c4 c5 s6 + s4 c6) + s1 (c4 c6 - s4 c5 s6) + c1 s23 s5 s6 \\ o_y = -s1 c23 (c4 c5 s6 + s4 c6) - c1 (c4 c6 - s4 c5 s6) + s1 s23 s5 s6 \\ o_z = -s23 (c4 c5 s6 + s4 c6) - c23 s5 s6 \end{cases} \quad (2-32)$$

$$\begin{cases} a_x = c1 c23 c4 s5 + s1 s4 s5 + c1 s23 c5 \\ a_y = s1 c23 c4 s5 - c1 s4 s5 + s1 s23 c5 \\ a_z = s23 c4 s5 - c23 c5 \end{cases} \quad (2-33)$$

其中, $c1 = \cos\theta_1, s1 = \sin\theta_1, c23 = \cos(\theta_2 + \theta_3), s23 = \sin(\theta_2 + \theta_3)$ 。

通过上述的推导过程可得, 六杆机器人的末端运动学方程为:

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

上式中，向量 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 描述了末端执行器的姿态，向量 \bar{p} 描述了其位置。所以 T_6 唯一地确定了机器人手部在笛卡尔空间相对于基座坐标系的位姿。由于这样表示繁琐，对于非专业人员难以理解。因此在现实中一般用横滚角 φ 、俯仰角 θ 、侧摆角 ψ 来描述末端执行器的姿态。

把 φ, θ, ψ 作为末端执行器相对于其腕部坐标的三个方向角， ψ 为绕 x 轴转动的角度， θ 为绕 y 轴转动的角度， φ 为绕 z 轴转动的角度。则其姿态变换矩阵有：

$$\begin{aligned} RPY(\varphi, \theta, \psi) &= \underset{(3)}{Rot(z, \varphi)} \underset{(2)}{Rot(y, \theta)} \underset{(1)}{Rot(x, \psi)} \\ &= \begin{bmatrix} c\varphi c\theta & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi & 0 \\ s\varphi c\theta & s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-35)$$

在 $T = \begin{bmatrix} \bar{n} & \bar{o} & \bar{a} & \bar{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 矩阵中，由于是 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 表示机器人手腕的姿态的矢量。故 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 与

φ, θ, ψ 之间存在一定的关系：

$$\begin{cases} n_x = c\varphi c\theta \\ n_y = s\varphi c\theta \\ n_z = -s\theta \end{cases} \quad (2-36)$$

$$\begin{cases} o_x = c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi \\ o_y = s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi \\ o_z = c\theta s\psi \end{cases} \quad (2-37)$$

$$\begin{cases} a_x = c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi \\ a_y = s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi \\ a_z = c\theta c\psi \end{cases} \quad (2-38)$$

2.3 RV12L 6R 机器人逆问题

在工程应用中，为了使机器人所持工具的位姿满足给定工作的要求，这就是机器人运动学中的逆问题所要解决的问题，即当机器人末端执行器的位置、姿态、速度、加速度等条件给出时，求出机器人手臂的各关节变量的位置、速度、加速度的过程（见图 2-8）。因此从工程应用的角度而言，机器人运动学的逆问题更加具有实际意义。它是机器人轨迹规划和控制的基础。

同机器人的正问题一样，进行这个问题的研究必需先建立其数学模型。通常，给定在直角坐标空间的位置 \bar{p} 和姿态 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ （或者 ψ, θ, φ ），即末端执行器相对于绝对坐标的位姿，求出表示机械手末端执行器的矩阵 ${}^B T_n$ ，然后根据一定的方法逐步求出各关节变量。

在求逆解的过程中，因涉及大量的反三角函数的运算，同时还必须考虑到机器人的几何形状、工作能力等，故其逆解并不是显而易见。通常运动学链系越复杂，逆向求解也越困难。在对某一特定的手矩阵进行逆向求解时，可能遇到如下几方面的问题：

①由于机器人本身的固有限制（如特定关节旋转、结构方面的限制），可能导致方程的无解。

②由于涉及许多反三角的计算，使有些解在其工作范围内具有不确定性，产生多解。这种多解体现在实际的运动中就是：机器人可以通过不同的运行轨迹达到同一工作位置和姿态。

③在实际运行中，机器人的运动要考虑到机器人的运动质量（如平稳性、速度等）。这种限制必然也要反映在计算中，使机器人手臂的位置和姿态相应受到影响。

对于这些问题，常见的解决方法是

①在不影响机器人的功能的情况下，适当地调整其关节变量的范围，避开机器人结构对其工作范围的影响。

②通过对机器人奇异位形的分析和求解，让机器人的末端执行器尽力避开容易产生奇异位形的区域。

③通过适当的算法，让机器人具有自主选择最佳位姿和最短运动路径的能力，从而排除多解对机器人运动造成的不确定性。

2. 3. 1 机器人逆向求解的方法

机器人逆向求解的方法很多，如直接法（即逆变换法）、几何法，它们都能对任何用一组变量描述的数值手矩阵起作用。因此可以根据手矩阵中的相关元素获得各关节变量。

1. 直接法（逆变换法）

这种方法是直接从符号手矩阵获得方程式，也就是说令元素已知的手矩阵中的各变量与用关节变量表示的手矩阵中的对应元素相等，组成方程组。通过解这个方程组得出各关节变量的值，如：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{关节变量的函数} \\ \dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在进行逆问题求解时，左边矩阵中的元素都已给出，右边矩阵上的元素是关节变量的函数。让两矩阵中相应的元素相等，则可以建立起 θ_i 与 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}, \bar{p}$ 间的关系式。这种方法简单明了，但会产生一组多达 12 个的高阶非线性方程组，求解极为复杂。它只对于求解机构简单或仅获取某些关节变量具有一定的价值。

2. 几何法

几何法是利用机械手的各连杆与关节之间的几何关系来确定关节变量的方法。这种方法通常都涉及到更换参考坐标系。对于大多数六自由度机器人来说，如果其腕部三个关节轴线交于一点时，则说明前三个自由度已决定了机械手末端执行器的位置。因此称前三个关节及连杆为机械手的位置机构；在求这一类机械手的逆解时，可以把机械手的运动分隔成两个部分：第一部分由机械手的前三个关节构成，用于给机械手定位；第二个部分是由后三个关节组成，只对机械手的姿态起作用。

如本课题中研究的机械手后三个关节均为旋转关节，并且关节轴线相交于某一点，则这个机械手可用如图 2-11 示意出来。在图 2-11 中，矢量 P 为末端执行器中心的位置向量，位置矢量 R 的终点是图 2-10 中所示的杆三的坐标中心 O_3 。矢量 S 从矢量 R 的终点指向矢量 P 的终点，它与末端执行器的接近矢量 \bar{a} 的方向一致。从图 2-11 可得：

$$R + S = P \tag{2-39}$$

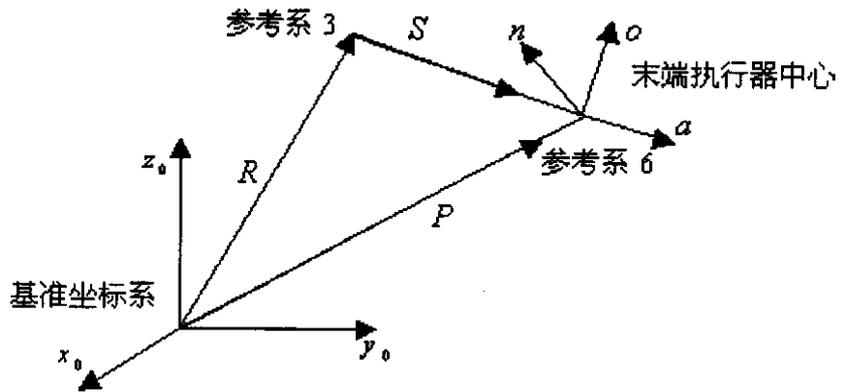


图 2-11 几何法求逆解

六自由度机器人的手矩阵 T_6 由 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 及 \bar{p} 组成。若已知手矩阵 T_6 ，则 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 及 \bar{p} 可知。若位置矢量 P 可以用 \bar{p} 来表示。矢量 S 沿着接近矢量，其方向完全可由手矩阵中的 \bar{a} 表示，其大小为从连杆三到工具点的距离。设矢量 R 的三个方向矢量分别为 p_{3x}, p_{3y}, p_{3z} ，而 $P = P(p_x, p_y, p_z)$ ， $S = a_6 S(a_x, a_y, a_z)$ 。代入式(2-39)，得

$$\begin{cases} p_{3x} = p_x - a_6 a_x \\ p_{3y} = p_y - a_6 a_y \\ p_{3z} = p_z - a_6 a_z \end{cases} \quad (2-40)$$

可见，若已知手矩阵 T ，就可以用几何法求出位置矢量 R ，且从式(2-40)可以看出矢量 R 是表示的是参考系 O_3 的位置。一旦矢量 R 确定，决定矢量 R 的前三个关节变量 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的值也由机器人的相关参量及几何方法确定。

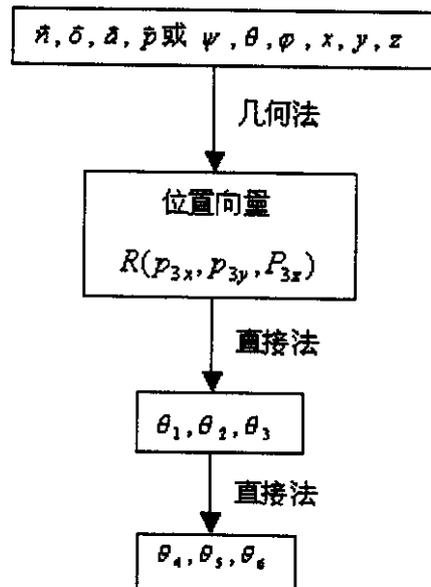


图 2-12 用几何法与直接法求机器人逆解的过程图

比较上述两种方法可以看出，第一种方法简单明了，但会出现非线性高阶方程，求解困难。第二种方法可以很方便地表示出末端执行器的位姿与前三杆、后三杆之间的关系，却不能直接得出每个关节变量与末端执行器位姿间的关系。如果把两者结合起来，既可以降低高阶方程的阶次，又可减少计算的难度。这种方法实现的过程如图 2-12。

2.3.2 RV12L 6R 机器人的逆运动学求解

给定 RV12L 6R 机器人的位置参数 p_x, p_y, p_z 和姿态矢量 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ （或者末端执行器的姿态角 ψ, θ, φ 及位置矢量 \bar{p} ），求出六个关节变量 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ 的值，这就是求本机器人运动学逆解的主要内容。

注：若给定的是姿态角 ψ, θ, φ ，则它与姿态向量 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 之间存在的关系如式(2-36)，(2-37)，(2-38)。

在求运动学正解的过程中，已经得出 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 的表达式（见式(2-27)）及 $T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ （见式(2-34)）。因本机器人腕部三个关节轴线汇交于一点 O_5 。因此求此机器人手臂的逆解可以用几何法来求。为简化运算，这里用几何法与直接法融合求解，其过程如图 2-12。

设 $A = A_1 A_2 A_3$ ，用来表示机械手的腕部位置，设 $B = A_4 A_5 A_6$ ，用来表示其腕部姿态，则机械手末端执行器的位姿 $T_6 = AB$ 。根据图 2-11 中所示，腕部位置由 O_5 的位置决定。由于矩阵 A 只与 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 相关，为使矩阵 A 既满足其几何意义，又正确地表示出手的位置，这里将 O_3 沿 z_3 平移到 O_5 。此时，矩阵 A_3 变为 A_3' ，它们之间存在如下关系式

$$\begin{aligned}
 A_3' &= A_3 \text{Trans}(0,0,a_4) \\
 &= \begin{bmatrix} c3 & 0 & s3 & 0 \\ s3 & 0 & -c3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s3 & 0 & c3 & a_4 c3 \\ c3 & 0 & s3 & a_4 s3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-41)
 \end{aligned}$$

