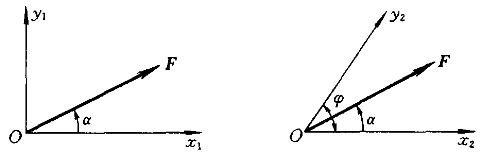
第 1 篇　工程静力学基础

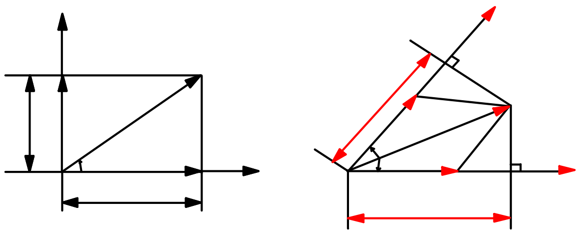
第 1 章　受力分析概述

1—1　图 a、b 所示，Ox_1y_1 与 Ox_2y_2 分别为正交与斜交坐标系。试将同一力 $\boldsymbol{F}$ 分别对两坐标系进行分解和投影，并比较分力与力的投影。



(a)　　(b)

习题 1—1 图



（c）　　（d）

解：（a）图（c）：$\boldsymbol{F} = F\cos\alpha\,\boldsymbol{i}_1 + F\sin\alpha\,\boldsymbol{j}_1$

分力：$\boldsymbol{F}_{x1} = F\cos\alpha\,\boldsymbol{i}_1$　，　$\boldsymbol{F}_{y1} = F\sin\alpha\,\boldsymbol{j}_1$

投影：$F_{x1} = F\cos\alpha$　，　$F_{y1} = F\sin\alpha$

讨论：$\varphi = 90^\circ$ 时，投影与分力的模相等；分力是矢量，投影是代数量。

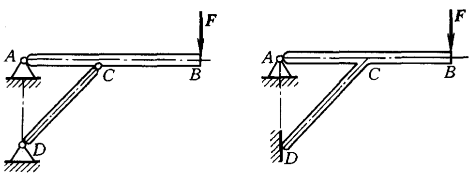
（b）图（d）：

分力：$\boldsymbol{F}_{x2} = (F\cos\alpha - F\sin\alpha\cot\varphi)\boldsymbol{i}_2$　，$\boldsymbol{F}_{y2} = \dfrac{F\sin\alpha}{\sin\varphi}\boldsymbol{j}_2$

投影：$F_{x2} = F\cos\alpha$　，　$F_{y2} = F\cos(\varphi - \alpha)$

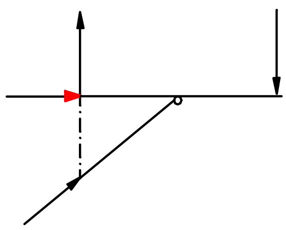
讨论：$\varphi \neq 90^\circ$ 时，投影与分量的模不等。

1—2　试画出图 a 和 b 两种情形下各物体的受力图，并进行比较。

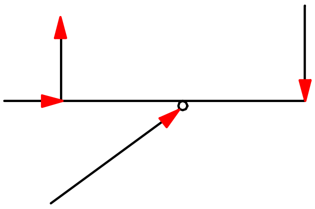


(a)　　(b)

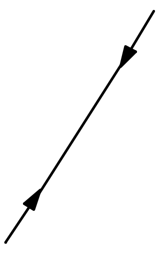
习题 1—2 图



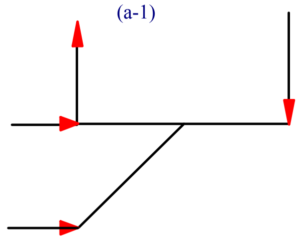
(a-1)



(a-2)



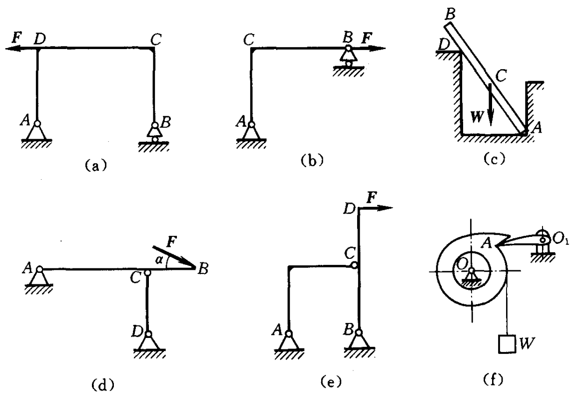
(a-3)



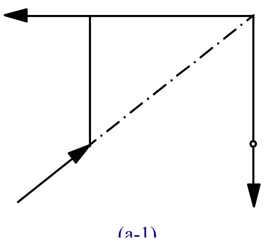
(b-1)

比较：图（a-1）与图（b-1）不同，因两者之 F_{RD} 值大小也不同。

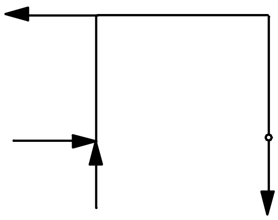
1—3 试画出图示各物体的受力图。



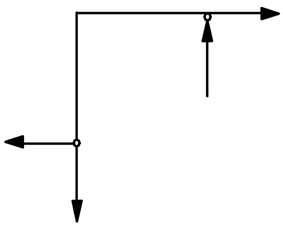
习题 1—3 图



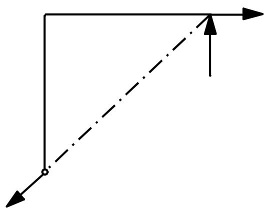
(a-1)



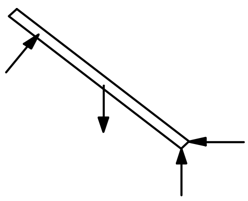
或(a-2)



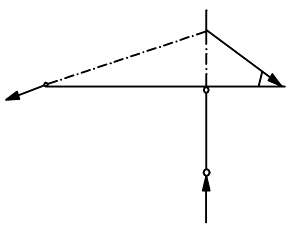
(b-1)



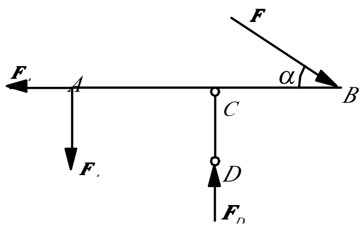
或(b-2)



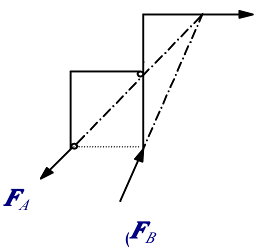
(c-1)

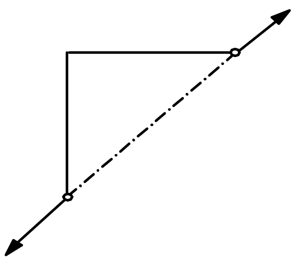


(d-1)

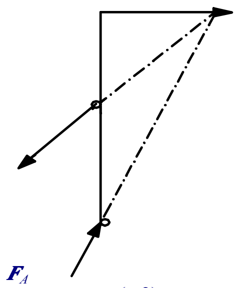


或(d-2)

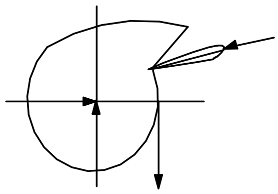




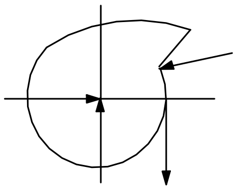
(e-1)



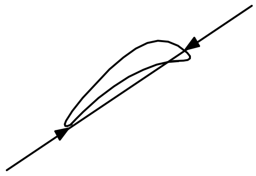
(e-2)



(f-1)

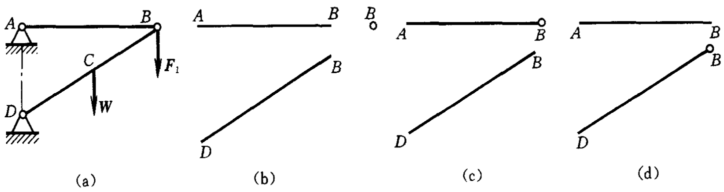


(f-2)



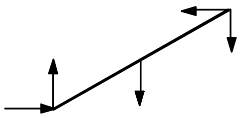
(f-3)

1－4 图 a 所示为三角架结构。荷载 $\boldsymbol{F}_1$ 作用在铰 *B* 上。杆 *AB* 不计自重，杆 *BC* 自重为 $\boldsymbol{W}$。试画出 b、c、d 所示的隔离体的受力图，并加以讨论。

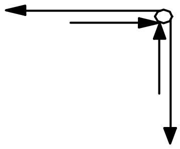


习题 1－4 图

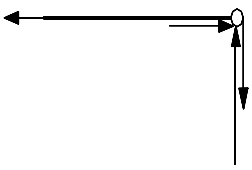
(b-1)



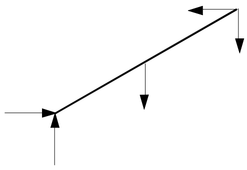
(b-2)



(b-3)

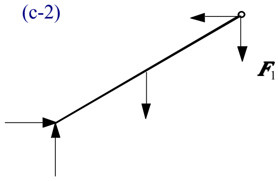


(c-1)



(c-2)

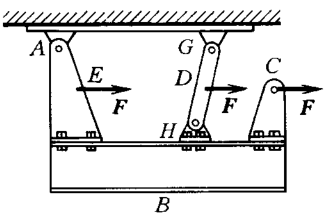
(d-1)



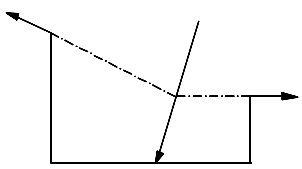
(d-2)

1－5 图示刚性构件 *ABC* 由销钉 *A* 和拉杆 *D* 支撑，在构件 *C* 点作用有一水平力 $\boldsymbol{F}$。试问如果将力 $\boldsymbol{F}$ 沿其作用线移至 *D* 或 *E*（如图示），是否会改为销钉 *A* 的受力状况。

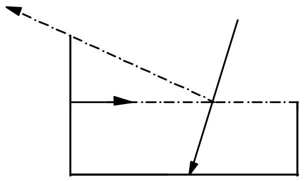
解： 由受力图 1－5a，1－5b 和 1－5c 分析可知，$\boldsymbol{F}$ 从 *C* 移至 *E*，*A* 端受力不变，这是因为力 $\boldsymbol{F}$ 在自身刚体 *ABC* 上滑移；而 $\boldsymbol{F}$ 从 *C* 移至 *D*，则 *A* 端受力改变，因为 *HG* 与 *ABC* 为不同的刚体。



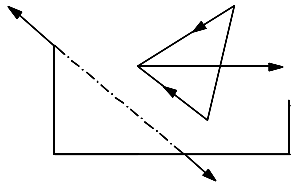
习题 1－5 图



(a)

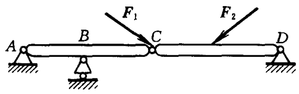


(b)

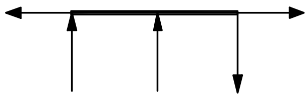


(c)

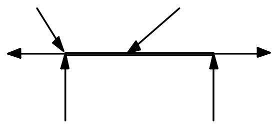
1－6 试画出图示连续梁中的 AC 和 CD 梁的受力图。



习题 1－6 图

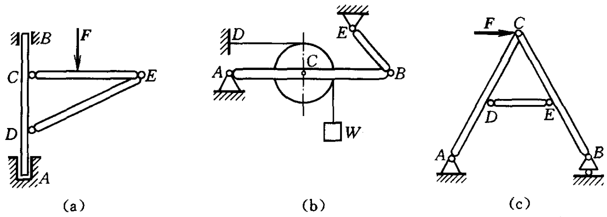


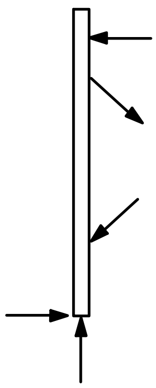
(a)



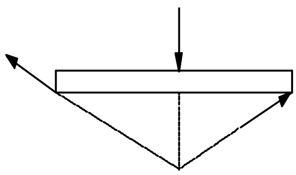
(b)

1－7 画出下列每个标注字符的物体的受力图，各题的整体受力图未画重力的物体的自重均不计，所有接触面均为光滑面接触。

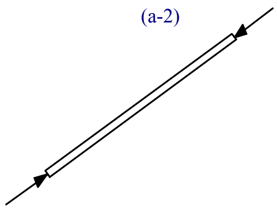




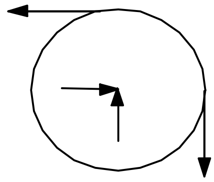
(a-1)



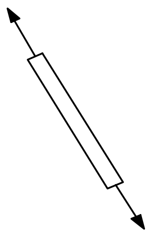
(a-2)



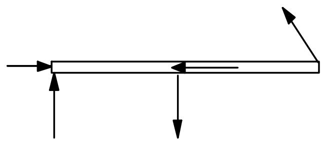
(a-3)



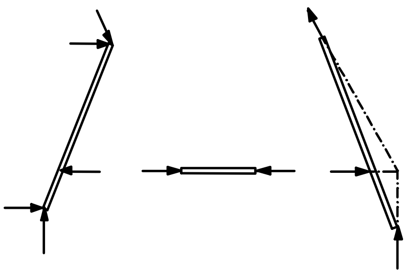
(b-1)



(b-2)

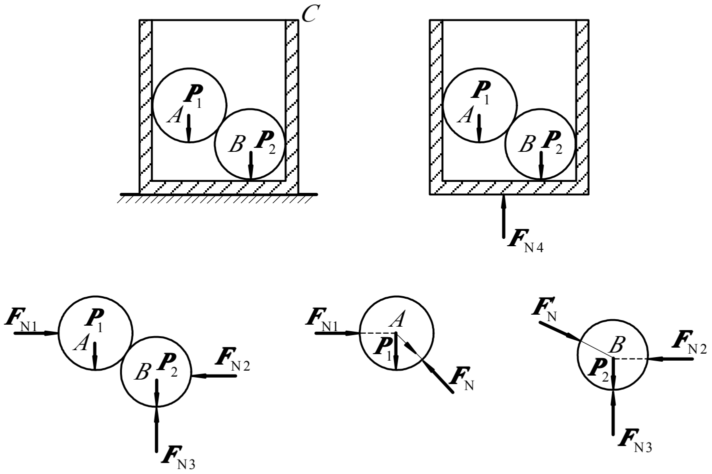


(b-3)

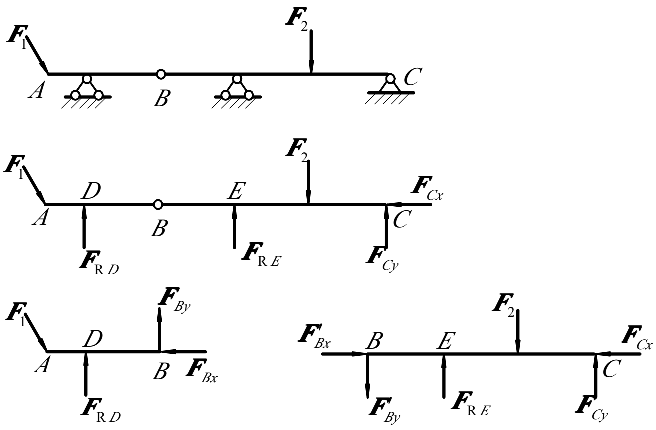


(c)

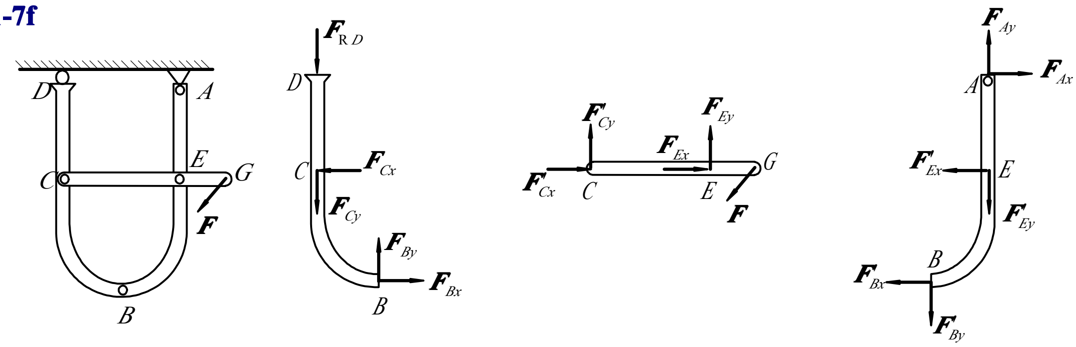
1-7d



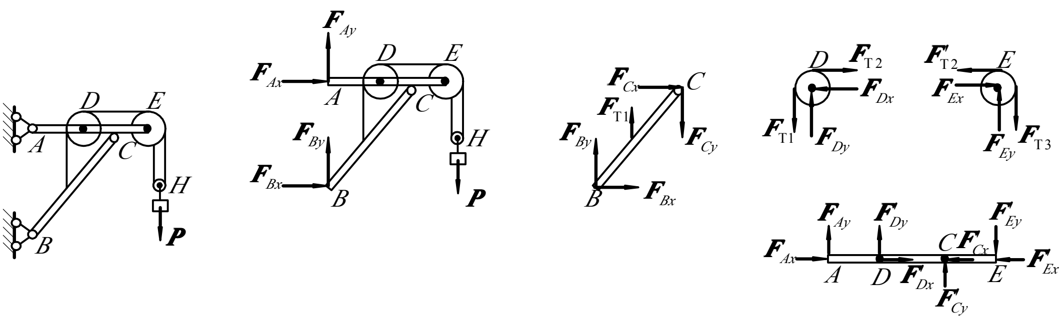
1-7e



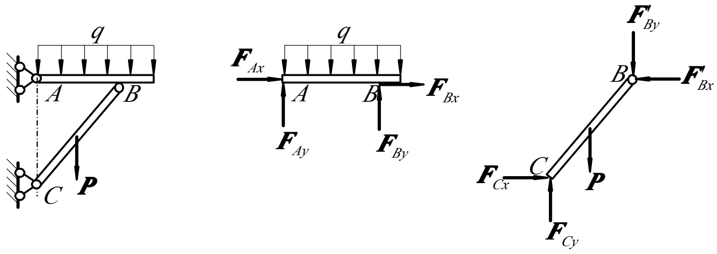
1-7f



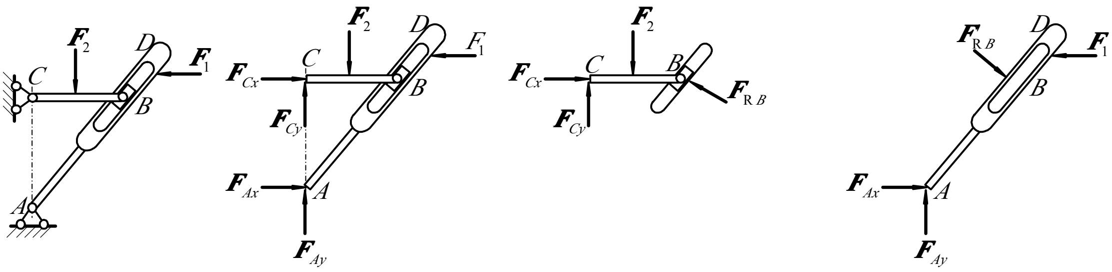
1-7g



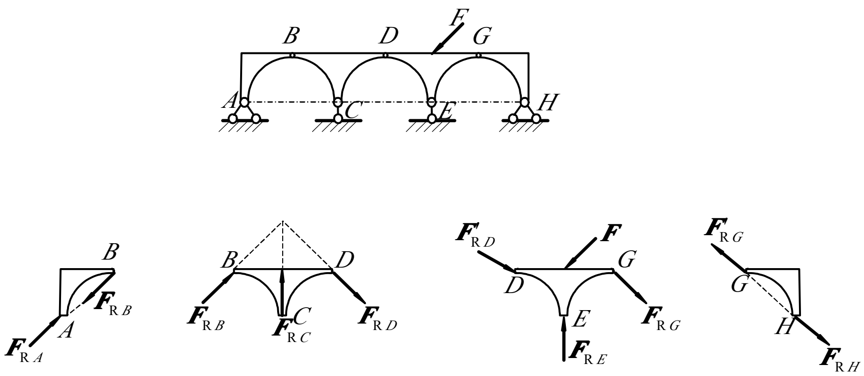
1-7h


q
A
B
C
P
q
F_Ax
A
B
F_Bx
F_Ay
F_By
F_By
B
F_Bx
C
F_Cx
P
F_Cy

1-7i


C
F_2
D
F_1
B
A
F_Cx
C
F_2
D
F_1
B
F_Cy
F_Ax
A
F_Ay
F_Cx
C
F_2
B
F_RB
F_Cy
F_RB
D
F_1
B
F_Ax
A
F_Ay

1-7j


B
D
F
G
A
C
E
H
B
F_RB
A
F_RA
B
D
F_RB
F_RC
C
F_RD
F_RD
F
G
D
E
F_RG
F_RE
F_RG
G
H
F_RH

第 3 章 静力学平衡问题

3－1 图示两种正方形结构所受荷载 $\boldsymbol{F}$ 均已知。试求其中 1，2，3 各杆受力。

解： 图（a）：$2F_3\cos45° - F = 0$

$F_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F$（拉）

$F_1 = F_3$（拉）

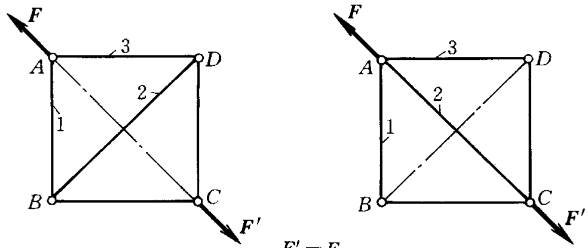
$F_2 - 2F_3\cos45° = 0$

$F_2 = F$（受压）

图（b）：$F_3 = F_3' = 0$

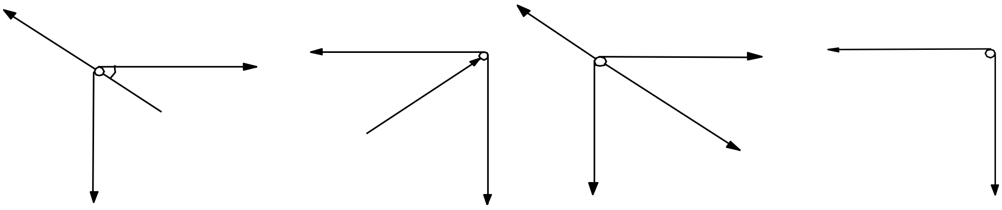
$F_1 = 0$

$F_2 = F$（受拉）



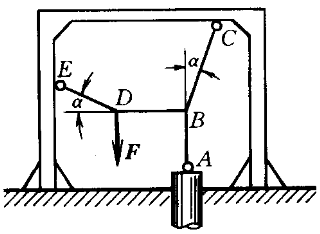
(a)　　(b)

习题 3－1 图

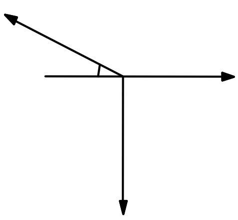


(a-1)　(a-2)　(b-1)　(b-2)

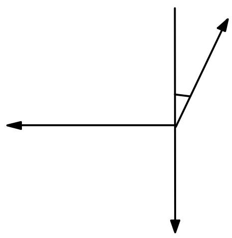
3－2 图示为一绳索拔桩装置。绳索的 E、C 两点拴在架子上，点 B 与拴在桩 A 上的绳索 AB 连接，在点 D 加一铅垂向下的力 $\boldsymbol{F}$，AB 可视为铅垂，DB 可视为水平。已知 $\alpha = 0.1$rad.，力 $F = 800$N。试求绳 AB 中产生的拔桩力（当 α 很小时，$\tan\alpha \approx \alpha$）。



习题 3－2 图



(a)



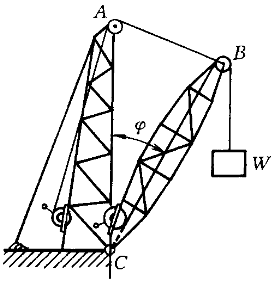
(b)

解： $\sum F_y = 0$，$F_{ED}\sin\alpha = F$　　$F_{ED} = \dfrac{F}{\sin\alpha}$

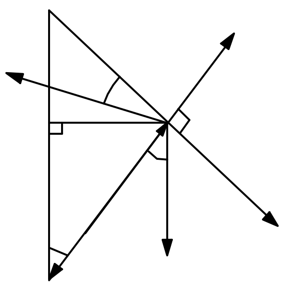
$\sum F_x = 0$，$F_{ED}\cos\alpha = F_{DB}$　　$F_{DB} = \dfrac{F}{\tan\alpha} = 10F$

由图（a）计算结果，可推出图（b）中：$F_{AB} = 10F_{DB} = 100F = 80$ kN。

3－3 起重机由固定塔 AC 与活动桁架 BC 组成，绞车 D 和 E 分别控制桁架 BC 和重物 W 的运动。桁架 BC 用铰链连接于点 C，并由钢索 AB 维持其平衡。重物 $W = 40$kN 悬挂在链索上，链索绕过点 B 的滑轮，并沿直线 BC 引向绞盘。长度 $AC = BC$，不计桁架重量和滑轮摩擦。试用角 $\varphi = \angle ACB$ 的函数来表示钢索 AB 的张力 $\boldsymbol{F}_{AB}$ 以及桁架上沿直线 BC 的压力 $\boldsymbol{F}_{BC}$。



习题 3－3 图



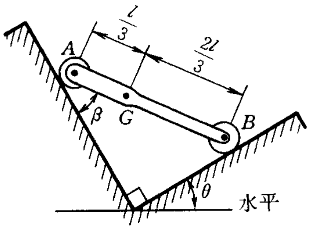
(a)

解：图（a）：$\sum F_x = 0$，$F_{AB}\cos\frac{\varphi}{2} - W\sin\varphi = 0$，$F_{AB} = 2W\sin\frac{\varphi}{2}$

$\sum F_y = 0$，$F_{BC} - W - W\cos\varphi - F_{AB}\sin\frac{\varphi}{2} = 0$

即　$F_{BC} = W + W\cos\varphi + 2W\sin^2\frac{\varphi}{2} = W + W\cos\varphi + W(1-\cos\varphi) = 2W$

3－4　杆 AB 及其两端滚子的整体重心在 G 点，滚子搁置在倾斜的光滑刚性平面上，如图所示。对于给定的 θ 角，试求平衡时的 β 角。



习题 3－4 图

解：AB 为三力汇交平衡，如图（a）所示 ΔAOG 中：

$AO = l\sin\beta$，　$\angle AOG = 90° - \theta$

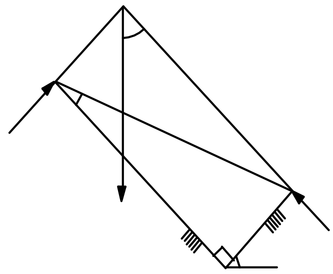
$\angle OAG = 90° - \beta$　，　$\angle AGO = \theta + \beta$

由正弦定理：$\dfrac{l\sin\beta}{\sin(\theta+\beta)} = \dfrac{\frac{l}{3}}{\sin(90°-\theta)}$，　$\dfrac{l\sin\beta}{\sin(\theta+\beta)} = \dfrac{1}{3\cos\theta)}$

即　$3\sin\beta\cos\theta = \sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta$

即　$2\tan\beta = \tan\theta$

$\beta = \arctan(\frac{1}{2}\tan\theta)$



(a)

注：在学完本书第 3 章后，可用下法求解：

$\sum F_x = 0$，　$F_{RA} - G\sin\theta = 0$　　（1）

$\sum F_y = 0$，　$F_{RB} - G\cos\theta = 0$　　（2）

$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$，　$-G\frac{l}{3}\sin(\theta+\beta) + F_{RB}l\sin\beta = 0$　　（3）

解（1）、（2）、（3）联立，得　$\beta = \arctan(\frac{1}{2}\tan\theta)$

3－5 起重架可借绕过滑轮 A 的绳索将重力的大小 G=20kN 的物体吊起，滑轮 A 用不计自重的杆 AB 和 AC 支承，不计滑轮的自重和轴承处的摩擦。求系统平衡时杆 AB、AC 所受力（忽略滑轮的尺寸）。

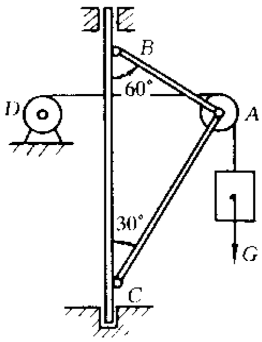
解：以 A 为研究对象，受力如图（a）所示，其中：$F_T = G$。

$$\sum F_{AB} = 0，\quad F_{AB} - F_T\cos 30° + G\sin 30° = 0$$

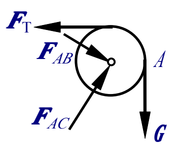
$$F_{AB} = G(\cos 30° - \sin 30°) = 7.32\ \text{kN}$$

$$\sum F_{AC} = 0，\quad F_{AC} - G\cos 30° - F_T\sin 30° = 0$$

$$F_{AB} = G(\cos 30° + \sin 30°) = 27.32\ \text{kN}$$

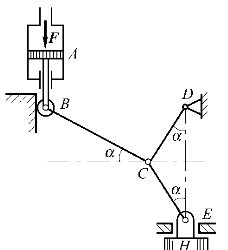


习题 3-5 图

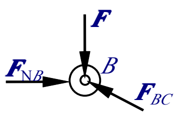


（a）

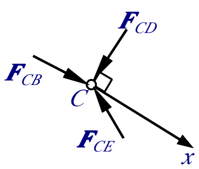
3－6 图示液压夹紧机构中，D 为固定铰链，B、C、E 为铰链。已知力 $\boldsymbol{F}$，机构平衡时角度如图所示，求此时工件 H 所受的压紧力。



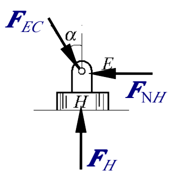
习题 3-6 图



（a）



（b）



（c）

解： 以铰 B 为研究对象，受力如图（a）。

$$\sum F_y = 0, \quad F_{BC}\sin\alpha - F = 0; \quad F_{BC} = \frac{F}{\sin\alpha} \qquad (1)$$

以铰 C 为研究对象，受力如图（b）。

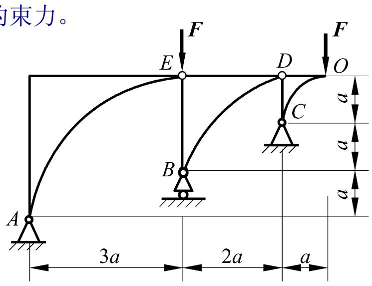
$$\sum F_x = 0, \quad F_{CB} - F_{CE}\sin 2\alpha = 0; \quad F_{CE} = \frac{F_{CB}}{\sin 2\alpha} \qquad (2)$$

以铰 E 为研究对象，受力如图（c）。

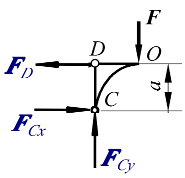
$$\sum F_y = 0, \quad F_H - F_{EC}\cos\alpha = 0; \quad F_H = F_{EC}\cos\alpha \qquad (3)$$

由于 $F_{BC} = F_{CB}$；$F_{EC} = F_{CE}$，联立式（1）、（2）、（3）解得：$F_H = \dfrac{F}{2\sin^2\alpha}$

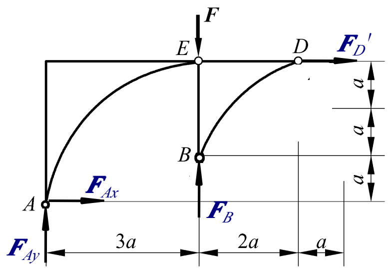
3－7 三个半拱相互铰接，其尺寸、支承和受力情况如图所示。设各拱自重均不计，试计算支座 B 的约束力。



习题 3-7 图



（a）



（b）

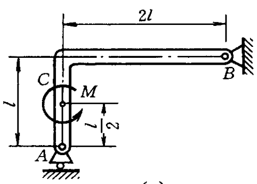
解： 先分析半拱 BED，B、E、D 三处的约束力应汇交于点 E，所以铰 D 处的约束力为水平方向，取 CDO 为研究对象，受力如图（a）所示。

$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_D a - Fa = 0; \quad F_D = F$$

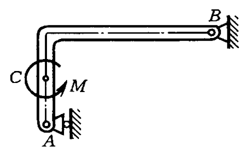
以 $AEBD$ 为研究对象，受力如图（b）。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 3aF_B - 3aF - 3aF_D' = 0; \quad F_B = 2F$$

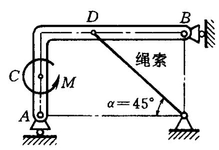
3—8 折杆 AB 的三种支承方式如图所示，设有一力偶矩数值为 M 的力偶作用在折杆 AB 上。试求支承处的约束力。



(a)

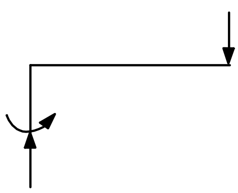


(b)

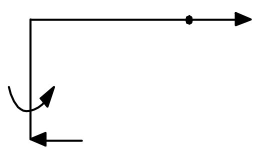


(c)

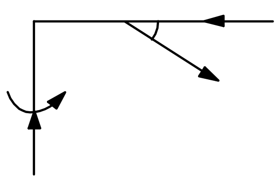
习题 3—8 图



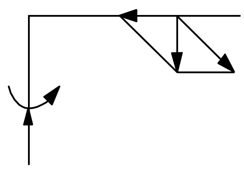
(a)



(b)



(c)



(d)

