今天所做的事，

勿候明天，

自己所做的事，

勿候别人。

——歌德

第一章　复数与复变函数

> 生命，那是自然付给人类去雕琢的宝石。
>
> ——诺贝尔

导 学

复变函数就是自变量为复数的函数。本课程研究的主要对象是在某种意义之下可导的复变函数，通常称为解析函数。为建立这种解析函数的理论基础，在这一章中，首先引入复数的代数运算及其多种表示法；其次介绍复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念，这些概念及性质与一元或二元微积分中相应概念及性质在形式上几乎完全相同，但本质上却有很大差别，应当特别给以关注。

每学一个概念、定理，均要与高等数学中相应部分进行对照，尤其要记住差别。$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是联系高等数学与复变函数的重要桥梁，全书许多定理的表述或证明均须借助于 $u(x,y)$，$v(x,y)$。

习题全解

1. 求下列复数 z 的实部与虚部，共轭复数，模与辐角主值

(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$；　(2) $\dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；

(3) $\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$；　(4) $\mathrm{i}^8 - 4\mathrm{i}^{21} + \mathrm{i}$

解　(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{3-2\mathrm{i}}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})} = \dfrac{3}{13} + \left(\dfrac{-2}{13}\right)\mathrm{i}$

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{3}{13}$；$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{-2}{13}$；$\bar{z} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}\mathrm{i}$；

$$|z|=\frac{1}{\sqrt{13}};\arg z=-\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)$$

(2) $\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-i-\frac{3i-3}{2}=\frac{3}{2}+\left(\frac{-5}{2}\right)i$

$\operatorname{Re}(z)=\frac{3}{2};\operatorname{Im}(z)=-\frac{5}{2};\bar{z}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i;$

$|z|=\frac{\sqrt{34}}{2};\arg(z)=-\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$

(3) $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=\frac{(-4+3i)}{-2}(2-5i)=-\frac{7}{2}-13i$

$\operatorname{Re}(z)=-\frac{7}{2};\operatorname{Im}(z)=-13;\bar{z}=-\frac{7}{2}+13i;$

$|z|=\frac{5}{2}\sqrt{29};\arg z=\operatorname{arctg}\left(\frac{26}{7}\right)-\pi$

(4) $i^8-4i^{21}+i=1-4i+i=1-3i$

$\operatorname{Re}(z)=1;\operatorname{Im}(z)=-3;\bar{z}=1+3i;|z|=\sqrt{10};$

$\arg z=-\operatorname{arctg}3$

2. 当 x,y 等于什么实数时，等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立？

解 由 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 可得

$$(x+1)+i(y-3)=2+8i$$

因此 $\begin{cases}x+1=2\\y-3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=11\end{cases}$ 时等式成立。

3. 证明虚单位 i 有这样的性质：$-i=i^{-1}=\bar{i}$

证明 $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i=\bar{i}$

因此 $-i=i^{-1}=\bar{i}$

4. 证明：

(1) $|z|^2=z\bar{z}$; (2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;

(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$; (4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},z_2\neq0$;

(5) $\bar{\bar{z}}=z$;

(6) $\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(\bar{z}+z),\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

证明 (1) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ 由 $z=x+yi$，得 $|z|^2=x^2+y^2$

$z\cdot\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$ 等式成立。

(2) 设 $z_1=x_1+y_1i,z_2=x_2+y_2i$

则左式 $=\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)}=\overline{(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i}$

$=(x_2\pm x_2)-(y_1\pm y_2)i$

右式 $=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2=\overline{(x_1+y_1i)}\pm\overline{(x_2+y_2i)}=(x_1-y_1i)\pm(x_2-y_2i)$

$=(x_1\pm x_2)-(y_1\pm y_2)i$ ∴ 左 = 右

(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

设 $z_1=x_1+y_1i,z_2=x_2+y_2i$

$\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i}$

$=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i$

$\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=(x_1-y_1i)(x_2-y_2i)$

$=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i$ 等式成立

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},z_2\neq0$;

设 $z_1=x_1+y_1i,z_2=x_2+y_2i$,

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}\right)}=\overline{\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{(x_2^2+y_2^2)}}$

$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\frac{x_1-y_1i}{x_2-y_2i}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)-(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}$ 左 = 右

(5) $\bar{\bar{z}}=z$

设 $z=x+yi$ $\bar{z}=x-yi$ $\overline{(\bar{z})}=x+yi=z$

(6) $\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(\bar{z}+z),\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

设 $z=x+yi$ 则 $\bar{z}=x-yi$

$\frac{1}{2}(\bar{z}+z)=\frac{1}{2}(x-yi+x+yi)=x=\operatorname{Re}(z)$

$\frac{1}{2i}(x+yi-x+yi)=y=\operatorname{Im}(z)$

5. 对任何 z，$z^2=|z|^2$ 是否成立？如果是，就给出证明，如果不是，对哪些 z 值才成立？

答：不成立，例如 $z=i,z^2=i^2=-1$，而 $|z|^2=[i]^2=1,z^2\neq|z|^2$。只有 z 为实数时，等式 $z^2=|z|^2$ 才成立。

6. 当 $|z|\leqslant1$ 时，求 $|z^n+a|$ 的最大值，其中 n 为正整数，a 为复数。

解 $|z^n+a|\leqslant|z^n|+|a|\leqslant1+|a|$ 故 $1+|a|$ 为所求。

7. 判定下列命题的真假：

(1) 若 c 为实常数，则 $c=\bar{c}$；　(2) 若 z 为纯虚数，则 $z\neq\bar{z}$；

(3) $i<2i$；　(4) 零的辐角是零；

(5) 仅存在一个数 z，使得 $\frac{1}{z}=-z$；　(6) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$；