为使 T_6 保持一致， A_4 也要作相应的变化：

$$\begin{aligned}
 A_4' &= \text{Trans}(0,0,-a_4)A_4 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-42)
 \end{aligned}$$

相应地

$$\begin{cases} A' = A_1 A_2 A_3' \\ B' = A_4' A_5 A_6 \end{cases} \quad (2-7543)$$

1. 求机械手的第一个关节变量 θ_1 。

令

$$A' = A_1 A_2 A_3' = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & p_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & p_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

由前面所述的几何法可知:

$$\begin{cases} p_{3x} = p_x - a_6 a_x \\ p_{3y} = p_y - a_6 a_y \\ p_{3z} = p_z - a_6 a_z \end{cases} \quad (2-45)$$

如果对(2-44)式的左边作如下的变换

$$A_2^{-1} A_1^{-1} A' = A_3' \quad (2-46)$$

设式(2-46)的左边

$$A_2^{-1} A_1^{-1} A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

而由式(2-41)可得, 式(2-46)的右边:

$$\text{右边} = \begin{bmatrix} -s_3 & 0 & c_3 & a_4 c_3 \\ c_3 & 0 & s_3 & a_4 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

令等式两边对应元素相等, 即

$$A_2^{-1} A_1^{-1} A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_3 & 0 & c_3 & a_4 c_3 \\ c_3 & 0 & s_3 & a_4 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_3' \quad (2-49)$$

通过计算, 得 $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = |A_6| = 1$ 。与公式 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ 联立得:

$$A_1^{-1} = A_1^* = \begin{bmatrix} c1 & s1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ s1 & -c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

$$A_2^{-1} = A_2^* = \begin{bmatrix} c2 & s2 & 0 & -a_2 \\ -s2 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

$$A_3^{-1} = A_3^* = \begin{bmatrix} c3 & s3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s3 & -c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

$$A_4^{-1} = A_4^* = \begin{bmatrix} c4 & s4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \\ -s4 & c4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-53)$$

$$A_5^{-1} = A_5^* = \begin{bmatrix} c5 & s5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s5 & -c5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

$$A_6^{-1} = A_6^* = \begin{bmatrix} c6 & s6 & 0 & 0 \\ -s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

将 A', A_1^{-1}, A_2^{-1} 代入(2-49)式, 则其左边

$$\begin{aligned} A_2^{-1} A_1^{-1} A' &= \begin{bmatrix} c2 & s2 & 0 & -a_2 \\ -s2 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c1 & s1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ s1 & -c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & p_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & p_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{右边 } A_3' = \begin{bmatrix} -s_3 & 0 & c_3 & a_4 c_3 \\ c_3 & 0 & s_3 & a_4 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

联立计算得：

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_1 c_2 n_x + s_1 c_2 n_y + s_2 n_z \\ a_{12} &= c_1 c_2 o_x + s_1 c_2 o_y + s_2 o_z \\ a_{13} &= c_1 c_2 a_x + s_1 c_2 a_y + s_2 a_z \\ a_{14} &= c_1 c_2 p_{3x} + s_1 c_2 p_{3y} + s_2 p_{3z} - a_2 - a_1 s_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -c_1 s_2 n_x - s_1 s_2 n_y + c_2 n_z \\ a_{22} &= -c_1 s_2 o_x - s_1 s_2 o_y + c_2 o_z \\ a_{23} &= -c_1 s_2 a_x - s_1 s_2 a_y + c_2 a_z \\ a_{24} &= -c_1 s_2 p_{3x} - s_1 s_2 p_{3y} + c_2 p_{3z} - a_1 c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= s_1 n_x - c_1 n_y \\ a_{32} &= s_1 o_x - c_1 o_y \\ a_{33} &= s_1 a_x - c_1 a_y \\ a_{34} &= s_1 p_{3x} - c_1 p_{3y} \end{aligned}$$

取两边的第三行四列(3-4)元素相等，则有：

$$a_{34} = s_1 p_{3x} - c_1 p_{3y} = 0 \quad (2-56)$$

化简得

$$\tan \theta_1 = \frac{p_{3y}}{p_{3x}} \text{ 或 } \frac{-p_{3y}}{-p_{3x}} \quad (2-57)$$

故 θ_1 存在着两种解 $\theta_1 = \text{ATAN2}\left(\frac{p_{3y}}{p_{3x}}\right)$ 或 $\text{ATAN2}\left(\frac{-p_{3y}}{-p_{3x}}\right)$ 。

2. 求 θ_3 。

用 A_1^{-1} 左乘 A' ，则存在等式 $A_1^{-1} A' = A_2 A_3'$ ，展开为

$$\begin{bmatrix} c1 & s1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ s1 & -c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & p_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & p_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & a_2c2 \\ s2 & c2 & 0 & a_2s2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s3 & 0 & c3 & a_4c3 \\ c3 & 0 & s3 & a_4s3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

经计算

$$\text{上式左边} = \begin{bmatrix} cn_x + sn_y & clo_x + slo_y & cla_x + sla_y & clp_{3x} + slp_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & p_{3z} - a_1 \\ sn_x - cn_y & slo_x - clo_y & sla_x - cla_y & slp_{3x} - clp_{3y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

$$\text{上式右边} = \begin{bmatrix} -s23 & 0 & c23 & a_4c23 + a_2c2 \\ c23 & 0 & s23 & a_4s23 + a_2s2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

取左右两边第一行第四列(1-4)元素相等, 有

$$clp_{3x} + slp_{3y} = a_4c23 + a_2c2 \quad (2-60)$$

取第二行第四列(2-4)元素相等, 有

$$p_{3z} - a_1 = a_4s23 + a_2s2 \quad (2-61)$$

令(2-60)式左边 $clp_{3x} + slp_{3y} = P_1$, (2-61)式左边 $p_{3z} - a_1 = P_2$, 联立(2-60), (2-61)式得

$$\begin{cases} P_1 = clp_{3x} + slp_{3y} = a_4c23 + a_2c2 \\ P_2 = p_{3z} - a_1 = a_4s23 + a_2s2 \end{cases} \quad (2-62)$$

则可得

$$P_1^2 + P_2^2 = a_2^2 + a_4^2 + 2a_2a_4c3 \quad (2-63)$$

即

$$c3 = \cos\theta_3 = \frac{P_1^2 + P_2^2 - a_2^2 - a_4^2}{2a_2a_4} \quad (2-64)$$

进而

$$s3 = \sin\theta_3 = \pm\sqrt{1 - c3^2} \quad (2-65)$$

由式(2-64), (2-65)得

$$\tan\theta_3 = \frac{s3}{c3} = \pm\frac{\sqrt{1 - c3^2}}{c3} \quad (2-66)$$

即 θ_3 存在着两种解

$$\theta_3 = \text{ATAN2}(\sqrt{1-c_3^2}, c_3) \text{ 或 } \text{ATAN2}(-\sqrt{1-c_3^2}, c_3) \quad (2-67)$$

3、求 θ_2 。

将式(2-62)的第一项乘以 P_2 ，第二项乘以 P_1 ，得

$$\begin{cases} P_1 P_2 = P_2(a_4 c_3 + a_2) \\ P_1 P_2 = P_1(a_4 s_3 + a_2) \end{cases} \quad (2-68)$$

化简得

$$c_2[p_2(a_4 c_3 + a_2) - P_1 a_4 s_3] = s_2[P_1(a_4 c_3 + a_2) + P_2 a_4 s_3] \quad (2-69)$$

所以

$$\tan \theta_2 = \frac{P_2(a_4 c_3 + a_2) - P_1 a_4 s_3}{P_1(a_4 c_3 + a_2) + P_2 a_4 s_3} \quad (2-70)$$

故 θ_2 的解为

$$\theta_2 = \text{ATAN2}\left(\frac{P_2(a_4 c_3 + a_2) - P_1 a_4 s_3}{P_1(a_4 c_3 + a_2) + P_2 a_4 s_3}\right) \quad (2-71)$$

4、求 θ_4 。

在前面的步骤中已经求出了前三个关节变量 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ，因此在下面的过程中可以把它们当作已知的量来求后三个关节变量 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ 。计算过程如下：

由前面的推导可得

$$A^{i-1} T_6 = B^i = A_4^i A_5 A_6 \quad (2-72)$$

其中 $A^{i-1} = A_3^{i-1} A_2^{-1} A_1^{-1}$ 。而且经计算有

$$A_3^{i-1} = \begin{bmatrix} -s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_3 & s_3 & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-73)$$

将其代入式 $A^{i-1} = A_3^{i-1} A_2^{-1} A_1^{-1}$ 中得

$$A^{i-1} = A_3^{i-1} A_2^{-1} A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_3 & s_3 & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -cls23 & -sls23 & c23 & -a_1c23 + a_2s3 \\ sl & -cl & 0 & 0 \\ clc23 & slc23 & s23 & -a_1s23 - a_2c3 - a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-74)$$

因此

$$A^{-1}T_6 = B' = A^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-75)$$

$$= \begin{bmatrix} -cls23 & -sls23 & c23 & -a_1c23 + a_2s3 \\ sl & -cl & 0 & 0 \\ clc23 & slc23 & s23 & -a_1s23 - a_2c3 - a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设 $B' = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}$, 则有如下等式

$$T_{11} = -cls23n_z - sls23n_y + c23n_x$$

$$T_{12} = -cls23o_z - sls23o_y + c23o_x$$

$$T_{13} = -cls23a_z - sls23a_y + c23a_x$$

$$T_{14} = -cls23p_z - sls23p_y + c23p_x$$

$$T_{21} = sln_x - cln_y$$

$$T_{22} = slo_x - clo_y$$

$$T_{23} = sla_x - cla_y$$

$$T_{24} = slp_x - clp_y$$

$$T_{31} = clc23n_x + slc23n_y + s23n_z$$

$$T_{32} = clc23o_x + slc23o_y + s23o_z$$

$$T_{33} = clc23a_x + slc23a_y + s23a_z$$

$$T_{34} = clc23p_x + slc23p_y + s23p_z$$

$$\begin{aligned} T_{41} = T_{42} = T_{43} &= 0 \\ T_{44} &= 1 \end{aligned}$$

另外, 由于 $A_5^{-1}A_4'B' = A_6 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 即

$$\begin{bmatrix} c5 & s5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s5 & -c5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c4 & s4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s4 & c4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-76)$$

若令 $A_6 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$, 从上面的式子中可以得出:

$$\begin{aligned} b_{11} &= c4c5T_{11} + s4c5T_{21} - s5T_{31} \\ b_{12} &= c4c5T_{12} + s4c5T_{22} - s5T_{32} \\ b_{13} &= c4c5T_{13} + s4c5T_{23} - s5T_{33} \\ b_{14} &= c4c5T_{14} + s4c5T_{24} - s5T_{34} \\ b_{21} &= s4T_{11} + c4T_{21} \\ b_{22} &= s4T_{12} + c4T_{22} \\ b_{23} &= s4T_{13} + c4T_{23} \\ b_{24} &= s4T_{14} + c4T_{24} \\ b_{31} &= -c4s5T_{11} - s4s5T_{21} - c5T_{31} \\ b_{32} &= -c4s5T_{12} - s4s5T_{22} - c5T_{32} \\ b_{33} &= -c4s5T_{13} - s4s5T_{23} - c5T_{33} \\ b_{34} &= -c4s5T_{14} - s4s5T_{24} - c5T_{34} \end{aligned} \quad (2-77)$$

取二行三列(2-3)与 A_6 相应的元素相等, 有

$$s4T_{13} + c4T_{23} = 0 \quad (2-78)$$

因此有

$$\tan\theta_4 = \frac{T_{23}}{-T_{13}} \text{ 或 } \frac{-T_{23}}{T_{13}} \quad (2-79)$$

因此 θ_4 的解可能为

$$\theta_4 = ATAN2\left(\frac{T_{23}}{-T_{13}}\right) \text{ 或 } ATAN2\left(\frac{-T_{23}}{T_{13}}\right) \quad (2-80)$$