解： 图（a）：$F_A = F_B = \dfrac{M}{2l}$

图（b）：$F_A = F_B = \dfrac{M}{l}$

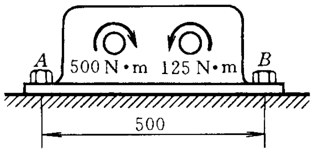
由图（c）改画成图（d），则

$$F_A = F_{BD} = \frac{M}{l}$$

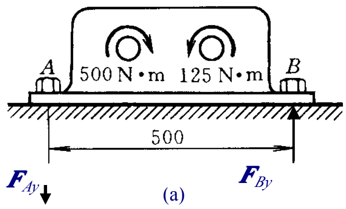
$$\therefore \quad F_B = F_{BD} = \frac{M}{l}$$

$$F_D = \sqrt{2}F_{BD} = \frac{\sqrt{2}M}{l}$$

3－9 齿轮箱两个外伸轴上作用的力偶如图所示。为保持齿轮箱平衡，试求螺栓 A、B 处所提供的约束力的铅垂分力。



习题 3－9 图



(a)

解： $\Sigma M_i = 0$，$-500 + 125 + F_{Ay} \times 0.5 = 0$

$F_{Ay} = 750\text{N}$（↓），$F_{By} = 750\text{N}$（↑）

（本题中 $\boldsymbol{F}_{Ax}$，$\boldsymbol{F}_{Bx}$ 等值反向，对力偶系合成结果无贡献。）

3－10 试求图示结构中杆 1、2、3 所受的力。

解： 杆 3 为二力杆

图（a）：

$\Sigma M_i = 0$

$F_3 \cdot d - M = 0$

$F_3 = \dfrac{M}{d}$

$F = F_3$（压）

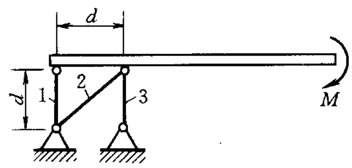
图（b）：

$\Sigma F_x = 0$

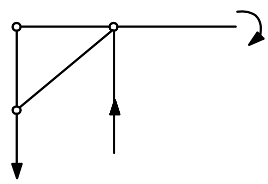
$F_2 = 0$

$\Sigma F_y = 0$

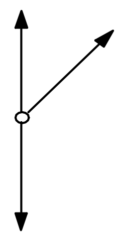
$F_1 = F = \dfrac{M}{d}$（拉）



习题 3－10 图



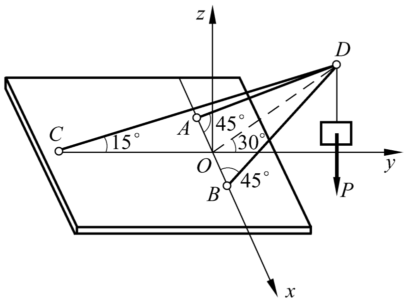
(a)



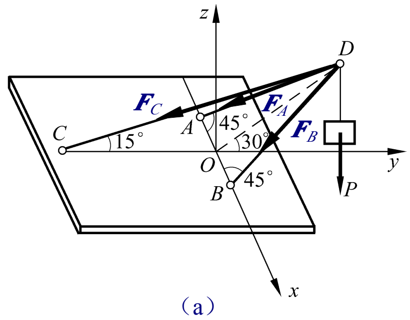
(b)

3－11 图示空间构架由三根不计自重的有杆组成，在 D 端用球铰链连接，A、B 和 C 端则用球铰链固定在水平地板上，若拴在 D 端的重物 $P = 10$ kN，试求铰链 A、B、C 的反力。

解：



习题 3-11 图



（a）

取铰 D 为研究对象，受力如图（a）。

$$\sum F_x = 0，\quad F_B\cos 45° - F_A\cos 45° = 0；\quad F_B = F_A \qquad (1)$$

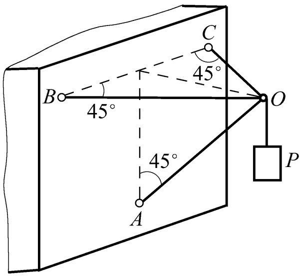
$$\sum F_y = 0，\quad -F_C\cos 15° - 2F_A\sin 45°\cos 30° = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0，\quad -F_C\sin 15° - 2F_A\sin 45°\sin 30° - P = 0 \qquad (3)$$

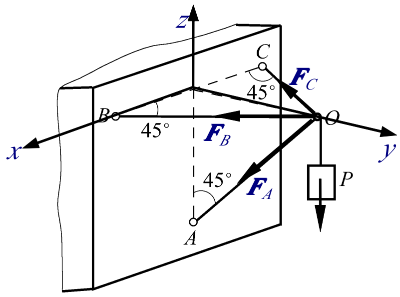
联立式（1）、（2）、（3）解得：$F_B = F_A = -26.39\,\text{kN}$，$F_C = 33.46\,\text{kN}$

3－12 图示空间构架由三根不计自重的有杆组成，在 O 端用球铰链连接，A、B 和 C 端则用球铰链固定在水平地板上，若拴在 O 端的重物 P=10kN，试求铰链 A、B、C 的反力。

解：



习题 3-12 图



（a）

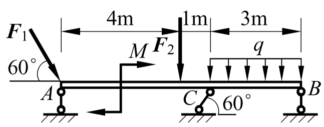
取铰 O 为研究对象，受力如图（a）。

$$\sum F_x = 0，\quad F_B\cos 45° - F_C\cos 45° = 0；\quad F_B = F_C$$

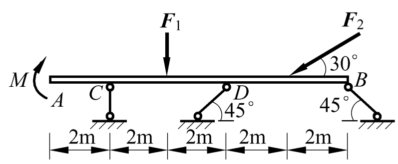
$$\sum F_z = 0，\quad -F_A\cos 45° - P = 0；\quad F_A = -\sqrt{2}P = -14.14\,\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0，\quad -F_A\sin 45° - 2F_B\sin 45° = 0；\quad F_B = F_C = 7.07\,\text{kN}$$

3－13 梁 AB 用三根杆支承，如图所示。已知 F_1=30kN，F_2 = 40kN，M=30kN・m, q = 20N/m，试求三杆的约束力。

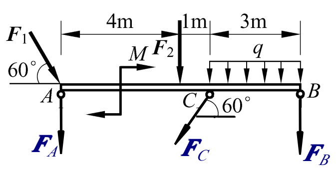


(a)

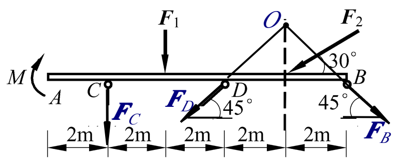


(b)

解：



（c）



（d）

（1）图（a）中梁的受力如图（c）所示。

$$\sum F_x = 0，\quad -F_C\cos 60° + F_1\cos 60° = 0；\quad F_C = F_1 = 30\,\text{kN}$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0，\quad 8F_A + 8F_1\sin 60° - M + 4F_2 + 3F_C\sin 60° + 1.5\times 3q = 0；$$

$F_A = -63.22\text{kN}$

$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0$，$8F_B + M + 4F_2 + 5F_C \sin 60° + 6.5 \times 3q = 0$；$F_A = -88.74\text{kN}$

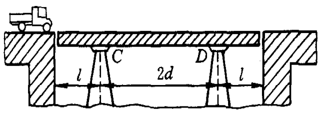
（2）图（b）中梁的受力如图（d）所示。

$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$，$6F_C + 4F_1 - M - 2F_2 \cos 30° = 0$；$F_C = -3.45\ \text{kN}$

$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0$，$8F_C + 6F_1 - M + 4F_D \sin 45° + 2F_2 \sin 30° = 0$；$F_D = -57.41\text{kN}$

$\sum M_D(\boldsymbol{F}) = 0$，$4F_C - M + 2F_1 - 2F_2 \sin 30° - 4F_B \sin 45° = 0$；$F_B = -8.42\text{kN}$

3－14　一便桥自由放置在支座 C 和 D 上，支座间的距离 $CD = 2d = 6\text{m}$。桥面重 $1\frac{2}{3}$ kN/m。试求当汽车从桥上面驶过而不致使桥面翻转时桥的悬臂部分的最大长度 l。设汽车的前后轮的负重分别为 20kN 和 40kN，两轮间的距离为 3m。



习题 3－14 图

解：图（a）中，

$q = 1\frac{2}{3}\ \text{kN/m}$

$F = 40\ \text{kN}$（后轮负重）

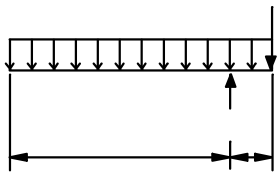
$\Sigma M_D = 0$

$q(6 + 2l) \times 3 - Fl = 0$

$\frac{5}{3} \times (6 + 2l) \times 3 - 40l = 0$

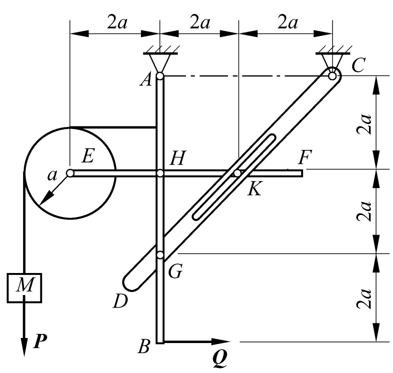
$l = 1\text{m}$

即　$l_{\max} = 1\text{m}$

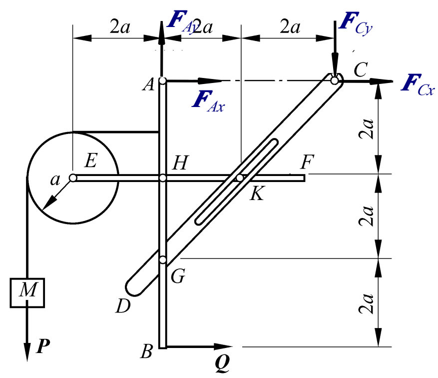


(a)

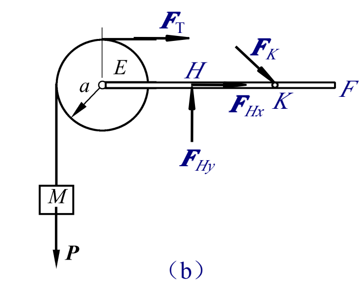
3－15　图示构架由杆 AB、CD、EF 和滑轮、绳索等组成，H，G，E 处为铰链连接，固连在杆 EF 上的销钉 K 放在杆 CD 的光滑直槽上。已知物块 M 重力 $\boldsymbol{P}$ 和水平力 $\boldsymbol{Q}$，尺寸如图所示，若不计其余构件的自重和摩擦，试求固定铰支座 A 和 C 的反力以及杆 EF 上销钉 K 的约束力。



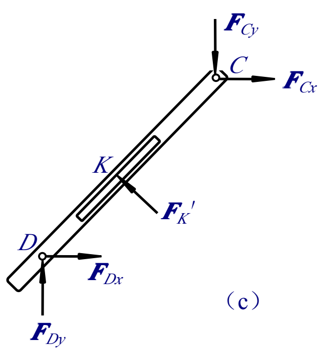
习题 3－15 图



（a）



（b）



（c）

解：取系统整体为研究对象，其受力如图（a）所示。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad 3aP+6aQ-4aF_{Cy}=0;\quad F_{Cy}=\frac{3(P+2Q)}{4}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-P-F_{Cy}=0;\quad F_{Ay}=\frac{7P+6Q}{4}$$

$$\sum F_x=0,\quad Q+F_{Ax}+F_{Cx}=0 \qquad (1)$$

取轮 E 和杆 EF 为研究对象，其受力如图（b）所示。

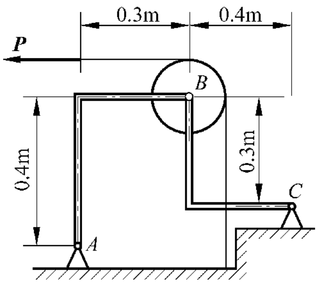
$$\sum M_H(\boldsymbol{F})=0,\quad 3aP-aF_{\mathrm{T}}-2aF_K\cos45^\circ=0\ (F_{\mathrm{T}}=P);\quad F_K=\sqrt{2}P\ (F_{\mathrm{T}}=P)$$

取杆 CD 为研究对象，其受力如图（c）所示。

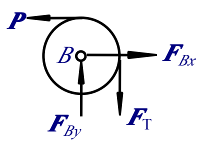
$$\sum M_D(\boldsymbol{F})=0,\quad 2\sqrt{2}aF_K-4aF_{Cy}-4aF_{Cx}=0;\quad F_{Cx}=\frac{P-6Q}{4}$$

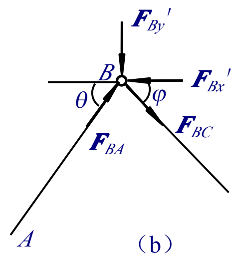
将 F_{Ax} 的值代入式（1），得：$F_{Ax}=\dfrac{2Q-P}{4}$

3-16 滑轮支架系统如图所示。滑轮与支架 ABC 相连，AB 和 BC 均为折杆，B 为销钉。设滑轮上绳的拉力 $P=500\text{N}$，不计各构件的自重。求各构件给销钉 B 的力。



习题 3－16 图





解：取滑轮为研究对象，其受力如图（a）所示。

$$\sum F_y=0,\quad F_{By}-F_{\mathrm{T}}=0\ (F_{\mathrm{T}}=P);\quad F_{By}=P=500\text{N}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Bx}-P=0;\quad F_{Bx}=P=500\text{N}$$

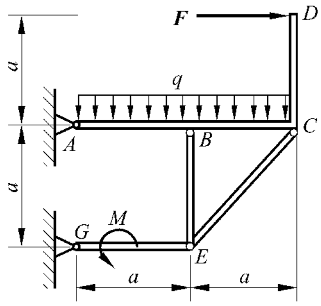
取销钉 B 为研究对象，其受力如图（b）所示（$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，$\tan\varphi=\dfrac{3}{4}$）。

$$\sum F_y=0,\quad F_{BA}\sin\theta-F_{BC}\sin\varphi-F'_{By}=0 \qquad (1)$$

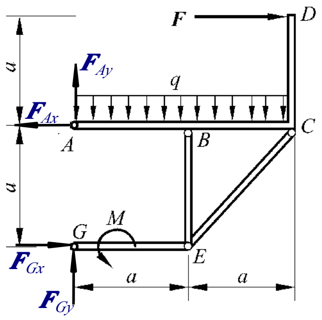
$$\sum F_x=0,\quad F_{BA}\cos\theta+F_{BC}\cos\varphi-F'_{Bx}=0 \qquad (2)$$

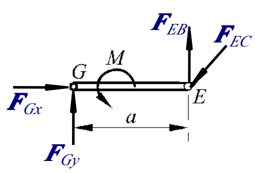
联立式（1）、（2）解得：$F_{BA}=700\text{N}$；$F_{BC}=100\text{N}$

3-17 图示结构，由曲梁 $ABCD$ 和杆 CE、BE、GE 构成。A、B、C、E、G 均为光滑铰链。已知 $F=20\text{kN}$，$q=10\text{kN/m}$，$M=20\text{kN}\cdot\text{m}$，$a=2\text{m}$，设各构件自重不计。求 A、G 处反力及杆 BE、CE 所受力。



习题 3－17 图





解：取系统整体为研究对象，其受力如图（a）所示。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0，\quad aF_{Gx}+M-aF-2a^2q=0；\quad F_{Gx}=50\text{kN}$$

$$\sum F_x=0，\quad F-F_{Ax}+F_{Gx}=0；\quad F_{Ax}=70\text{kN}$$

$$\sum F_y=0，\quad F_{Ay}+F_{Gy}-2aq=0 \qquad （1）$$

取杆 GE 为研究对象，其受力如图（b）所示。

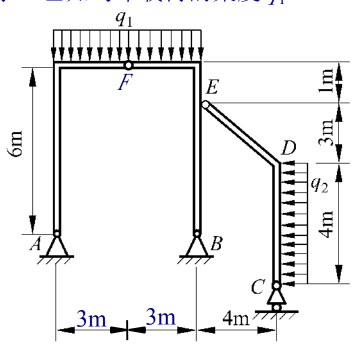
$$\sum F_x=0，\quad F_{Gx}-F_{EC}\cos45°=0；\quad F_{EC}=50\sqrt{2}\text{ kN}$$

$$\sum M_G(\boldsymbol{F})=0，\quad M+aF_{EB}-aF_{EC}\cos45°=0；\quad F_{EB}=40\text{kN}$$

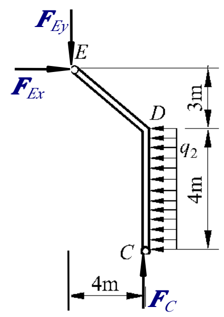
$$\sum M_E(\boldsymbol{F})=0，\quad M-aF_{Gy}=0；\quad F_{Gy}=10\text{kN}$$

将 F_{Gy} 的值代入式（1），得：$F_{Ay}=30\text{kN}$

3-18 刚架的支承和载荷如图所示。已知均布载荷的集度 $q_1=4\text{kN/m}$，$q_2=1\text{kN/m}$，求支座 A、B、C 三处的约束力。



习题 3－18 图



（a）

解：取 CE 为研究对象，其受力如图（a）所示。

$$\sum M_E(\boldsymbol{F})=0，$$

$$4F_C-20q_2=0$$

$$F_C=5\text{kN}$$

取系统整体为研究对象，其受力如图（c）所示。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0，$$

$$10F_C-18q_1+6F_{By}=0$$

$$F_{By}=3.67\text{kN}$$

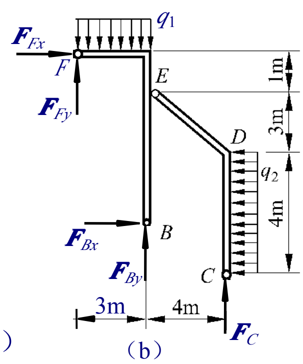
$$\sum F_y=0，$$

$$F_{Ay}+F_{By}-6q_1+F_C=0$$

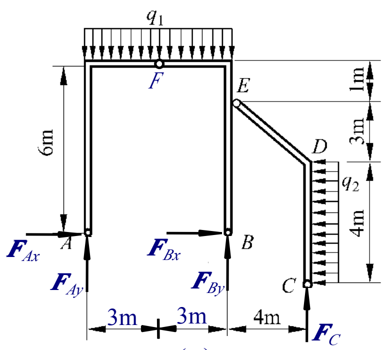
$$F_{Ay}=15.33\text{kN}$$

$$\sum F_x=0，$$

$$F_{Ax}+F_{Bx}-4q_2=0 \qquad （1）$$



（b）



（c）

取 $CDEFB$ 为研究对象，其受力如图（b）所示。

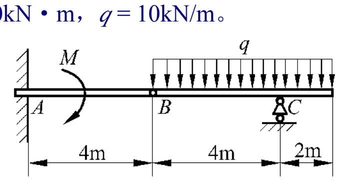
$$\sum M_F(\boldsymbol{F})=0，\quad 7F_C-24q_2-4.5q_1+3F_{By}+6F_{Bx}=0；\quad F_{Bx}=-0.67\text{kN}$$

将 F_{Bx} 的值代入式（1），得：$F_{Ax}=4.67\text{kN}$

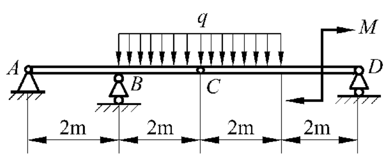
3-19 试求图示多跨梁的支座反力。已知：

（a）$M=8\text{kN}\cdot\text{m}$，$q=4\text{kN/m}$；

（b）$M=40\text{kN}\cdot\text{m}$，$q=10\text{kN/m}$。



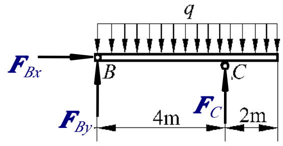
(a)



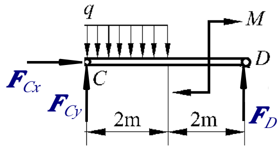
(b)

习题 3－19 图

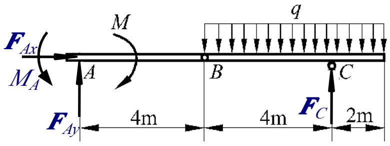
解：



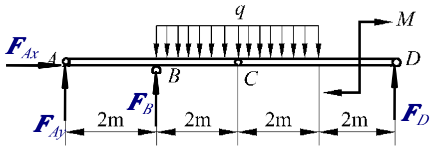
（ c



（ e



（ d



（ f

（1）取图（a）中多跨梁的 BC 段为研究对象，受力如图（c）所示。

$$\sum M_B(\boldsymbol{F})=0，\ 4F_C-3\times6q=0；\ F_C=18\text{kN}$$

取图整体为研究对象，受力如图（d）所示。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0，\ M_A-M+8F_C-7\times6q=0；\ M_A=32\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\sum F_y=0，\ F_{Ay}-6q+F_C=0；\ F_{Ay}=6\ \text{kN}$$

$$\sum F_x=0，\ F_{Ax}=0$$

（2）取图（b）中多跨梁的 CD 段为研究对象，受力如图（e）所示。

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0，\ 4F_D-M-2q=0；\ F_D=15\ \text{kN}$$

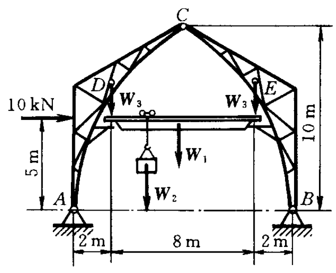
取图整体为研究对象，受力如图（f）所示。

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0，\ 2F_B+8F_D-M-16q=0；\ F_B=40\text{kN}$$

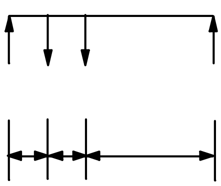
$$\sum F_y=0，\ F_{Ay}+F_B-4q+F_D=0；\ F_{Ay}=-15\ \text{kN}$$

$$\sum F_x=0，\ F_{Ax}=0$$

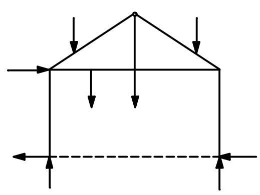
3－20 厂房构架为三铰拱架。桥式吊车顺着厂房（垂直于纸面方向）沿轨道行驶，吊车梁重力大小 W_1 = 20kN，其重心在梁的中点。跑车和起吊重物重力大小 W_2 = 60kN。每个拱架重力大小 W_3 = 60kN，其重心在点 D、E，正好与吊车梁的轨道在同一铅垂线上。风压在合力为 10kN，方向水平。试求当跑车位于离左边轨道的距离等于 2m 时，铰支承 A、B 二处的约束力。



习题 3－20 图



(a)



(b)

解： 图（a）：$\Sigma M_L=0$，$F_r\cdot8-2W_2-4W_1=0$

$8F_r-2\times60-4\times20=0$，$F_r=25\ \text{kN}$ （1）

图（b）：$\Sigma M_A=0$，

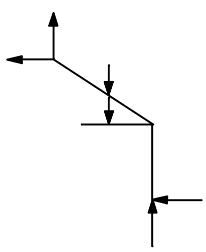
$F_{By}\times12-10\times5-W_3\times2-W_3\times10-W_2\times4-W_1\times6=0$

$12F_{By}-50-120-600-240-120=0$，$F_{By}=94.2\ \text{kN}$

$\Sigma F_y=0$，$F_{Ay}=106\ \text{kN}$

$\Sigma F_x=0$，$F_{Bx}+F_{Ax}=10\ \text{kN}$ （2）

图（c）：$\Sigma M_C=0$，

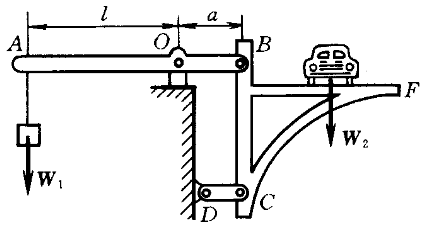


(c)

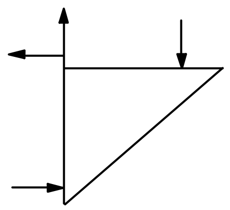
$$-(W_3+F_r')\times 4-F_{Bx}\times 10+W_{By}\times 6=0\text{，}\quad F_{Bx}=22.5\text{ kN}$$

代入（2），得 $F_{Ax}=-12.5\text{ kN}$

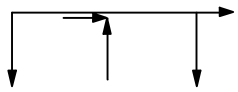
3－21 图示为汽车台秤简图，*BCF* 为整体台面，杠杆 *AB* 可绕轴 *O* 转动，*B*、*C*、*D* 三处均为铰链。杆 *DC* 处于水平位置。试求平衡时砝码重 $\boldsymbol{W}_1$ 与汽车重 $\boldsymbol{W}_2$ 的关系。



习题 3－21 图



(a)



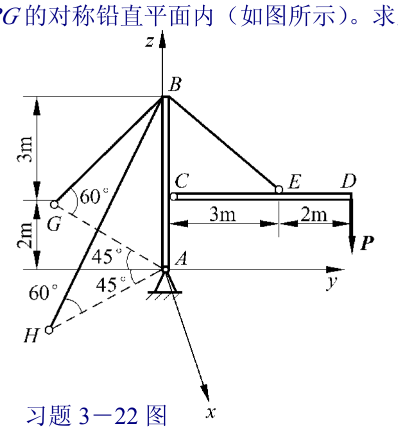
(b)

解： 图（a）：$\Sigma F_y=0$，$F_{By}=W_2$ （1）

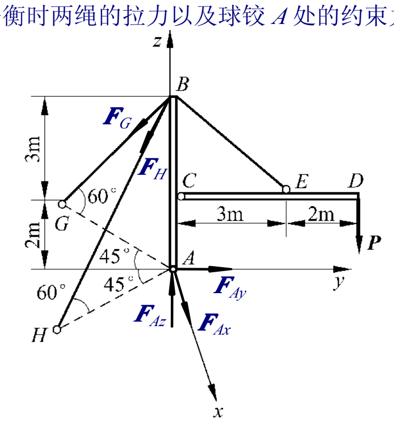
图（b）：$\Sigma M_O=0$，$W_1\cdot l-F_{By}\cdot a=0$ （2）

由式（1）、（2），得 $\dfrac{W_1}{W_2}=\dfrac{a}{l}$

3-22 立柱 *AB* 以球铰支于点 *A*，并用绳 *BH*、*BG* 拉住；*D* 处铅垂方向作用力 $\boldsymbol{P}$ 的大小为 20kN，杆 *CD* 在绳 *BH* 和 *BG* 的对称铅直平面内（如图所示）。求系统平衡时两绳的拉力以及球铰 *A* 处的约束力。



习题 3－22 图



（a）

解： 取整体为研究对象，受力如图（a）所示。

$$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0\text{，}\quad 5F_H\cos 60^\circ\sin 45^\circ-5F_G\cos 60^\circ\sin 45^\circ=0\text{；}\quad F_H=F_G$$

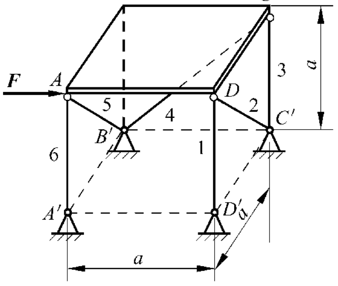
$$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0\text{，}\quad 2\times 5F_H\cos 60^\circ\cos 45^\circ-5P=0\text{；}\quad F_H=F_G=28.3\text{ kN}$$

$$\sum F_x=0\text{，}\quad F_{Ax}=0$$

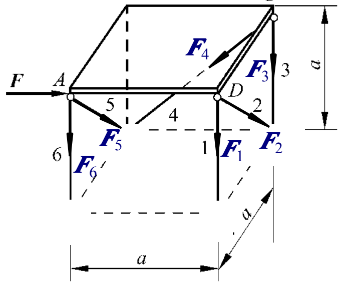
$$\sum F_y=0\text{，}\quad F_{Ay}-2F_H\cos 60^\circ\cos 45^\circ=0\text{；}\quad F_{Ay}=20\text{ kN}$$

$$\sum F_z=0\text{，}\quad F_{Az}-2F_H\sin 60^\circ-P=0\text{；}\quad F_{Ay}=69\text{ kN}$$

3-23 正方形板 *ABCD* 用六根杆支撑，如图所示，在 *A* 点沿 *AD* 边作用一水平力 $\boldsymbol{F}$。若不计板的自重，求各支撑杆之内力。



习题 3－23 图



（a）

解： 取整体为研究对象，受力如图（a）所示。

$\sum M_{BB'}(\boldsymbol{F})=0$， $F_2\cos45°a+Fa=0$； $F_2=-\sqrt{2}F$

$\sum M_{CC'}(\boldsymbol{F})=0$， $F_5\cos45°a-Fa=0$； $F_5=\sqrt{2}F$

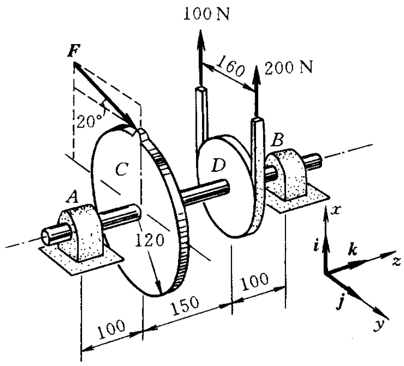
$\sum M_{AA'}(\boldsymbol{F})=0$， $(F_2+F_4)\cos45°a=0$； $F_4=\sqrt{2}F$

$\sum M_{AD}(\boldsymbol{F})=0$， $(F_3+F_4\cos45°)a=0$； $F_3=-F$

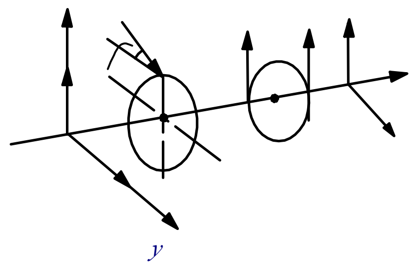
$\sum M_{CD}(\boldsymbol{F})=0$， $(F_6+F_5\cos45°)a=0$； $F_6=-F$

$\sum M_{B'C'}(\boldsymbol{F})=0$， $(F_1+F_6)a=0$； $F_1=F$

3－24 作用的齿轮上的啮合力 $\boldsymbol{F}$ 推动胶带轮绕水平轴 AB 作匀速转动。已知胶带紧边的拉力为 200N，松边为拉力为 100N，尺寸如图所示。试求力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和轴承 A、B 的约束力。



习题 3－24 图



(a)

解： 图（a）： $\Sigma M_z=0$， $F\cos20°\times120=(200-100)\times80$， $F=70.95\ \text{N}$

$\Sigma M_y=0$， $-F\sin20°\times100+300\times250+F_{Bx}\times350=0$， $F_{Bx}=-207\ \text{N}$（↓）

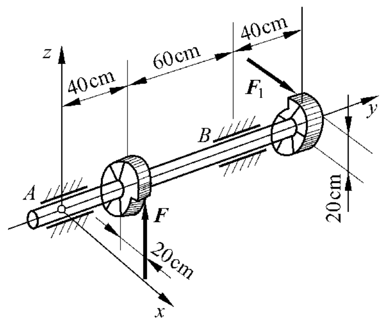
$\Sigma F_x=0$， $F_{Ax}+F_{Bx}-F\sin20°+300=0$， $F_{Ax}=-68.4\ \text{N}$（↓）

$\Sigma M_x=0$， $-F\cos20°\times100-F_{By}\times350=0$， $F_{By}=-19.04\ \text{N}$

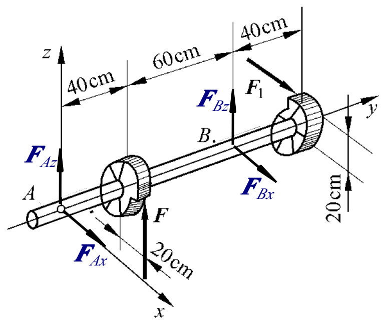
$\Sigma F_y=0$， $F_{Ay}+F\cos20°+F_{By}=0$， $F_{Ay}=-47.6\ \text{N}$

$F=70.95\ \text{N}$； $\boldsymbol{F}_{RA}=(-68.4\boldsymbol{i}-47.6\boldsymbol{j})\ \text{N}$； $\boldsymbol{F}_{RB}=(-207\boldsymbol{i}-19.04\boldsymbol{j})\ \text{N}$

3－25 水平轴上装有两个凸轮，凸轮上分别作用已知力 $\boldsymbol{F}_1$（大小为 800N）和未知力 $\boldsymbol{F}$。如轴平衡，求力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和轴承 A、B 的约束力。



习题 3－25 图



（a）

解： 取整体为研究对象，受力如图（a）所示。

$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0$， $20F_1-20F=0$； $F=F_1=800\text{N}$

$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0$， $100F_{Bz}+40F=0$； $F_{Bz}=-320\ \text{N}$

$$\sum M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad -100F_{Bx}-140F_1=0;\quad F_{Bx}=-1120\,\text{N}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_{Bx}+F_1=0;\quad F_{Ax}=320\text{N}$$

$$\sum F_z=0,\quad F_{Az}+F_{Bz}+F=0;\quad F_{Az}=-480\,\text{kN}$$

3－26 图示折杆 *ABCD* 中，*ABC* 段组成的平面为水平，而 *BCD* 段组成的平面为铅垂，且∠*ABC*=∠*BCD* = 90°。杆端 *D* 用球铰，端 *A* 用滑动轴承支承。杆上作用有力偶矩数值为 M_1、M_2 和 M_3 的三个力偶，其作用面分别垂直于 *AB*、*BC* 和 *CD*。假定 M_2、M_3 大小已知，试求 M_1 及约束力 $\boldsymbol{F}_{RA}$、$\boldsymbol{F}_{RD}$ 的各分量。已知 *AB*＝ *a*、*BC*＝ *b*、*CD*＝*c*，杆重不计。

解： 图（a）：$\Sigma F_x=0$，$F_{Dx}=0$

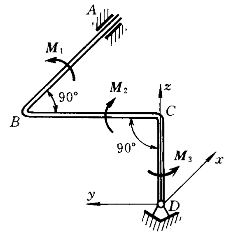
$\Sigma M_y=0$，$M_2-F_{Az}\cdot d_1=0$，$F_{Az}=\dfrac{M_2}{d_1}$