5、求 θ_5 。

在上面的 (2-76) 式中取三行一列 (3-1) 与 A_6 相应的元素相等

$$-(c4s5T_{11} + s4s5T_{21} + c5T_{31}) = 0 \quad (2-81)$$

从此式可得: $s5(c4T_{11} + s4T_{21}) = -c5T_{31}$ 或 $-s5(c4T_{11} + s4T_{21}) = c5T_{31}$, 则

$$\tan \theta_5 = \frac{-T_{31}}{c4T_{11} + s4T_{21}} \text{ 或 } \frac{T_{31}}{-(c4T_{11} + s4T_{21})} \quad (2-82)$$

则 θ_5 的可能值为

$$\theta_5 = ATAN(-T_{31}, (c4T_{11} + s4T_{21})) \text{ 或 } ATAN(T_{31}, -(c4T_{11} + s4T_{21})) \quad (2-83)$$

6、求 θ_6 。

再取(2-76)式的二行二列与二行一列与 A_6 相应的元素相等

$$\begin{cases} s4T_{11} + c4T_{21} = s6 \\ s4T_{12} + c4T_{22} = c6 \end{cases} \quad (2-84)$$

从而有

$$\tan \theta_6 = \frac{s6}{c6} = \frac{c4T_{21} + s4T_{11}}{c4T_{22} + s4T_{12}} \quad (2-85)$$

则 θ_6 的解为

$$\theta_6 = ATAN2\left(\frac{c4T_{21} + s4T_{11}}{c4T_{22} + s4T_{12}}\right) \quad (3-86)$$

可以看出, 在运动学逆解的过程中存在着多解的问题。为了使机械手的根据当前的运动情况, 以最短的路径到达目的地, 必须对这些解进行优化。

2.4 工作空间

机器人的工作空间, 指机器人终端参考点能达到的空间点的集合, 是机器人末端执行器的中心点在空间所能达到的范围。工作空间的大小代表了机器人的活动范围, 它是衡量机器人工作能力的一个重要的运动学指标。

然而，在求工作空间时，因末端执行器与手腕的位置相对固定，两者之间的变换较容易推导，所以为简化计算，通常采用其腕部的位置为参考点。事实上，末端执行器中心的工作空间与手腕的工作空间还存在着一个变换关系。

工作空间的求解有两种方法——几何法和解析法。几何法就是根据机器人各关节变量的范围，用作图的方法，直接画出其在空间中能到达的区域。对于自由度少，结构简单的机器人操作机，可以通过这种方法得到工作空间边界。然而对于复杂的结构，工作空间图形的计算和判别都比较麻烦，一般通过矩阵的运算来解比较方便，即用矩阵法。

本机器人机械手在垂直面内有三个运动关节（此时平行于轴向的关节对工作空间不起作用），相当于一个3自由度平面机器人结构，空间结构比较简单，可以直接采用几何法求其工作空间的边界。但因本机器人的关节空间范围较大，如果直接采用几何法分析，画出的图形相当复杂，不利于观察和分析，故在这里仍采用运动学矩阵方程来求。另外，对于本课题所研究的机械手，垂直平面 $x-z$ 内的工作空间是影响实际作业范围的主要因素。因此，在机械手的仿真模型中，我们只研究机械手此垂直平面内的工作空间。

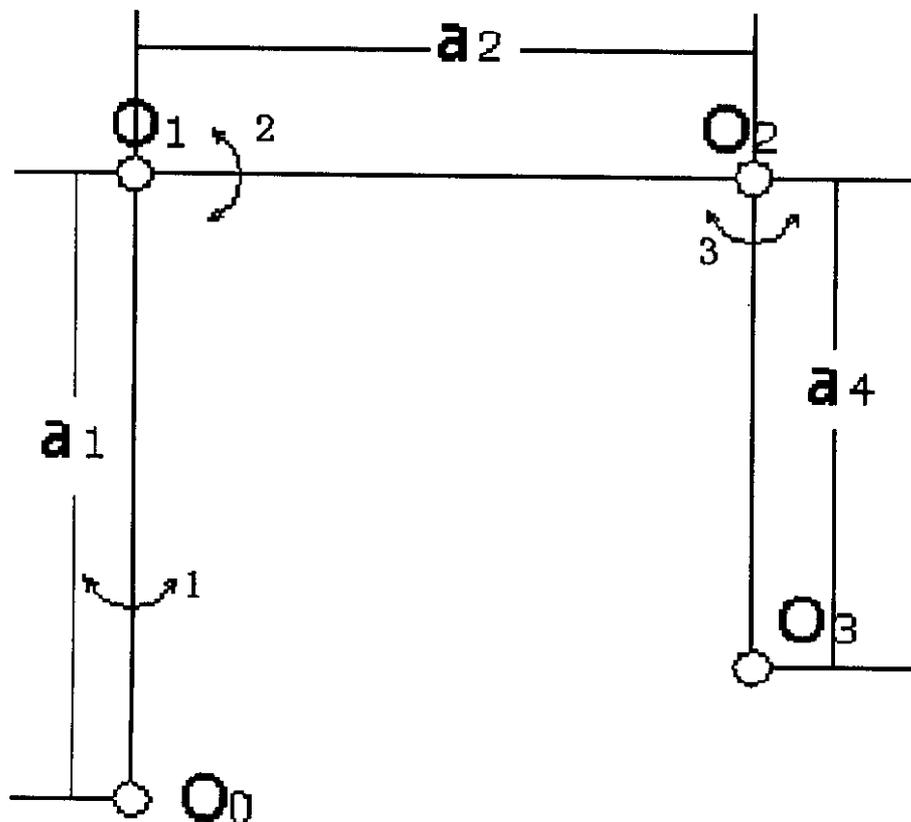


图 2-13 关节结构简化图

由于机器人手腕中心点只与 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 有关, 关节角 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ 对其不产生影响, 故可以 O_3 作为工作空间的参考点。该机器人的关节结构简化图如 2-13 所示, 杆件 O_1O_2 可以绕 O_1 转动 $\pm 75^\circ$, 杆件 O_2O_3 可以绕 O_2 转动 $\pm 130^\circ$, 杆件 O_4O_6 可以绕 O_4 转动 $\pm 105^\circ$ 。由于参

考系与机座的相对变换矩阵 B 为
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
。当以手腕中心 O_3 (与 O_5 重合) 为工作

空间的参考点时, 表示末端执行器与工件中心的向量 E 为 $[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ 。根据代数法, 参考点 O_3 的位置为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{o_3} & y_{o_3} & z_{o_3} & 1 \end{bmatrix}^T &= BA_1A_2A_3^T E \\ &= \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_2s_3c_1 & s_1 & c_1c_2s_3 + c_1s_3s_2 & a_2c_1c_2 \\ s_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 & -c_1 & s_1s_3c_2 + s_1s_2c_3 & a_2s_1c_2 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & 0 & s_2s_3 - c_2c_3 & a_2s_2 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2s_3 + c_1s_3s_2 \\ s_1s_3c_2 + s_1s_2c_3 \\ s_2s_3 - c_2c_3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} x_{o_3} = c_1c_2s_3 + c_1s_3s_2 \\ y_{o_3} = s_1s_3c_2 + s_1s_2c_3 \\ z_{o_3} = s_2s_3 - c_2c_3 \end{cases} \quad (2-87)$$

由于垂直平面内 $x-z$ 的工作空间是影响实际作业范围的主要因素, 因此 $\theta_1 = 0$, 则(2-87)式可化为:

$$\begin{cases} x_{o_3} = a_4s_2s_3 + a_2c_2 \\ y_{o_3} = 0 \\ z_{o_3} = -a_4c_2s_3 + a_2s_2 + a_1 \end{cases} \quad (2-88)$$

从式(2-88)中可以看出:

- ①此时点 O_3 在 $x-z$ 平面上。
- ②式中存在 θ_2, θ_3 两个不确定量。

因此对 O_3 在 $x-z$ 平面上的轨迹需作如下讨论:

(1)当以 $\theta_2 \in (-75^\circ, 75^\circ)$ 为常量, θ_3 为变量。从式(2-88)可得到

$$(x_{o_3} - a_2c_2)^2 + (z_{o_3} - a_1 - a_2s_2)^2 = a_4^2 \quad (2-89)$$

由式(3-89)可看出, O_3 是以 O 为圆心, 半径为 a_4 的圆弧上运动。其中圆心 O 的轨迹为

$$\begin{cases} x_o = a_2 c 2 \\ y_o = a_1 + a_2 s 2 \end{cases} (\theta_2 \in [-75^\circ, 75^\circ]) \quad (2-90)$$

(2) 当以 $\theta_3 \in (-130^\circ, 130^\circ)$ 为常量, θ_2 为变量。从式(2-88)可得到

$$x_{o_3}^2 + (z_{o_3} - a_1)^2 = a_4^2 + a_2^2 + 4a_2 a_4 s 3 \quad (2-91)$$

从(2-91)式可看出, O_3 是以 $(0, a_1)$ 为圆心, 半径为 r 的圆弧上运动, 其中 $r = \sqrt{a_4^2 + a_2^2 + 4a_2 a_4 s 3} (\theta_3 \in [-130^\circ, 130^\circ])$ 。

从上述的分析可见, 本机器人的工作空间不仅要满足式(2-89), 同时也要满足式(2-91), 比较复杂。如果通过作图的方式, 难以正确画出其正确的工作空间。因此, 进行工作空间计算时, 应根据机器人结构及关节空间的大小, 选用合适的方法来表达。

另外, 机械手的工作空间还受到奇异位形等因素的影响。奇异位形主要发生在任意两移动关节轴变成平行或任意两旋转关节变成共线时^[22]。这时, 要使机器人的末端执行器作一微小的运动, 关节必须产生相当大的运动速度和关节加速度, 从而导致机器人末端执行器的受力、运动轨迹及运动精度误差^[18]增大, 对机器人的精确控制造成困难。

目前奇异位形的方法很多, 常用的有 Jacobian 矩阵伪逆矩阵法 PI, 奇异点分离加简易二次规划法 SICQP, 鲁棒逆法 SRI^[22]等。如第一种方法通过判断表示末端执行器速度与关节速度的 Jacobian 矩阵秩是否减少来确定是否处于奇异位形。若减少则处在奇异位形。此时逆 Jacobian 矩阵不存在, 只有通过其伪逆矩阵来解决。

因为奇异位形是一个相当复杂的研究领域, 目前国内外有许多学者专门致力于这一研究课题。在本课题有限的时间内没有在这方面作深入的研究与探索。

2.5 路径优化

在前面求解机器人逆运动学的时出现了多解, 这意味着机械手可以通过不同的路径从前一个目标点到达下一个目标点。然而在生产操作中, 人们却并不希望如此, 而是希望机械手能以最迅捷而有效的途径执行作业。因此, 应对这种多解的情况进行轨

迹优化处理，使机械手能够在运动的过程中自主地选择合适的途径运行。其优化过程是这样的：当机械手沿预定的轨迹运动到前一个目标点 P_i 时，通过逆运动学，可以算出机器人各运动关节对应此时的关节变量 $\theta_k, (k=1,2,3,4,5,6)$ 。同理也可以算出间隔了时间 t 后，其达到的下一目标点 P_{i+1} 的关节变量 $\theta_{i+1k}, k=(1,2,3,4,5,6)$ 。这时，先判断点 P_{i+1} 的各关节变量是否在有效的工作空间。如果点 P_{i+1} 在有效工作空间，则计算出各关节变量在这两个时刻的差值 $\Delta\theta_k, k=(1,2,3,4,5,6)$ 。由于多解，这时 $\Delta\theta_k, k=(1,2,3,4,5,6)$ 可能有多组。通过比较各 $\Delta\theta_k, k=(1,2,3,4,5,6)$ 值的大小，将 $\Delta\theta_k, k=(1,2,3,4,5,6)$ 中最小的值传给步进参数，用来对机器人的运动进行控制。这样可以使机器人的各关节以最短的路径，协助机器人末端执行器完成即定的作业。

第三章 RV12L 6R 机器人的雅可比矩阵

机器人以极短时间间隔从当前路径点运动到下一路径点时，机械手位姿的运动极微。机器人的这种微小变化可用微分运动来表示。由于机器人的运动同时存在平移和旋转，因此在时间间隔极小时，其微分平移和微分旋转对时间的导数，实际上对应着机器人各杆件运动的线速度和角速度。从齐次坐标变换知识可知，机器人的某一杆件（如机械手）绕某一坐标系的坐标变换与其绕另一坐标系的坐标变换存在一定的映射关系，可通过行变换矩阵表示。机器人的微分变换也遵循这一规律。机器人的雅可比矩阵就是反映机器人操作空间速度与关节空间速度间的这种线性映射关系，即机器人的雅可比矩阵，表示了末端执行器与各关节间运动的速度传动比，它反映了机器人末端执行器的运动与机器人其它各杆件间的微运动关系。

3.1 机器人的微分运动

对于一个已知坐标系 $\{T\}$ ，设经过极短时间 t 后，设其位姿的微分变化为 dT ，则其位姿变为：

$$T + dT = \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(f, d\theta) T$$

即

$$dT = [\text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(f, d\theta) - I] T \quad (3-1)$$

式中， d_x 、 d_y 、 d_z 表示微分平移， $\text{Rot}(f, d\theta)$ 表示绕矢量 f 微分旋转 $d\theta$ 。

从上一章可得 $\text{Rot}(f, \theta)$ 的表达式为(2-14)及 f ，所以

$$\text{Rot}(f, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -f_z d\theta & f_y d\theta & 0 \\ f_z d\theta & 1 & -f_x d\theta & 0 \\ -f_y d\theta & f_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

将(3-2)代入(3-1)，则有：

$$dT = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

通常,若微分运动是相对于基座进行的时,将之记为 Δ ,且存在 $dT = \Delta T$;若是相对于任一个坐标系 $\{T\}$ 进行时,将之记为 ${}^T\Delta$,存在 $dT = T{}^T\Delta$ 。

因此,相对于基座的微分变换为:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

同理,相对于坐标系 $\{T\}$ 的微分变换即为:

$${}^T\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -{}^T\delta_z & {}^T\delta_y & {}^T d_x \\ {}^T\delta_z & 0 & -{}^T\delta_x & {}^T d_y \\ -{}^T\delta_y & {}^T\delta_x & 0 & {}^T d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

令 $d = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$, 对应于某刚体或坐标系的平移向量, $\delta = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}$, 对应于某刚体或坐标

系的旋转向量, 则 $D = \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix}$ 和 ${}^T D = \begin{bmatrix} {}^T d \\ {}^T \delta \end{bmatrix}$ 分别表示某刚体或坐标系的微分运动矢量。

3.2 微分等价变换

因为微分运动是相对于基座进行的时, $dT = \Delta T$; 若相对于坐标系 $\{T\}$ 进行时, 存在 $dT = T{}^T\Delta$ 。因此可以得出, 对于同一个微分运动, 其相对于一个坐标系的微分变化与其相对于另外一个坐标系的微分变化存在一个等效式。承上可得如下等式:

$$\Delta T = T{}^T\Delta \quad (3-6)$$

变换后得

$${}^{-1}T\Delta T = {}^T\Delta \quad (3-7)$$

设 $T = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 由式(3-4)得:

$$\Delta T = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\delta \times n)_x & (\delta \times o)_x & (\delta \times a)_x & (\delta \times p + d)_x \\ (\delta \times n)_y & (\delta \times o)_y & (\delta \times a)_y & (\delta \times p + d)_y \\ (\delta \times n)_z & (\delta \times o)_z & (\delta \times a)_z & (\delta \times p + d)_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而有

$$T^{-1} \Delta T = {}^T \Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \cdot a & \delta \cdot o & \delta \cdot (p \times n) + d \cdot n \\ \delta \cdot a & 0 & -\delta \cdot n & \delta \cdot (p \times o) + d \cdot o \\ -\delta \cdot o & \delta \cdot n & 0 & \delta \cdot (p \times a) + d \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

再由式(3-5)与上式可得:

$$\left. \begin{aligned} {}^T d_x &= \delta \cdot (p \times n) + d \cdot n \\ {}^T d_y &= \delta \cdot (p \times o) + d \cdot o \\ {}^T d_z &= \delta \cdot (p \times a) + d \cdot a \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^T \delta_x &= \delta \cdot n \\ {}^T \delta_y &= \delta \cdot o \\ {}^T \delta_z &= \delta \cdot a \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

$$\text{则 } {}^T D = \begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (p \times n)_x & (p \times n)_y & (p \times n)_z \\ o_x & o_y & o_z & (p \times o)_x & (p \times o)_y & (p \times o)_z \\ a_x & a_y & a_z & (p \times a)_x & (p \times a)_y & (p \times a)_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}$$

$$\text{化简得} \begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \cdot ((p \times \delta) + d) \\ o \cdot ((p \times \delta) + d) \\ a \cdot ((p \times \delta) + d) \\ n \cdot \delta \\ o \cdot \delta \\ a \cdot \delta \end{bmatrix}$$

3.3 RV12L 6R 机器人的雅可比矩阵及其求法

若坐标系 $\{B\}$ 是相对于坐标系 $\{A\}$ 定义的, 则式 $T = AB$ 表示坐标系 $\{B\}$ 在基系中的位姿。则 T 相对于基坐标系的微分变化为 ΔAB , 其相对于坐标系 $\{B\}$ 求对于的微分变化为 $AB^B\Delta$ 。即有

$$\Delta AB = AB^B\Delta \quad (3-11)$$

化简得

$$\Delta = (AB)^B \Delta (B^{-1} A^{-1}) \quad (3-12)$$

此式表示了坐标系 $\{B\}$ 内的微分运动与在基坐标系内的微分运动关系。

1. 雅可比矩阵

机械手的操作速度和关节速度的线性变换即为机器人的雅可比矩阵。在物理意义上就是机器人的关节空间速度向操作空间运动速度的传动比。

令具有 n 个自由度的机械手的运动方程为:

$$x = x(q), q = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (3-13)$$

则机械手在操作空间中的广义速度为

$$\dot{x} = \dot{x}(q) = \frac{\partial x(q)}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \quad (3-14)$$

令 $J(q) = \frac{\partial x(q)}{\partial q}$, 此时 $J(q)$ 为一个 $6 \times n$ 的偏导数矩阵, 它的第 i 行第 j 列元素为:

$$J_{ij}(q) = \frac{\partial x_i(q)}{\partial q_j}, i = 1, 2, 3, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, n$$

从 $J_{ij}(q)$ 的表达式可得, 若 $J_{ij}(q)$ 的秩减少, 则至少有一个关节角度对机械手的广义速度无影响, 即关节退化。说明此时机器人处于奇异位形, 需用伪 $J(q)$ 矩阵来解机械手的运行速度^[22]。对于非冗余机器人, 当 $J_{ij}(q)$ 满秩时机械手的广义速度从式(3-14)推导得

$$\dot{x} = J(q) \times \dot{q} \quad (3-15)$$

又因为机器人的运动具有平移和旋转方式, 则 \dot{x} 可表示为 $\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$ (v —线速度, ω —角

速度)的形式,即

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix} \Delta t \quad (3-16)$$

则由式(3-15), (3-16)得

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{a1} & J_{a2} & \cdots & J_{an} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

其中, J_{ii} 代表机械手线速度 v 的传递比, J_{ai} 代表机械手角速度 ω 的传递比。

机械手的微分运动矢量为 $D = \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix}$, 则由式(3-15), (3-16)可得:

$$\begin{aligned} D = \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \dot{x} \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial x(q)}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \Delta t \\ &= J(q) dq \end{aligned} \quad (3-18)$$

再次变形为

$$\frac{\partial D}{\partial q} = J(q) \quad (3-19)$$

这是 $J(q)$ 矩阵的另一种表示形式。这种形式着眼于机械手的速度比和角速度比(对应于微平移和微旋转),更直观,更易理解。

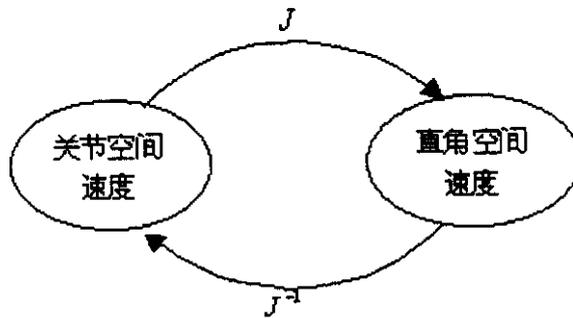


图 3-1

从上述雅可比矩阵的两表达式可得出:通过机器人的雅可比矩阵可以从关节速度算

出机器人的直角空间中的速度，通过逆雅可比矩阵可以从直角空间中的速度得到在关节空间中的速度（如图 3-1）。机器人的雅可比矩阵建立起了两者之间的关系。

2. 机器人的雅可比矩阵的求法

雅可比矩阵可根据前面的公式推导，也可以用直接构造法求得。常用的构造法有惠特尼（whitney）提出的矢量法，还有一种为微分变换法。在本课题中采用了后者。

根据微分变换法可知，对于转动关节*i*，连杆*i*相对于连杆*i-1*绕坐标系*{i}*的*z_i*轴作微分转动*dθ*时，杆件相应的微分运动矢量^T*D*为：

$$\begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p \times n)_z \\ (p \times o)_z \\ (p \times a)_z \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} d\theta = \begin{bmatrix} -p_y n_x + p_x n_y \\ -p_y o_x + p_x o_y \\ -p_y a_x + p_x a_y \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} d\theta \quad (3-20)$$

由式(3-19)得：

$$J(q) = \frac{\partial {}^T D}{\partial q} = \begin{bmatrix} -p_y n_x + p_x n_y \\ -p_y o_x + p_x o_y \\ -p_y a_x + p_x a_y \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

从雅可比矩阵的表达式(3-21)可得，只需矩阵 $T = [n \ o \ a \ p]^T$ （即只需各连杆变换矩阵ⁱ⁻¹*T_i*）就可自动构造出机械手的雅可比矩阵，不需求解方程。因此，求机器人的雅可比矩阵时，可按如下流程图进行：

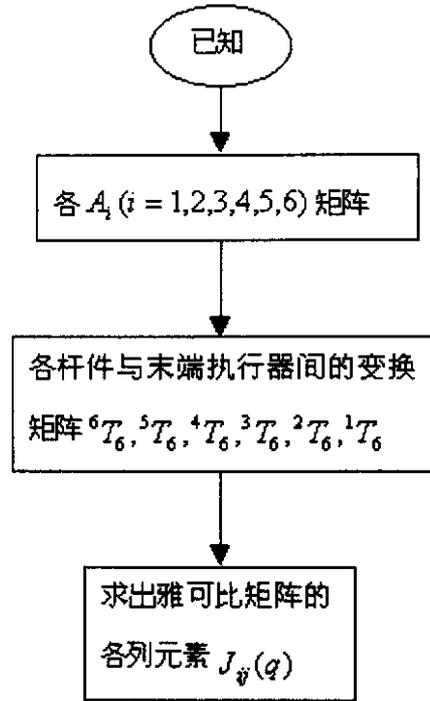


图 3-2 求机器人雅可比矩阵的流程图

3. RV12L 6R 焊接机器人的雅可比矩阵

承第二章中已知的 RV12L 6R 焊接机器人的各 A 矩阵（见公式(2-59)），根据图 3-1 所示的流程图可知，通过这些 A 矩阵，可得出机器人的末端执行器相对于各关节的变换矩阵分别为：

$${}^6T_6 = A_6, \quad {}^5T_6 = A_5A_6, \quad {}^4T_6 = A_4A_5A_6, \quad {}^3T_6 = A_3A_4A_5A_6, \quad {}^2T_6 = A_2A_3A_4A_5A_6, \\ {}^1T_6 = A_1A_2A_3A_4A_5A_6.$$