$\Sigma F_z=0$，$F_{Dz}=-\dfrac{M_2}{d_1}$

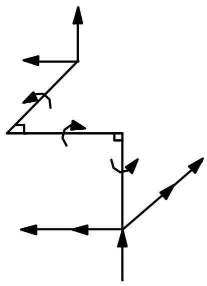
$\Sigma M_z=0$，$M_3+F_{Ay}\cdot d_1=0$，$F_{Ay}=-\dfrac{M_3}{d_1}$

$\Sigma F_y=0$，$F_{Dy}=\dfrac{M_3}{d_1}$

$\Sigma M_x=0$，$-M_1-F_{Ay}\cdot d_3+F_{Az}\cdot d_2=0$，$M_1=\dfrac{d_3}{d_1}M_3+\dfrac{d_2}{d_1}M_2$

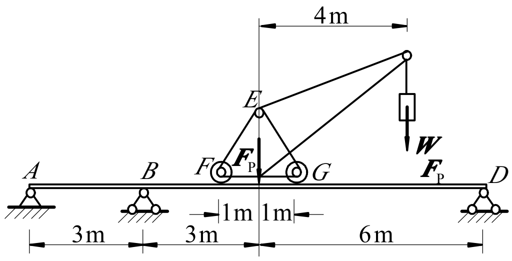


习题 3-26 图

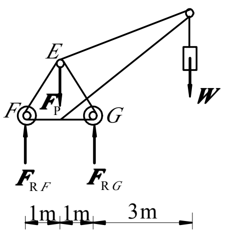


(a)

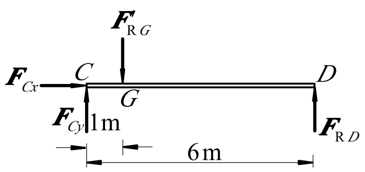
3－27 如图所示，组合梁由 *AC* 和 *DC* 两段铰接构成，起重机放在梁上。已知起重机重力的大小 P_1 = 50kN，重心在铅直线 *EC* 上，起重载荷 P_2 = 10kN。如不计梁自重，求支座 *A*、*B* 和 *D* 三处的约束反力。



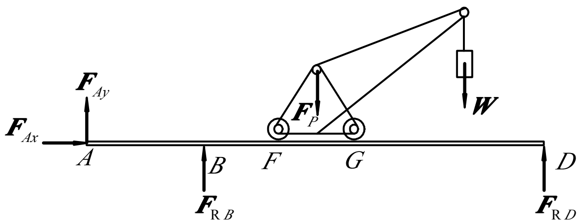
习题 3－27 图



（a）



（b）



（c）

解:（1）研究对象和受力图（a）:

$$\sum M_F(\boldsymbol{F})=0,\quad 2F_{RG}-1F_P-5W=0,\quad F_{RG}=50\,\text{kN}$$

（2）研究对象和受力图（b）

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad 6F_{RD}-1F'_{RG}=0,\quad F_{RD}=8.33\,\text{kN}$$

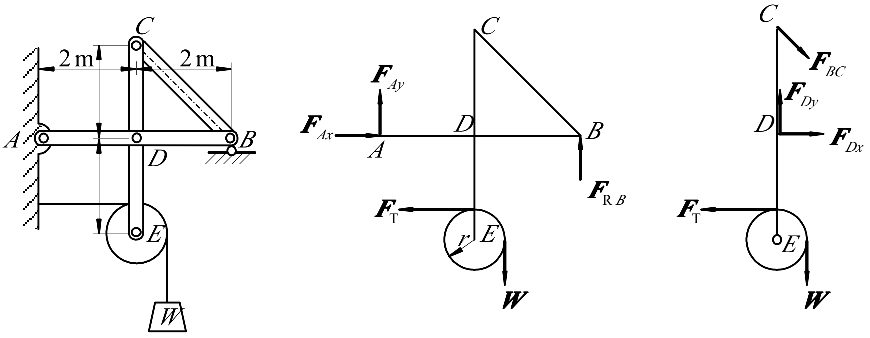
（3）整体作研究对象，受力图（c）

$$\sum M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad 12F_{RD}-10W-6F_P+3F_{RB}=0,\quad F_{RB}=100\,\text{kN}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}=-48.33\,\text{kN}$$

3－28 图示构架中，物体 *P* 重 1200N，由细绳跨过滑轮 *E* 而水平系于墙上，尺寸如图。不计杆和滑轮的自重，求支承 *A* 和 *B* 处的约束力，以及杆 *BC* 的内力 F_{BC} 。



习题 3－28 图　　（a）　　（b）

解：

（1）整体为研究对象，受力图（a），$F_{\rm T}=W$

$\sum M_A=0$，$F_{{\rm R}B}\cdot 4-W(2+r)-F_{\rm T}(1.5-r)=0$，$F_{{\rm R}B}=1050\ {\rm N}$

$\sum F_x=0$，$F_{Ax}=F_{\rm T}=W=1200\ {\rm N}$

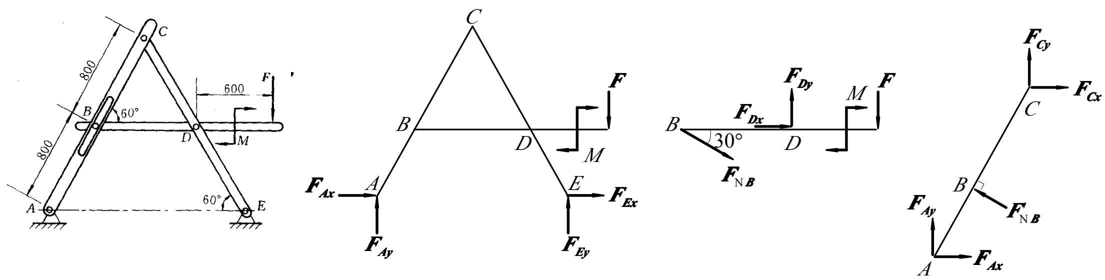
$\sum F_y=0$，$F_{Ay}=150\ {\rm N}$

（2）研究对象 *CDE*（*BC* 为二力杆），受力图（b）

$\sum M_D=0$，$F_{BC}\sin\theta\times 1.5+W\cdot r+F_{\rm T}(1.5-r)=0$

$$F_{BC}=\frac{-W}{\sin\theta}=\frac{-1200}{\frac{4}{5}}=-1500\ {\rm N}\ \text{（压力）}$$

3－29 在图示构架中，*A*、*C*、*D*、*E* 处为铰链连接，*BD* 杆上的销钉 *B* 置于 *AC* 杆光滑槽内，力 $F=200{\rm N}$，力偶矩 $M=100{\rm N}\cdot{\rm m}$，各尺寸如图，不计各构件自重，求 *A*、*B*、*C* 处所受力。



习题 3－29 图　　（a）　　（b）　　（c）

解：

（1）整体为研究对象，受力图（a）

$\sum M_E=0$，$1.6F_{Ay}-M-F(0.6-0.4)=0$，$F_{Ay}=-87.5\ {\rm N}$

（2）研究对象 *BD*，受力图（b）

$\sum M_D=0$，$F_{{\rm N}B}\cdot 0.8\sin 30^\circ-M-0.6F=0$，$F_{{\rm N}B}=550\ {\rm N}$

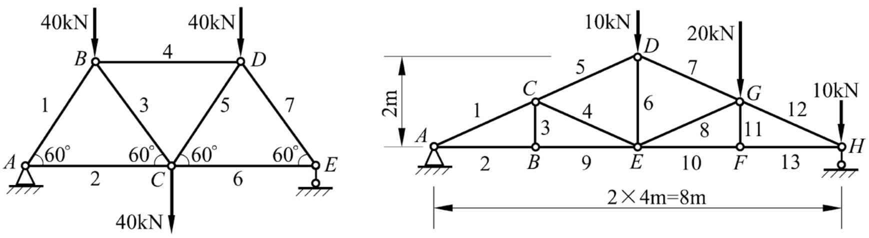
（3）研究对象 *ABC*，受力图（c）

$\sum M_C=0$，$1.6\sin 60^\circ\cdot F_{Ax}-0.8F_{Ay}-0.8F_{{\rm N}B}'=0$，$F_{Ax}=267\ {\rm N}$

$\sum F_x=0$，$F_{Ax}-F_{{\rm N}B}'\cos 30^\circ+F_{Cx}=0$，$F_{Cx}=209\ {\rm N}$

$\sum F_y=0$，$F_{Ay}+F_{{\rm N}B}'\sin 30^\circ+F_{Cy}=0$，$F_{Cy}=-187.5\ {\rm N}$

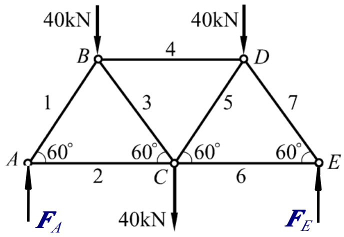
3-30 平面桁架的尺寸和支座如图所示。试求其各杆之内力。



(a) (b)

习题 3－30 图

解：



（c

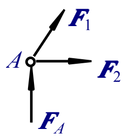
（1） 取图（a）中桁架为研究对象，求支座的约束力，受力如图（c）所示。由对称性可得：

$$F_A = F_E = 60\text{kN}$$

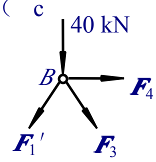
取节点 A 为研究对象，受力如图（d）所示。

$$\sum F_y = 0,\quad F_A + F_1 \sin 60° = 0;\quad F_1 = -69.28\ \text{kN}$$

$$\sum F_x = 0,\quad F_2 + F_1 \cos 60° = 0;\quad F_2 = 34.64\ \text{kN}$$



（ d



（ e

取节点 B 为研究对象，受力如图（e）所示。

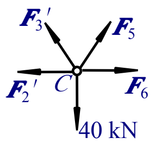
$$\sum F_y = 0,\quad (F_3 + F_1')\sin 60° + 40 = 0;\quad F_3 = 23.09\ \text{kN}$$

$$\sum F_x = 0,\quad (F_3 - F_1')\cos 60° + F_4 = 0;\quad F_4 = 46.19\ \text{kN}$$

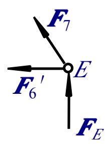
取节点 C 为研究对象，受力如图（f）所示。

$$\sum F_y = 0,\quad (F_5 + F_3')\sin 60° - 40 = 0;\quad F_5 = 23.09\ \text{kN}$$

$$\sum F_x = 0,\quad (F_5 - F_3')\cos 60° + F_6 - F_2' = 0;\quad F_6 = 34.64\text{kN}$$



（ f

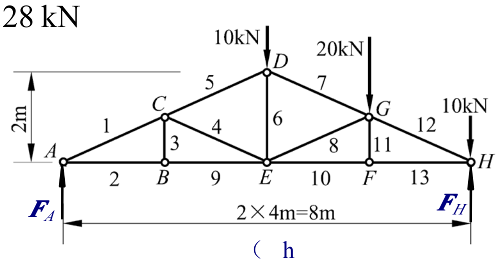


（ g

取节点 E 为研究对象，受力如图（g）所示。

$$\sum F_y = 0,\quad F_A + F_7 \sin 60° = 0;\quad F_7 = -69.28\ \text{kN}$$

（2） 取图（b）中桁架为研究对象，求支座的约束力，受力如图（h）所示。



（ h

$$\sum M_H = 0,\quad 20 \times 2 + 10 \times 4 - 8F_A = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_A + F_H - 20 - 10 - 10 = 0$$

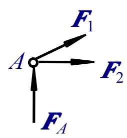
解得：$F_A = 10\text{kN}$；$F_H = 30\text{kN}$

其中零杆有：$F_3 = F_4 = F_{11} = 0$

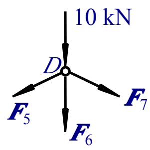
取节点 A 为研究对象，受力如图（i）所示。

$$\sum F_y = 0,\quad F_A + F_1 \frac{1}{\sqrt{5}} = 0;\quad F_1 = -22.36\ \text{kN}$$

$$\sum F_x = 0,\quad F_2 + F_1 \frac{2}{\sqrt{5}} = 0;\quad F_2 = 20\ \text{kN}$$



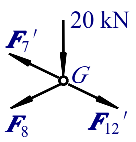
（ i



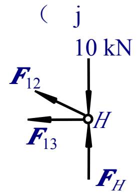
（ j

由节点 C 和节点 B 可得：

$$F_5 = F_1 = -22.36\ \text{kN};\quad F_9 = F_2 = 20\ \text{kN}$$



（ k



（ l

取节点 D 为研究对象，受力如图（j）所示。

$$\sum F_x = 0,\quad F_7 = F_5 = -22.36\ \text{kN}$$

$$\sum F_y = 0,\quad (F_5 + F_7)\frac{1}{\sqrt{5}} + F_6 + 10 = 0;\quad F_6 = 10\ \text{kN}$$

取节点 H 为研究对象，受力如图（l）所示。

$$\sum F_y = 0, \quad F_H + F_{12}\frac{1}{\sqrt{5}} - 10 = 0; \quad F_{12} = -44.72\ \text{kN}$$

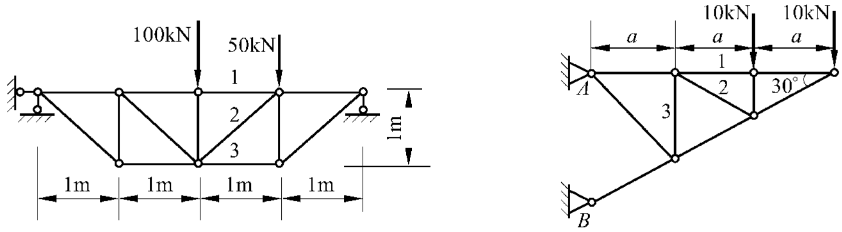
$$\sum F_x = 0, \quad F_{13} + F_{12}\frac{2}{\sqrt{5}} = 0; \quad F_{13} = 40\,\text{kN}$$

由节点 F 可得：$F_{10} = F_{13} = 40\,\text{kN}$

取节点 G 为研究对象，受力如图（k）所示。

$$\sum F_x = 0, \quad (F_{12}' - F_7' - F_8)\frac{2}{\sqrt{5}} = 0; \quad F_8 = -22.36\ \text{kN}$$

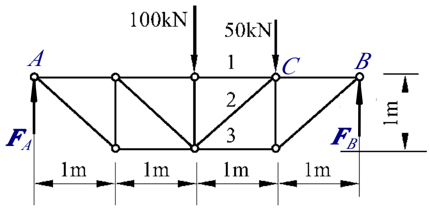
3-31 求图示平面桁架中 1、2、3 杆之内力。



(a)　　　　习题 3—31 图　　　　(b)

解：

（1）　取图（a）中桁架为研究对象，求支座 B 处的约束力，受力如图（c）所示。

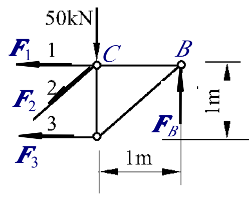


（c

$$\sum M_A = 0, \quad 4F_B - 100 \times 2 - 50 \times 3 = 0$$

解得：$F_B = 87.5\,\text{kN}$

用截面将杆 1、2、3 处截开，取右半部分为研究对象受力如图（d）所示。



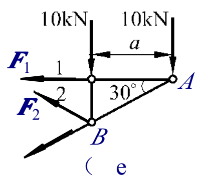
（d

$$\sum F_y = 0, \quad F_B - F_2\frac{1}{\sqrt{2}} - 50 = 0; \quad F_2 = 53\ \text{kN}$$

$$\sum M_C = 0, \quad F_B - F_3 = 0; \quad F_3 = F_B = 87.5\ \text{kN}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_1 + F_2\frac{1}{\sqrt{2}} + F_3 = 0; \quad F_1 = -125\ \text{kN}$$

（2）　取图（b）中桁架为研究对象，用截面将杆 1、2 处截开，取右半部分为研究对象，受力如图（e）所示。

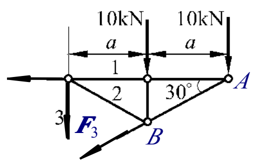


（e

$$\sum M_A = 0, \quad 10a - 2a\sin 30° F_2 = 0; \quad F_2 = 10\ \text{kN}$$

$$\sum M_B = 0, \quad a\tan 30° F_1 - 10a = 0; \quad F_1 = 10\sqrt{3}\ \text{kN}$$

再用截面将杆 3 处截开，取右半部分为研究对象受力如图（f）所示。



（f

$$\sum M_A = 0, \quad 10a + 2aF_3 = 0; \quad F_3 = -5\ \text{kN}$$

3－32 桁架的尺寸以及所受的载荷如图所示。试求杆 *BH*、*CD* 和 *GD* 的受力。

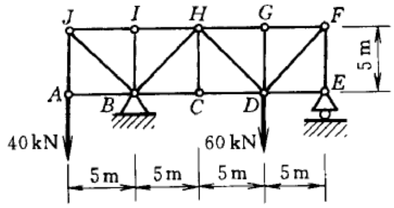
解：（1）节点 *G*：$\sum F_y=0$，$F_{GD}=0$

（2）节点 *C*：$\sum F_y=0$，$F_{HC}=0$

（3）整体，图（a）

$\sum M_B=0$，$15F_{RE}-10\times60+5\times40=0$

$F_{RE}=26.67\ \text{kN}$（↑）

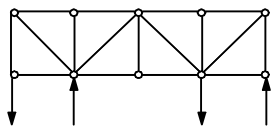


习题 3-32 图

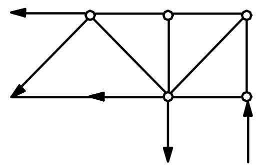
（4）截面法，图（b）

$\sum M_H=0$，$-5F_{CD}-5\times60+10\times26.67=0$；$F_{CD}=-6.67\ \text{kN}$（压）

$\sum F_y=0$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}F_{BH}-60+26.67=0$；$F_{BH}=-47.1\ \text{kN}$



(a)



(b)

3－33 图示桁架所受载荷 $\boldsymbol{F}_1=F$，$F_2=2F$，尺寸 *a* 为已知。试求杆件 *CD*、*GF*、和 *GD* 的内力。

解：截面法，受力如图（a）所示。

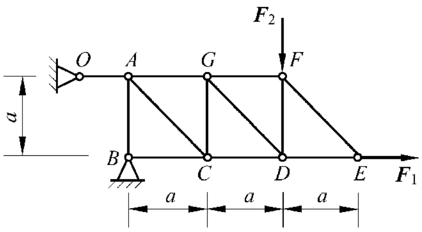
$$\sum M_D=0,\quad F_{GF}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{GD}\frac{1}{\sqrt{2}}-F_2=0$$

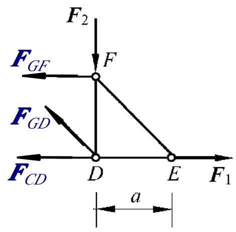
$$F_{GD}=2\sqrt{2}F$$

$$\sum F_x=0,$$

$$F_1-F_{GD}\frac{1}{\sqrt{2}}-F_{CD}=0;\quad F_{CD}=-F$$

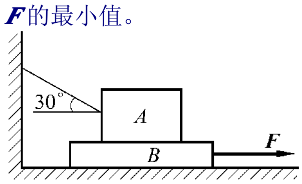


习题 3－33 图



（ a

3-34 两物块 *A*、*B* 放置如图所示。物块 *A* 重 $P_1=5\text{kN}$。物块 *B* 重 $P_2=2\text{kN}$，*A*、*B* 之间的静摩擦因数 $f_{s1}=0.25$，*B* 与固定水平面之间的静摩擦因数 $f_{s2}=0.20$。求拉动物块 *B* 所需力 $\boldsymbol{F}$ 的最小值。



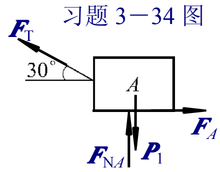
习题 3－34 图

解：取 *A* 为研究对象，受力如图（a）所示。

$$\sum F_y=0,\quad F_T\sin30°-P_1+F_{NA}=0 \qquad (1)$$

$$\sum F_x=0,\quad F_A-F_T\cos30°=0 \qquad (2)$$

$$F_{A\max}=f_{s1}\cdot F_{NA} \qquad (3)$$



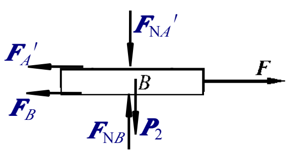
（ a

取 *B* 为研究对象，受力如图（b）所示。

$$\sum F_y=0,\quad F_{NB}-P_2-F'_{NA}=0 \qquad (4)$$

$$\sum F_x=0,\quad F-F'_A-F_B=0 \qquad (5)$$

$$F_{B\max}=f_{s2}\cdot F_{NB} \qquad (6)$$

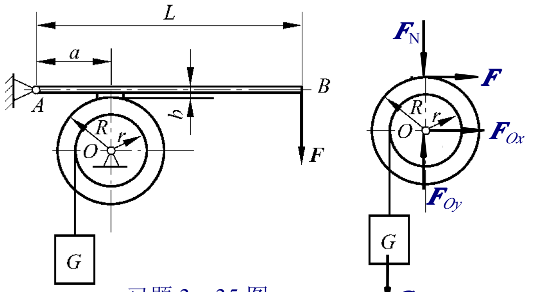


（ b

解式（1）——（6），得：

$$F_{\min}=\frac{f_{s1}+f_{s2}}{f_{s1}\tan30°+1}P_1+f_{s2}P_2=2.366\ \text{kN}$$

3-35 起重绞车的制动装置由带动制动块的手柄和制动轮组成。已知制动轮半径 R=50cm，鼓轮半径 r= 30cm，制动轮与制动块间的摩擦因数 f_s= 0.4，被提升的重物重力的大小 G= 1000N，手柄长 l= 300cm， a = 60cm， b= 10cm，不计手柄和制动轮的自重。求能够制动所需力 $\boldsymbol{F}$ 的最小值。



习题 3—35 图　　（ a

解：取轮与重物为研究对象，受力如图（a）所示。

$$\sum M_O = 0，\quad Gr - F_f R = 0 \qquad （1）$$

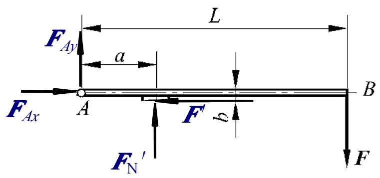
取杆 AB 为研究对象，受力如图（b）所示。

$$\sum M_A = 0，\quad F'_N a - F'_f b - FL = 0 \qquad （2）$$

$$F_{f\max} = f_s \cdot F_N \qquad （3）$$

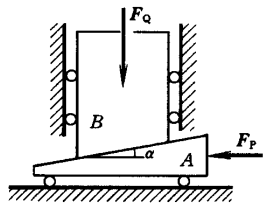
解式（1）——（3），得：

$$F_{\min} = \frac{Gr}{LR}\left(\frac{a}{f_s} - b\right) = 280\ \text{N}$$



（ b

3-36 尖劈起重装置如图所示。尖劈 A 的顶角为 α，B 块上受力 $\boldsymbol{F}_Q$ 的作用。A 块与 B 块之间的静摩擦因数为 f_s（有滚珠处摩擦力忽略不计）。如不计 A 块和 B 块的自重，试求保持平衡时主动力 $\boldsymbol{F}_P$ 的范围。



习题 3-36 图

解：（1）B 几乎要下滑时，$F_P = F_{\min}$

图（a），$\sum F_y = 0$

$$F_{N1}\cos\alpha + F_1\sin\alpha - F_Q = 0 \qquad （1）$$

图（b），$\sum F_x = 0$

$$-F'_1\cos\alpha + F'_{N1}\sin\alpha - F_{\min} = 0 \qquad （2）$$

$$F_1 = fF_{N1} \qquad （3）$$

解（1）、（2）、（3），得：

$$F_{\min} = \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha}F_Q \qquad （4）$$

（2）B 几乎要向上滑时，$F_P = F_{\max}$

图（c），$\sum F_y = 0$

$$F_{N2}\cos\alpha - F_2\sin\alpha - F_Q = 0 \qquad （5）$$

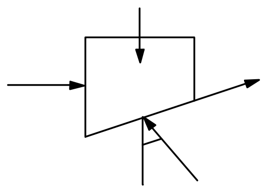
图（d），$\sum F_x = 0$

$$F'_2\cos\alpha + F'_{N2}\sin\alpha - F_{\max} = 0 \qquad （6）$$

$$F_2 = fF_{N2} \qquad （7）$$

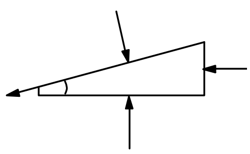
解（5）、（6）、（7），得：

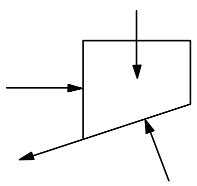
$$F_{\max} = \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}F_Q \qquad （8）$$

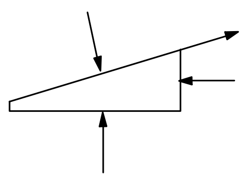

(a)

若令 $\tan\varphi_m = f$，由（4）、（8），得：

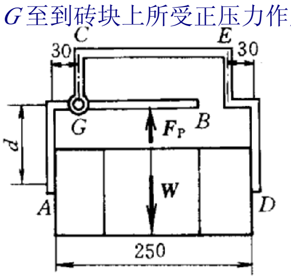
$$\tan(\alpha - \varphi_m)F_Q \le F_P \le \tan(\alpha + \varphi_m)F_Q$$


(b)

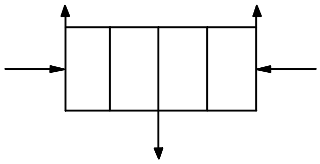

(c)


(d)

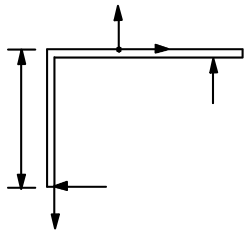
3-37 砖夹的宽度 250mm，杆件 *AGB* 和 *GCED* 在点 *G* 铰接。砖重为 $\boldsymbol{W}$，提砖的合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 作用在砖夹的对称中心线上，尺寸如图所示。如砖夹与砖之间的静摩擦因数 $f_s=0.5$，试问 *d* 应为多大才能将砖夹起（*d* 是点 *G* 至到砖块上所受正压力作用线的距离）。



习题 3-37 图



(a)



(b)

解：（1）整体（题图）：$\sum F_y=0$，$F_{\mathrm{P}}=W$　　（1）

（2）图（a）：　$\sum F_y=0$，$F=\dfrac{W}{2}$　　（2）

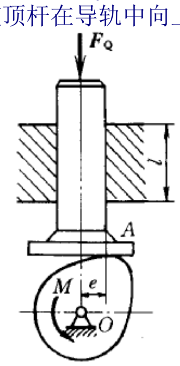
$\sum F_x=0$，$F_{\mathrm{N1}}=F_{\mathrm{N2}}$

$F\le fF_{\mathrm{N1}}$　　（3）

$F_{\mathrm{N1}}=F_{\mathrm{N2}}\ge\dfrac{F}{f}=\dfrac{W}{2f}$　　（4）

（3）图（b）：$\sum M_G=0$，$F_{\mathrm{P}}\times95+F'\times30-F'_{\mathrm{N1}}d=0$，$95W+30\times\dfrac{W}{2}-\dfrac{W}{2f}d\ge0$，$d\le110$ mm

3-38 图示为凸轮顶杆机构，在凸轮上作用有力偶，其力偶矩为 *M*，顶杆上作用有力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Q}}$。已知顶杆与导轨之间的静摩擦因数为 f_s，偏心距为 *e*，凸轮与顶杆之间的摩擦可忽略不计。要使顶杆在导轨中向上运动而不致被卡住，试问滑道的长度 *l* 应为多少？



习题 3-38 图

解：（1）对象：凸轮；受力图（b）

$\sum M_O=0$，$F'_{\mathrm{N2}}=\dfrac{W}{e}$　　（1）

（2）对象：顶杆，受力图（a）

$\sum F_y=0$，$F_{\mathrm{Q}}+2F_{\mathrm{s}}=F_{\mathrm{N2}}$　　（2）

$F_{\mathrm{s}}=F_{\mathrm{s1}}=F_{\mathrm{s2}}$

$F_{\mathrm{s}}=f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N1}}$　　（3）

式（1）、（3）代入（2），得

$F_{\mathrm{Q}}+2f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N1}}=\dfrac{M}{e}$　　（4）

$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0$，$F_{\mathrm{N1}}\cdot l=F_{\mathrm{N2}}\cdot e=M$

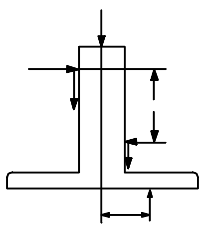
$F_{\mathrm{N1}}=\dfrac{M}{l}$

代入式（4），得

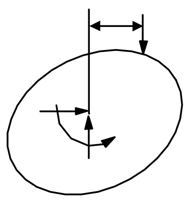
$F_{\mathrm{Q}}+2f_{\mathrm{s}}\cdot\dfrac{M}{l}=\dfrac{M}{e}$

$l=\dfrac{2Mef_{\mathrm{s}}}{M-F_{\mathrm{Q}}e}$

即　$l_{\min}=\dfrac{2Mef_{\mathrm{s}}}{M-F_{\mathrm{Q}}e}$



(a)



(b)

3-39 为轻便拉动重物 *P*，将其放在滚轮 *O* 上，如图所示。考虑接触处 *A*、*B* 的滚动摩阻，则作用在滚轮上的滚动阻力偶的转向是_______。

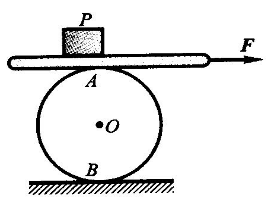
（A）M_{fA} 为顺时针转向，M_{fB} 为逆时针转向；

（B）M_{fA} 为逆时针转向，M_{fB} 为顺时针转向；

（C）M_{fA}、M_{fB} 均为逆时针转向；

（D）M_{fA}、M_{fB} 均为顺时针转向。

解：选择（C）

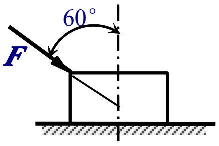


习题 3-39 图

因为滚轮相对于地面和相对于重物均为顺时针滚动，所以 A、B 处的滚动摩阻力偶均为逆时针转向。

3-40 图示物块重 5kN，与水平面间的摩擦角 φ_m=35°，今欲用力 $\boldsymbol{F}$ 推动物块，F=5kN。则物块将____。

(A) 不动;
(B) 滑动;
(C) 处于临界平衡状态;
(D) 滑动与否不能确定。

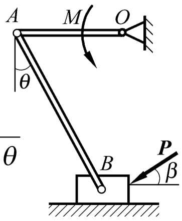


习题 3-40 图

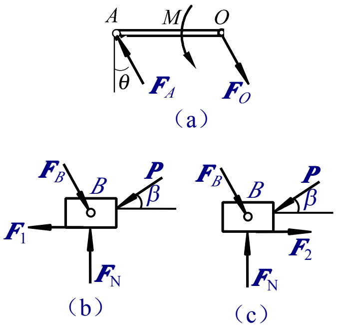
解：选择（A）

因为重力与力 $\boldsymbol{F}$ 大小相等，故其合力的作用线与接触面法线之间的夹角为 30°，小于摩擦角，所以物块静止不动。

3-41 在平面曲柄连杆滑块机构中，曲柄 OA 长 r,作用有一矩为 M 的力偶，小滑块 B 于水平面之间的摩擦因数为 f。OA 水平。连杆与铅垂线的夹角为 θ，力与水平面成 β 角，求机构在图示位置保持平衡时力 $\boldsymbol{P}$ 的值。（不计机构自重，$\theta > \varphi_m$=arctan$f$）



习题 3-41 图



解：取杆 AB 为研究对象，受力如图（a）。

$$\sum M_O=0,\quad M-F_A\cos\theta r=0;\quad F_A=\frac{M}{r\cos\theta}$$

取物块 B 为研究对象，设其有向右运动的趋势，受力如图（b）。（$F_B=F_A$）

$$\sum F_y=0,\quad F_N-P\sin\beta-F_B\cos\theta=0$$

$$\sum F_x=0,\quad F_B\sin\theta-P\cos\beta-F_1=0$$

$$F_{1\max}=f\cdot F_N$$

解得：$$P_{\min}=\frac{M}{r\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta-\cos\theta f}{\cos\beta+\sin\beta f}=\frac{M\sin(\theta-\varphi_m)}{r\cos\theta\cos(\beta-\varphi_m)}$$

取物块 B 为研究对象，设其有向左运动的趋势，受力如图（c）。

$$\sum F_x=0,\quad F_B\sin\theta-P\cos\beta+F_2=0$$

$$F_{2\max}=f\cdot F_N$$

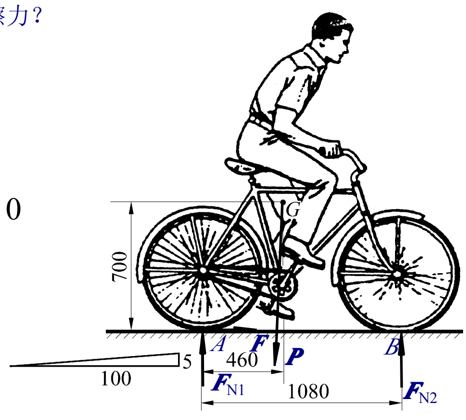
其余方程不变，解得：$$P_{\max}=\frac{M}{r\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta f}{\cos\beta-\sin\beta f}=\frac{M\sin(\theta+\varphi_m)}{r\cos\theta\cos(\beta+\varphi_m)}$$

所以：$$\frac{M\sin(\theta-\varphi_m)}{r\cos\theta\cos(\beta-\varphi_m)}\le P\le\frac{M\sin(\theta+\varphi_m)}{r\cos\theta\cos(\beta+\varphi_m)}$$

***3-42** 某人骑自行车匀速上一坡度为 5%的斜坡，如图所示。人与自行车总重力的大小为 820N,重心在点 G。若不计前轮的摩擦，且后轮处于滑动的临界状态，求后轮与路面静摩擦因数为多大？若静摩擦因数加倍，加在后轮上的摩擦力为多大？为什麽可忽略前轮的摩擦力？

解：设斜坡的倾角为 θ，则有 $\tan\theta=\dfrac{1}{20}$，

受力如图所示。



习题 3-42 解图

$$\sum M_B=0,$$

$$(1080-460)P\cos\theta+700P\sin\theta-F_{N1}\cdot 1080=0$$

$$\sum F_{AB}=0,\quad F-P\sin\theta=0$$

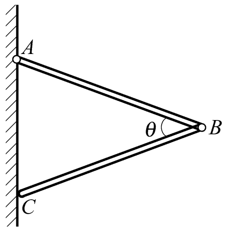
$$F_{\max}=f_s\cdot F_{N1}$$

解得：$$f_s=\frac{1080\sin\theta}{620\cos\theta+700\sin\theta}=0.082$$

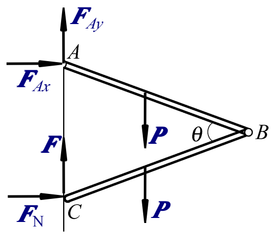
若静摩擦因数加倍，则加在后轮上的摩擦力为：

$$F=P\sin\theta=40.95\text{ N}$$

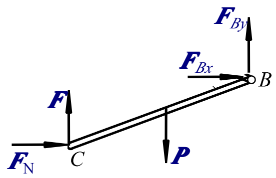
***3-43** 匀质杆 AB 和 BC 在 B 端铰接，A 端铰接在墙上，C 端则靠在墙上，如图所示。墙与 C 端接触处的摩擦因数 f=0.5，两杆长度相等并重力相同，试确定平衡时的最大角 θ 。铰链中的摩擦忽略不计。



习题 3-43 图



(a)



(b)

解： 取整体为研究对象，受力如图（a）所示。设杆长为 l。

$$\sum M_A = 0，\quad F_{\mathrm{N}} 2l \sin\frac{\theta}{2} - 2P\frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \tag{1}$$

取杆 BC 为研究对象，受力如图（b）所示。

$$\sum M_B = 0，\quad F_{\mathrm{N}} l \sin\frac{\theta}{2} + P\frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2} - Fl\cos\frac{\theta}{2} = 0 \tag{2}$$

$$F_{\max} = f \cdot F_{\mathrm{N}} \tag{3}$$

解式（1）——（3），得： $\cos\frac{\theta}{2}(2 - f\cot\frac{\theta}{2}) = 0$

$\cos\frac{\theta}{2} = 0$，不合题意，舍去；

$\cot\frac{\theta}{2} = 4$，$\theta = 28.07°$

3-44 如图所示，圆柱体 A 与方块 B 匀重 100N，置于倾角为 30°的斜面上，若所有接触处的摩擦因数均 f_s=0.5，试求保持系统平衡所需的力 $\boldsymbol{F}_1$ 的最小值。

解： 取圆柱体 A 为研究对象，受力如图（a）所示。

$$\sum F_x = 0，\quad P\sin 30° - F_A - F_{\mathrm{N}2} = 0 \tag{1}$$

$$\sum M_A = 0，\quad (F_{AB} - F_A)r = 0 \tag{2}$$

$$F_{AB} = f_{\mathrm{s}} F_{\mathrm{N}2} \tag{3}$$

取方块 B 为研究对象，受力如图（b）所示。

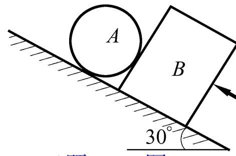
$$\sum F_x = 0，\quad P\sin 30° - F_B - F_1 + F_{\mathrm{N}2}' = 0 \tag{4}$$

$$\sum F_y = 0，\quad F_{\mathrm{N}3} - P\cos 30° - F_{AB}' = 0 \tag{5}$$

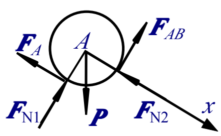
$$F_B = f_{\mathrm{s}} F_{\mathrm{N}3} \tag{6}$$

解式（1）——（6），得：

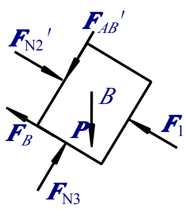
$$F_1 = P\sin 30°(2 - f_s) - Pf_s\cos 30° = 31.7\ \mathrm{N}$$



习题 3-44 图

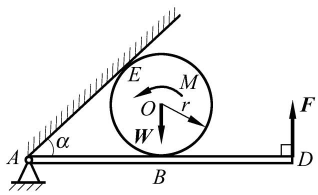


(a)



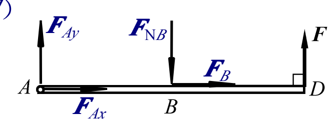
(b)

***3-45** 如图所示，均质圆柱重 W，半径为 r，搁在不计自重的水平杆和固定斜面之间。杆 A 端为光滑铰链，D 端受一铅垂向上的力 $\boldsymbol{F}$ 作用，圆柱上作用一力偶，已知 F=W，圆柱与杆和斜面间的静滑动摩擦因数 f_S 皆为 0.3，不计滚动阻碍。当 α=45° 时，AB=BD。试求此时能保持系统静止的力偶矩 M 的最小值。



习题 3-45 图

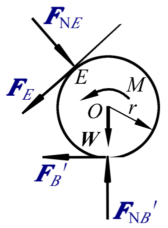
解：取杆 AD 为研究对象，受力如图（a）所示。（设杆长 l）



（a）

$$\sum M_A=0,\quad Fl-F_{NB}\frac{l}{2}=0;\quad F_{NB}=2W$$

取圆柱 O 为研究对象，受力如图（b）所示。



（b）

$$\sum M_O=0,\quad F_E r+M-F_B' r=0 \tag{1}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{NE}\cos45°-F_E\sin45°-F_B'=0 \tag{2}$$

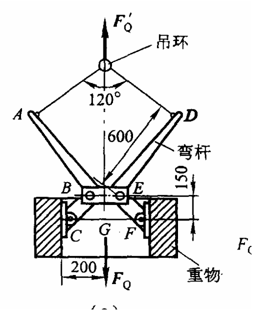
$$\sum F_y=0,\quad F_{NB}'-F_{NE}\sin45°-F_E\cos45°-W=0 \tag{3}$$

设 E 处的静摩擦力先达到最大值：$F_E=f_s F_{NE}$

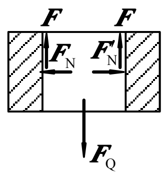
由式（2）、（3）解得：$F_E=\dfrac{3\sqrt{2}}{13}W$；$F_B=\dfrac{7}{13}W<F_{B\max}=0.6W$

由式（1）得：$M_{\min}=F_B' r-F_E r=0.212Wr$

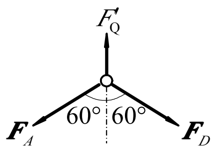
***3-46** 如图所示起重用抓具，由弯杆 ABC 和 DEF 组成，两根弯杆由 BE 杆的 B、E 两处用铰链连接，抓具各部分的尺寸如图示。这种抓具是靠摩擦力抓取重物的。试求为了抓取重物，抓具与重物之间的静摩擦因数应为多大（BE 尺寸不计）。



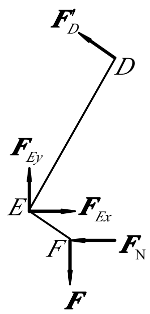
习题 3－46 图



（a）



（b）



（c）

解（1）研究对象重物，受力图（a）

$$\sum F_y=0,\quad 2F=F_Q,\quad F=\frac{F_Q}{2} \tag{a}$$

$$F\le F_{\max}=f_s F_N,\quad f_s\ge\frac{F_Q}{2F_N} \tag{b}$$

（2）研究对象吊环，受力图（b）

$$\sum F_x=0,\quad F_D=F_A$$

$$\sum F_y=0,\quad 2F_D\cos60°=F_Q,\quad F_D=F_Q \tag{c}$$

（3）研究对象弯杆 $CFED$，受力图（c）

$$\sum M_E=0,\quad F_D'\times0.6-F\times0.2-F_N\times0.15=0$$

式（a）、（b）、（c）代入，得

$$0.6F_Q-0.1F_Q-0.15\frac{F_Q}{2f_s}\ge0,\quad f_s\ge0.15$$

第 2 篇　工程运动学基础

第 4 章　运动分析基础

4－1　小环 A 套在光滑的钢丝圈上运动，钢丝圈半径为 R（如图所示）。已知小环的初速度为 v_0，并且在运动过程中小环的速度和加速度成定角θ，且 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，试确定小环 A 的运动规律。

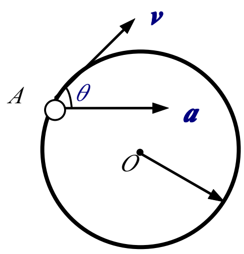
解： $a\sin\theta = a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{R}$， $a = \dfrac{v^2}{R\sin\theta}$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a\cos\theta = \frac{v^2}{R\tan\theta}，\quad \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^t \frac{1}{R\tan\theta}\mathrm{d}t$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 R\tan\theta}{R\tan\theta - v_0 t}$$

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{v_0 R\tan\theta}{R\tan\theta - v_0 t}\mathrm{d}t$$

$$s = R\tan\theta \ln\frac{R\tan\theta}{R\tan\theta - v_0 t}$$



习题 4－1 图

4－2　已知运动方程如下，试画出轨迹曲线、不同瞬时点的 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 图像，说明运动性质。

1. $\begin{cases} x = 4t - 2t^2 \\ y = 3t - 1.5t^2 \end{cases}$，　2. $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 2\cos 2t \end{cases}$

解： 1．由已知得　$3x = 4y$　　　　（1）

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4t \\ \dot{y} = 3 - 3t \end{cases} \qquad v = 5 - 5t$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -4 \\ \ddot{y} = -3 \end{cases} \qquad a = -5$$

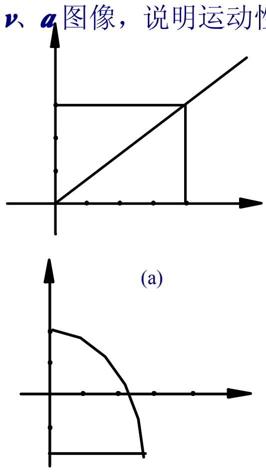
为匀减速直线运动，轨迹如图（a），其 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 图像从略。

2．由已知，得

$$\arcsin\frac{x}{3} = \frac{1}{2}\arccos\frac{y}{2}$$

化简得轨迹方程：$y = 2 - \dfrac{4}{9}x^2$　　　　（2）

轨迹如图（b），其 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 图像从略。



(b)

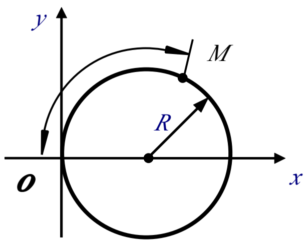
习题 4－2 图

4－3　点作圆周运动，孤坐标的原点在 O 点，顺钟向为孤坐标的正方向，运动方程为 $s = \dfrac{1}{2}\pi R t^2$，式中 s 以厘米计，t 以秒计。轨迹图形和直角坐标的关系如右图所示。当点第一次到达 y 坐标值最大的位置时，求点的加速度在 x 和 y 轴上的投影。

解： $v = \dot{s} = \pi R t$， $a_{\mathrm{t}} = \dot{v} = \pi R$， $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{R} = \pi^2 R t^2$

y 坐标值最大的位置时：$\because s = \dfrac{1}{2}\pi R t^2 = \dfrac{\pi}{2}R$， $\therefore t^2 = 1$

$$a_x = a_{\mathrm{t}} = \pi R，\quad a_y = -\pi^2 R$$



习题 4－3 图

4－4 滑块 A，用绳索牵引沿水平导轨滑动，绳的另一端绕在半径为 r 的鼓轮上，鼓轮以匀角速度ω转动，如图所示。试求滑块的速度随距离 x 的变化规律。

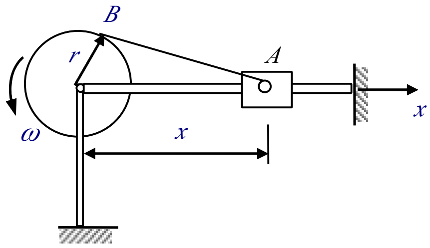
解： 设 $t=0$ 时 AB 长度为 l_0，则 t 时刻有：

$$(\omega t+\arctan\frac{r}{l_0}-\arctan\frac{r}{\sqrt{x^2-r^2}})r=l_0-\sqrt{x^2-r^2}$$

对时间求导：

$$\omega r-\frac{r^2\dot{x}}{x\sqrt{x^2-r^2}}=-\frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\dot{x}=-\frac{\omega rx}{\sqrt{x^2-r^2}}$$



习题 4－4 图

4－5 凸轮顶板机构中，偏心凸轮的半径为 R，偏心距 $OC=e$，绕轴 O 以等角速转动，从而带动顶板 A 作平移。试列写顶板的运动方程，求其速度和加速度，并作三者的曲线图像。

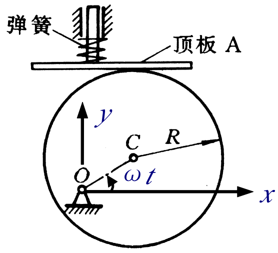
解：（1）顶板 A 作平移，其上与轮 C 接触点坐标：

$y=R+e\sin\omega t$ （ω 为轮 O 角速度）

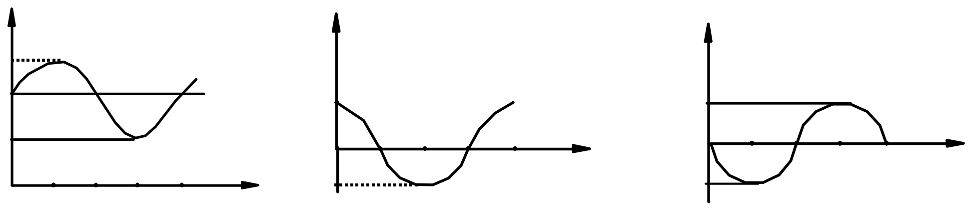
$v=\dot{y}=e\omega\cos\omega t$

$a=\ddot{y}=-e\omega^2\sin\omega t$

（2）三者曲线如图（a)、(b)、(c)。



习题 4-5 图



(a) (b) (c)

4－6 绳的一端连在小车的点 A 上，另一端跨过点 B 的小滑车车绕在鼓轮 C 上，滑车离地面的高度为 h。若小车以匀速度 $\boldsymbol{v}$ 沿水平方向向右运动，试求当$\theta=45°$ 时 B、C 之间绳上一点 P 的速度、加速度和绳 AB 与铅垂线夹角对时间的二阶导数$\ddot{\theta}$ 各为多少。

解： 1. ∵P 点速度与 AB 长度变化率相同

$$v_P=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\dot{x}}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{v}{\sqrt{2}} \quad (\theta=45°\ ,\ x=h\text{时})$$

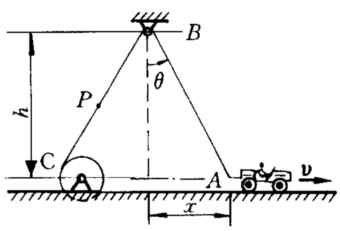
2．同样：$a_P=\dot{v}_P=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{x\dot{x}}{\sqrt{h^2+x^2}})=\dfrac{\dot{x}^2}{2\sqrt{2}h}=\dfrac{v^2}{2\sqrt{2}h}$

（∵ $\ddot{x}=0$，$x=h$）

3．$\tan\theta=\dfrac{x}{h}$，$\theta=\tan^{-1}\dfrac{x}{h}$

$$\dot{\theta}=\frac{\frac{1}{h}\dot{x}}{1+\frac{x^2}{h^2}}=\frac{h\dot{x}}{h^2+x^2}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{-2hx\dot{x}^2}{(h^2+x^2)^2}=-\frac{v^2}{2h^2} \quad \text{（顺）}$$



习题 4-6 图

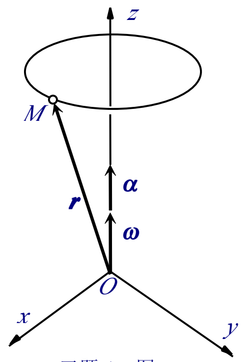
4－7 图示矢径 $\boldsymbol{r}$ 绕轴 z 转动，其角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，角加速度为 $\boldsymbol{\alpha}$。试用矢量表示此矢径端点 M 的速度、法向加速度和切向加速度。

解： $\boldsymbol{v}_M=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{a}_M=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_M}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{a}_{M\mathrm{t}}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a}_{M\mathrm{n}}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$



习题 4-7 图

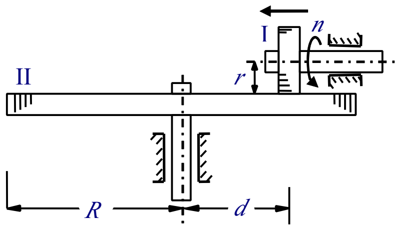
4－8 摩擦传动机构的主动轮 I 的转速为 n＝600r/min，它与轮 II 的接触点按箭头所示的方向移动，距离 d 按规律 d＝10-0.5t 变化，单位为厘米，t 以秒计。摩擦轮的半径 r＝5cm，R＝15cm。求：（1）以距离 d 表示轮 II 的角加速度；（2）当 d＝r 时，轮 II 边缘上一点的全加速度的大小。

解：

（1） $\omega_2 d=\dfrac{\pi nr}{30}$，$\omega_2=\dfrac{\pi nr}{30d}$

$$\alpha_2=-\frac{\pi nr\dot{d}}{30d^2}=\frac{\pi 600\times5\times0.5}{30d^2}=\frac{50\pi}{d^2}\ \ \mathrm{rad/s^2}$$

（2） $a=r\sqrt{\alpha_2^2+\omega_2^4}=r\sqrt{\dfrac{2500\pi^2}{r^4}+\dfrac{\pi^4n^4}{30^4}}=59220\ \mathrm{cm/s^2}$



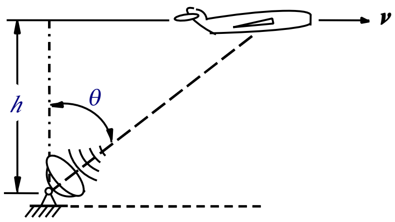
习题 4-8 图

4－9 飞机的高度为 h，以匀速度 v 沿水平直线飞行。一雷达与飞机在同一铅垂平面内，雷达发射的电波与铅垂线成 θ 角，如图所示。求雷达跟踪时转动的角速度 ω 和角加速度 α 与 h、v、θ 的关系。

解： $\tan\theta=\dfrac{vt}{h}$

$$\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}=\frac{v}{h}，\quad \omega=\dot{\theta}=\frac{v}{h}\cos^2\theta$$

$$\alpha=\dot{\omega}=-\frac{v}{h}\sin2\theta\dot{\theta}=-\frac{v^2}{h^2}\sin2\theta\cos^2\theta$$



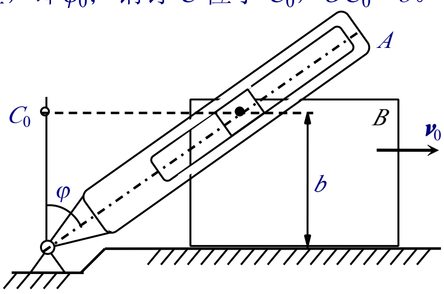
习题 4-9 图

4－10 滑座 B 沿水平面以匀速 $\boldsymbol{v}_0$ 向右移动，由其上固连的销钉 C 固定的滑块 C 带动槽杆 OA 绕 O 轴转动。当开始时槽杆 OA 恰在铅垂位置，即 φ_0；销钉 C 位于 C_0，OC_0＝b。试求槽杆的转动方程、角速度和角加速度。

解： $\tan\varphi=\dfrac{v_0t}{b}$，$\varphi=\arctan\dfrac{v_0t}{b}$ rad

$$\omega=\dot{\varphi}=\frac{bv_0}{b^2+v_0^2t^2}\ \ \mathrm{rad/s}$$

$$\alpha=\dot{\omega}=-\frac{2bv_0^3t}{(b^2+v_0^2t^2)^2}$$



习题 4-10 图

4－11．设 $\boldsymbol{\omega}$ 为转动坐标系 $Axyz$ 的角速度矢量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为动坐标系的单位矢量。试证明：

$$\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{j}\right)\boldsymbol{k}$$

证： $\because \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{i}=\omega_x$

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{i}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{j}=\omega_y$

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{j}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{k}=\omega_k$

$\therefore$ 等式右侧$=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{\omega}$

证毕

第 5 章　点的复合运动分析

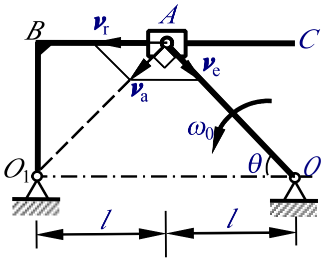
5－1　曲柄 OA 在图示瞬时以 ω_0 绕轴 O 转动，并带动直角曲杆 O_1BC 在图示平面内运动。若 d 为已知，试求曲杆 O_1BC 的角速度。

解：1、运动分析：动点：A，动系：曲杆 O_1BC，牵连运动：定轴转动，相对运动：直线，绝对运动：圆周运动。

2、速度分析：$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

$$v_{\mathrm{a}}=\sqrt{2}l\omega_0；\quad v_{\mathrm{a}}=v_{\mathrm{e}}=\sqrt{2}l\omega_0$$

$$\omega_{O_1BC}=\frac{v_{\mathrm{e}}}{O_1A}=\omega_0 \quad （顺时针）$$



习题 5-1 图

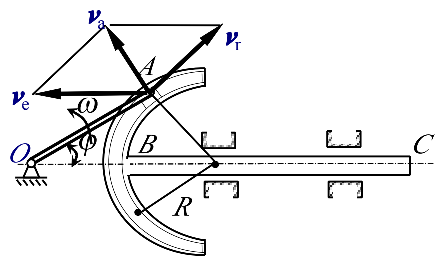
5－2　图示曲柄滑杆机构中、滑杆上有圆弧滑道，其半径 $R=10\,\mathrm{cm}$，圆心 O_1 在导杆 BC 上。曲柄长 $OA=10\,\mathrm{cm}$，以匀角速 $\omega=4\pi\,\mathrm{rad/s}$ 绕 O 轴转动。当机构在图示位置时，曲柄与水平线交角　$\phi=30^\circ$。求此时滑杆 CB 的速度。

解：1、运动分析：动点：A，动系：BC，牵连运动：平移，相对运动：圆周运动，绝对运动：圆周运动。

2、速度分析：$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

$$v_{\mathrm{a}}=O_1A\cdot\omega=40\pi\ \mathrm{cm/s};$$

$$v_{BC}=v_{\mathrm{e}}=v_{\mathrm{a}}=40\pi=126\,\mathrm{cm/s}$$



习题 5-2 图

5－3　图示刨床的加速机构由两平行轴 O 和 O_1、曲柄 OA 和滑道摇杆 O_1B 组成。曲柄 OA 的末端与滑块铰接，滑块可沿摇杆 O_1B 上的滑道滑动。已知曲柄 OA 长 r 并以等角速度 ω 转动，两轴间的距离是 $OO_1=d$。试求滑块滑道中的相对运动方程，以及摇杆的转动方程。

解：分析几何关系：A 点坐标

$$x_1\cos\varphi=r\cos\omega t+d \qquad （1）$$

$$x_1\sin\varphi=r\sin\omega t \qquad （2）$$

（1）、（2）两式求平方，相加，再开方，得：

1．相对运动方程

$$x_1=\sqrt{r^2\cos^2\omega t+2rd\cos\omega t+d^2+r^2\sin^2\omega t}$$

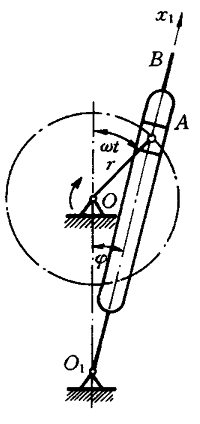
$$=\sqrt{d^2+r^2+2rd\cos\omega t}$$

将（1）、（2）式相除，得：

2．摇杆转动方程：

$$\tan\varphi=\frac{r\sin\omega t}{r\cos\omega t+d}$$

$$\varphi=\arctan\frac{r\sin\omega t}{r\cos\omega t+d}$$

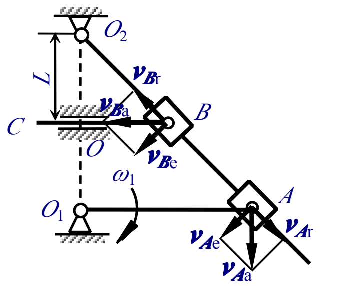


习题 5-3 图

5－4　曲柄摇杆机构如图所示。已知：曲柄 O_1A 以匀角速度 ω_1 绕轴 O_1 转动，$O_1A=R$，$O_1O_2=b$，$O_2O=L$。试求当 O_1A 水平位置时，杆 BC 的速度。

解：1、A 点：动点：A，动系：杆 O_2A，牵连运动：定轴转动，相对运动：直线，绝对运动：圆周运动。

$$v_{A\mathrm{a}}=R\omega_1；\quad v_{A\mathrm{e}}=v_{A\mathrm{a}}\frac{R}{\sqrt{b^2+R^2}}=\frac{R^2\omega_1}{\sqrt{b^2+R^2}}$$



习题 5-4 图

2、B 点：动点：B，动系：杆 O_2A，牵连运动：定轴转动，相对运动：直线，绝对运动：直线。

$$v_{Be} = v_{Ae}\frac{O_2B}{O_2A} = \frac{LR^2\omega_1}{b\sqrt{b^2+R^2}}$$

$$v_{BC} = v_{Ba} = v_{Be}\frac{\sqrt{b^2+R^2}}{b} = \frac{LR^2\omega_1}{b^2}$$

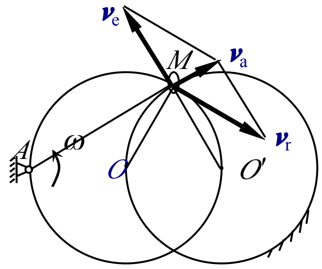
5－5 如图示，小环 M 套在两个半径为 r 的圆环上，令圆环 O' 固定，圆环 O 绕其圆周上一点 A 以匀角速度 ω 转动，求当 A、O、O' 位于同一直线时小环 M 的速度。

解：1、运动分析：动点：M，动系：圆环 O，牵连运动：定轴转动，相对运动：圆周运动，绝对运动：圆周运动。

2、速度分析：$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

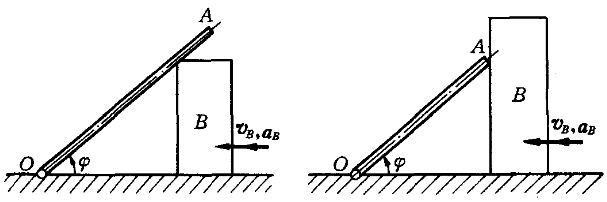
$$v_e = \sqrt{3}r\omega$$

$$v_M = v_a = v_e\tan 30° = r\omega$$



习题 5—5 图

5－6 图 a、b 所示两种情形下，物块 B 均以速度 $\boldsymbol{v}_B$、加速度 $\boldsymbol{a}_B$ 沿水平直线向左作平移，从而推动杆 OA 绕点 O 作定轴转动，$OA = r$，$\varphi = 40°$。试问若应用点的复合运动方法求解杆 OA 的角速度与角加速度，其计算方案与步骤应当怎样？将两种情况下的速度与加速度分量标注在图上，并写出计算表达式。



(a) (b)

习题 5—6 图

解：(a)：

1、运动分析：动点：C（B 上）；动系：OA；绝对运动：直线；相对运动：直线；牵连运动：定轴转动。

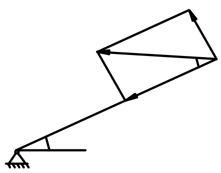
2、$\boldsymbol{v}$ 分析（图 c）

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \quad (1)$$

$$v_e = v_B\sin\varphi$$

$$\omega_{OA} = \frac{v_e}{OC} = \frac{v_B\sin\varphi}{OC} \quad (2)$$

$$v_r = v_B\cos\varphi$$


(c)

3、$\boldsymbol{a}$ 分析（图 d）

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \quad (3)$$

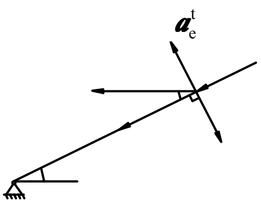
（3）向 $\boldsymbol{a}_C$ 向投影，得

$$-a_B\sin\varphi = -a_e^t + a_C$$

其中 $a_C = 2\omega_{OA}v_r = \dfrac{v_B^2\sin 2\varphi}{OC}$

$$a_e^t = a_B\sin\varphi + a_C$$

$$\alpha_{OA} = \frac{a_e^t}{OC}$$



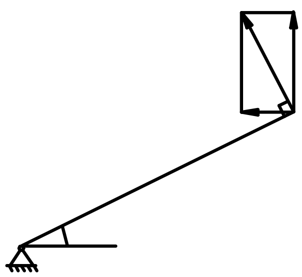
(d)

(b)：

1、运动分析：动点：A（OA 上）；动系：B；绝对运动：圆周运动；相对运动：直线；牵连运动：平移。

2、$\boldsymbol{v}$ 分析（图 e）

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$


(e)

$$v_{\mathrm{a}}=\frac{v_B}{\sin\varphi}$$

$$\omega_{OA}=\frac{v_{\mathrm{a}}}{OA}=\frac{v_B}{r\sin\varphi}$$

3、$\boldsymbol{a}$ 分析（图 f）

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$$

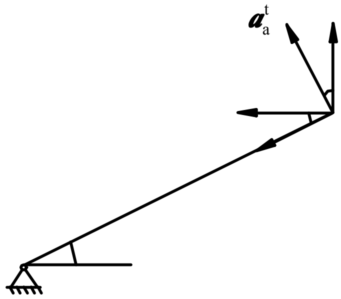
上式向 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$ 向投影，得

$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}\cos\varphi+a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}\sin\varphi=a_{\mathrm{e}}$$

$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}=\frac{v_{\mathrm{a}}^2}{r}=\frac{v_B^2}{r\sin^2\varphi}$$

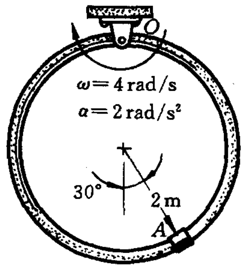
$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}=(a_B-a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}\cos\varphi)/\sin\varphi$$

$$\alpha_{OA}=\frac{a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}}{OA}=\frac{a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}}{r}$$



(f)

5—7 图示圆环绕 O 点以角速度 $\omega=4$ rad/s、角加速度 $\alpha=2$ rad/s² 转动。圆环上的套管 A 在图示瞬时相对圆环有速度 5m/s，速度数值的增长率 8m/s²。试求套管 A 的绝对速度和加速度。



习题 5—7 图

解： 1、运动分析：动点：A，动系：圆环，牵连运动：定轴转动，相对运动：圆周运动，绝对运动：平面曲线。

2、速度：（图 a）

$$OA=2r\cos15°=2\times2\cos15°$$

$$v_{\mathrm{e}}=OA\cdot\omega=4\cos15°\times4=16\cos15°$$

$$v_{\mathrm{r}}=5\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{\mathrm{a}}=\sqrt{v_{\mathrm{e}}^2+v_{\mathrm{r}}^2+2v_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{r}}\cos15°}=20.3\ \mathrm{m/s}$$

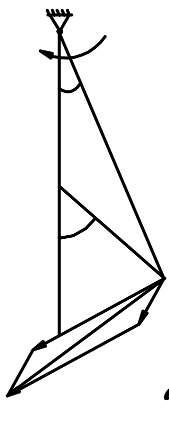
3、加速度：（图 b）

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

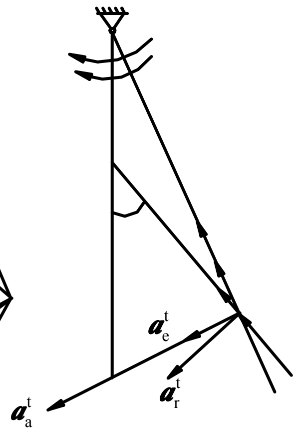
$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}=a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}\cos15°+a_{\mathrm{C}}\cos15°-a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}\sin15°\quad(1)$$

$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}\cos15°+a_{\mathrm{C}}\sin15°+a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}\sin15°\quad(2)$$

$$\begin{cases}a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}=OA\cdot\omega^2=4\cos15°\times4^2=64\cos15°\\ a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}=\dfrac{v_{\mathrm{r}}^2}{r}=\dfrac{5^2}{2}\\ a_{\mathrm{C}}=2\omega v_{\mathrm{r}}=2\times4\times5=40\\ a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}=8\\ a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}=OA\cdot\alpha=8\cos15°\end{cases}$$



(a)



(b)

代入（1）

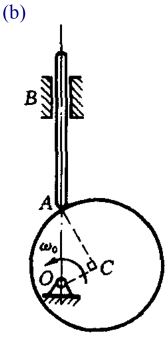
$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}=116.5\cos15°-8\sin15°=110.46\ \mathrm{m/s^2}$$

代入（2）

$$a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}=16\cos15°+52.5\sin15°=29.04\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_{\mathrm{a}}=\sqrt{(a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}})^2+(a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}})^2}=114\ \mathrm{m/s^2}$$

5—8 图示偏心凸轮的偏心距 $OC=e$，轮半径 $r=\sqrt{3}e$。凸轮以匀角速 ω_0 绕 O 轴转动。设某瞬时 OC 与 CA 成直角。试求此瞬时从动杆 AB 的速度和加速度。