将各 A 矩阵的表达式代入 ${}^i T_6, (i = 1,2,3,4,5,6)$ ，经计算：

$${}^6T_6 = A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & s_5 & a_6s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & -c_5 & -a_6c_5 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4T_6 = \begin{bmatrix} c4c5c6 - s4s6 & -c4c5s6 - s4s6 & c4s5 & a_6c4s5 \\ s4c5c6 + c4s6 & -s4c5s6 + c4c6 & s4s5 & a_6s4s5 \\ -s5c6 & s5s6 & c5 & a_6c5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_6 = \begin{bmatrix} c6(c3c4c5 + s3s5) - c3s4s6 & -s6(c3c4c5 + s3s5) - c3s4c6 \\ c6(s3c4c5 - c3s5) - s3s4s6 & -s6(s3c4c5 - c3s5) - s3s4c6 \\ s4c5c6 + c4s6 & -s4c5s6 + c4c6 \\ 0 & 0 \\ c3c4s5 - s3c5 & a_6(c3c4s5 - s3c5) - a_4s3 \\ s3c4s5 + c3c5 & a_6(s3c4s5 + c3c5) + a_4c3 \\ s4s5 & a_6s4s5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_6 = \begin{bmatrix} c4c5c6c23 - s5s6s23 - s4s6c23 & -c4c5s6c23 + s5s6s23 - s4c6c23 \\ c4c5s6s23 + s5c6c23 - s4s6s23 & -c4c5s6s23 - s5s6c23 - s4c6s23 \\ s4c5c6 + c4s6 & -s4c5s6 + c4c6 \\ 0 & 0 \\ c4s5c23 + c5s23 & a_6(c4s5c23 + c5s23) + a_4s23 + a_2c2 \\ c4s5s23 - c5c23 & a_6(c4s5s23 - c5c23) - a_4c23 + a_2s2 \\ s4s5 & a_6s4s5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} c1 & 0 & s1 & 0 \\ s1 & 0 & -c1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & a_2c2 \\ s2 & c2 & 0 & a_2s2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c3 & 0 & s3 & 0 \\ s3 & 0 & -c3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 \\ s5 & 0 & -c5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中} \begin{cases} p_x = a_6a_x + a_4c1s23 + a_2c1c2 \\ p_y = a_6a_y + a_4s1s23 \\ p_z = a_6a_z - a_4c23 + a_2s2 + a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_x = c1c23(c4c5c6 - s4s6) + s1(s4c5c6 + c4s6) - c1s23s5c6 \\ n_y = s1c23(c4c5c6 - s4s6) - c1(s4c5c6 + c4s6) - s1s23s5c6 \\ n_z = s23(c4c5c6 - s4s6) + c23s5c6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} o_x = -c1c23(c4c5s6 + s4c6) + s1(c4c6 - s4c5s6) + c1s23s5s6 \\ o_y = -s1c23(c4c5s6 + s4c6) - c1(c4c6 - s4c5s6) + s1s23s5s6 \\ o_z = -s23(c4c5s6 + s4c6) - c23s5s6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = c1c23c4s5 + s1s4s5 + c1s23c5 \\ a_y = s1c23c4s5 - c1s4s5 + s1s23c5 \\ a_z = s23c4s5 - c23c5 \end{cases}$$

于是据公式(3-21),可求出机械手雅可比矩阵的六个各列向量 ${}^6J_1, {}^6J_2, {}^6J_3, {}^6J_4, {}^6J_5, {}^6J_6$ 。

$${}^6J_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^6J_5 = \begin{bmatrix} a6c6 \\ a6s6 \\ 0 \\ s6 \\ c6 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^6J_4 = \begin{bmatrix} {}^6d_{4x} \\ {}^6d_{4y} \\ {}^6d_{4z} \\ {}^6\delta_{4x} \\ {}^6\delta_{4y} \\ {}^6\delta_{4z} \end{bmatrix}, \quad \text{其中} \begin{cases} {}^T d_{4x} = -a_6s4s5(c4c5c6 - s4s6) + a_6c4s5(s4c5c6 + c4s5) \\ {}^T d_{4y} = a_6s4s5(c4c5s6 + s4s6) + a_6c4s5(c4c6 - s4c5s6) \\ {}^T d_{4z} = -a_6s4s5c4s5 + a_6c4s5s4s5 \\ {}^T \delta_{4x} = -s5c6 \\ {}^T \delta_{4y} = s5s6 \\ {}^T \delta_{4z} = c5 \end{cases}$$

同理, 6J_3 的各元素为:

$$\begin{cases} {}^6d_{3x} = -[a_6(s3c4s5 + c3c5) + a_4c3][c6(c3c4c5 + s3s5) - c3s4s6] - \\ [a_6(c3c4s5 - s3c5 - a_4s3][s6(c3c4c5 + s3s5) - c3s4c6] \\ {}^6d_{3y} = -[a6(s3c4s5 + c3c5) + a4c3][c6(s3c4c5 - c3s5) - s3s4s6] - \\ [a6(c3c4s5 - s3c5 - a4s3][s6(s3c4c5 - c3s5) + s3s4c6] \\ {}^6d_{3z} = -[a6(s3c4s5 + c3c5) + a4c3][c3c4s5 - s3c5] + [a6(c3c4s5 - s3c5) - a4s3][s3c4s5 + c3c5] \\ {}^6\delta_{3x} = s4c5c6 + c4s6 \\ {}^6\delta_{3y} = -s4c5s6 + c4s6 \\ {}^6\delta_{3z} = s4s5 \end{cases}$$

6J_2 的各元素为:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^6d_{2x} = -[a_6(c4c5s23 - c5c23) - a_4c23 + a_2s2][c4c5s6s23 + s5c6c23 - s4s6c23] + \\ [a_6(c4s5c23 + c5s23 + a_4s23 + a_2c2)[c4c5s23s6 + s5c6c23 - s4s6s23] \\ {}^6d_{2y} = -[a_6(c4c5s23 - c5c23) - a_4c23 + a_2s2][-c4c5s6c23 - s4c6c23 + s5s6s23] + \\ [a_6(c4s5c23 + c5s23 + a_4s23 + a_2c2)[-c4c5s6s23 - s5s6c23 - s4c6s23] \\ {}^6d_{2z} = -[a_6(c4c5s23 - c5c23) - a_4c23 + a_2s2][c4s5c23 + c5s23] + \\ [a_6(c4s5c23 + c5s23 + a_4s23 + a_2c2)[c4s5s23 - c5c23] \\ {}^6\delta_{2x} = s4c5c6 + c4s6 \\ {}^6\delta_{2y} = -s4c5s6 + c4s6 \\ {}^6\delta_{2z} = s4s5 \end{array} \right.$$

6J_1 的各元素为:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^6d_{1x} = -p_y n_x + p_x n_y \\ {}^6d_{1y} = -p_y o_x + p_x o_y \\ {}^6d_{1z} = -p_y a_x + p_x a_y, \\ {}^6\delta_{1x} = n_z \\ {}^6\delta_{1y} = o_z \\ {}^6\delta_{1z} = a_z \end{array} \right.$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x = a_6 a_x + a_4 c1s23 + a_2 c1c2 \\ p_y = a_6 a_y + a_4 s1s23 \\ p_z = a_6 a_z - a_4 c23 + a_2 s2 + a_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_x = c1c23(c4c5c6 - s4s6) + s1(s4c5c6 + c4s6) - c1s23s5c6 \\ n_y = s1c23(c4c5c6 - s4s6) - c1(s4c5c6 + c4s6) - s1s23s5c6 \\ n_z = s23(c4c5c6 - s4s6) + c23s5c6 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} o_x = -c1c23(c4c5s6 + s4c6) + s1(c4c6 - s4c5s6) + c1s23s5s6 \\ o_y = -s1c23(c4c5s6 + s4c6) - c1(c4c6 - s4c5s6) + s1s23s5s6 \\ o_z = -s23(c4c5s6 + s4c6) - c23s5s6 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = c1c23c4s5 + s1s4s5 + c1s23c5 \\ a_y = s1c23c4s5 - c1s4s5 + s1s23c5 \\ a_z = s23c4s5 - c23c5 \end{array} \right.$$

于是, 本机器人雅可比矩阵为: ${}^6J(q) = [{}^6J_1 \quad {}^6J_2 \quad {}^6J_3 \quad {}^6J_4 \quad {}^6J_5 \quad {}^6J_6]$.

第四章 轨迹规划

机器人的轨迹规划，在机器人的规划中属于低层规划。它是在机器人动力学和运动学基础上，讨论在关节空间或笛卡尔空间中机器人运动的轨迹和轨迹生成方法。其目的是根据任务要求，通过一定的方法，计算出预期的运动轨迹。如用户给定有关路径和轨迹的若干约束和简单描述（目标位姿、路径点、持续时间、运动的速度、加速度等），通过轨迹规划就可获得机器人完成这一任务的具体运动细节。在轨迹规划中运用的一个最重要的思想是——离散的方法。通过这种方法，将轨迹离散成有限多个点。机器人通过有序地遍历这些点来实现在整个轨迹上的运行。

4.1 轨迹规划中要考虑的问题

机器人在完成某一项任务时，总是从起始点以一定的速度和加速度、按一定的轨迹和姿态移动到终止点。若以机器人的机座坐标系为参考坐标系，这一过程就是机器人的末端执行器的中心坐标相对于机座坐标系所作的一系列移动和旋转。如果每隔一定的时间间隔来截获机器人末端执行器的位姿信息，就可以得到表示机器人工作位姿的一系列“路径点”。由于这些路径点描述了机器人在运动过程中的位置和姿态，因此它们对于研究机器人的运动轨迹具有重要的意义。这些路径点不仅可以用关节变量表示，而且可以用笛卡尔坐标来表示，故机器人的轨迹规划既可以在关节空间，也可以在笛卡尔坐标空间来研究。轨迹规划的方法也相应地分为在关节空间内轨迹规划和在笛卡尔坐标空间内轨迹规划两种。

因不同的机器人作业目的和方式不一样，因此，在进行轨迹规划前应根据工作的要求，选择合适的规划方式和方法。如进行抓放作业的机器人，其工作过程是从起始点抓取物体，在终止点放下。其作业路径是一个点到点（Point-to-Point motion）的作业过程，因而采用在关节空间内的轨迹规划更容易；而对于另外一些作业如曲面加工、弧焊等，不仅要指明作业的起始点，而且还需沿特定的路径运动，即连续路径运动（continuous-path motion）。因此最好在直角坐标系中为其规划轨迹。其中，在关节空间中进行轨迹规划是将关节变量表示成时间的函数，并规划它的一阶和二阶时间导数。这种方法的优点是计

算量小，效率高，仅受关节速度和关节加速度的限制，不会发生机构的奇异性问题。适合于机器人末端执行器离开物体时不要求规定路径的或进入空行程大范围内快速移动的轨迹段。缺点是，机器人在未运动前，难以想象末端执行器在空间中的运动轨迹，难以进行避障。

在笛卡尔空间中进行规划是指将手部位姿、速度和加速度表示为时间的函数，而相应的关节位移、速度和加速度由手部的信息导出：通常通过运动学反解得出关节位移，再用雅可比求出关节速度，用逆雅可比及其导数求解关节加速度。其优点是分段点间的运动能被很好的界定。缺点是，不仅需要对其运动路径进行空间插补，还要将它转换到关节空间进行控制，难以估计运动的时间、关节速度及加速度达到的极限。

4.2 轨迹的生成方法

轨迹的生成方法很多。Aspinwall 提出用脉冲构造法，将机械臂的点位运动控制归结为非线性两点边值问题求解^[49]；Jankowski 引入逆系统法求解^[50]；上述三种方法都比较复杂，运用于多杆系统的轨迹规划存在一定的困难。而张晋西在文献^[19]中提出的用 AutoCAD 中的 Spline 样条曲线功能来添加拟合点使轨迹精确地通过指定的点。但是，这种方法难以控制运动的速度和加速度，因而在机器人控制中不具现实意义。目前最常用的就是采用高阶多项式插值法。这种方法可运用于关节空间和笛卡尔坐标空间，具有很好的通用性。下面简要介绍一下在关节空间中进行三次多项式插值的过程。