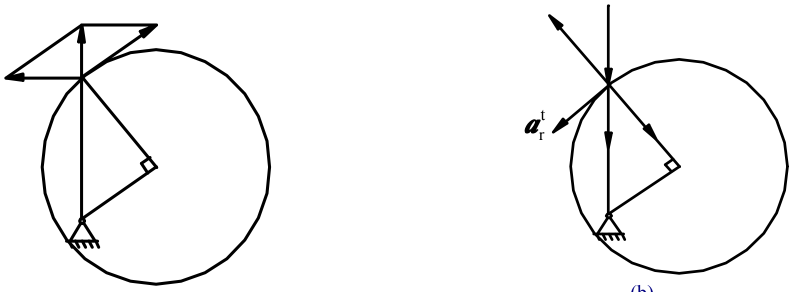
习题 5—8 图

解： 1．动点：A（AB 上），动系：轮 O，绝对运动：直线，相对运动：圆周，牵连运动：定轴转动。

2． $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$ （图 a）

$$v_e = 2e\omega_0 ，\quad v_a = v_e \tan 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3} e\omega_0 \ （\uparrow），\quad v_r = 2v_a = \frac{4\sqrt{3}}{3} e\omega_0$$

3． $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r^n + \boldsymbol{a}_r^t + \boldsymbol{a}_C$ （图 b）



(a)　　(b)

向 $\boldsymbol{a}_r^n$ 投影，得

$$a_a \cos 30° = a_e \cos 30° + a_r^n - a_C$$

$$a_a = a_e + \frac{a_r^n - a_C}{\cos 30°} = 2e\omega_e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{v_r^2}{\sqrt{3}e} - 2\omega_0 v_r)$$

$$= 2e\omega_0^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{16}{3\sqrt{3}} e\omega_0^2 - 2\omega_0 \frac{4\sqrt{3}}{3} e\omega_0) = \frac{2}{9} e\omega_0^2 \ （\downarrow）$$

5－9　如图所示机构，O_1A=O_2B＝r＝10cm，O_1O_2 ＝AB＝20cm。在图示位置时，O_1A 杆的角速度ω＝1 rad/s，角加速度α＝0．5rad / s²，O_1A 与 EF 两杆位于同一水平线上。EF 杆的 E 端与三角形板 BCD 的 BD 边相接触。求图示瞬时 EF 杆的加速度。

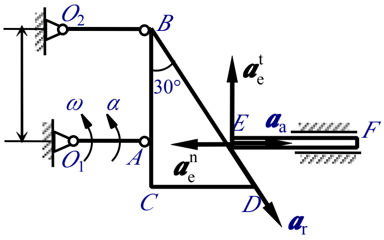
解：1. 运动分析：动点：E（EF 上），动系：轮 BCD，绝对运动：直线，相对运动：直线，牵连运动：平移。

2．加速度分析：$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^t$

沿 BC 垂直方向投影：

$$a_a \cos 30° = a_e^t \sin 30° - a_e^n \cos 30°$$

$$a_a = a_e^t \tan 30° - a_e^n = \frac{5}{\sqrt{3}} - 10 = -7.11 \text{cm/s}^2$$



习题 5—9 图

5－10　摇杆 OC 绕 O 轴往复摆动，通过套在其上的套筒 A 带动铅直杆 AB 上下运动。已知 l = 30cm，当θ = 30° 时，ω = 2 rad/s，α = 3 rad/s²，转向如图所示，试求机构在图示位置时，杆 AB 的速度和加速度。

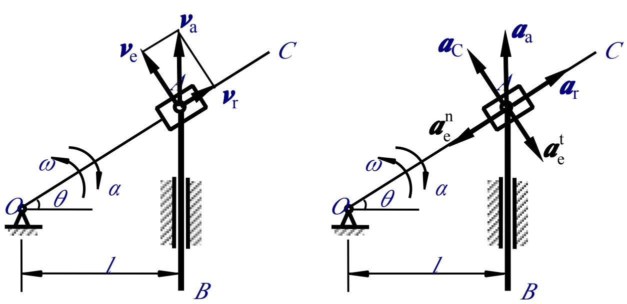
解：1．运动分析：动点：A，动系：杆 OC，绝对运动：直线，相对运动：直线，牵连运动：定轴转动。

2．速度分析（图 a）

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_e = \omega \cdot \frac{l}{\cos\theta} = \frac{120}{\sqrt{3}} \text{cm/s}$$

$$v_{AB} = v_a = \frac{v_e}{\cos\theta} = 80 \text{cm/s}$$



（a）　（b）

习题 5—10 图

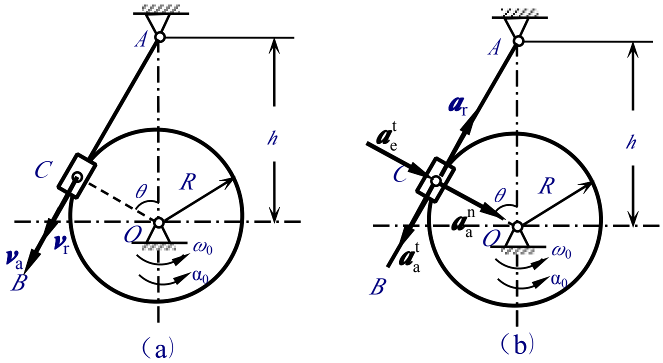
$v_{\mathrm{r}} = v_{\mathrm{e}} \tan 30° = 40$ cm/s

3．加速度分析（图 b）： $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$

沿 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$ 方向投影： $a_{\mathrm{a}} \cos 30° = a_{\mathrm{C}} - a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$

$$a_{AB} = a_{\mathrm{a}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(2\omega v_{\mathrm{r}} - \alpha \frac{l}{\cos 30°}) = 64.76 \text{ cm/s}^2$$

5－11 如图所示圆盘上 C 点铰接一个套筒，套在摇杆 AB 上,从而带动摇杆运动。已知: R=0.2m ，h = 0.4m，在图示位置时 $\theta = 60°$，ω_0=4rad/s，$\alpha_0 = 2\,\mathrm{rad/s^2}$。试求该瞬时，摇杆 AB 的角速度和角加速度。



习题 5－11 图

解：1．运动分析：动点：C，动系：杆 AB，绝对运动：圆周运动，相对运动：直线，牵连运动：定轴转动。

2．速度分析（图 a）

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$v_{\mathrm{a}} = \omega_0 R = 0.8$ m/s

$v_{\mathrm{e}} = 0$

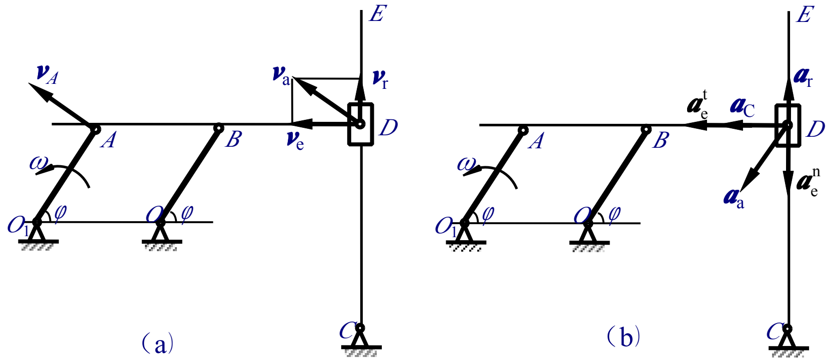
$\omega_{AB} = 0$

3．加速度分析（图 b）

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$$

沿 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}}$ 方向投影： $a_{\mathrm{a}}^{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} = \omega_0^2 R = 3.2\ \mathrm{m/s^2}$ ； $\alpha_{AB} = \dfrac{a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}}{h \sin\theta} = \dfrac{3.2}{0.2\sqrt{3}} = 9.24\ \mathrm{rad/s^2}$（逆时针）

5－12 在图示机构中，已知 $O_1A = OB = r = 250$mm，且 $AB = O_1O$；连杆 O_1A 以匀角速度 $\omega = 2$ rad/s 绕轴 O_1 转动，当 $\varphi = 60°$ 时，摆杆 CE 处于铅垂位置，且 $CD = 500$mm。求此时摆杆 CE 的角速度和角加速度。



习题 5－12 图

解：1．运动分析：动点：D，动系：杆 CE，绝对运动：圆周运动，相对运动：直线，牵连运动：定轴转动。

2．速度分析（图 a）

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$v_{\mathrm{a}} = v_A = \omega \cdot O_1 A = 50$ cm/s

$v_{\mathrm{e}} = v_{\mathrm{a}} \sin\varphi = 25\sqrt{3}$ cm/s； $\omega_{CE} = \dfrac{v_{\mathrm{e}}}{CD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ rad/s

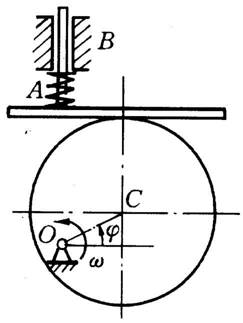
$v_{\mathrm{r}} = v_{\mathrm{a}} \cos\varphi = 25$ cm/s

3．加速度分析（图 b）： $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$

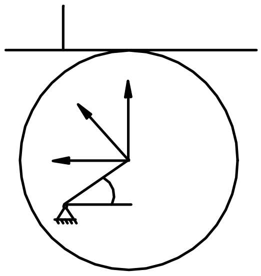
沿 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$ 方向投影：$a_{\mathrm{a}}\cos\varphi = a_{\mathrm{C}} + a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$

$$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} = a_{\mathrm{a}}\cos 60° - a_{\mathrm{C}} = \frac{\omega^2 r}{2} - 2\omega_{CE}v_{\mathrm{r}} = 50 - 25\sqrt{3} = 6.7\,\mathrm{cm/s^2}\ ；\ \alpha_{CE} = \frac{a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}}{CD} = \frac{6.7}{50} = 0.134\ \mathrm{rad/s^2}$$

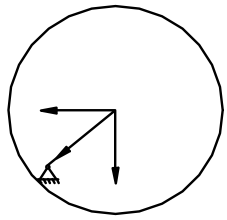
5－13 图示为偏心凸轮－顶板机构。凸轮以等角速度 ω 绕点 O 转动，其半径为 R，偏心距 $OC=e$，图示瞬时 $\varphi=30°$ 。试求顶板的速度和加速度。



习题 16-13 图



(a)



(b)

解：1．动点：轮心 C，动系：AB、平移，绝对运动：图周，相对运动：直线。

2．图（a）：$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

$$v_{\mathrm{e}} = e\omega$$

$$v_{AB} = v_{\mathrm{e}} = v_{\mathrm{a}}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}e\omega \quad (\uparrow)$$

3．图（b）：$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$

$$a_{AB} = a_{\mathrm{e}} = a_{\mathrm{a}}\sin\varphi = e\omega^2\sin 30° = \frac{1}{2}e\omega^2 \quad (\downarrow)$$

5－14 平面机构如图所示。已知：$O_1A=O_2B=R=30\mathrm{cm}$，$AB=O_1O_2$，$O_1A$ 按规律 $\varphi=\frac{\pi t^2}{24}$ 绕轴 O_1 转动，动点 M 沿平板上的直槽($\theta=60°$)运动，$BM=2t+t^3$ ，式中 φ 以 rad 计，BM 以 cm 计，t 以 s 计。试求 $t=2\mathrm{s}$ 时动点的速度和加速度。

解：1．运动分析：动点：M，动系：平板，绝对运动：未知，相对运动：直线，牵连运动：平移。$t=2\mathrm{s}$ 时：

$$\varphi = \frac{\pi}{6} = 30°\ \mathrm{rad},\quad \omega = \dot{\varphi} = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad/s},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12}\ \mathrm{rad/s^2}$$

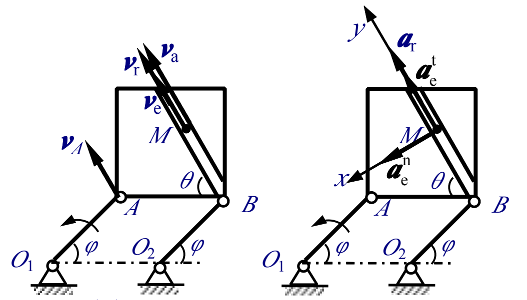
2．速度分析（图 a）

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$v_{\mathrm{r}} = 2 + 3t^2 = 14\,\mathrm{cm/s}$$

$$v_{\mathrm{e}} = v_A = \omega R = 5\pi\ \mathrm{cm/s};$$

$$v_M = v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{e}} + v_{\mathrm{r}} = 5\pi + 14 = 29.7\ \mathrm{cm/s}$$



（a）　（b）

习题 5－14 图

3．加速度分析（图 b）：$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}$

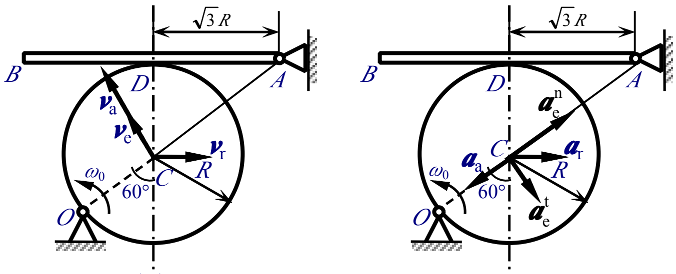
$$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} = \alpha R = 2.5\pi\ \mathrm{cm/s^2}\ ；\ a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} = \omega^2 R = \frac{5}{6}\pi^2\ \ \mathrm{cm/s^2}\ ；\ a_{\mathrm{r}} = 6t = 12\,\mathrm{cm/s^2}$$

$$a_{Mx} = a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} = \frac{5\pi^2}{6} = 8.22\,\mathrm{cm/s^2}\ ；\ a_{My} = a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{r}} = 2.5\pi + 12 = 19.85\,\mathrm{cm/s^2}$$

5－15 半径为 R 的圆轮，以匀角速度 ω_0 绕 O 轴沿逆时针转动，并带动 AB 杆绕 A 轴转

动。在图示瞬时，OC 与铅直线的夹角为 60°，AB 杆水平，圆轮与 AB 杆的接触点 D 距 A 为 $\sqrt{3}R$。求此时 AB 杆的角加速度。

解：1．运动分析：动点：C，动系：杆 AB，绝对运动：圆周运动，相对运动：直线，牵连运动：定轴转动。



（a）　　　　（b）

习题 5－15 图

2．速度分析（图 a）

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_a = R\omega_0 = v_e$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_e}{2R} = \frac{\omega_0}{2}$$

$$v_r = 0$$

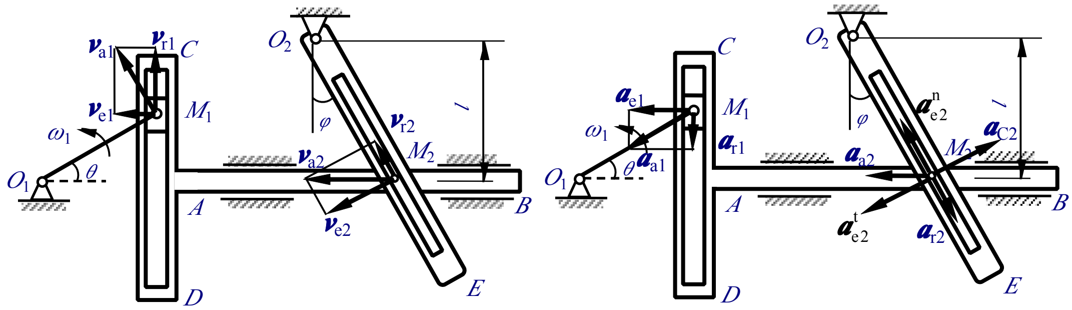
3．加速度分析（图 b）

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_e^t$$

沿铅垂方向投影：$a_a \cos 60° = a_e^t \cos 30° - a_e^n \sin 30°$

$$a_e^t = \tan 30°(a_a + a_e^n) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\omega_0^2 R + \frac{\omega_0^2}{2}R) = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0^2 R；\quad \alpha_{AB} = \frac{a_e^t}{CA} = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_0^2$$

5－16　曲柄 O_1M_1 以匀角速度 ω_1=3 rad / s 绕 O_1 轴沿逆时针转动。T 形构件作水平往复运动，M_2 为该构件上固连的销钉。槽杆 O_2E 绕 O_2 轴摆动。已知 $O_1M_1=r=$20cm，$l=$30 cm。当机构运动到如图所示位置时，$\theta=\varphi=$30°，求此时 O_2E 杆的角加速度。



（a）　　　　（b）

习题 5－16 图

解：1．运动分析：动点：M_1，动系：杆 AB，绝对运动：圆周运动，相对运动：直线，牵连运动：平移。

速度分析（图 a）：$\boldsymbol{v}_{a1} = \boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_{r1}$

$v_{a1} = r\omega_1 = 60\,\text{cm/s}$；　$v_{e1} = v_{a1}\sin\theta = 30\,\text{cm/s}$

加速度分析（图 b）：　$\boldsymbol{a}_{a1} = \boldsymbol{a}_{r1} + \boldsymbol{a}_{e1}$

沿铅垂方向投影：　$a_{e1} = a_{a1}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1^2 r = 90\sqrt{3}$　cm/s²

2．运动分析：动点：M_2，动系：杆 O_2E，绝对运动：直线，相对运动：直线，牵连运动：定轴转动。

速度分析（图 a）：　$\boldsymbol{v}_{a2} = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_{r2}$

$v_{a2} = v_{e1} = 30\,\text{cm/s}$；　$v_{e2} = v_{a2}\cos\varphi = 15\sqrt{3}\,\text{cm/s}$；

$v_{r2} = v_{a2}\sin\varphi = 15\,\text{cm/s}$；　$\omega_{O_2E} = \frac{v_{e2}}{l}\cos\varphi = 0.75\,\text{rad/s}$

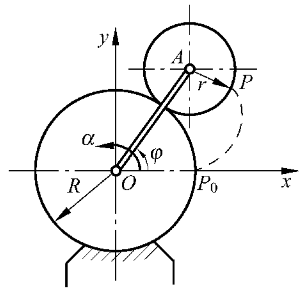
加速度分析（图 b）：　$\boldsymbol{a}_{a2} = \boldsymbol{a}_{r2} + \boldsymbol{a}_{e2}^n + \boldsymbol{a}_{e2}^t + \boldsymbol{a}_{C2}$

沿 $\boldsymbol{a}_\mathrm{C}$ 方向投影：$-a_{\mathrm{a}2}\cos\varphi=-a_{\mathrm{e}2}^{\mathrm{t}}+a_\mathrm{C}$； $a_{\mathrm{e}2}^{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{e}1}\cos 30^\circ+a_{\mathrm{C}2}=135+2\times15\times0.75=157.5\,\mathrm{cm/s^2}$

$$\alpha_{O_2E}=\frac{a_{\mathrm{e}2}^{\mathrm{t}}}{l}\cos\varphi=\frac{157.5\sqrt{3}}{60}=4.55\,\mathrm{rad/s^2}$$

第 6 章　刚体的平面运动分析

6－1　图示半径为 r 的齿轮由曲柄 OA 带动，沿半径为 R 的固定齿轮滚动。曲柄 OA 以等角加速度 α 绕轴 O 转动，当运动开始时，角速度 $\omega_0=0$，转角 $\varphi_0=0$。试求动齿轮以圆心 A 为基点的平面运动方程。



习题 6-1 图

解： $x_A=(R+r)\cos\varphi$　　　　（1）

$y_A=(R+r)\sin\varphi$　　　　（2）

α 为常数，当 $t=0$ 时，$\omega_0=\varphi_0=0$

$$\varphi=\frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad （3）$$

起始位置，P 与 P_0 重合，即起始位置 AP 水平，记 $\angle OAP=\theta$，则 AP 从起始水平位置至图示 AP 位置转过

$$\varphi_A=\varphi+\theta$$

因动齿轮纯滚，故有 $\overset{\frown}{CP_0}=\overset{\frown}{CP}$，即

$$R\varphi=r\theta$$

$$\theta=\frac{R}{r}\varphi\,,\qquad \varphi_A=\frac{R+r}{r}\varphi \qquad （4）$$

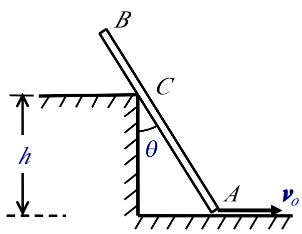
将（3）代入（1）、(2)、(4)得动齿轮以 A 为基点的平面运动方程为：

$$\begin{cases} x_A=(R+r)\cos\dfrac{\alpha}{2}t^2 \\ y_A=(R+r)\sin\dfrac{\alpha}{2}t^2 \\ \varphi_A=\dfrac{1}{2}\dfrac{R+r}{r}\alpha t^2 \end{cases}$$

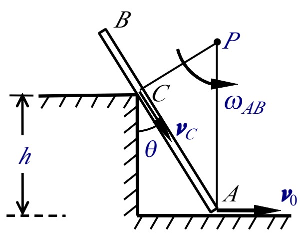
6－2　杆 AB 斜靠于高为 h 的台阶角 C 处，一端 A 以匀速 v_0 沿水平向右运动，如图所示。试以杆与铅垂线的夹角 θ 表示杆的角速度。

解： 杆 AB 作平面运动，点 C 的速度 $\boldsymbol{v}_C$ 沿杆 AB 如图所示。作速度 $\boldsymbol{v}_C$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 的垂线交于点 P，点 P 即为杆 AB 的速度瞬心。则角速度杆 AB 为

$$\omega_{AB}=\frac{v_0}{AP}=\frac{v_0\cos\theta}{AC}=\frac{v_0\cos^2\theta}{h}$$



习题 6－2 图



习题 6－2 解图

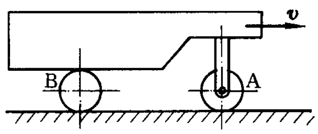
6－3　图示拖车的车轮 A 与垫滚 B 的半径均为 r。试问当拖车以速度 $\boldsymbol{v}$ 前进时，轮 A 与垫滚 B 的角速度 ω_A 与 ω_B 有什么关系？设轮 A 和垫滚 B 与地面之间以及垫滚 B 与拖车之间无滑动。

解：

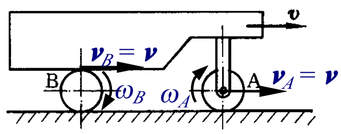
$$\omega_A=\frac{v_A}{R}=\frac{v}{R}$$

$$\omega_B=\frac{v_B}{2R}=\frac{v}{2R}$$

$$\omega_A=2\omega_B$$



习题 6-3 图



习题 6-3 解图

6－4　直径为 $60\sqrt{3}$mm 的滚子在水平面上作纯滚动，杆 BC 一端与滚子铰接，另一端与滑块 C 铰接。设杆 BC 在水平位置时，滚子的角速度 ω＝12 rad/s，θ＝30°，φ＝60°，BC＝270mm。试求该瞬时杆 BC 的角速度和点 C 的速度。

解： 杆 BC 的瞬心在点 P，滚子 O 的瞬心在点 D

$$v_B=\omega\cdot BD$$

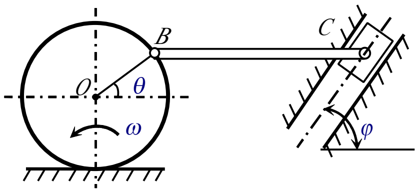
$$\omega_{BC}=\frac{v_B}{BP}=\frac{\omega\cdot BD}{BP}$$

$$=\frac{12\times 60\sqrt{3}\cos 30^\circ}{270\sin 30^\circ}$$

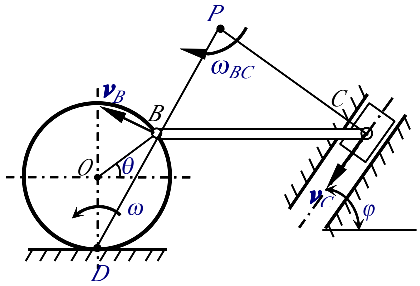
$$=8\ \text{rad/s}$$

$$v_C=\omega_{BC}\cdot PC$$

$$=8\times 0.27\cos 30^\circ=1.87\ \text{m/s}$$

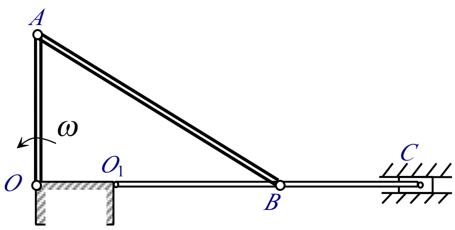


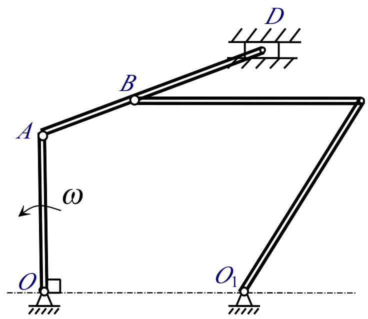
习题 6-4 图



习题 6-4 解图

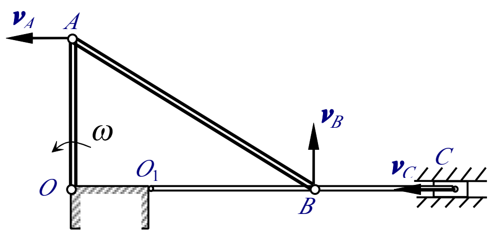
6－5 在下列机构中，那些构件做平面运动，画出它们图示位置的速度瞬心。

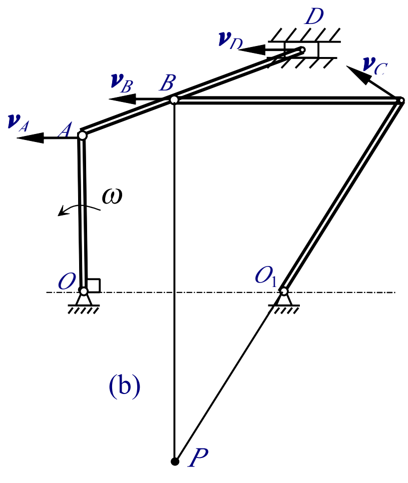




习题 6-5 图

解： 图（a）中平面运动的瞬心在点 O，杆 BC 的瞬心在点 C。图（b）中平面运动的杆 BC 的瞬心在点 P，杆 AD 做瞬时平移。





习题 6-5 解图

(a)　　　　(b)

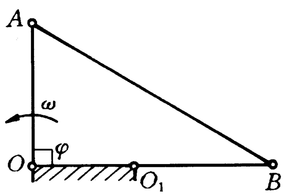
6－6 图示的四连杆机械 $OABO_1$ 中，$OA=O_1B=\dfrac{1}{2}AB$，曲柄 OA 的角速度 $\omega=3\text{rad/s}$。试求当示。$\varphi=90$° 而曲柄 O_1B 重合于 OO_1 的延长线上时，杆 AB 和曲柄 O_1B 的角速度。

解： 杆 AB 的瞬心在 O

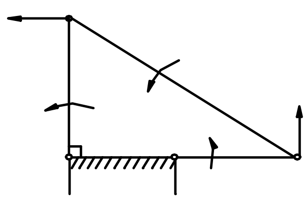
$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{OA}=\omega=3\ \text{rad/s}$$

$$v_B=\sqrt{3}l\omega$$

$$\omega_{O_1B}=\frac{v_B}{l}=\sqrt{3}\omega=5.2\ \text{rad/s}$$



习题 6-6 图



习题 6-6 解图

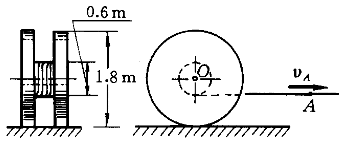
6—7　绕电话线的卷轴在水平地面上作纯滚动，线上的点 A 有向右的速度 v_A= 0.8m/s，试求卷轴中心 O 的速度与卷轴的角速度，并问此时卷轴是向左，还是向右方滚动？

解：如图

$$\omega_O=\frac{v_A}{0.9-0.3}=\frac{0.8}{0.6}=1.333\ \text{rad/s}$$

$$v_O=0.9\omega_O=0.9\times\frac{8}{6}=1.2\ \text{m/s}$$

卷轴向右滚动。



习题 6-7 图

6—8　图示两齿条以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 作同方向运动，在两齿条间夹一齿轮，其半径为 r，求齿轮的角速度及其中心 O 的速度。

解：如图，以 O 为基点：

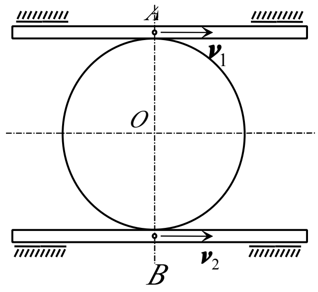
$$v_1=v_O+\omega_O r$$

$$v_2=v_O-\omega_O r$$

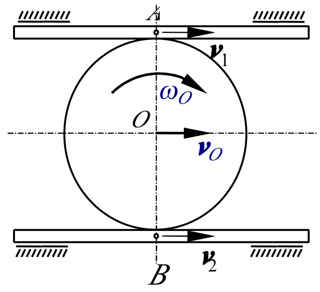
解得：

$$v_O=\frac{v_1+v_2}{2}$$

$$\omega_O=\frac{v_1-v_2}{2r}$$

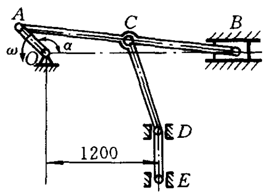


习题 6—8 图

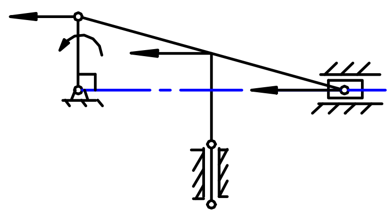


习题 6—8 解图

6—9　曲柄—滑块机构中，如曲柄角速度 ω = 20rad/s，试求当曲柄 OA 在两铅垂位置和两水平位置时配汽机构中气阀推杆 DE 的速度。已知 OA = 400mm，AC = CB = $200\sqrt{37}$ mm。



习题 6—9 图



(a)

解：OA 定轴转动；AB、CD 平面运动，DE 平移。

1．当 φ = 90°，270° 时，OA 处于铅垂位置，图（a）表示 φ = 90° 情形，此时 AB 瞬时平移，$\boldsymbol{v}_C$ 水平，而 $\boldsymbol{v}_D$ 只能沿铅垂， D 为 CD 之瞬心

v_{DE} = 0

同理，φ = 270° 时，v_{DE} = 0

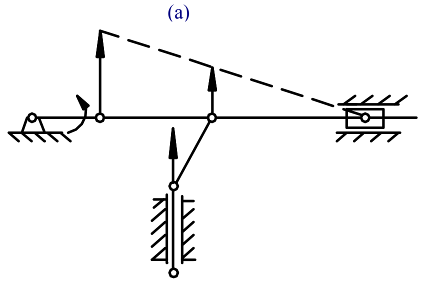
2．φ = 180°，0° 时，杆 AB 的瞬心在 B

φ = 0° 时，图（b），$v_C=\dfrac{1}{2}v_A$（↑）

此时 CD 杆瞬时平移

$$v_{DE}=v_D=v_C=\frac{1}{2}v_A=4\ \text{m/s}\ (\uparrow)$$

同理 φ = 180° 时，v_{DE} = 4m/s（↓）



(b)

习题 6—9 解图

6—10 杆 AB 长为 l = 1.5 m，一端铰接在半径为 r = 0.5 m 的轮缘上，另一端放在水平面上，如图所示。轮沿地面作纯滚动，已知轮心 O 速度的大小为 v_O = 20 m/s。试求图示瞬时（OA 水平）B 点的速度以及轮和杆的角速度。

解：轮 O 的速度瞬心为点 C，杆 AB 的速度瞬心为点 P

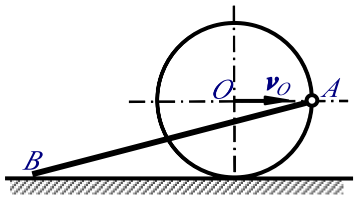
$$\omega_O=\frac{v_O}{r}=\frac{20}{0.5}=40\ \text{rad/s}$$

$$v_A=\omega_O\sqrt{2}r=20\sqrt{2}\ \text{m/s}$$

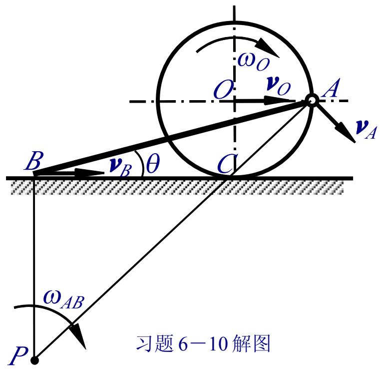
$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{20\sqrt{2}\sin 45^\circ}{1.5\cos\theta}$$

$=10\sqrt{2}$=14.1 rad/s

$$v_B\cos\theta=v_A\cos(45^\circ+\theta)$$



习题 6－10 图



习题 6－10 解图

$$v_B=20\sqrt{2}(\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\tan\theta)=12.9\ \text{m/s}$$

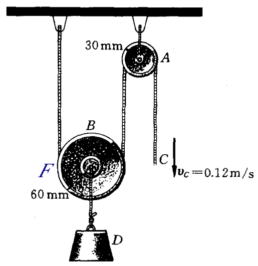
6－11　图示滑轮组中，绳索以速度 v_C= 0.12m/s 下降，各轮半径已知，如图示。假设绳在轮上不打滑，试求轮 B 的角速度与重物 D 的速度。

解：轮 B 瞬心在 F 点

$v_E=v_C$

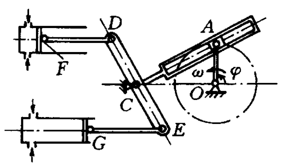
$$\omega_B=\frac{v_E}{60\times 2\times 10^{-3}}=\frac{0.12}{0.12}=1\ \text{rad/s}$$

$$v_D=v_B=\frac{1}{2}v_E=\frac{1}{2}v_C=0.06\ \text{m/s}$$

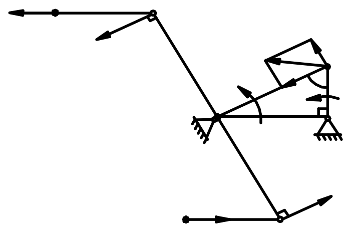


习题 6－11 图

6－12　链杆式摆动传动机构如图所示，$DCEA$ 为一摇杆，且 $CA\perp DE$。曲柄 OA = 200mm，$CO=CE$= 250mm，曲柄转速 n = 70r/min，CO = 200 $\sqrt{3}$ mm。试求当 φ = 90° 时（这时 OA 与 CA 成 60° 角）F、G 两点的速度的大小和方向。



习题 6－12 图


习题 6－12 解图

解：动点：OA 上 A；动系：$DCEA$；绝对运动：圆周；相对运动：直线；牵连运动：定轴转动。

$$v_A=OA\cdot\omega=0.2\times\frac{\pi n}{30}=\frac{1.4\pi}{3}\ \text{m/s}\qquad v_e=\frac{1}{2}v_A=\frac{0.7}{3}\pi\ \text{m/s}$$

$$\omega_e=\frac{v_e}{CA}=\frac{0.7\pi}{3\times 0.4}=\frac{7\pi}{12}\ \text{rad/s}\qquad v_E=v_D=0.254\omega_e=\frac{7\pi}{48}\ \text{m/s}$$

$$v_G=v_E\cos 30^\circ=\frac{7\pi}{48}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0.397\ \text{m/s}\ (\rightarrow)\qquad v_F=v_G=0.397\ \text{m/s}\ (\leftarrow)$$

6－13　平面机构如图所示。已知：$OA=AB$ = 20 cm，半径 r = 5 cm 的圆轮可沿铅垂面作纯滚动。在图示位置时，OA 水平，其角速度 ω = 2 rad/s、角加速度为零，杆 AB 处于铅垂。试求该瞬时：

（1）圆轮的角速度和角加速度；

（2）杆 AB 的角加速度。

解：

（1） 圆轮的角速度和角加速度

$$v_A = OA \cdot \omega = 40\ \text{cm/s}$$

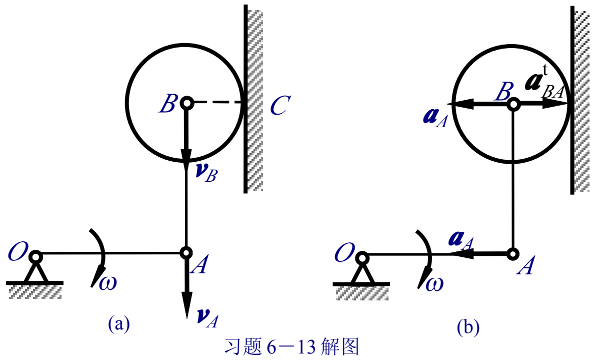
杆 AB 瞬时平移，$\omega_{AB} = 0$

$$v_B = v_A = 40\ \text{cm/s}$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{r} = 8\ \text{rad/s}$$

$$a_B = a_{BA}^{\text{n}} = 0$$

$$\alpha_B = \frac{a_B}{r} = 0$$



习题 6－13 解图

（2）杆 AB 的角加速度。

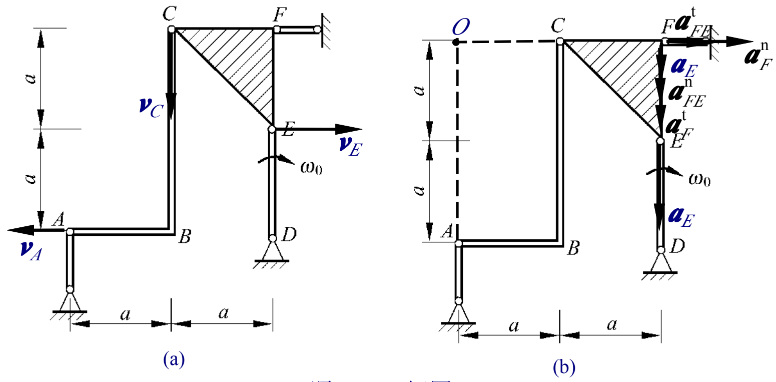
$$a_A - a_{BA}^{\text{t}} = 0\text{，}\quad a_{BA}^{\text{t}} = a_A = OA \cdot \omega^2 = 80\ \text{cm/s}^2$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^{\text{t}}}{AB} = 4\ \text{rad/s}^2$$

6－14 图示机构由直角形曲杆 ABC，等腰直角三角形板 CEF，直杆 DE 等三个刚体和二个链杆铰接而成，DE 杆绕 D 轴匀速转动，角速度为 ω_0，求图示瞬时（AB 水平，DE 铅垂）点 A 的速度和三角板 CEF 的角加速度。

解：

（1）求点 A 的速度



习题 6—14 解图

$$v_E = DE \cdot \omega_0 = a\omega_0$$ 三角板 CEF 的速度瞬心在点 F

$$v_C = v_E = a\omega_0$$

曲杆 ABC 的速度瞬心在点 O

$$v_A = \frac{v_C}{OC} \cdot OA = 2a\omega_0$$

（2）求三角板 CEF 的角加速度

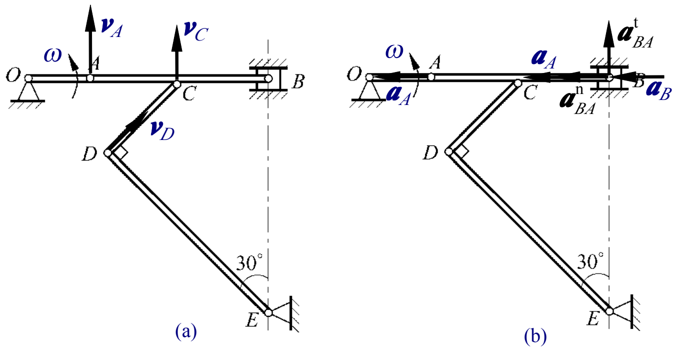
$$\boldsymbol{a}_F^{\text{t}} + \boldsymbol{a}_F^{\text{n}} = \boldsymbol{a}_E + \boldsymbol{a}_{FE}^{\text{t}} + \boldsymbol{a}_{FE}^{\text{n}}$$

将上式沿水平方向投影

$$a_F^{\text{n}} = a_{FE}^{\text{t}} = 0 \quad \text{（因为 } v_F = 0\text{）}$$

$$\alpha_{CEF} = \frac{a_{FE}^{\text{t}}}{FE} = 0$$

6－15 曲柄连杆机构在其连杆中点 C 以铰链与 CD 相连接，DE 杆可以绕 E 点转动。如曲柄的角速度 $\omega = 8\,\text{rad/s}$，且 $OA = 25\,\text{cm}$，$DE = 100\,\text{cm}$，若当 B、E 两点在同一铅垂线上时，O、A、B 三点在同一水平线上，$\angle CDE = 90^\circ$，求杆 DE 的角速度和杆 AB 的角加速度。



习题 6—15 解图

解:

（1）求杆 DE 的角速度

$$v_A = OA \cdot \omega = 200\ \text{cm/s}$$

杆 AB 的速度瞬心在点 B

$$v_C = \frac{v_A}{2} = 100\ \text{cm/s}$$

对杆 CD 应用速度投影定理

$$v_D = v_C \sin 30^\circ = 50\ \text{cm/s}$$

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{DE} = 0.5\ \text{rad/s}$$

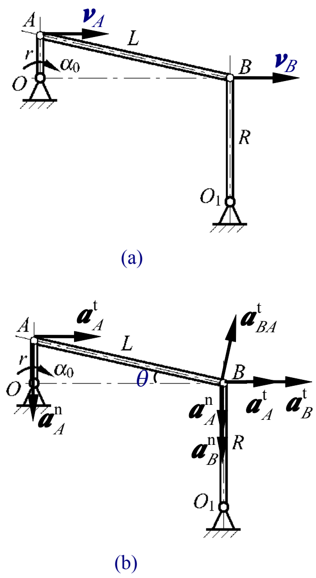
（2）求杆 AB 的角加速度

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

将上式沿铅垂方向投影

$$0 = \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}, \qquad \alpha_{AB} = \frac{a_{AB}^{\mathrm{t}}}{AB} = 0$$

6－16 试求在图示机构中，当曲柄 OA 和摇杆 O_1B 在铅垂位置时，B 点的速度和加速度（切向和法向）。曲柄 OA 以等角加速度 $\alpha_0 = 5\text{rad/s}^2$ 转动，并在此瞬时其角速度为 $\omega_0 = 10\text{rad/s}$，$OA = r = 200\text{mm}$，$O_1B = 1000\text{mm}$，$AB = l = 1200\text{mm}$。



习题 6－16 解图

解: 1．$\boldsymbol{v}$: $v_A = r\omega_0$

$\boldsymbol{v}_B // \boldsymbol{v}_A \quad \therefore \quad \omega_{AB} = 0$

$$v_B = r\omega_0 = 0.2 \times 10 = 2\ \text{m/s} \qquad (1)$$

2．$\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a}_B^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_B^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{a}_A^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_A^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}$

上式沿 AB 方向投影得：

$$a_B^{\mathrm{n}} \sin\theta + a_B^{\mathrm{t}} \cos\theta = a_A^{\mathrm{n}} \sin\theta + a_A^{\mathrm{t}} \cos\theta$$

$$a_B^{\mathrm{t}} = a_A^{\mathrm{n}} \tan\theta + a_A^{\mathrm{t}} - a_B^{\mathrm{n}} \tan\theta$$

即

$$= r\omega_0^2 \cdot 0.169 + r\alpha_0 - \frac{v_B^2}{O_1B} \cdot 0.169$$

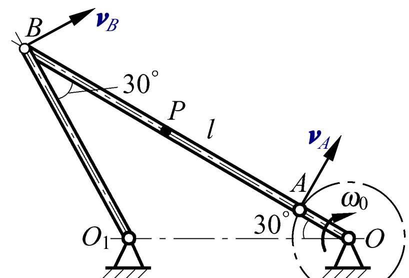
$$= (0.2 \times 10^2 - \frac{2^2}{1}) \times 0.169 + 0.2 \times 5 = 3.70\ \text{m/s}^2$$

（$\tan\theta = \dfrac{0.2}{\sqrt{1.2^2 - 0.2^2}} = \dfrac{0.2}{\sqrt{1.4}} = 0.169$）

$$a_B^{\mathrm{n}} = \frac{2^2}{1} = 4\ \text{m/s}^2$$

$$\boldsymbol{a}_B: \quad a_B \begin{cases} a_B^{\mathrm{n}} = 4\text{m/s}^2 \\ a_B^{\mathrm{t}} = 3.7\text{m/s}^2 \end{cases} \quad \text{（方向如图）}$$

6－17 图示四连杆机构中，长为 r 的曲柄 OA 以等



(a)

角速度 ω_0 转动，连杆 AB 长 $l=4r$。设某瞬时 $\angle O_1OA=\angle O_1BA=30°$ 。试求在此瞬时曲柄 O_1B 的角速度和角加速度，并求连杆中点 P 的加速度。

解： 1. $\boldsymbol{v}$： $v_A = r\omega_0$

由速度投影定理知：$v_B = 0$

$$\omega_{O_1B} = 0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{r\omega_0}{l} = \frac{\omega_0}{4}$$

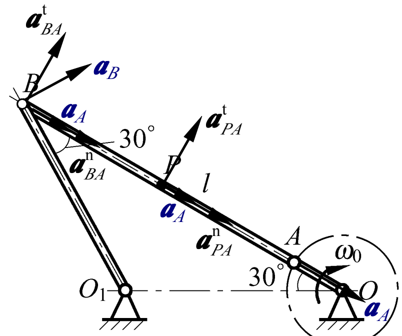
2. $\boldsymbol{a}$： $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_B^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}$

上式向 $\boldsymbol{a}_A$ 投影

$$a_B^{\mathrm{t}}\cos 60° = a_A + a_{BA}^{\mathrm{n}}$$

$$a_B^{\mathrm{t}} = 2(a_A + a_{BA}^{\mathrm{n}}) = 2(r\omega_0^2 + l\omega_{AB}^2)$$

$$= 2\left(r\omega_0^2 + 4r(\frac{\omega_0}{4})^2\right) = \frac{5}{2}r\omega_0^2$$



(b)

习题 6－17 解图

$$\alpha_{O_1B} = \frac{a_B^{\mathrm{t}}}{O_1B} = \frac{a_B^{\mathrm{t}}}{\frac{5r}{2\cos 30°}} = \frac{2a_B^{\mathrm{t}}\cos 30°}{5r} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{5}{2}r\omega_0^2}{5r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0^2$$

$$a_{BA}^{\mathrm{t}} = a_B^{\mathrm{t}}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{2}r\omega_0^2 = \frac{5\sqrt{3}}{4}r\omega_0^2$$

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{PA}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{PA}^{\mathrm{t}}$$

$$a_A = r\omega_0^2\text{，}\quad a_{PA}^{\mathrm{n}} = 2r\omega_{AB}^2 = \frac{r}{8}\omega_0^2\text{，}\quad a_{PA}^{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}a_{BA}^{\mathrm{t}} = \frac{5\sqrt{3}}{8}r\omega_0^2$$

$$a_P = \sqrt{(a_A + a_{PA}^{\mathrm{n}})^2 + (a_{PA}^{\mathrm{t}})^2} = \sqrt{\left[(1+\frac{1}{8})^2 + (\frac{5\sqrt{3}}{8})^2\right]\cdot(r\omega_0^2)^2} = 1.56r\omega_0^2$$

6－18 滑块以匀速度 v_B=2m/s 沿铅垂滑槽向下滑动，通过连杆 AB 带动轮子 A 沿水平面作纯滚动。设连杆长 l=800mm，轮子半径 r=200mm。当 AB 与铅垂线成角 θ=30°时，求此时点 A 的加速度及连杆、轮子的角加速度。

解： 1. $\boldsymbol{v}$： 点 O 为杆 AB 的速度瞬心

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{OB} = \frac{v_B}{l\sin\theta} = 5\ \mathrm{rad/s}$$

2. $\boldsymbol{a}$： $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_{AB}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{AB}^{\mathrm{t}}$

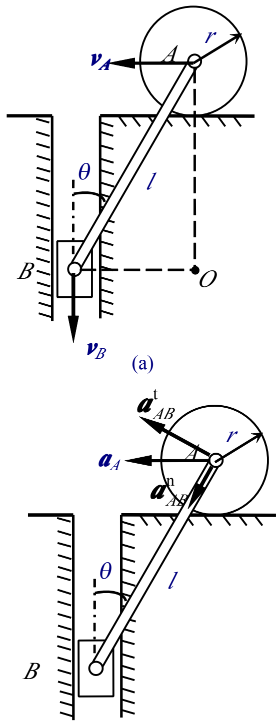
$$a_{AB}^{\mathrm{n}} = \omega_{AB}^2 l = 20\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_{AB}^{\mathrm{t}} = a_{AB}^{\mathrm{n}}\cot\theta = 20\sqrt{3}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AB}^{\mathrm{t}}}{l} = \frac{20\sqrt{3}}{0.8} = 43.3\,\mathrm{rad/s^2}$$

$$a_A = \frac{a_{AB}^{\mathrm{n}}}{\sin\theta} = 40\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\alpha_A = \frac{a_A}{r} = \frac{40}{0.2} = 200\ \mathrm{m/s^2}$$



(b)

习题 6-18 解图

6-19　图示曲柄摇块机构中，曲柄 OA 以角速度 ω_0 绕 O 轴转动，带动连杆 AC 在摇块 B 内滑动；摇块及与其刚性连结的 BD 杆则绕 B 铰转动，杆 BD 长 l。求在图示位置时，摇块的角速度及 D 点的速度。

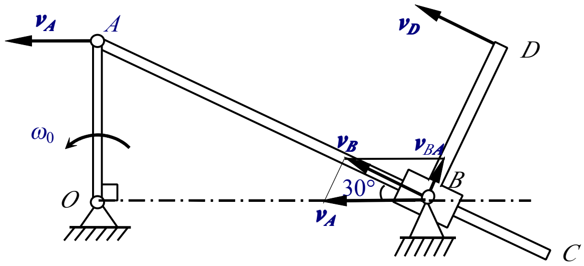
解：

$$v_A = OA\cdot\omega_0$$

$$v_{BA} = v_A\sin 30° = \frac{v_A}{2}$$

$$\omega_{摇块} = \omega_{AC} = \frac{v_{BA}}{2OA} = \frac{\omega_0}{4}$$

$$v_D = DB\cdot\omega_{摇块} = \frac{\omega_0 l}{4}$$



习题 6-19 解图

6-20 平面机构的曲柄 OA 长为 $2a$，以角速度 ω_0 绕轴 O 转动。在图示位置时，$AB=BO$ 且 $\angle OAD=90°$。求此时套筒 D 相对于杆 BC 的速度。

解：1．分析滑块 B

$$v_A = 2a\omega_0,\quad v_{Be} = a\omega_0$$

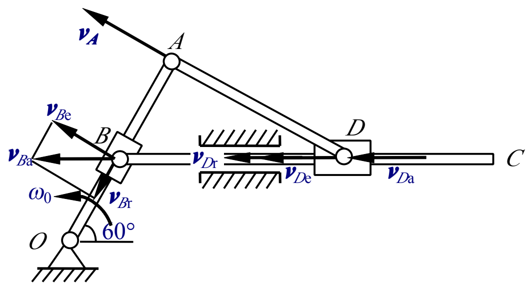
$$v_{Ba} = \frac{v_{Be}}{\cos 30°} = \frac{2a\omega_0}{\sqrt{3}}$$

2．杆 AD 作平面运动

$$v_A = v_{Da}\cos 30°,\quad v_{Da} = \frac{4a\omega_0}{\sqrt{3}}$$

3．分析滑块 D

$$v_{De} = v_{Ba} = \frac{2a\omega_0}{\sqrt{3}},\quad v_{Dr} = v_{Da} - v_{De} = \frac{2a\omega_0}{\sqrt{3}}$$



习题 6-20 解图

6-21 曲柄导杆机构的曲柄 OA 长 120mm，在图示位置 $\angle AOB=90°$ 时，曲柄的角速度 $\omega=4\text{rad/s}$，角加速度 $\alpha=2\ \text{rad/s}^2$。试求此时导杆 AC 的角加速度及导杆相对于套筒 B 的加速度。设 $OB=160\text{mm}$。

解：1．$\boldsymbol{v}$：分析滑块 B（动系）

$$v_A = OA\cdot\omega$$

$$v_a = v_B = v_A\cos\theta = OA\cdot\omega\cos\theta = v_r$$

$$v_{BA} = v_A\sin\theta = OA\cdot\omega\sin\theta$$

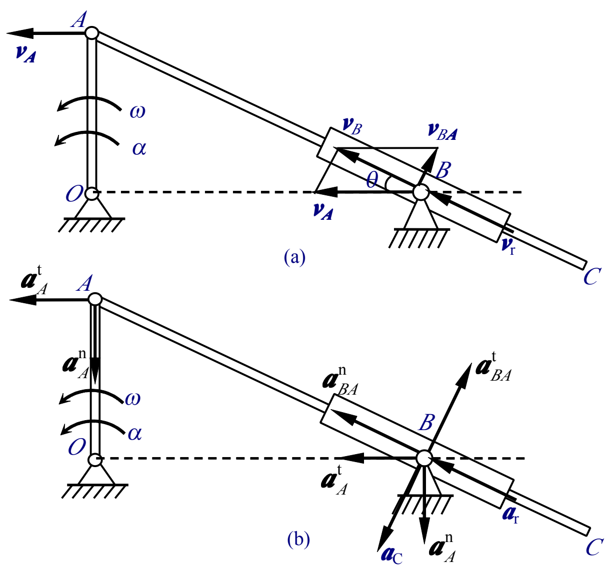
$$\omega_{AC} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{OA\cdot\omega\sin^2\theta}{OA} = \omega\sin^2\theta$$

2．$\boldsymbol{a}$：分析滑块 B（动系）

$$a_A^t = OA\cdot\alpha,\quad a_A^n = OA\cdot\omega^2$$

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A^t + \boldsymbol{a}_A^n + \boldsymbol{a}_{BA}^n + \boldsymbol{a}_{BA}^t$$
$$= \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_r$$

将上式沿 AC 方向投影 $\left(\tan\theta = \frac{120}{160} = \frac{3}{4}\right)$



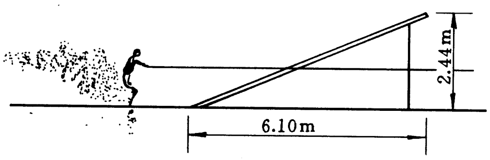
习题 6-21 解图

$$a_{\mathrm{r}} = a_A^{\mathrm{t}}\cos\theta - a_A^{\mathrm{n}}\sin\theta + a_{BA}^{\mathrm{n}}$$
$$= OA\cdot\alpha\cos\theta - OA\cdot\omega^2\sin\theta + \omega_{AC}^2\frac{OA}{\sin\theta}$$ 将加速度的矢量方程沿垂直 AC 的方向投影：
$$= -545.28\ \mathrm{mm/s^2}$$
$$a_{BA}^{\mathrm{t}} - a_A^{\mathrm{t}}\sin\theta - a_A^{\mathrm{n}}\cos\theta = -a_C$$
$$a_{BA}^{\mathrm{t}} = a_A^{\mathrm{t}}\sin\theta + a_A^{\mathrm{n}}\cos\theta - a_C = 574.08\ \mathrm{mm/s^2}，\quad \alpha_{AC} = \frac{a_{BA}^{\mathrm{t}}}{AB} = 2.87\ \mathrm{rad/s^2}$$

第 3 篇　工程动力学基础

第 7 章　质点动力学

7-1　图示滑水运动员刚接触跳台斜面时，具有平行于斜面方向的速度 40.2km/h，忽略摩擦，并假设他一经接触跳台后，牵引绳就不再对运动员有作用力。试求滑水运动员从飞离斜面到再落水时的水平长度。



习题 7-1 图

解：接触跳台时

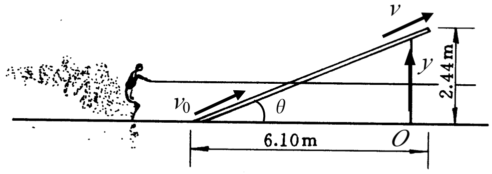
$$v_0 = \frac{40.2\times10^3}{3600} = 11.17\ \text{m/s}$$

设运动员在斜面上无机械能损失

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - 2gh_0} = \sqrt{11.17^2 - 2\times9.8\times2.44} = 8.768\ \text{m/s}$$

$$v_x = v\cos\theta = 8.141\ \text{m/s},\qquad v_y = v\sin\theta = 3.256\ \text{m/s}$$

$$h_1 = \frac{v_y^2}{2g} = 0.541\ \text{m}$$



习题 7-1 解图

$$t_1 = \frac{v_y}{g} = 0.332\ \text{s}$$

$$(h_1 + h_0) = \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(h_1+h_0)}{g}} = \sqrt{\frac{2(0.541+2.44)}{9.8}} = 0.780\ \text{s}$$

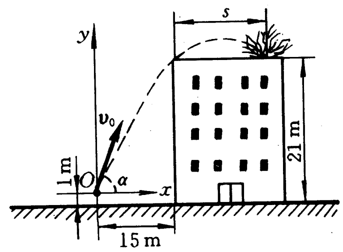
$$t = t_1 + t_2 = 1.112\ \text{s}$$

$$x = v_x t = 8.141\times1.112 = 9.05\ \text{m}$$

7-2　图示消防人员为了扑灭高 21m 仓库屋顶平台上的火灾，把水龙头置于离仓库墙基 15m、距地面高 1m 处，如图所示。水柱的初速度 $\upsilon_0 = 25$ m/s，若欲使水柱正好能越过屋顶边缘到达屋顶平台，且不计空气阻力，试问水龙头的仰角 α 应为多少？水柱射到屋顶平台上的水平距离 s 为多少？

解：(1)　$t_1 = \dfrac{15}{v_0\cos\alpha}$　　(1)

$$v_0\sin\alpha\cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 20 \qquad (2)$$



习题 7-2 图

(1)代入(2)，得

$$500\cos^2\alpha - 375\sin\alpha\cos\alpha + 44.1 = 0$$

$$500\cos^2\alpha + 44.1 = 375\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

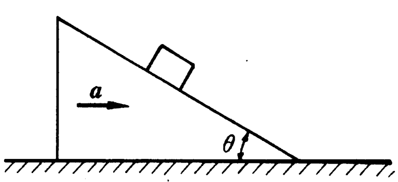
$$390625\cos^4\alpha - 96525\cos^2\alpha + 1944.81 = 0$$

$$\cos^2\alpha = 0.22497,\qquad \alpha = 61.685°$$

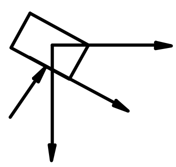
(2)　$t_2 = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$（到最高点所经过时间）

$$S = (v_0\cos\alpha\cdot t_2 - 15)\times2 = 23.26\ \text{m}$$

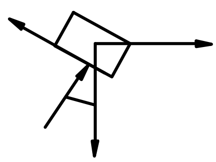
7-3　图示三角形物块置于光滑水平面上，并以水平等加速度 $\boldsymbol{a}$ 向右运动。另一物块置于其斜面上，斜面的倾角为 θ。设物块与斜面间的静摩擦因数为 f_s，且 $\tan\theta > f_s$，开始时物块在斜面上静止，如果保持物块在斜面上不滑动，加速度 $\boldsymbol{a}$ 的最大值和最小值应为多少？



习题 7-3 图



(a)



(b)

解：1、物块不上滑时受力图(a)

$$F_{\mathrm{N}}\sin\theta + F_{\mathrm{s}}\cos\theta = ma \qquad (1)$$

$$F_{\mathrm{N}}\cos\theta - mg - F_{\mathrm{s}}\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

临界：$F_{\mathrm{s}} = f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$ (3)

(3)代入(1)、(2)，消去 F_{N}，得

$$a_{\max} = \frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta} \qquad (4)$$

2、物块不下滑时受力图(b)：

$$F_{\mathrm{N}}\sin\theta - F_{\mathrm{s}}\cos\theta = ma \qquad (5)$$

$$F_{\mathrm{N}}\cos\theta - mg + F_{\mathrm{s}}\sin\theta = 0 \qquad (6)$$

临界：$F_{\mathrm{s}} = f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$ (7)

(7)代入(5)、(6)，消去 F_{N}，得

$$a_{\min} = \frac{\sin\theta - f_{\mathrm{s}}\cos\theta}{\cos\theta + f_{\mathrm{s}}\sin\theta} \qquad (8)$$

7-4 图示物体的质量为 m，悬挂在刚度系数为 k 的弹簧上，平衡时弹簧的静伸长为 δ_{st}。开始时物体离开平衡位置的距离为 a，然后无初速度地释放。试对图中各种不同坐标原点和坐标轴列出物体的运动微分方程，写出初始条件，求出运动规律，并比较所得到的结果。

解：(a)受力图(e)，且

$$mg = k\delta_{\mathrm{st}} \qquad (1)$$

$$F_k = k(\delta_{\mathrm{st}} + x) \qquad (2)$$

$$m\ddot{x} = mg - F_k \qquad (3)$$

(1)、(2)代入(3)，得

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4)$$

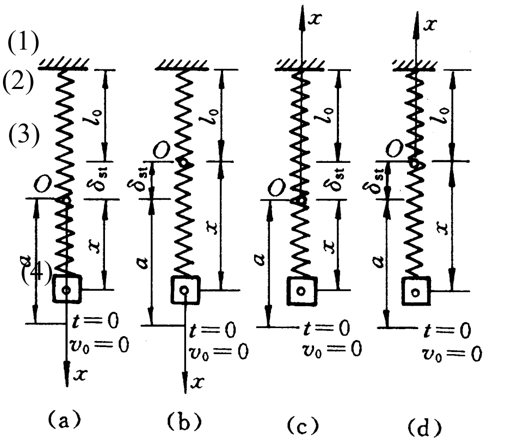
记 $\omega_{\mathrm{n}}^2 = \dfrac{k}{m}$，则

$$x = A\sin(\omega_{\mathrm{n}}t + \varphi) \qquad (5)$$

初始条件：$t = 0$ 时，$x = a$，$\dot{x} = 0$ (6)

(6)代入(5)，得

$$x_{\mathrm{a}} = a\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2})\text{；}$$



习题 7-4 图

(b)受力图(e)

$$m\ddot{x} = mg - F_k$$

$$F_k = kx$$

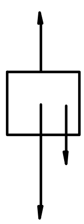
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

令 $\omega_{\mathrm{n}} = \dfrac{k}{m}$，则

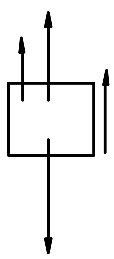
$$x = A\sin(\omega_{\mathrm{n}}t + \varphi) + \frac{mg}{k}$$

初始条件：$t = 0$ 时，$x = a + \delta_{st}$，$\dot{x} = 0$

$$x_{\mathrm{b}} = a\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}) + \frac{mg}{k}$$



(e)



(f)

(c)受力图(f)

$$m\ddot{x} = F_k - mg$$
$$F_k = k(\delta_{\mathrm{st}} - x)$$

代入上式，即

$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$x_{\mathrm{c}} = A\sin(\omega_{\mathrm{n}}t + \varphi)$$

当 $t = 0$ 时， $x = -a$， $\dot{x} = 0$

$$x_{\mathrm{c}} = -a\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2})\text{；}$$

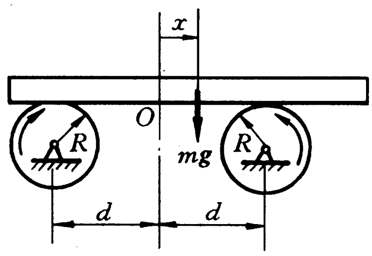
(d)受力图(f)

$$m\ddot{x} = F_k - mg$$
$$F_k = -kx$$
$$m\ddot{x} + kx = -mg$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -g$$
$$x = A\sin(\omega_{\mathrm{n}}t + \varphi) - \frac{mg}{k}$$

当 $t = 0$ 时， $x = -(a + \delta_{\mathrm{st}})$， $\dot{x} = 0$

$$x_{\mathrm{d}} = -a\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}) - \frac{mg}{k}\text{；}$$

7-5 图示质量为 m 的平板置于两个反向转动的滑轮上，两轮间的距离为 $2d$，半径为 R。若将板的重心推出，使其距离原对称位置 O 为 x_0，然后无初速度地释放，则板将在动滑动摩擦力的作用下作简谐振动。板与两滑轮间的动摩擦因数为 f。试求板振动的运动规律和周期。



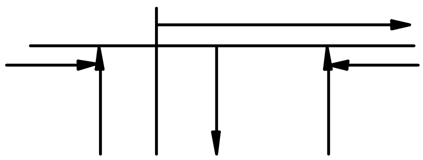
习题 7-5 图

解：1、图(a)

$$\sum F_y = 0\,,\ F_{\mathrm{N1}} + F_{\mathrm{N2}} = mg \quad (1)$$
$$\sum M_O = 0\,,\ F_{\mathrm{N2}}d - F_{\mathrm{N1}}d - mgx = 0$$

即 $$F_{\mathrm{N2}} - F_{\mathrm{N1}} = mg\frac{x}{d} \quad (2)$$

由(1)、(2)解得： $$F_{\mathrm{N2}} = \frac{1}{2}mg(1 + \frac{x}{d})$$
$$F_{\mathrm{N1}} = \frac{1}{2}mg(1 - \frac{x}{d})$$



(a)

$$F_1 = fF_{\mathrm{N1}} = \frac{1}{2}fmg(1 - \frac{x}{d})$$
$$F_2 = fF_{\mathrm{N2}} = \frac{1}{2}fmg(1 + \frac{x}{d})$$
$$F_1 - F_2 = m\ddot{x}$$

即 $$m\ddot{x} + \frac{fmg}{d}x = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{fg}{d}x = 0$$
$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{fg}{d}}$$

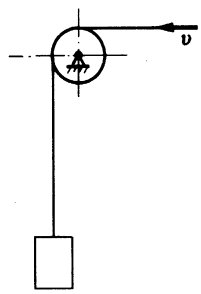
振动周期： $T = \dfrac{2\pi}{\omega_{\mathrm{n}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{fg}}$

运动方程：$x = A\sin(\omega_{\mathrm{n}} t + \varphi)$

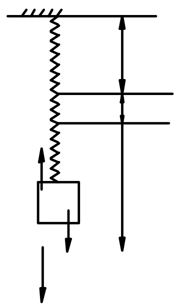
当 $t = 0$ 时，$x = x_0$，$\dot{x} = 0$

运动规律：$x = x_0 \sin(\sqrt{\dfrac{fg}{d}}t + \dfrac{\pi}{2})$

7-6 图示升降机厢笼的质量 m=3×10³kg，以速度 $\boldsymbol{v}$=0.3m/s 在矿井中下降。由于吊索上端突然嵌住，厢笼中止下降。如果索的弹簧刚度系数 k=2.75kN/mm，忽略吊索质量，试求此后厢笼的运动规律。



习题 7-6 图



(a)

解：图（a）：

$$\delta_{\mathrm{st}} = \frac{mg}{K} \quad (1)$$

$$m\ddot{x} = mg - F_k \quad (2)$$

$$F_k = k(x + \delta_{\mathrm{st}}) \quad (3)$$

(1)、(3)代入(2)，得

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A\sin(\omega_{\mathrm{n}} t + \varphi) \quad (4)$$

t=0 时，x=0，$\dot{x} = v = 0.3\ \mathrm{m/s}$ （5）

代入(4)，得

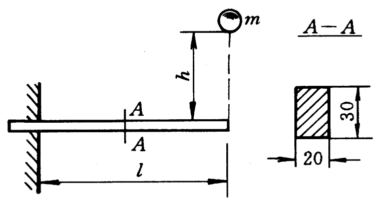
$$x = \frac{v}{\omega_{\mathrm{n}}}\sin\omega_{\mathrm{n}} t \quad (6)$$

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.75\times10^6}{3\times10^3}} = 30.3\ \mathrm{rad/s} \quad (7)$$