由逆运动学原理可知，根据起始点、终止点就可以求出对应于这两个位姿的各关节角度。在关节空间中，这些的位置和姿态是由关节角度来表示。因此，末端执行器在这两位姿之间运动的轨迹描述，就是关节空间中通过这两个点的一个平滑的轨迹函数 $\theta(t)$ 。这个轨迹函数 $\theta(t)$ 可用不同的方法来确定，不同的方法得出的规划路径不一定相同。最简单的就是用三次多项式插值法。应根据作业要求的严格程度来具体选择多项式的次数。

因在机器手的运动过程中起始点的关节角度 θ_0 是已知的，而终止点的关节角 θ_f 可以通过运动学反解得到，因此运动轨迹可以用起始点关节角度 θ_0 与终止点关节角度 θ_f 的一个平滑插值函数 $\theta(t)$ 来表示：

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta(t_f) = \theta_f \end{cases} \quad (4-1)$$

为了满足关节运动的连续性要求，还需另外两个约束，即对起始点和终止点的关节速度的要求，如起始点和终止点的速度都为零时：

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) = 0 \end{cases} \quad (4-2)$$

上面四个边界约束条件就可以唯一地确定三次多项式

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (4-3)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3 t \end{cases} \quad (4-4)$$

联立求解，就可得到 a_0, a_1, a_2, a_3 的值，进而可得 $\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)$ 的表达式，即运动轨迹上各点的位置、速度和加速度相对于时间的导数。

本方法适用于规划过起始点和终止点的轨迹，但对于规划具有一些特殊要求的轨迹显得力不从心。但将上述方法根据情况作一些相应的改进，如用过路径点的三次多项式、高阶多项式、抛物线过渡的线性插值等方法即可。

由于在直角坐标空间轨迹规划系统中，作业是用机器人的末端执行器的直角坐标路径点序列规定的。而路径点通常是以工具坐标系相对于工作坐标系的位姿来表示的，因而连接各个路径点的平滑函数就是直角坐标变量关于时间的函数。这些轨迹可直接由工具坐标系相对于工作坐标系位姿的变化来进行规划，不必一开始就通过逆运动学去计算关节的角度。又因为机器人的运动真正发生在机器人的关节空间，因此最后还须把直角坐标空间的路径分散成有限的离散点，按照轨迹的更新速率进行逆运动学计算，将其回归到关节空间才能进行控制。

直角坐标空间内的各个路径点是用向量 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}, \bar{p}$ 表示，因此在每一路径段的线性领域中描述末端执行器位置的三个元素 p_x, p_y, p_z 沿着各自的坐标轴作线性运动，其合成运动为直角坐标空间的直线轨迹；同时不能对描述末端执行器姿态的向量 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ 的元素进行线性插值，是因为任何旋转矩阵都是由三个规范化正交向量组成，如果在两个元素之间进行线性插值，所得到的旋转矩阵的列向量就难以保证满足规范化正交的要求。因此，为

克服这一缺陷，必采用另外一种姿态的表示方法——等效转轴-转角法。

4.3 RV12L 6R 机器人的轨迹规划

本课题的仿真主要是对直线型运动轨迹进行计算机仿真，对运动轨迹要求比较高：需要同时限制工作的起点、终点以及运动中的路径点。为保证在任两个旋转矩阵中插值生成的旋转矩阵的三个向量满足规范化正交性要求，对姿态采用等效转轴—转角法来进行插值，使规划出的路径更具准确性。其规划过程与仿真的关系如下图：

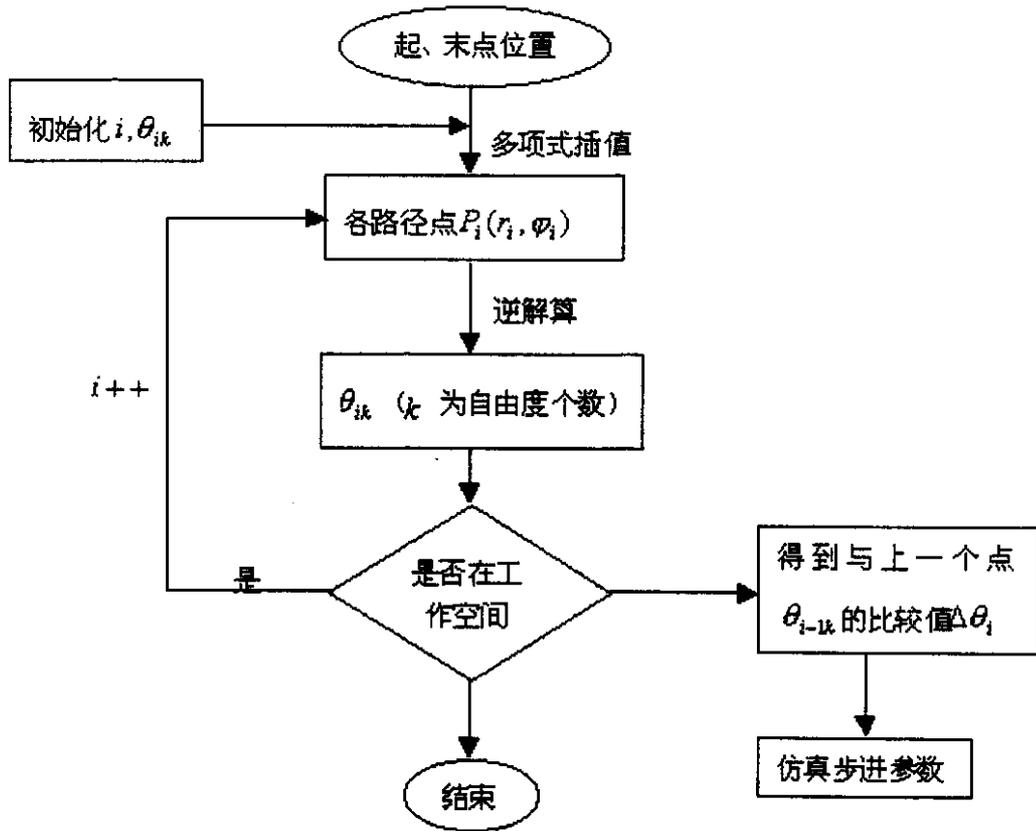


图 4-1 机器人轨迹规划的过程

即用户通过界面给定路径的起始点、终止点的位姿，运动速度及经历的时间等约束，计算机自动按用户给定的信息实现从起始点到终止点的直线运动。实现的过程如下：

(1) 建立任务曲线方程

根据给定的起始点 p_A 和终止点 p_B ，可以得出经过这两点的直线方程：

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), (s \text{ 为此直线长}) \\ z = z(s) \end{cases} \quad (4-6)$$

(2) 表达出各路径点的位置、速度和加速度

设整个运动历时 T 。当仿真历时 t 时, 机器人的末端执行器中心到达 p_i 时, 其坐标为:

$$\begin{cases} x_i = x(s_0) + x(s_i) \\ y_i = y(s_0) + y(s_i) \\ z_i = z(s_0) + z(s_i) \end{cases} \quad (4-7)$$

不同的 t 值将对应着不同的坐标, 即可以任意表示出不同时刻路径点的位置。

(3) 表达出各路径点的姿态

利用用户输入的有关起始点及终止点相对于参考坐标系的姿态信息, 可得它们相应的姿态矩阵 T_A, T_B , 即

$$T_A = \begin{bmatrix} n_{Ax} & o_{Ax} & a_{Ax} & 0 \\ n_{Ay} & o_{Ay} & a_{Ay} & 0 \\ n_{Az} & o_{Az} & a_{Az} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

$$T_B = \begin{bmatrix} n_{Bx} & o_{Bx} & a_{Bx} & 0 \\ n_{By} & o_{By} & a_{By} & 0 \\ n_{Bz} & o_{Bz} & a_{Bz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

利用等效转轴—转角法, 将这两个特殊点的姿态映射为绕某任意矢量 \vec{f} 的旋转, 旋转角由公式(2-16)可得, \vec{f} 的三个分量可由式(2-18),(2-19),(2-20),(2-21)可得。则起始点 A 和终止点 B 分别对应于旋转角 θ_A, θ_B 。再用空间多项式插值法在这两个角度间进行插值, 即可得各个时刻机械手所对应的等效转角。设过程如下:

设等效转角可由如下多项式表示:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

由 A, B 两点可得:

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_A \\ \theta(T) = \theta_B \end{cases} \quad (4-12)$$

为了满足关节运动的连续性要求，还需另外两个约束：设起始点和终止点的速度都为零

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = 0 \\ \dot{\theta}(T) = 0 \end{cases} \quad (4-13)$$

上面四个边界约束条件就可以唯一地确定三次多项式 $\theta(t)$ 的系数 a_0, a_1, a_2, a_3 的值，进而可得 $\theta(t), \dot{\theta}(t)$ 的表达式

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_A + (\theta_B - \theta_A) \frac{t^3}{T^3} \\ \dot{\theta}(t) = 3(\theta_B - \theta_A) \frac{t^2}{T^3} \end{cases} \quad (4-14)$$

按上式可得出运动轨迹上各时刻机械手的姿态和角速度。按等效转轴—转角法，将等效转角转换成直角坐标空间的姿态向量 $\bar{n}, \bar{o}, \bar{a}$ ，再以此为已知量求逆解，得到在该状态时，机器人各关节相应的角度，用于对机械手的运动进行控制。

可见，通过上述的过程可以求出在经历任意时间 t 后机械手的位置和姿态。通过判断机器人任意时刻各关节变量的值 $\theta_{ik} (k = 1, 2, \dots, n)$ 是否在工作区间，并经过路径优化，将其最小增量传入仿真的步进参数，实现对机器人运动的控制。这样做的结果是，充分地保证插值生成的旋转矩阵的三个向量满足规范化正交性要求，使规划出的路径更具准确性。

第五章 机器人的参数化动态仿真及结果分析

本课题的仿真模型是根据前述数学模型，通过 OpenGL 图形库与 Visual C++ 混合编程来实现对本机器人的正问题、逆问题、轨迹规划的动态仿真（见图 5-1）。既可以充分利用 OpenGL 图形库的强大建模能力及交互能力，又可以实现面向对象化编程，从而满足参数化仿真的目的：仿真时，可通过界面上的人机接口对仿真模型的运动进行实时控制，从而可以随心所欲地对上述建立的机器人数学模型的正确性进行检测。