将(5)、(7)代入(6)得

$x = 9.9\sin(30.3t)$（mm，t 以秒计）

7-7 质量 m=2kg 的物体从高度 h=0.5m 处无初速地降落在长为 l=1m 的悬臂木梁的自由端上，如图所示。梁的横截面为矩形，高为 30mm，宽为 20mm，梁的弹性模量 E=10⁶MPa。若不计梁的质量，并设物体碰到梁后不回弹，试求物体的运动规律。



习题 7-7 图

解：物体作用在梁端点产生的静变形

$$\delta_{\mathrm{st}} = \frac{mgl^3}{3EI} = 1.45\times10^{-4}\ \mathrm{m} \quad (1)$$

$$mg = k\delta_{\mathrm{st}} \quad (2)$$

当量刚度：$k = \dfrac{3EI}{l^3}$ （3）

任意位置弹性恢复力

$$F_k = k(\delta_{\mathrm{st}} + x) \quad (4)$$

物体运动微分方程

$$m\ddot{x} = mg - F_k \quad (5)$$

将(1)、(2)、(3)代入(4)，得

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{3EI}{ml^3}} = 260\ \mathrm{rad/s}$ （6）

则理学 $x = A\sin(\omega_{\mathrm{n}} t + \varphi)$ （7）

当 $t=0$ 时，$x=-\delta_{\rm st}$，$\dot{x}=v=\sqrt{2gh}=3.13\ \text{m/s}$

$$\tan\varphi=-\frac{\omega_{\rm n}\delta_{\rm st}}{v}=-0.012\text{，}\quad \varphi=-0.012\ \text{rad}$$

$$A=-\frac{\delta_{\rm st}}{\sin\varphi}=0.012\ \text{m}=12\text{mm}$$

$$x=12\sin(260t-0.012)\ \text{mm}$$

7-8 图示用两绳悬挂的质量 m 处于静止。试问：

1. 两绳中的张力各等于多少？
2. 若将绳 A 剪断，则绳 B 在该瞬时的张力又等于多少？

解：1、图（a）

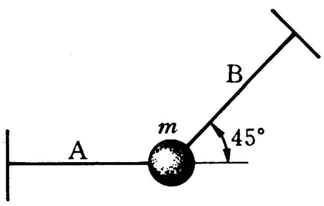
$$\sum F_y=0\text{，}\quad F_B=\sqrt{2}mg$$

$$\sum F_x=0\text{，}\quad F_A=mg$$

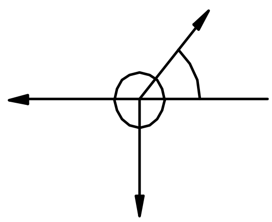
2、图（b）

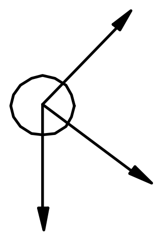
绳 A 剪断瞬时，$a_{\rm n}=0$

$$\sum F_{\rm n}=0\text{，}\quad F_B=\frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

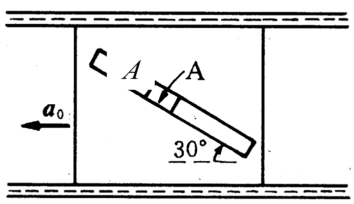


习题 7-8 图

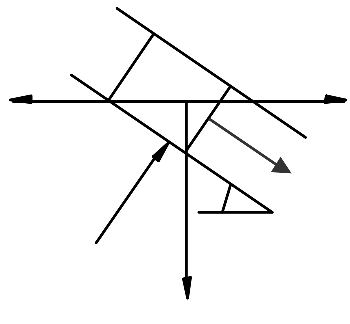

(a)


(b)

7-9 质量为 1kg 的滑块 A 可在矩形块上光滑的斜槽中滑动，如图所示。若板以水平的等加速度 a0=8m/s2 运动，求滑块 A 相对滑槽的加速度和对槽的压力。若滑块相对于槽的初速度为零，试求其相对运动规律。



习题 7-9 图


(a)

解：滑块 A 为动点，矩形板为动系，牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{\rm e}=\boldsymbol{a}_0$，相对加速度 $\boldsymbol{a}_{\rm r}$，A 块受力如图（a），其中

$$F_{\rm Ie}=ma_0=8\ \text{N}$$

$$mg=9.8\ \text{N}$$

$$F_{\rm Ir}=ma_{\rm r}$$

由滑块相对“平衡”：

$$\sum F_{\rm r}=0\text{，}\quad F_{\rm Ir}=F_{\rm Ie}\cos30^\circ+mg\sin30^\circ=4\sqrt{3}+4.9=11.83\ \text{N}$$

$$\sum F_{\rm N}=0\text{，}\quad F_{\rm N}=mg\cos30^\circ-F_{\rm Ie}\sin30^\circ=8.49-4=4.49\ \text{N}$$

相对加速度：$a_{\mathrm{r}} = \dfrac{F_{\mathrm{Ir}}}{m} = 11.83\ \mathrm{m/s^2}$

相对运动规律：$x_{\mathrm{r}} = \dfrac{1}{2} a_{\mathrm{r}} t^2 = 5.91 t^2$（m）

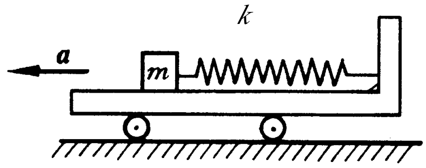
7-10 图示质量为 m 的质点置于光滑的小车上，且以刚度系数为 k 的弹簧与小车相联。若小车以水平等加速度 a 作直线运动，开始时小车及质点均处于静止状态，试求质点的相对运动方程（不计摩擦）。

解：设质点 m 对车的相对位移为 x（设向右为正），

质点受力：

$\boldsymbol{F}_k = -kx\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}} = ma\boldsymbol{i}$



习题 7-10 图

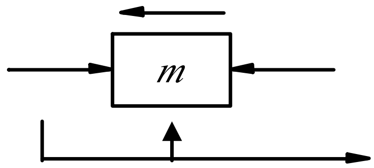
质点相对运动微分方程：

$m\ddot{x} = -kx + ma$

$\ddot{x} + \dfrac{k}{m} x = a$

$\omega_{\mathrm{n}}^2 = \dfrac{k}{m}$

$x = A\cos(\omega t + \alpha) + \dfrac{m}{k} a$ （1）



(a)

初始条件：$t = 0$ 时，$\dot{x} = 0$，$x = 0$

代入（1），得：$\alpha = 0$，$A = -\dfrac{m}{k} a$

$x = \dfrac{m}{k} a(1 - \cos\sqrt{\dfrac{m}{k}} t)$

7-11 图示单摆的悬挂点以等加速度 a 沿铅垂线向上运动。若摆长为 l，试求单摆作微振动的周期。

解：牵连惯性力 $F_{\mathrm{Ie}} = ma$

相对运动微分方程：

$ml\ddot{\theta} = -m(g + a)\sin\theta$

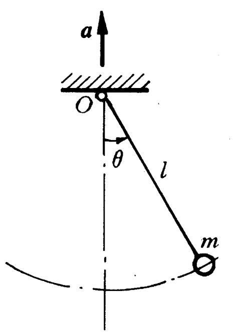
$\theta << 1$ 时，上式为

$ml\ddot{\theta} + m(g + a)\theta = 0$

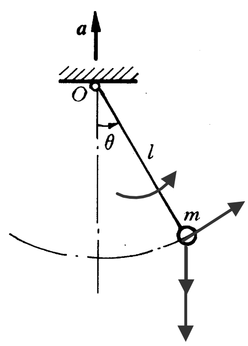
$\ddot{\theta} + \dfrac{g + a}{l}\theta = 0$

$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\dfrac{g + a}{l}}$

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_{\mathrm{n}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + a}}$

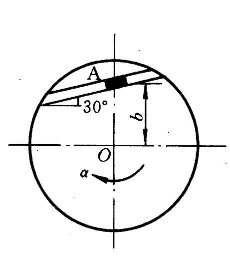


习题 7-11 图



习题 7-11 解图

7-12 图示圆盘绕轴 O 在水平面内转动，质量为 1kg 的滑块 A 可在圆盘上的光滑槽中运动。盘和滑块在图示位置处于静止，这时圆盘开始以等角加速度 $\alpha = 40\mathrm{rad/s^2}$ 转动，已知 b=0.1m。试求圆盘开始运动时，槽作用在滑块 A 上的侧压力及滑块的相对加速度。



习题 7-12 图

解：运动开始时，$\boldsymbol{\omega} = 0$，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} = 0$

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} = 0$，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 0$

$a_{\mathrm{e}}^{\tau} = b\alpha = 4\ \mathrm{m/s^2}$，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 未知。

物块受力如图，槽的侧压力方向如图，大小未知，牵连惯性力：

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}^{\tau}=ma_{\mathrm{e}}^{\tau}=4\ \mathrm{N} \tag{1}$$

相对运动微分方程：

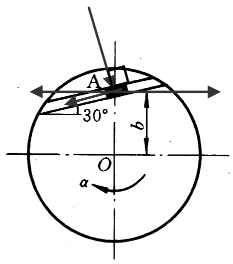
$$ma_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}^{\tau}\cos 30° \tag{2}$$

$$F_{\mathrm{N}}-\boldsymbol{F}_{\mathrm{Ie}}^{\tau}\sin 30°=0 \tag{3}$$

（1）代入（2）、（3）解得

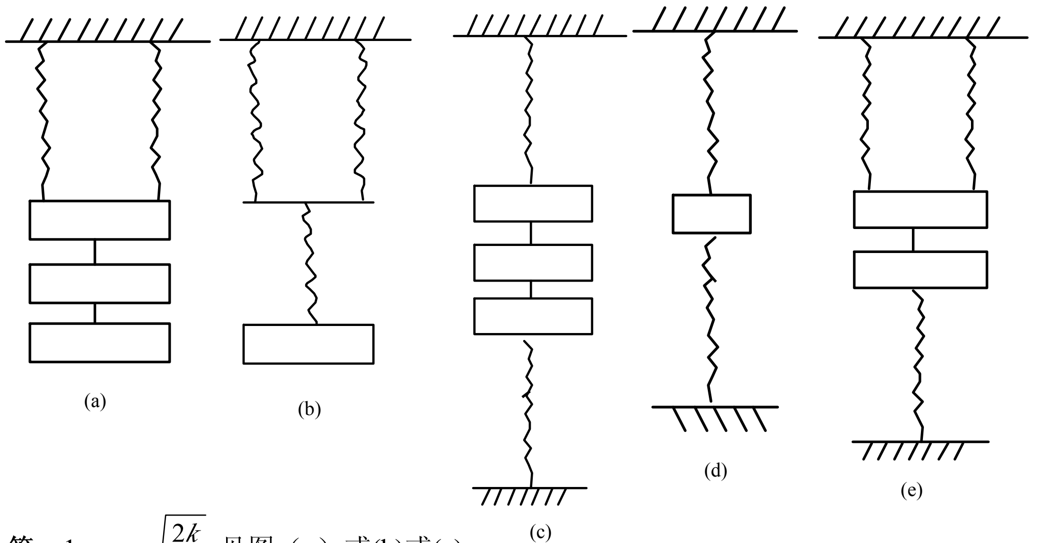
$$a_{\mathrm{r}}=3.46\ \mathrm{m/s^2}$$

$$F_{\mathrm{N}}=2\ \mathrm{N}$$



习题 7-12 解图

7-13　现有若干刚度系数均为 k 且长度相等的弹簧，另有若干质量均为 m 的物块，试任意组成两个固有频率分别为 $\sqrt{\frac{2k}{3m}}$ 和 $\sqrt{\frac{3k}{2m}}$ 的弹簧质量系统，并画出示意图。

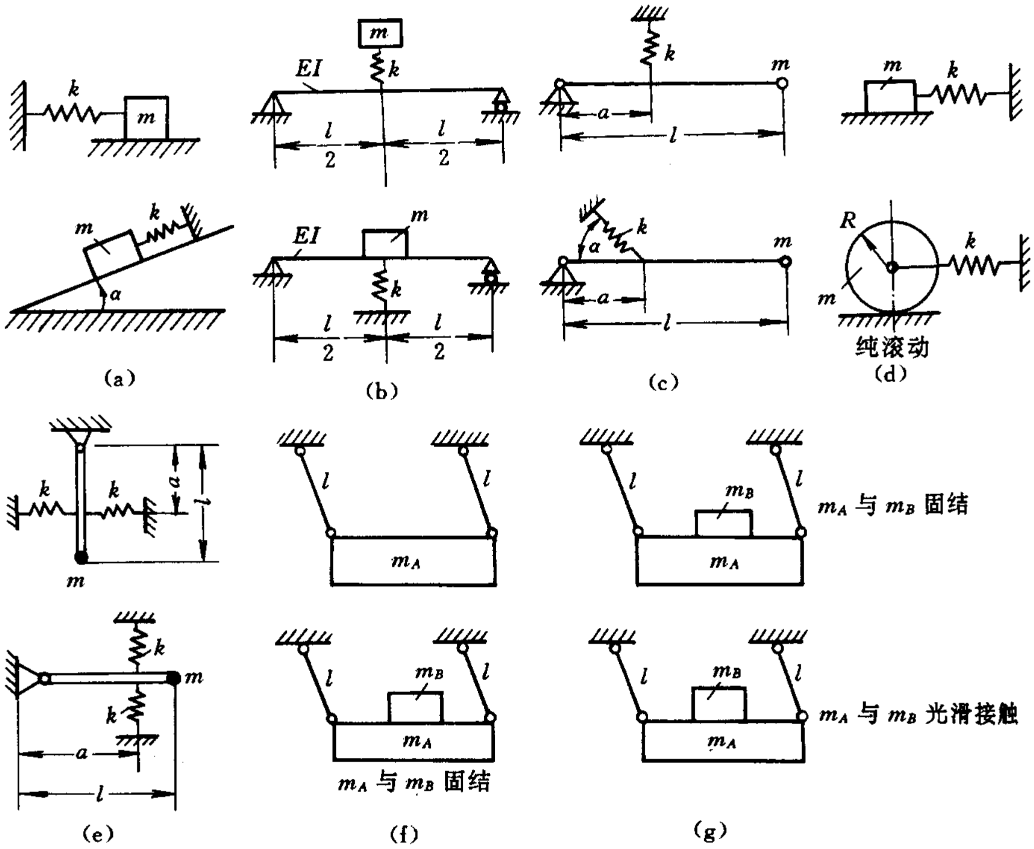


答：1. $\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$,见图（a）或(b)或(c).

2. $\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{3k}{2m}}$，见图（d）或(e)

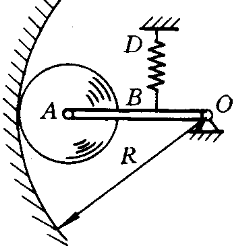
7-14　分析图中所示 7 组振动模型，判断哪几组中的两个系统具有相同的固有频率。

答：图(a)、(b)、(e)、(g)均具有相同的固有频率。



习题 7-14 图

7-15 图示匀质摇杆 OA 质量为 m_1，长为 l，匀质圆盘质量为 m_2，当系统平衡时摇杆处在水平位置，而弹簧 BD 处于铅垂位置，且静伸长为 δ_{st}，设 $OB=a$，圆盘在滑道中作纯滚动。试求系统微振动固有频率。



习题 7-15 图

解：　1、弹簧刚度 k

静平衡时，轮缘摩擦力 $F_{\text{s}}=0$，由系统平衡。

$$\sum M_O=0\,,\qquad m_2gl+m_1g\frac{l}{2}-F_ka=0$$

即
$$k\delta_{\text{st}}a=\frac{1}{2}(m_1+2m_2)gl$$

$$k=\frac{(m_1+2m_2)gl}{2a\,\delta_{\text{st}}}\qquad(1)$$

2、ω_{n}

$$T_2=T_{轮A}+T_{杆OA}=\frac{1}{2}m_2v_A^2+\frac{1}{2}J_A\omega_A^2+\frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{m_2}{2}(l\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\left[\frac{m_2}{2}(R-l)^2\cdot\left(\frac{l\dot{\theta}}{R-l}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1l^2\dot{\theta}^2=\left(\frac{3m_2}{4}+\frac{m_1}{6}\right)l^2\dot{\theta}^2$$

由于以平衡位置为 θ 角的起始位置，弹簧静位移 δ_{st} 产生的弹性力与重力 $m_1\boldsymbol{g}$，$m_2\boldsymbol{g}$ 相抵消，故此后计算时，只考虑弹簧偏离平衡位置产生的弹性力，从平衡位置到 θ 角，弹力功：

$$W_{12}=-\frac{k}{2}(a\theta)^2\,,\qquad T_1=0$$

$$T_2-T_1=W_{12}$$

即 $\left(\frac{3}{4}m_2+\frac{1}{6}m_1\right)l^2\dot{\theta}^2=-\frac{k}{2}a^2\theta^2$

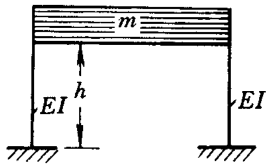
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$: $\left(\frac{3}{4}m_2+\frac{1}{3}m_1\right)l^2\dot{\theta}\ddot{\theta}=-ka^2\theta\cdot\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta}+\frac{6ka^2\theta}{l^2\left(9m_2+2m_1\right)}=0$$

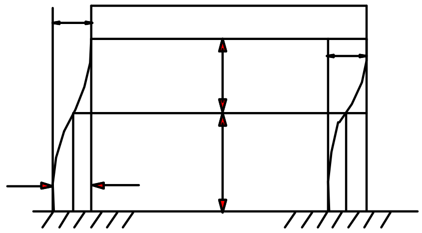
$$\omega_0=\sqrt{\frac{6ka^2}{l^2\left(9m_2+2m_1\right)}} \tag{2}$$

(1)代入(2),得 $\omega_0=\sqrt{\frac{3ag\left(m_1+2m_2\right)}{l\delta_{\mathrm{st}}\left(2m_1+9m_2\right)}}$

7-16 一单层房屋结构可简化为如图所示的模型：房顶可视为质量为 m 的刚性杆，柱子可视为高为 h、弯曲刚度为 EI 的梁，不计柱子的质量。试求该房屋水平振动的固有频率。



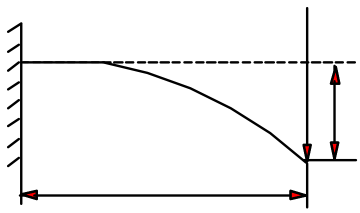
习题 7-16 图



(a)

解：柱子两端都是固定端，可看作两根长 $\frac{h}{2}$ 的悬臂梁坚固对接，见(图 a)。

悬臂梁的最大挠度为 $w_{\max}=\frac{F_{\mathrm{P}}l^3}{3EI}$ 见(图 b)



(b)

本题中 $l=\frac{h}{2}$ ， $w_{\max}=\frac{x}{2}$

于是有 $\frac{x}{2}=\frac{F_{\mathrm{P}}\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3EI}$

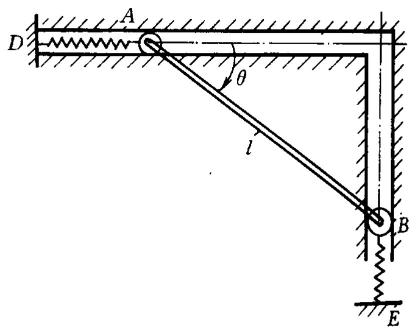
由上可算出 $F_{\mathrm{P}}=\frac{12EIx}{h^3}$

在层顶位移 x 时，两根立柱产生 $2F_{\mathrm{P}}$ 的弹性阻力，故屋顶的运动微分方程为

$m\ddot{x}=\frac{-24EIx}{h^3}$ 即 $\ddot{x}+\frac{24EI}{mh^3}x=0$

这是简谐振动方程，其固有频率为 $\omega_0=\sqrt{\frac{24EI}{mh^3}}$

7-17 长为 l、质量为 m 匀质杆两端用滑轮 A 和 B 安置在光滑的水平和铅垂滑道内滑动，并联有刚度系数为 k 的弹簧，如图所示。当杆处于水平位置时，弹簧长度为原长。不计滑轮 A 和 B 的质量，试求 AB 杆绕平衡位置振动的固有频率。



习题 7-17 图

解：设杆在水平位置时，势能为 0，则势能

$$V=-mg\frac{l}{2}\sin\theta+\frac{k}{2}\left[l\left(1-\cos\theta\right)\right]^2+\frac{k}{2}\left(l\sin\theta\right)^2$$
$$=-\tfrac{1}{2}mgl\sin\theta+kl^2\left(1-\cos\theta\right)$$

平衡： $V'(\theta)=-\dfrac{1}{2}mgl\cos\theta+kl^2\sin\theta=0$

$$\tan\theta=\frac{mg}{2kl}, \qquad \theta_0=\arctan\frac{mg}{2kl} \quad（平衡位置角）$$

设杆偏离平衡位置θ_0一微小角度φ，则杆的动能

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\varphi^2$$

弹簧势能 $V=-\dfrac{l}{2}mg\sin(\theta_0+\varphi)+kl^2[1-\cos(\theta_0+\varphi)]$

保守力场（理想约束）机械能守恒： $T+V=C$

即 $$\frac{1}{6}ml^2\dot\varphi^2-\frac{l}{2}mg\sin(\theta_0+\varphi)+kl^2[1-\cos(\theta_0+\varphi)]=C$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$: $$\frac{1}{3}ml^2\dot\varphi\ddot\varphi-\frac{l}{2}mg\sin(\theta_0+\varphi)+kl^2\sin(\theta_0+\varphi)\cdot\dot\varphi=0$$

即 $$\ddot\varphi-\frac{3g}{2l}\cos(\theta_0+\varphi)+\frac{3k}{m}\sin(\theta_0+\varphi)=0 \qquad (1)$$

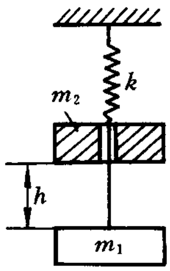
微振动，$\varphi<<1$，此时

$$\cos(\theta_0+\varphi)=\cos\theta_0\cos\varphi-\sin\theta_0\sin\varphi\approx\cos\theta_0-\varphi\sin\theta_0$$
$$\sin(\theta_0+\varphi)=\sin\theta_0\cos\varphi+\cos\theta_0\sin\varphi\approx\sin\theta_0+\varphi\cos\theta_0$$

代入（1）得， $$\ddot\varphi+\left(\frac{3g}{2l}\sin\theta_0+\frac{3k}{m}\cos\theta_0\right)\varphi=\frac{3g}{2l}\cos\theta_0-\frac{3k}{m}\sin\theta_0$$

$$\therefore\quad \omega_0=\sqrt{\frac{3g}{2l}\sin\theta_0+\frac{3k}{m}\cos\theta_0} \qquad 其中\ \theta_0=\arctan\frac{mg}{2kl}$$

7-18 质量为m_1的质块用刚度系数为k的弹簧悬挂，在m_1静止不动时有另一质量为m_2的物块在距m_1高度为h处落下，如图所示。m_2撞到m_1后不再分开。试求系统的振动频率和振幅。



习题 7-18 图

解：两质块在一起振动时，其固有频率为：

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \qquad (1)$$

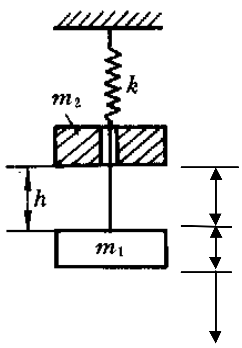
m_2块下落至碰撞前速度 $v=\sqrt{2gh}$

相碰后，m_1+m_2的速度 $v'=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh}$ （动量守恒）

弹簧加上m_1时，已伸长了 $\delta_1=\dfrac{m_1g}{k}$

再加m_2后，需再伸长 $\delta_2=\dfrac{m_2g}{k}$

其重力和弹性力才能平衡，若以静平衡位置为坐标原点，如图，则系统振动方程为



(a)

$$x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}t+\alpha\right) \qquad (2)$$

$$\dot x=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}t+\alpha\right) \qquad (3)$$

振动开始于m_1,m_2碰撞之末，此时（t=0）它们的坐标为：

$$x_{t=0}=-\delta_2=-\frac{m_2g}{k} \qquad (4)$$

$$\dot x_{t=0}=v'=\frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh} \qquad (5)$$

$t=0$ 时，由（2）、（3）得

$$x_{t=0} = A\sin\alpha \tag{6}$$

$$\dot{x}_{t=0} = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}A\cos\alpha \tag{7}$$

比较（3）、（6）和（5）、（7）得，

$$A\sin\alpha = -\frac{m_2 g}{k}，\qquad A\cos\alpha = \frac{m_2}{\sqrt{k}\sqrt{m_1+m_2}}\sqrt{2gh}$$

两边平方，相加得 $A^2 = \dfrac{m_2^2 g^2}{k^2} + \dfrac{2ghm_2^2}{k(m_1+m_2)}$

$$A = \frac{m_2 g}{k}\sqrt{1+\frac{2hk}{(m_1+m_2)g}}$$

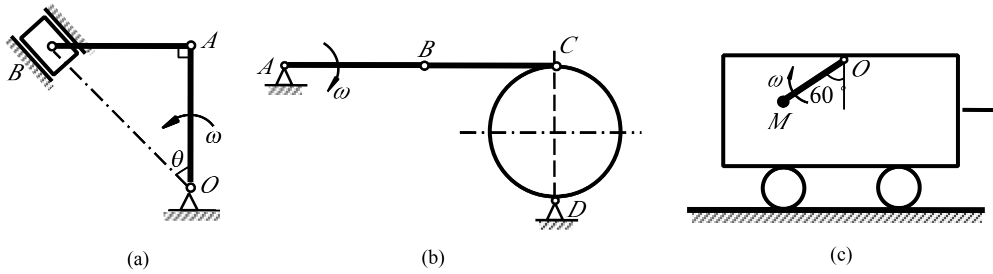
第 8 章　动量定理及其应用

8－1　计算下列图示情况下系统的动量。

(1) 已知 $OA=AB=l$，$\theta=45°$，ω为常量，均质连杆 AB 的质量为 m，而曲柄 OA 和滑块 B 的质量不计（图 a）。

(2) 质量均为 m 的均质细杆 AB、BC 和均质圆盘 CD 用铰链联结在一起并支承如图。已知 $AB=BC=CD=2R$，图示瞬时 A、B、C 处于同一水平直线位置，而 CD 铅直，AB 杆以角速度ω转动（图 b）。

(3) 图示小球 M 质量为 m_1，固结在长为 l、质量为 m_2 的均质细杆 OM 上，杆的一



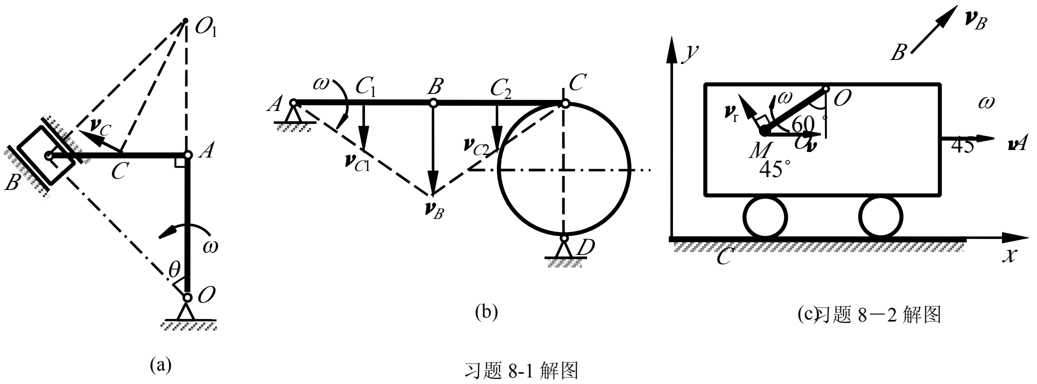
习题 8-1 图

端 O 铰接在不计质量且以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的小车上，杆 OM 以角速度ω绕 O 轴转动（图 c）。

解：（1）$p=mv_C=\dfrac{\sqrt{5}}{2}ml\omega$，方向同 $\boldsymbol{v}_C$（解图（a））；

（2）$p=mv_{C1}+mv_{C2}=mv_B=2Rm\omega$，方向同 $\boldsymbol{v}_B$，垂直 AC（解图（b））；

（3）
$$\boldsymbol{p}=[m_1(v-l\omega\cos60°)+m_2(v-\frac{l}{2}\omega\cos60°)]\boldsymbol{i}+(m_1l\omega\sin60°+m_2\frac{l}{2}\omega\sin60°)\boldsymbol{j}$$
$$=[(m_1+m_2)v-\frac{2m_1+m_2}{4}l\omega]\boldsymbol{i}+\sqrt{3}l\omega\frac{2m_1+m_2}{4}\boldsymbol{j}$$（解图（c））。



习题 8-1 解图

8－2 图示机构中，已知均质杆 AB 质量为 m，长为 l；均质杆 BC 质量为 $4m$，长为 $2l$。图示瞬时 AB 杆的角速度为ω，求此时系统的动量。

解：杆 BC 瞬时平移，其速度为 $\boldsymbol{v}_B$

$$p = p_{AB} + p_{BC}$$

$$= m\frac{l}{2}\omega + 4ml\omega = \frac{9}{2}ml\omega$$

方向同 $\boldsymbol{v}_B$ 。

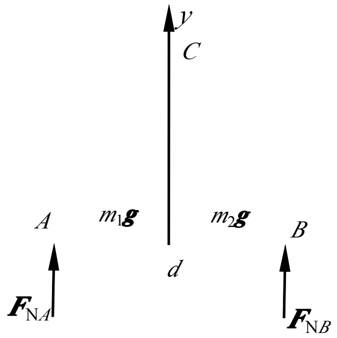
8－3 两均质杆 AC 和 BC 的质量分别为 m_1 和 m_2，在 C 点用铰链连接，两杆立于铅垂平面内，如图所示。设地面光滑，两杆在图示位置无初速倒向地面。问：当 $m_1= m_2$ 和 $m_1= 2m_2$ 时，点 C 的运动轨迹是否相同。

解：根据受力分析知：$\sum F_x = 0$，故系统的质心在水平方向运动守恒。

当 $m_1= m_2$ 时，系统关于 y 轴对称，质心位于 y 轴上，且沿 y 轴作铅垂直线运动，点 C 的运动轨迹亦为铅垂直线。

当 $m_1= 2m_2$ 时，质心位于 y 轴左侧，且作铅垂直线运动，点 C 的运动轨迹必为曲线。

故两种情况下，点 C 的运动轨迹不相同。



习题 8－3 解图

8－4 图示水泵的固定外壳 D 和基础 E 的质量为 m_1，曲柄 $OA=d$，质量为 m_2，滑道 B 和活塞 C 的质量为 m_3。若曲柄 OA 以角速度 ω 作匀角速转动，试求水泵在唧水时给地面的动压力（曲柄可视为匀质杆）。

解：以整个水泵为研究对象，受力如图（a）：

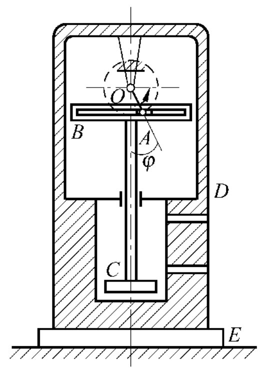
解法 1：用动量定理求解

瞬时 t，系统动量

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3$$

$p_2 = m_2 v_{C2} = m_2 \cdot \dfrac{d}{2}\omega$，方向如图

$p_3 = m_3 v_{C3} = m_3 d\omega \sin\varphi$，方向如图



习题 8－4 图

由质系动量应理：

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = F_y = \sum F_y \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x = \sum F_x \qquad (2)$$

$$p_y = p_{2y} + p_{3y} = m_2 \cdot \frac{d}{2}\omega\sin\varphi + m_3 d\omega\sin\varphi$$

$$p_x = p_{2x} + p_{3x} = m_2 \cdot \frac{d}{2}\omega\cos\varphi$$

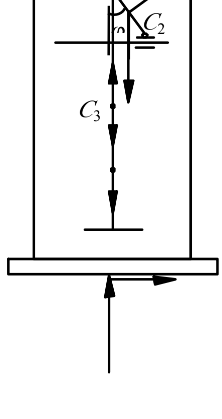
$$F_{\boldsymbol{x}} = \sum F_{\boldsymbol{x}} = F_{\boldsymbol{x}}$$

$$F_{\boldsymbol{y}} = \sum F_{\boldsymbol{y}} = F_{\boldsymbol{y}} - (m_1 + m_2 + m_3)g$$

代入（1）、（2），并注意到 $\varphi = \omega t$ 得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2 \cdot \frac{d}{2}\omega\sin\omega t + m_3 d\omega\sin\omega\, t\right) = F_y - (m_1 + m_2 + m_3)g$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2 \cdot \frac{d}{2}\omega\cos\omega\, t\right) = F_x$$



(a)

得 $F_y=(m_1+m_2+m_3)g+\dfrac{m_2+2m_3}{2}d\omega^{2}\cos\omega t$　　（3）

$$F_x=-\frac{d}{2}m_2\omega^{2}\sin\omega t \qquad （4）$$

解法 2：用质心运动定理解

研究对象及受力同前：

$$M\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3$$

$$M\boldsymbol{v}_C=m_2\boldsymbol{v}_{C2}+m_3\boldsymbol{v}_{C3}$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$： $M\boldsymbol{a}_C=m_2\boldsymbol{a}_{C2}+m_3\boldsymbol{a}_{C3}$

$a_{C2}=\dfrac{d}{2}\omega^{2}$，方向指向 O 点；

$a_{C3}=d\omega^2\cos\omega t$，方向向上。

写出质心运动定理的投影形式：

$$m_2\frac{d}{2}\omega^2\cos\omega t+m_3d\omega^2\cos\omega t=F_y-(m_1+m_2+m_3)g$$

$$-m_2\cdot\frac{d}{2}\omega^2\sin\omega t=F_x$$

$$F_x=-m_2\cdot\frac{d}{2}\omega^2\sin\omega t$$

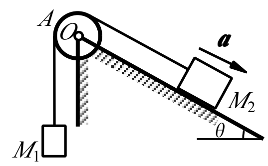
$$F_y=(m_1+m_2+m_3)g+\frac{m_2+2m_3}{2}d\omega^{2}\cos\omega t$$