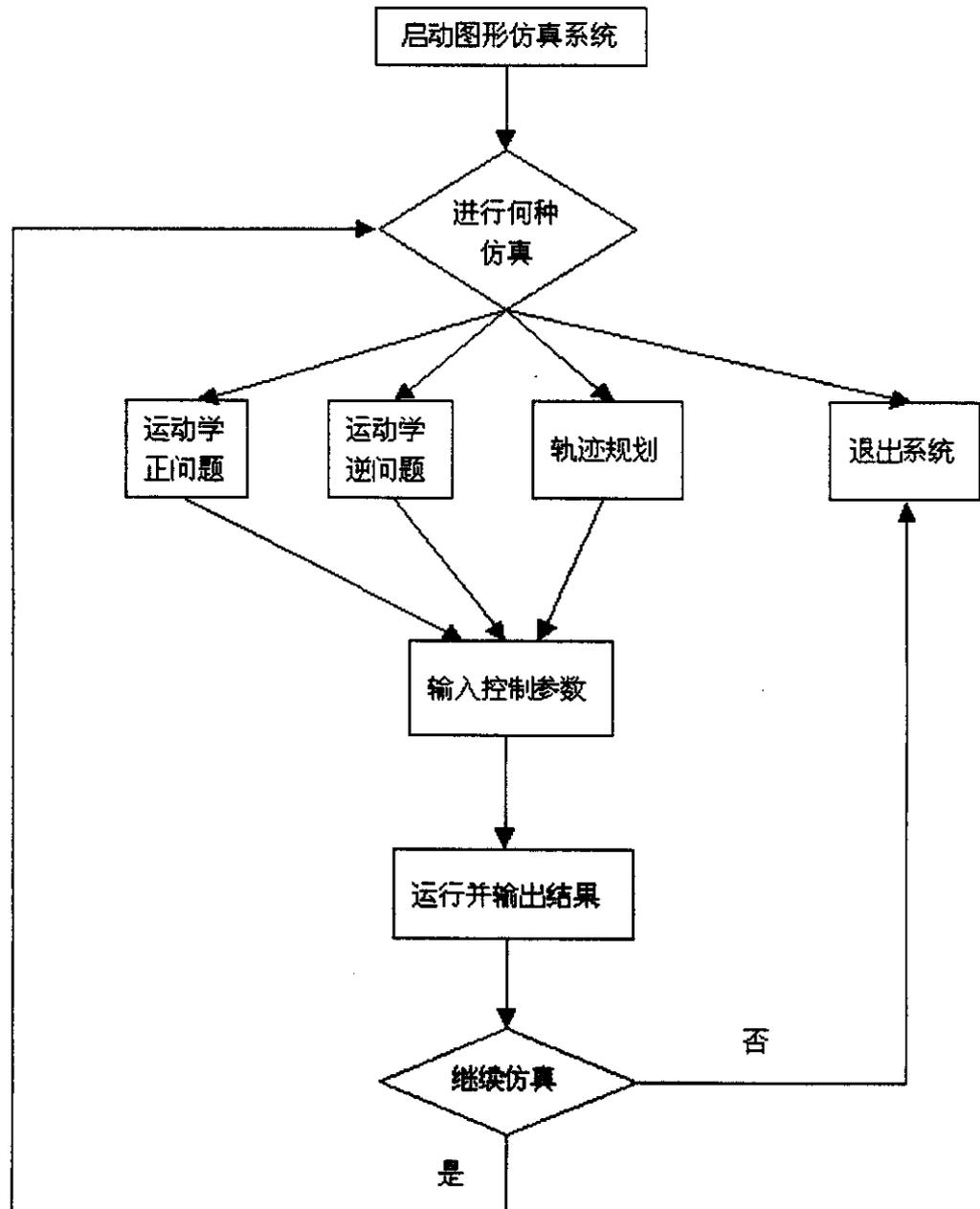


图 5-1 仿真系统结构图

5.1 仿真模型的建立

从离散的观点看，任何几何图形都是由基本的点组成：由点形成线，由线形成面，然后再由面围成几何体的表面。因此，任何几何体都可以说是由无数基本的图元集成。OpenGL 这个开放的图形库就是基于这种思想，提供了丰富的点、线、面以及曲线等基本绘制功能函数，可以方便地实现各种图元的绘制。通过这些图元有序地组合、集成，就实现了整个几何体表面的绘制。如画一个圆柱体的外环面，先把环的上下沿有限元化为一个个点，然后用 OpenGL 中的函数 `glPolygonMode()`把这些小点有序地串成面元。最后再通过 OpenGL 提供的几何变换将这些面元有组织地集成为几何体。

同时，OpenGL 还提供了颜色、光照、材质、纹理、反走样、融合、雾化等修饰渲染功能，可使所画的几何体平滑、有光洁度和质感，可增加特效功能，使画出的几何体极度逼真。本课题的仿真模型就是用这些功能实现机器人底座、连杆及关节的绘制。

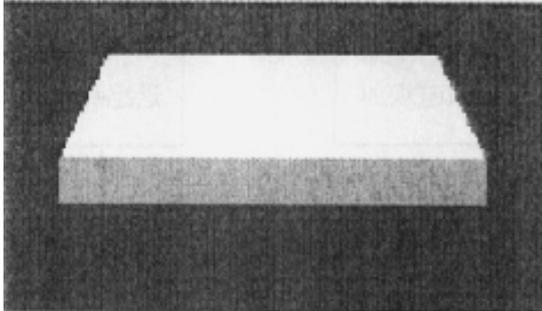


图 5-1 机座模型

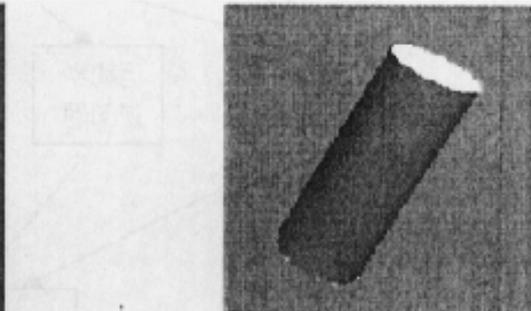


图 5-2 连杆模型

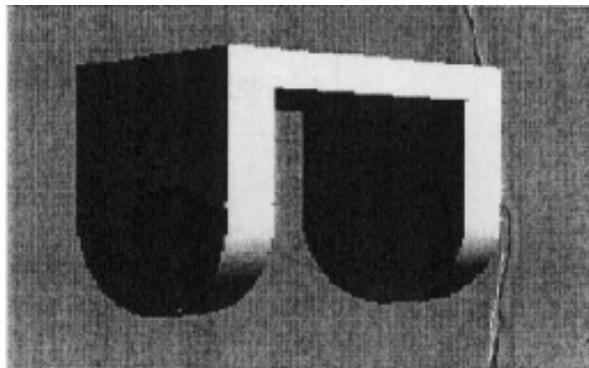


图 5-3 关节模型

5.2 实时动画的实现机制

OpenGL 是通过以人眼察觉不出的时间间隔显示出一连串的画面来实现动画的。因此，其驱动要素是时间，这也是实现动画的关键。OpenGL 是用 Windows 系统内的 SetTimer 函数为其应用程序分配系统定时器，并以一定的时间间隔（自定）向程序发送 WM_TIMER 消息，来通知应用程序对画面进行刷新。为了使动画连续、真实，刷新的时间间隔一般都很小。但是这样有可能出现前一帧图像还没完成，后一帧图像已到，从而造成图像之间交叉的现象。为了克服这种缺陷，OpenGL 采用了双缓存法，即采用前后两个缓存，当显示前缓存中画面的同时，下一帧将要显示的图像已在后缓存中预画。待前缓存中的图像全部显示完毕，应用程序再调用函数 SwapBuffer() 交换前后缓存，使刚才在后缓存中已经预画的内容在屏幕上显示出来。此时后缓存中又开始了下一帧图像的预绘。通过这种方式，视频图像可以在人眼察觉不出的时间间隔交替出现，产生平滑的动画效果。

5.3 仿真界面

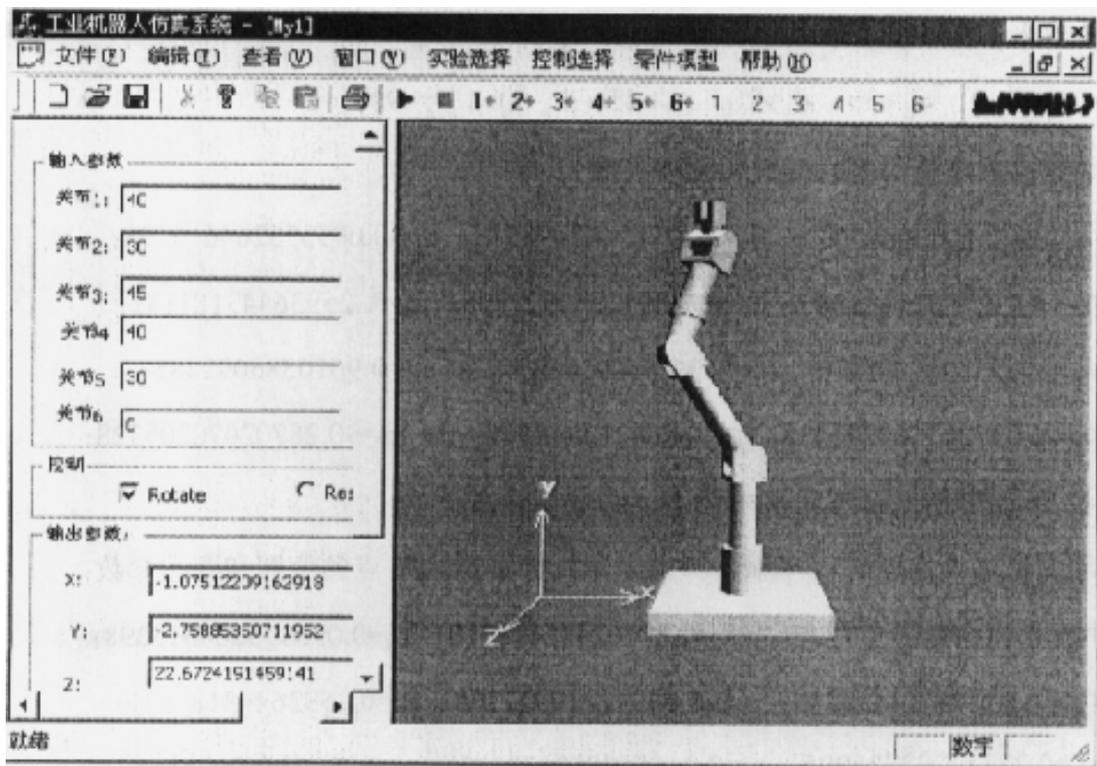


图 5-4 开发的仿真主界面图

为了实现机器人的参数化动态仿真，仿真系统的界面应同时具有图形显示窗口及人机交互接口。因此，本系统使用了两个窗口来满足这一要求，即左边用作控制窗口，右边用于图形显示。同时，由于本系统需要对机器人的正问题、逆问题、轨迹规划进行仿真，且三者的输入、输出参数都不一样，因此这里采用三个视共用一个窗口，通过分时显示来实现。本课题的用户界面如图 5-4:

通过选择此界面菜单中的“实验选择”下面的项，可以分别进行机器人正问题、逆问题、轨迹规划的仿真；通过选择“控制选择”一项中的“速度”来实现对机器人仿真中时间间隔的控制，进而控制机器人的运动速度；通过“1+”、“1-”来实现对机器人杆件一的手动控制；通过左边视窗中的人机交互接口输入用户随意给出的参数，然后进行仿真，并将仿真过程中的相关数据在左视窗的下部分实时输出。因此，用户可以通过观察仿真模型的运行情况以及实时输出的数据，分析仿真过程是否符合实际，进而推断机器人数学模型的正确与否。

5. 4 仿真及其结果

1、运动学正解仿真及结果

先给各关节变量赋如下值（单位为度数）:

$$\theta_1=0, \theta_2=30, \theta_3=20, \theta_4=45, \theta_5=60, \theta_6=90;$$

计算出末端操作器的位置和位姿参数为:

$$n_x=-0.48189209637772; o_x=0.87102443498918; a_x=0.095375264615398;$$

$$n_y=-0.83276014438887; o_y=-0.48912230927308; a_y=0.25936443181131;$$

$$n_z=0.27256292735095; o_z=0.045560950639123; a_z=0.96105860924854;$$

$$p_x=-0.037283565896438; p_y=0.068212845566375; p_z=-0.28702070205328;$$

2、运动学逆问题仿真及结果

先向机器人的逆解程序输入要求末端执行器到达终点的位置和姿态参数:

$$n_x=-0.48189209637772; o_x=0.87102443498918; a_x=0.095375264615398;$$

$$n_y=-0.83276014438887; o_y=-0.48912230927308; a_y=0.25936443181131;$$

$$n_z=0.27256292735095; o_z=0.045560950639123; a_z=0.96105860924854;$$

$$p_x=-0.037283565896438; p_y=0.068212845566375; p_z=-0.28702070205328;$$

计算出的关节变量为：

$$\theta_1=0, \theta_2=30, \theta_3=20, \theta_4=45, \theta_5=59.9825802474335, \theta_6=90。$$

从上述的正逆求解的结果可得，机器人正解计算值与实际值符合，说明本课题中采用的解法正确。同时，将正解的结果作为逆解的输入参数，可得到了机器人的逆解值，该逆解在误差范围内，说明本机器人逆解数学模型正确。

3、轨迹规划的仿真及结果

让机器人的末端执行器从起点 A 到终点 B：

$$A: p_{xA}=7.7, p_{yA}=-7.05, p_{zA}=4.13;$$

$$B: p_{xB}=11.69, p_{yB}=0, p_{zB}=7.12。$$

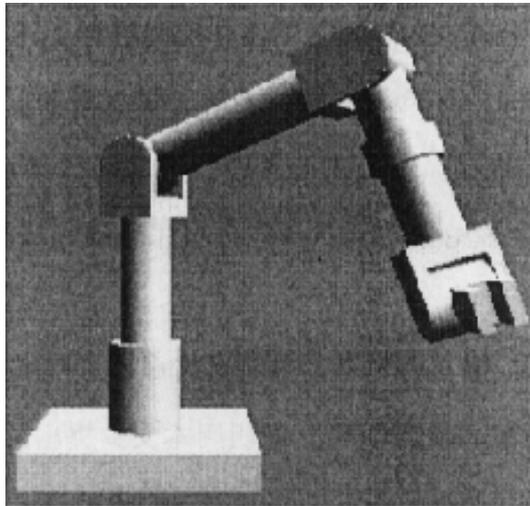


图 5-6 第一点 A 状态

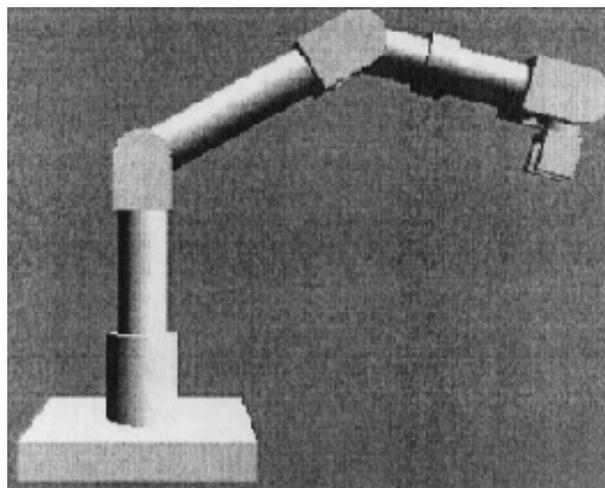


图 5-7 运动到终点 B 的过程

第六章 结论

本文针对 RV12L6R 焊接机器人的运动学正问题、逆问题、工作空间及轨迹规划等方面进行了研究。主要创新点体现在以下几个方面：

- (1) 在建立机器人杆件坐标系时，通过平移法，把机器人的杆件坐标系尽可能地集中在一起，简化了机器人正、逆问题的求解过程；
- (2) 在总结前人求解逆问题方法的基础上，将逆矩阵法与几何法巧妙地结合起来，降低了高阶方程的次数，减小了计算的难度，对提高计算的准确性具有重要的意义；同时给出了 RV12L6R 机器人求运动学逆解的全过程；
- (3) 本文还用矩阵法对机器人的工作空间进行了计算、为机器人直线轨迹提供了规划算法，对求逆过程中多解的情况进行了处理，使机器人仿真模型能在仿真的过程中自主选择路径，此路径的选择是以最短路径为原则；
- (4) 给出了 RV12L6R 焊接机器人雅可比矩阵表达式，为后续研究速度特性奠定了基础；
- (5) 用 OpenGL 建立的机器人模型在计算机上对上述内容进行了仿真。仿真的结果与理论值完全符合，证明用本文中提出的方法为 RV12L 6R 机器人运动学及轨迹规划所建立的数学模型的正确性。

本文的数学建模、理论分析和 OPENGL 环境下的计算机仿真，为进一步研究 RV12L6R 焊接机器人的奇异位形、速度特性、加速度特性、动力学特性以及参数辨识奠定了基础。

参考文献

- [1] 蔡自兴.《机器人学》,清华大学出版社,2000.
- [2] 张福学编著.《机器人技术及其应用》,电子工业出版社,2000.1.
- [3] 日本机器人学会编.《机器人技术手册》,科学出版社,1996.10.
- [4] 《空间机器人及遥科学技术研讨会论文集》,国家高技术航天领域遥科学及空间机器人专家组,1999.8.
- [5] 徐元昌等著.《工业机器人》,中国轻工业出版社,1997.
- [6] 刘成良,张为功等.RV12L 6R 机器人运动学及计算机仿真系统研究,机器人,1998.20.5.
- [7] 陈哲,吉熙章编著.《机器人技术基础》,机械工业出版社,1997.10.
- [8] (日)白井良明编著,王棣棠译.《机器人工程》,科学出版社,2001.2.
- [9] (日)大熊繁编著,卢伯英译.《机器人控制》,科学出版社,2002.3.
- [10] 付玉锦,王希明等.《基于 3-PTT 型并联机器人的计算机动态仿真系统的研究与实现》,机器人技术与应用,第六期,2001.
- [11] 戴齐,姚先启.一种求解机器人操作器运动学逆问题的分解.机器人,1989.05.
- [12] 王价人.关节式机械手的盲位及其判断.机器人,1987.04.
- [13] 汪明恒,王允昌.用于机器人逆运动学分析的几何法及应用.机器人,1989.03.
- [14] 向世明编 《OpenGL 编程与实例》北京:电子工业出版社,1999.9.
- [15] Aspinwall D.M. *Acceleration Profiles for Minimizing Residual Response*, *ASMEJ of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1986, 102:3-6
- [16] Jankowski K P. *Inverse Dynamics Task Control of Flexible Joint Robots, Part I; Continuous-Time Approach, Part II; Discrete-Time Approach*, *Mechanism Machine Theory*, 1992
- [17] 侯琳琪,冯淑红.基于距离精度的机器人 5 参数位置误差模型,机器人技术与应用,第二期,2002.
- [18] 徐礼钜,荡守文.一种四自由度空间并联机构的奇异位形解析,机械设计与研究,Vol.18 No.4,2002.
- [19] 张晋西. 4R 机器人轨迹直观插补及其三维动态模拟,机械与电子,2002(5).
- [20] 赵京,黄玉芳.具有容错性能的冗余机器人轨迹规划,机械设计与研究,Vol.18 No.3,2002.
- [21] 杨东超等.利用齐次变换进行运动学正问题分析,机械设计与研究,Vol.18 No.2,2002.
- [22] 胡准庆,房海蓉等.机器人奇异位形控制方法的研究,机器人技术与应用,第一期,2002
- [23] 张凯等. 6R 机器人轨迹规划及其在焊接中的应用,机械设计, No.10, 2002
- [24] 杭伟,顾文艳等.机械系统运动仿真结果的动画演示,中国农业大学学报,第四期,1999.
- [25] 黄欣娜,李秋让等. OpenGL 及其在连杆机构动态仿真中的应用,微型电脑应用,第三期,2001.
- [26] 焦恩璋.以 AutoCAD 为平台的机器人运动仿真研究,计算机辅助设计与图形学报,第十

期,2001.

- [27]Richard S.Wright ,Jr.Michael 著.《OpenGL 超级宝典》,人民邮电出版社,2001.6.
- [28]白燕斌,史惠康等编.《OpenGL 三维图形库编程指南》,机械工业出版社 1998.11.
- [29]王奇志,徐心和,尹朝万.PUMA 机械手逆运动方程新的推导方法及求解.机器人,1998.3.
- [30]G.Hirzinger,B.Brunner,J.Dietrich,J.Heindl.*Sensor-Based Space Robot-ROBEX and its Telerobotic Features*.IEEE Transactions on Robotics and Automation,Vol.9,NO.5,Oct, 1993.
- [31]Qing-Guo Wang,Qiang Bi,Biao Zou.*Parameter identification of continous-time mechanical systems without sensing accelerations*. Computers in industry,207-217,28(1996).
- [32]M.Gautier,Ph.Poigner.*Extended Kalman Filtering and Weighted Least squares Dynamic Identification of Robot Control Engineering Practice*,1361-1372,9(2001).
- [33]B.Schafer,G.Burghaus,M.Schlenger,A.Seth.*Telerobotic Test and Traning Facility for Ground-Based In-Orbit Servicing*.2nd workshop on Noordwijk,Netherlands.
- [34]D.Garton,R.Rehm,B.Schafer.*A Man-Machine Interface for the Real-Time Control of robots and the Simulation of Satellite Teleoperations*.14th European Annual Conference on human Decision Making amd Manual Control,June 14-16,1995,Delft,Netherlands.
- [35]M.Schlenger,B.Schafer,W.Rulka,R.Fonseca.*Realtime-Simulation of the Dynamics of Elastic Space-Manipulators by MBS-Software*,3rd.
- [36]郑莉,董渊等著.《C++语言程序设计》.
- [37]侯俊杰编著.《MFC 深入浅出》.华中科技大学出版社,2001.2
- [38]潘爱民,王国印译.《Visual C++技术内幕》.清华大学出版社 1999.1
- [39]杜晓荣,刘振安等.面向用户的用户界面管理系统生成.微电子学与计算机,1997.02
- [40]黄金舟. Visual C++技术特点分析 西安石油学院学报.2001.01
- [41]吴重光主编.《仿真技术》.化学工业出版社,2000.5
- [42]陈元琰、张晓竞编著.计算机图形学实用技术.科学出版社,2000.9
- [43]张秀山等编著.虚拟现实技术及编程技巧.国防科技大学出版社,1999.9
- [44]莫才颂,叶志祥.机器人仿真系统运动学逆解算,广西机械,2002,01
- [45]郭跟成,阎保定,陈文清.机器人三维图形仿真系统的设计.洛阳工学院学报 1997.04
- [46]刘连忠,汪一彭,张启先.机器人逆运动学的数值解法,北京航空航天大学学报,1995.01
- [47]周杰韩,杜润生,吴波.用 OpenGL 开发虚拟制造环境 (一),计算机应用,1999.6.
- [48]周杰韩,杜润生,吴波.用 OpenGL 开发虚拟制造环境 (二),计算机应用, 1999.7.
- [49]余波,姚进,薛江.在 OpenGL 下动态观察模型,实用测试技术,2000.5.
- [50]李素有,侯宇等.利用 OpenGL 实现常用机构的三维运动仿真,计算机应用研究,第一期,2001.
- [51]贺笠曜.机器人 PUMA560 逆运动方程的新解法,机器人,1988.3.

- [52]M.Losch,B.Scafer,R.rehm,D.Garton.*Advanced Ground-based Telerobotic Operations and Simulation Environment*.
- [53]Adrian Vasiliu,Bernard Yannou.*Dimensional synthesis of planar mechanisms using neural networks:application to path generator linkages*. Mechanism and Machine Theory,36(2001)299-310.
- [54]Steve Cunningham,Michael J.Bailey.*Lessons from scene graphs:using scene graphs to teach hierarchical modeling*. Computers &Graphics, 2001.25.703-711
- [55]K.H.Low,R.N.Dubey.*A Comparative Study of Generalized Coordinates for Solving the Inverse-Kinematics Problem of a 6R Robot Manipulator*.The International Journal of Robotics Reserved,Vol.5.No.4,Winter 1986.
- [56]Madhusudan Raghavan,Bernard Roth.*Kinematic Analysis of the 6R Manipulator of General Geometry*.Analysis of 6R Manipulator,MAR.1995
- [57]H.M.Deitel,P.J.Deitel,薛万鹏译.《C 语言程序设计教程》,机械工业出版社,2000.

致 谢

本论文的研究工作自始至终都是在导师郝矿荣博士的悉心指导和严格要求下完成。导师深厚的学术造诣、严谨的治学态度、渊博的学识、无微不至的关怀，将使学生终身受益。在即将完成学业之际，谨向郝老师致以崇高的敬意和诚挚的谢意！

同时，在论文期间，有幸得到了郑州工业高等专科学校、机器人研究所宁祎教授的有力指导和热心帮助。还有一些从未谋面的朋友们，和他们网上的交流和探讨使我受益匪浅。在此特向他们表示衷心的感谢和诚挚的祝福！

在三年的研究生学习生活中，机电系的崔正方教授、田勇主任等其他领导、老师给了我很多学术上的指导及生活上的关心；在此一并向他们表示感谢！

最后，感谢所有支持我的亲人和同学！

二〇〇二年一二月