结果同解法 1。

8－5　图示均质滑轮 A 质量为 m，重物 M_1、M_2 质量分别为 m_1 和 m_2，斜面的倾角为 θ，忽略摩擦。已知重物 M_2 的加速度 $\boldsymbol{a}$，试求轴承 O 处的约束力（表示成 a 的函数）。

解：以系统整体为研究对象，应用动量定理

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=m_2a\cos\theta=F_{Ox}+F_{\mathrm{N}}\sin\theta$$



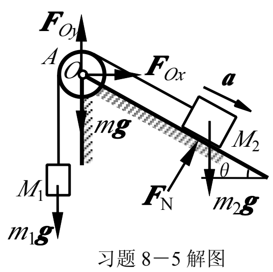
习题 8－5 图

$\dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=m_1a-m_2a\sin\theta=F_{Oy}+F_{\mathrm{N}}\cos\theta-(m+m_1+m_2)g$ 分析 M_2 可知：$F_{\mathrm{N}}=m_2g\cos\theta$

则有

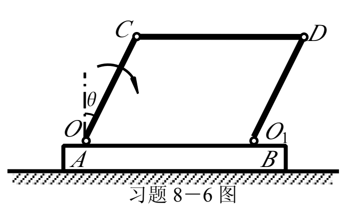
$$F_{Ox}=m_2a\cos\theta-m_2g\cos\theta\sin\theta=(a-g\sin\theta)m_2\cos\theta$$

$$F_{Oy}=(m_1-m_2\sin\theta)a-m_2g\cos^2\theta+(m+m_1+m_2)g$$



习题 8－5 解图

8－6　板 AB 质量为 m，放在光滑水平面上，其上用铰链连接四连杆机构 $OCDO_1$（如图示）。已知 $OC=O_1D=b$，$CD=OO_1$，均质杆 OC、O_1D 质量皆为 m_1，均质杆 CD 质量为 m_2，当杆 OC 从



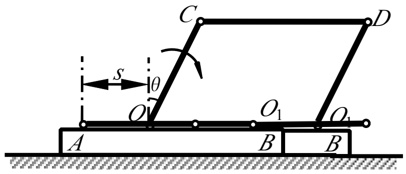
习题 8－6 图

与铅垂线夹角为θ由静止开始转到水平位置时，求板 AB 的位移。

解：以系统整体为研究对象，根据受力分析知：$\sum F_x = 0$，故系统的质心在水平方向运动守恒。若初始时（设 $CD=l$）：

$$x_{C0} = \frac{m_1 \frac{b}{2}\sin\theta + m_2(b\sin\theta + \frac{l}{2}) + m\frac{l}{2} + m_1(\frac{b}{2}\sin\theta + l)}{2m_1 + m_2 + m}$$

设杆 OC 转到水平位置时板 AB 的位移为 s，



习题 8－6 解图

$$x_C = \frac{m_1(\frac{b}{2} - s) + m_2(b - s + \frac{l}{2}) + m(\frac{l}{2} - s) + m_1(\frac{b}{2} - s + l)}{2m_1 + m_2 + m} x_{C0} = x_C$$

$$s = \frac{m_1 + m_2}{2m_1 + m_2 + m} b(1 - \sin\theta)$$

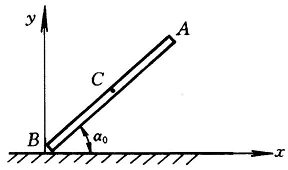
8－7 匀质杆 AB 长 $2l$，B 端放置在光滑水平面上。杆在图示位置自由倒下，试求 A 点轨迹方程。

解：杆水平受力为零，水平动量守恒；初始静止、质心位置 x_C 守恒：

$$x_C = l\cos\alpha_0$$

$$x_A = x_C + l\cos\varphi \quad (1)$$

$$y_A = 2l\sin\varphi \quad (2)$$



习题 8－7 图

由（1），

$$x_A - x_C = l\cos\varphi$$

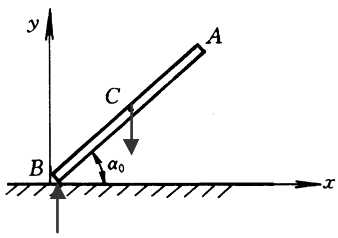
即 $\quad x_A - l\cos\alpha_0 = l\cos\varphi \quad$（3）

由（2）$\quad \frac{y_A}{2} = l\sin\varphi \quad$（4）

（3）、（4）两边平方后相加，得

$$(x_A - l\cos\alpha_0)^2 + \frac{y_A^2}{4} = l^2$$

此为椭圆方程。



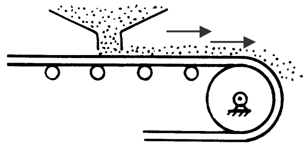
(a)

***8－8** 自动传送带如图所示，其运煤量恒为 20kg/s，传送带速度为 1.5m/s。试求匀速传送时传送带作用于煤块的总水平推力。

解：设皮带作用煤块的总水平推力为 $\boldsymbol{F}_x$，皮带在 dt 时间内输送量为 $q_V \mathrm{d}t$，由动量定理微分形式：

$$q_V \mathrm{d}t \cdot v = F_x \mathrm{d}t$$

$$F_x = q_V v = 20 \times 1.5 = 30 \text{ N}$$


习题 8－8 图

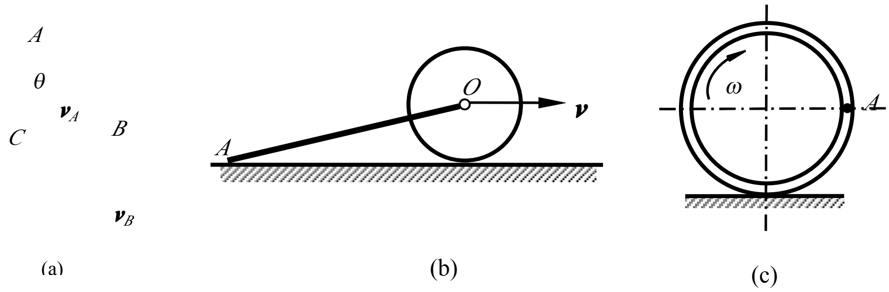
第 10 章　动能定理及其应用

10－1　计算图示各系统的动能：

1．质量为 m，半径为 r 的均质圆盘在其自身平面内作平面运动。在图示位置时，若已知圆盘上 A、B 两点的速度方向如图示，B 点的速度为 $\boldsymbol{v}_B$，$\theta = 45°$（图 a）。

2. 图示质量为 m_1 的均质杆 OA，一端铰接在质量为 m_2 的均质圆盘中心，另一端放在水平面上，圆盘在地面上作纯滚动，圆心速度为 $\boldsymbol{v}$（图 b）。

3．质量为 m 的均质细圆环半径为 R，其上固结一个质量也为 m 的质点 A。细圆环在水平面上作纯滚动，图示瞬时角速度为ω（图 c）。



习题 10－1 图

解：

1．$T = \dfrac{1}{2}mv_C^2 + \dfrac{1}{2}J_C\omega_C^2 = \dfrac{1}{2}m(\dfrac{v_B}{2})^2 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}mr^2(\dfrac{v_B}{2r})^2 = \dfrac{3}{16}mv_B^2$

2．$T = \dfrac{1}{2}m_1v^2 + \dfrac{1}{2}m_2v^2 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}m_2r^2(\dfrac{v}{r})^2 = \dfrac{1}{2}m_1v^2 + \dfrac{3}{4}m_2v^2$

3．$T = \dfrac{1}{2}mR^2\omega^2 + \dfrac{1}{2}mR^2\omega^2 + \dfrac{1}{2}m(\sqrt{2}R\omega)^2 = 2mR^2\omega^2$

10－2 图示滑块 A 重力为 $\boldsymbol{W}_1$，可在滑道内滑动，与滑块 A 用铰链连接的是重力为 $\boldsymbol{W}_2$、长为 l 的匀质杆 AB。现已知道滑块沿滑道的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，杆 AB 的角速度为 ω_1。当杆与铅垂线的夹角为 φ 时，试求系统的动能。

解：图（a）

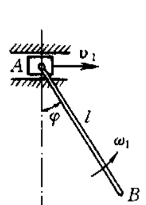
$$T = T_A + T_B$$

$$= \frac{1}{2}\frac{W_1}{g}v_1^2 + (\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}v_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2)$$

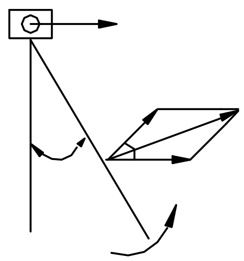
$$= \frac{W_1}{2g}v_1^2 + \frac{W_2}{2g}[(\frac{l}{2}\omega_1)^2 + v_1^2 +$$

$$+ 2\cdot\frac{l}{2}\omega_1 v_1\cos\varphi] + \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{12}\frac{W_2}{g}l^2\cdot\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2g}[(W_1 + W_2)v_1^2 + \frac{1}{3}W_2l^2\omega_1^2 + W_2l\omega_1v_1\cos\varphi]$$



习题 10－2 图



(a)

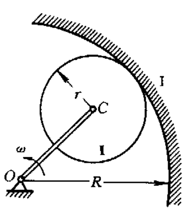
10－3　重力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$、半径为 r 的齿轮 II 与半径为 $R = 3r$ 的固定内齿轮 I 相啮合。齿轮 II 通过匀质的曲柄 OC 带动而运动。曲柄的重力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Q}}$，角速度为 ω，齿轮可视为匀质圆盘。试求行星齿轮机构的动能。

解：

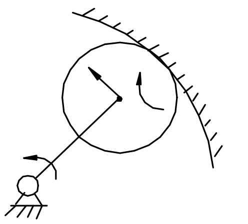
$$T = T_{OC} + T_C$$

$$= \frac{1}{2}J_O\omega_{OC}^2 + \frac{1}{2}m_Cv_C^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_Cr^2)\omega_C^2$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{3}\frac{F_{\mathrm{Q}}}{g}(2r)^2]\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{F_{\mathrm{P}}}{g}(2r\omega)^2 + \frac{1}{4}\frac{F_{\mathrm{P}}}{g}r^2(\frac{2r\omega}{r})^2$$



习题 10－3 图

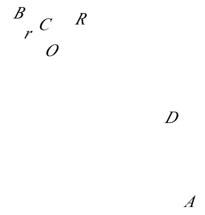


(a)

$$=\frac{r^2\omega^2}{3g}(2F_Q+9F_P)$$

10－4 图示一重物 A 质量为 m_1，当其下降时，借一无重且不可伸长的绳索使滚子 C 沿水平轨道滚动而不滑动。绳索跨过一不计质量的定滑轮 D 并绕在滑轮 B 上。滑轮 B 的半径为 R，与半径为 r 的滚子 C 固结，两者总质量为 m_2，其对 O 轴的回转半径为ρ。试求重物 A 的加速度。

解： 将滚子 C、滑轮 D、物块 A 所组成的刚体系统作为研究对象，系统具有理想约束，由动能定理建立系统的运动与主动力之间的关系。



习题 10－4 图

设系统在物块下降任意距离 s 时的动能

动能：$T=\frac{1}{2}m_1v_A^2+\frac{1}{2}m_2v_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2$

其中 $\omega_C=\frac{v_A}{R-r}$， $v_C=\omega_C r=\frac{v_A r}{R-r}$， $J_C=m_2\rho^2$

$$T=\frac{1}{2}[m_1+m_2\frac{r^2}{(R-r)^2}+m_2\rho^2\frac{1}{(R-r)^2}]v_A^2=\frac{1}{2}[m_1+m_2\frac{r^2+\rho^2}{(R-r)^2}]v_A^2$$

力作的功：$W=m_1gs$

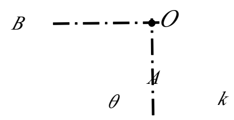
应用动能定理：$\frac{1}{2}[m_1+m_2\frac{r^2+\rho^2}{(R-r)^2}]v_A^2=m_1gs$

将上式对时间求导数：$[m_1+m_2\frac{r^2+\rho^2}{(R-r)^2}]v_Aa_A=m_1g\dot{s}$

求得物块的加速度为：$a_A=\frac{m_1g(R-r)^2}{m_1(R-r)^2+m_2(r^2+\rho^2)}$

10－5 图示机构中，均质杆 AB 长为 l，质量为 $2m$，两端分别与质量均为 m 的滑块铰接，两光滑直槽相互垂直。设弹簧刚度为 k，且当$\theta=0°$时，弹簧为原长。若机构在$\theta=60°$时无初速开始运动，试求当杆 AB 处于水平位置时的角速度和角加速度。

解： 应用动能定理建立系统的运动与主动力之间的关系。



习题 10－5 图

动能： $T=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}J_O\omega_{AB}^2$

其中： $v_A=l\sin\theta\omega_{AB}$； $v_B=l\cos\theta\omega_{AB}$； $J_O=\frac{1}{3}2ml^2$

$T=\frac{1}{2}ml^2\omega_{AB}^2+\frac{1}{3}ml^2\omega_{AB}^2=\frac{5}{6}ml^2\omega_{AB}^2$

外力的功： $W=mgl(\sin60°-\sin\theta)+2mg\frac{l}{2}(\sin60°-\sin\theta)+\frac{k}{2}[(l-l\cos60°)^2-(l-l\cos\theta)^2]$

$T=W$ ； $\frac{5}{6}ml^2\omega_{AB}^2=2mgl(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta)+\frac{k}{2}l^2[\frac{1}{4}-(1-\cos\theta)^2]$ （1）

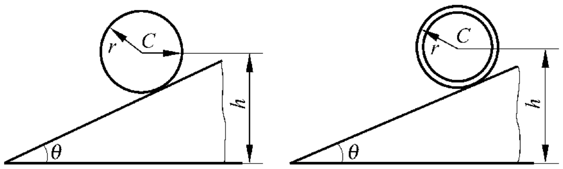
当$\theta=0$时：$W=\sqrt{3}mgl+\frac{kl^2}{8}$

$\frac{5}{6}ml^2\omega_{AB}^2=\sqrt{3}mgl+\frac{kl^2}{8}$； $\omega_{AB}=\sqrt{\frac{6\sqrt{3}}{5l}g+\frac{3k}{20m}}=\sqrt{\frac{24\sqrt{3}mg+3kl}{20ml}}$

对式（1）求导：$\frac{5}{3}ml^2\omega_{AB}\alpha_{AB}=-2mgl\cos\theta\dot{\theta}-\frac{k}{2}l^2 2(1-\cos\theta)\sin\theta\dot{\theta}$；

其中：$-\dot{\theta}=\omega_{AB}$；当$\theta=0$时：$\alpha_{AB}=\dfrac{6g}{5l}$

10－6 图 a 与图 b 分别为圆盘与圆环，二者质量均为 m，半径均为 r，均置于距地面为 h 的斜面上，斜面倾角为θ，盘与环都从时间 $t=0$ 开始，在斜面上作纯滚动。分析圆盘与圆环哪一个先到达地面？



(a)　　(b)

习题 10－6 图

解：对图（a）应用动能定理：$\dfrac{3}{4}mv_{C1}^2=mgs\sin\theta$；求导后有 $a_{C1}=\dfrac{2}{3}g\sin\theta$

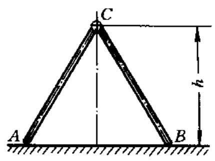
设圆盘与圆环到达地面时质心走过距离 d，则 $d=\dfrac{1}{2}a_{C1}t_1^2$；$t_1=\sqrt{\dfrac{2d}{a_{C1}}}=\sqrt{\dfrac{3d}{g\sin\theta}}$

对图（b）应用动能定理：$mv_{C2}^2=mgs\sin\theta$；求导后有 $a_{C2}=\dfrac{1}{2}g\sin\theta$

$d=\dfrac{1}{2}a_{C2}t_2^2$；$t_2=\sqrt{\dfrac{2d}{a_{C2}}}=\sqrt{\dfrac{4d}{g\sin\theta}}$

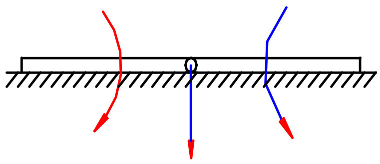
因为 $t_1<t_2$，所以圆盘（a）先到达地面。

10－7 两匀质杆 AC 和 BC 质量均为 m，长度均为 l，在 C 点由光滑铰链相连接，A、B 端放置在光滑水平面上，如图所示。杆系在铅垂面内的图示位置由静止开始运动，试求铰链 C 落到地面时的速度。



习题 10－7 图

解：设铰链 C 刚与地面相碰时速度 $v=v_C$。根据运动学分析 A' 点及 B' 点分别为 $A'C'$ 及 $B'C'$ 杆的速度瞬心，如图（a）



(a)

$$\omega_{AC}=\frac{v_C}{l}=\frac{v}{l}=\omega$$

$$\omega_{BC}=\frac{v_C}{l}=\frac{v}{l}=\omega$$

动能定理：

$$2\cdot mg\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2\cdot 2-0$$

$$mgh=\frac{1}{3}mv^2$$

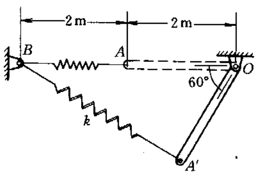
$$v=\sqrt{3gh}$$

10－8 质量为 15kg 的细杆可绕轴转动，杆端 A 连接刚度系数为 k=50N/m 的弹簧。弹簧另一端固结于 B 点，弹簧原长 1.5m。试求杆从水平位置以初角速度 ω_0=0.1rad/s 落到图示位置时的角速度。

解：$T_1=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}ml^2)\omega_0^2$，　$T_2=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}ml^2)\omega^2$

$$W_{12}=mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{k}{2}[(2-1.5)^2-(\sqrt{12}-1.5)^2]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}mg+k(3\sqrt{3}-7)$$



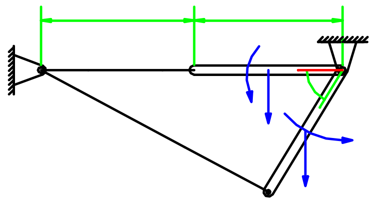
习题 10－8 图

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

$$\frac{1}{6}ml^2(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}mg + k(3\sqrt{3} - 7)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}mg + 6k(3\sqrt{3}-7)}{ml^2} + \omega_0^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}\times 15\times 9.8 + 6\times 50(3\sqrt{3}-7)}{15\times 2^2}} = 1.93\ \text{rad/s}$$



(a)

10－9 在图示机构中，已知：均质圆盘的质量为 m 、半径为 r，可沿水平面作纯滚动。刚性系数为 k 的弹簧一端固定于 B，另一端与圆盘中心 O 相连。运动开始时，弹簧处于原长，此时圆盘角速度为 ω，试求：（1）圆盘向右运动到达最右位置时，弹簧的伸长量；（2）圆盘到达最右位置时的角加速度α及圆盘与水平面间的摩擦力。

B O r A

习题 10－9 图

解:（1）设圆盘到达最右位置时，弹簧的伸长量为 δ，则 $T_1 = \frac{3}{4}mr^2\omega^2$；$T_2 = 0$；$W_{12} = -\frac{1}{2}k\delta^2$

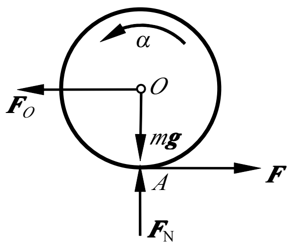
$T_2 - T_1 = W_{12}$ ； $-\frac{3}{4}mr^2\omega^2 = -\frac{1}{2}k\delta^2$ ；

$$\delta = \sqrt{\frac{3m}{2k}}r\omega$$

（2）如图（a）：$J_A\alpha = F_O r$；$J_O\alpha = Fr$

$$\frac{3}{2}mr^2\alpha = k\sqrt{\frac{3m}{2k}}r^2\omega\text{；}\quad \alpha = \omega\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$\frac{1}{2}mr\alpha = F_A\text{；}\quad F_A = r\omega\sqrt{\frac{km}{6}}$$



（a）

10－10 在图示机构中，鼓轮 B 质量为 m，内、外半径分别为 r 和 R，对转轴 O 的回转半径为 ρ，其上绕有细绳，一端吊一质量为 m 的物块 A，另一端与质量为 M、半径为 r 的均质圆轮 C 相连，斜面倾角为 φ，绳的倾斜段与斜面平行。试求：（1）鼓轮的角加速度 α；（2）斜面的摩擦力及连接物块 A 的绳子的张力（表示为 α 的函数）。

解:（1）应用动能定理：$T = W$

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J_O\omega_O^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_C^2$$

其中：$v_A = R\omega_O$；$v_C = r\omega_O$；$\omega_C = \omega_O$；$J_O = m\rho^2$；$J_C = \frac{1}{2}Mr^2$

$$T = \frac{1}{2}(mR^2 + m\rho^2 + Mr^2 + \frac{1}{2}Mr^2)\omega_O^2$$

B r O R C A φ

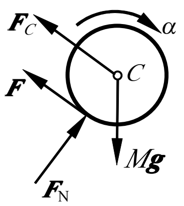
习题 10－10 图

设物块 A 上升距离 s_A 时：$W = Mgs_C\sin\varphi - mgs_A$

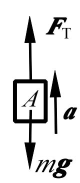
对动能定理的表达式求导：

$$[m(R^2 + \rho^2) + \frac{3}{2}Mr^2]\omega_O\alpha_O = Mgv_C\sin\varphi - mgv_A$$

$$\alpha_O = \alpha_C = \alpha = \frac{2g(Mr\sin\varphi - mR)}{2m(R^2+\rho^2) + 3Mr^2}$$



（a）



（b）

（2）如图（a）：$J_C\alpha = Fr$；　$F=\dfrac{1}{2}Mr\alpha$

如图（b）：　$ma = F_T - mg$；　$F_T = m(g+R\alpha)$

10－11　匀质圆盘的质量为 m_1、半径为 r，圆盘与处于水平位置的弹簧一端铰接且可绕固定轴 O 转动，以起吊重物 A，如图所示。若重物 A 的质量为 m_2；弹簧刚度系数为 k。试求系统的固有频率。

解：设弹簧上 OB 位于铅垂位置时为原长，则动能

$$T=\frac{1}{2}m_2v^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_1r^2)(\frac{v}{r})^2=(\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{4}m_1)v^2$$

$$W=m_2gs-\frac{k}{2}(\frac{s}{r}d)^2=m_2gs-\frac{kd^2}{2r^2}s^2$$

$$T=W$$

$$(\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{4}m_1)v^2=m_2gs-\frac{kd^2}{2r^2}s^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}:\quad (m_2+\frac{1}{2}m_1)va=(m_2g-\frac{kd^2}{r^2}s)v$$

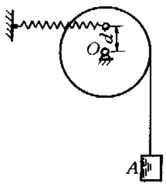
$$(m_2+\frac{1}{2}m_1)a=m_2g-\frac{kd^2}{r^2}s$$

$$(m_2+\frac{1}{2}m_1)\ddot{s}+\frac{kd^2}{r^2}s=m_2g$$

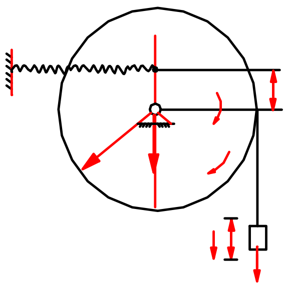
$$\ddot{s}+\frac{kd^2}{r^2(2m_2+m_1)}s=\frac{m_2g}{m_2+\frac{1}{2}m_1}$$

$$\omega_n^2=\frac{2kd^2}{r^2(2m_2+m_1)}$$

$$\omega_n=\frac{d}{r}\sqrt{\frac{2k}{m_1+2m_2}}$$



习题 10－11 图


(a)

10－12　图示圆盘质量为 m、半径为 r，在中心处与两根水平放置的弹簧固结，且在平面上作无滑动滚动。弹簧刚度系数均为 k_0。试求系统作微振动的固有频率。

解：设静止时弹簧的原长，则

动能 $T=\dfrac{1}{2}mv_0^2+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}mr^2)(\dfrac{v_0}{r})^2=\dfrac{3}{4}mv_0^2$

弹力功：$W=-2\times\dfrac{k}{2}\times x^2$

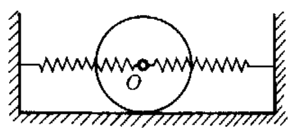
$$\frac{3}{4}mv_0^2=-kx^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}:\quad \frac{3}{2}mv_0a=-2kxv_0$$

$$\frac{3}{2}mv_0\ddot{x}+2kx=0$$

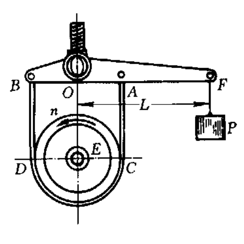
$$\ddot{x}+\frac{4k}{3m}x=0$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{4k}{3m}}$$



习题 10－12 图

10－13　测量机器功率的功率计，由胶带 $ACDB$ 和一杠杆 BOF 组成，如图所示。胶带具有铅垂的两段 AC 和 DB，并套住受试验机器和滑轮 E 的下半部，杠杆则以刀口搁在支点 O 上，借升高或降低支点 O，可以变



习题 10－13 图

更胶带的拉力，同时变更胶带与滑轮间的摩擦力。在 F 处挂一重锤 P，杠杆 BF 即可处于水平平衡位置。若用来平衡胶带拉力的重锤的质量 m=3kg，L＝500mm，试求发动机的转速 n=240r/min 时发动机的功率。

解：设发动机的角速度为 ω。则

$$\omega=\frac{2\pi\ n}{60}=\frac{2\pi\times240}{60}=8\pi\quad(\text{rad/s})$$

又 $\omega=\text{const}$，发动机作等速转动。

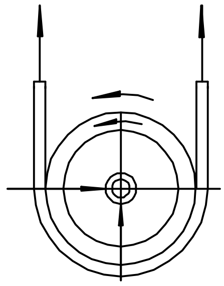
滑轮 E 的角加速度 $\alpha=0$。

滑轮 E 受力分析如图（a）。

由 $\sum M_E=0$

得 $M-(T_1-T_2)R=0$

$$M=(T_1-T_2)R \qquad（1）$$



(a)

取杠杆为研究对象，受力如图（b）。

由 $\sum M_O=0$ 得

$$mgl-(T_1'-T_2')R=0$$

$$mgl=(T_1'-T_2')R \qquad（2）$$

且 $T_1'=T_1$，$T_2'=T_2$ （3）

综合（1）、（2）、（3）可得：

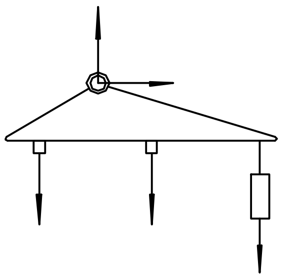
$$M=mgl$$

∴ 发动机的功率

$$P=M\omega=mgl\omega$$

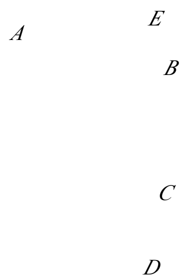
$$=3\times9.8\times0.50\times8\pi$$

$$=0.369(\text{kW})$$



(b)

10－14 在图示机构中，物体 A 质量为 m_1，放在光滑水平面上。均质圆盘 C、B 质量均为 m，半径均为 R，物块 D 质量为 m_2。不计绳的质量，设绳与滑轮之间无相对滑动，绳的 AE 段与水平面平行，系统由静止开始释放。试求物体 D 的加速度以及 BC 段绳的张力。



习题 10－14 图

解：（1）设物块 D 下降距离 s 时，速度为 v_D，则系统动能为：

$$T=\frac{1}{2}(m+m_2)v_D^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2+\frac{1}{2}J_B\omega_B^2+\frac{1}{2}m_1v_A^2$$

其中：$\omega_C=\dfrac{v_D}{R}$；$\omega_B=\dfrac{2v_D}{R}$；$v_A=2v_D$；$J_C=J_B=\dfrac{1}{2}mR^2$

$$T=\frac{1}{2}(m+m_2+\frac{1}{2}m+2m+4m_1)v_D^2=\frac{1}{2}(\frac{7}{2}m+4m_1+m_2)v_D^2$$

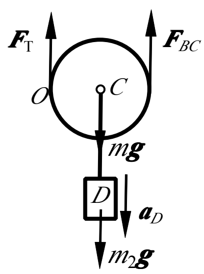
重力的功为：$W=(m+m_2)gs$；

应用动能定理 $T=W$ 并求导：

$$(\frac{7}{2}m+4m_1+m_2)v_Da_D=(m+m_2)gv_D$$

$$a_D=\frac{2(m+m_2)g}{7m+8m_1+2m_2}$$

（2）如图（a），应用相对速度瞬心的动量矩定理：



（a）

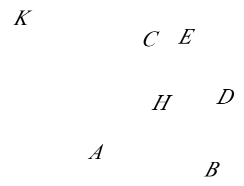
$$J_O\frac{a_D}{R}=(m+m_2)gR-F_{BC}2R；\text{其中：}J_O=\frac{3}{2}mR^2+m_2R^2$$

$$F_{BC}=\frac{1}{2}(m+m_2)g-(\frac{3}{4}m+\frac{1}{2}m_2)\cdot\frac{2(m+m_2)g}{7m+8m_1+2m_2}$$

$$=\frac{(m+m_2)(7m+8m_1+2m_2)g-(3m+2m_2)(m+m_2)g}{2(7m+8m_1+2m_2)}$$

$$=\frac{2(m+m_2)(m+2m_1)g}{7m+8m_1+2m_2}$$

10－15 图示机构中，物块 A、B 质量均为 m，均质圆盘 C、D 质量均为 $2m$，半径均为 R。C 轮铰接于长为 $3R$ 的无重悬臂梁 CK 上，D 为动滑轮，绳与轮之间无相对滑动。系统由静止开始运动，试求（1）物块 A 上升的加速度；（2）HE 段绳的张力；（3）固定端 K 处的约束力。



习题 10－15 图

解：（1）设物块 A 上升距离 s 时，速度为 v_A，则系统动能为：

$$T=\frac{1}{2}(m+2m)v_D^2+\frac{1}{2}J_D\omega_D^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2+\frac{1}{2}mv_A^2$$

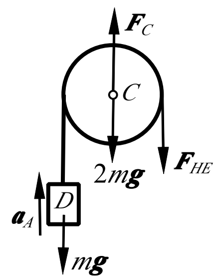
其中：$\omega_C=\frac{v_A}{R}$；$\omega_D=\frac{v_A}{2R}$；$v_D=\frac{v_A}{2}$；$J_C=J_D=mR^2$

$$T=\frac{1}{2}(\frac{m}{4}+\frac{m}{2}+\frac{m}{4}+m+m)v_A^2=\frac{3}{2}mv_A^2$$

重力的功为：$W=(m+2m)g\frac{s}{2}-mgs=\frac{1}{2}mgs$；

应用动能定理 $T=W$ 并求导：$3mv_Aa_A=\frac{1}{2}mgv_A$；$a_A=\frac{1}{6}g$

（2）如图（a），应用动量矩定理：$J_C\frac{a_A}{R}=(F_{HE}-mg)R$



（a）

其中：$J_C=\frac{1}{2}2mR^2+mR^2=2mR^2$

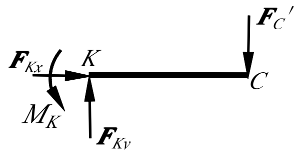
$$F_{HE}=2ma_A+mg=\frac{4}{3}mg$$

应用动量定理：$ma_A=F_C-3mg-F_{HE}$；$F_C=4.5mg$

（3）如图（b），应用平衡方程：$F_{Kx}=0$

$$\sum F_y=0;\quad F_{Ky}-F_C'=0;\quad F_{Ky}=4.5mg$$

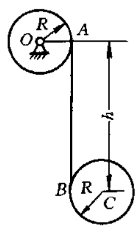
$$\sum M_K(\boldsymbol{F})=0;\quad M_K-F_C'\cdot 3R=0;\quad M_K=13.5mgR$$



（b）

10－16 两个相同的滑轮，视为匀质圆盘，质量均为 m，半径均为 R，用绳缠绕连接，如图所示。如系统由静止开始运动，试求动滑轮质心 C 的速度 v 与下降距离 h 的关系，并确定 AB 段绳子的张力。

解：1、先对 O、C 轮分别用动量矩定理和相对质心动量矩定理：



习题 10－16 图

对 O 轮：$J_O\alpha_O=F_TR$ （1）

对 C 轮：$J_C\alpha_C=F_T'R$ （2）

$J_O=J_C$， $F_T=F_T'$

由（1）、（2）：$\alpha_O=\alpha_C=\alpha$

$\omega_O=\omega_C=\omega$ （3）

2、再对整体用动能定理

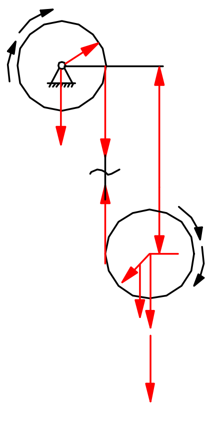
$T_2-T_1=W_{12}$

$\frac{1}{2}J_O\omega_O^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2+\frac{1}{2}mv_C^2=mgh$ （4）

$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$（动系为绳 AB）

$v_C=v_e+v_r=R\omega_O+R\omega_C=2R\omega$ （5）

（3）、（5）代入（4）得：


(a)

$$\frac{5}{2}mR^2\omega^2 = mgh \qquad (6)$$

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{5}} = \frac{1}{5R}\sqrt{10gh}$$

（6）式两边对 t 求导：

$$5mR^2\omega\alpha = mgv_C$$

（5）代入，得：$\alpha = \frac{2g}{5R}$

（5）式对 t 求导，得：$a_C = 2R\alpha = \frac{4g}{5}$

轮心、质心运动定理：$ma_C = mg - F_{\mathrm{T}}$

绳中张力：$F_{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}mg$