(7) $\frac{1}{i}\bar{z}=\overline{iz}$

解　(1) 真命题；　(2) 真命题；　(3) 假命题；　(4) 假命题；

(5) 假命题；　(6) 一般不真；　(7) 真命题

8. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式：

(1) i；　(2) -1；

(3) $1+i\sqrt{3}$；　(4) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$；

(5) $\frac{2i}{-1+i}$；　(6) $\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}$

解　(1) i

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(2) -1

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{i\pi}$$

(3) $1+i\sqrt{3}$

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

(4) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})i}$$

(5) $\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}e^{(-\frac{\pi}{4}i)}$

(6) $\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}=\frac{(e^{i5\varphi})^2}{(e^{-i3\varphi})^3}=e^{i19\varphi}=\cos19\varphi+i\sin19\varphi$

9. 将下列坐标变换公式写成复数的形式：

(1) 平移公式：$\begin{cases}x=x_1+a_1\\y=y_1+b_1\end{cases}$

(2) 旋转公式：$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$

解　(1) 平移公式：$\begin{cases}x=x_1+a_1\\y=y_1+b_1\end{cases}$

$$z=x+yi=(x_1+a_1)+(y_1+b_1)i$$

$$=(x_1+y_1i)+(a_1+b_1i)=z_1+A\qquad(\text{其中 }A=a_1+ib_1)$$

(2) 旋转公式：$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$

设　$z=x+yi,\quad z_1=x_1+y_1i$

则　$z=(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+i(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)$

$$=(\cos\alpha)(x_1+iy_1)+(-y_1+ix_1)\sin\alpha$$

$$=(\cos\alpha)z_1+i(\sin\alpha)z_1$$

$$=z_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

$$=z_1e^{i\alpha}$$

10. 一个复数乘以 $-i$，它的模与辐角有何改变？

答：模不变，辐角减小 $\frac{\pi}{2}$。

11. 证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ 并说明其几何意义。

证明　左 $=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$

$$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$

$$=|z_1|^2+z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+|z_2|^2+|z_1|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+|z_2|^2$$

$$=2(|z_1|^2+|z_2|^2)=\text{右}$$

几何意义：平行四边形两条对角线的平方和等于平行四边形相邻两边平方和的两倍。

12. 证明下列问题：

(1) 任何有理分式函数 $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+iY$ 的形式，其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数；

(2) 如果 $R(z)$ 为(1)中的有理分式函数，但具有实系数，那末 $R(\bar{z})=X-iY$；

(3) 如果复数 $a+ib$ 是实系数方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根，那末 $a-ib$ 也是它的根。

证明　(1) 令 $z=r(\cos x+i\sin x)$，$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$

$$Q(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m\quad(a_i,b_i\in R)$$

则 $$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)\overline{Q(z)}}{|Q(z)|^2}$$

而 $$P(z)\overline{Q(z)}=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\cdots+C_n+C_{n+1}\bar z+\cdots+C_{n+m}\bar z^m$$

$$=C_0r^n(\cos nx+i\sin nx)+\cdots$$

$$+C_{n+m}r^m[\cos(-mx)+i\sin(-nx)]$$

$$=[C_0r^n\cos nx+\cdots+C_{n+m}\cos(-mx)]+[C_0r^n\sin nx+\cdots$$

$$+C_{n+m}r^m\sin(-mx)]$$

令 $$X=\frac{1}{|Q(z)|^2}[C_0r^n\cos nx+\cdots+C_{n+m}r^m\cos(-mx)]$$

$$Y=\frac{1}{|Q(z)|^2}[C_0r^n\sin nx+\cdots+C_{n+m}r^m\sin(-mx)]$$

则 $$R(z)=X+Yi$$

(2) $R(\bar z)=\dfrac{P(\bar z)}{Q(\bar z)}=\dfrac{P(\bar z)Q(z)}{|Q(z)|^2}$ 由上面所证，类似可得

$$\frac{P(\bar z)Q(z)}{|Q(z)|^2}=X-Yi$$

(3) 令 $R(z)=a_0z^n+\cdots+a_n$

当 $z=a+ib$ 时 $R(z)=0$,(将 0 看做 $0+i0$)

由(1)(2)可得 $\bar z$ 使得

$$R(\bar z)=a_0(\bar z)^n+\cdots+a_{n-1}\bar z+a_n=0-i0=0$$

因此 $a-ib$ 也是它的根。

13. 如果 $z=e^{it}$，证明：

(1) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$；　　(2) $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$

证明　由于 $z=e^{it}$ 故可得 $z=\cos t+i\sin t$

(1) $$z^n+\frac{1}{z^n}=(\cos nt+i\sin nt)+\frac{1}{(\cos nt+i\sin nt)}$$

$$=\cos nt+i\sin nt+\cos nt-i\sin nt$$

$$=2\cos nt$$

(2) $$z^n-\frac{1}{z^n}=(\cos nt+i\sin nt)-\frac{1}{(\cos nt+i\sin nt)}$$

$$=\cos nt+i\sin nt-\cos nt+i\sin nt$$

$$=2i\sin nt$$

14. 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}-i)^5$；　　(2) $(1+i)^6$

(3) $\sqrt[6]{-1}$；　　(4) $(1-i)^{1/3}$

解　(1) $$(\sqrt{3}-i)^5=\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{-6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^5$$

$$=32\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-16\sqrt{3}-16i$$

(2) $$(1+i)^6=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$$

$$=8\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-8i$$

(3) $$\sqrt[6]{-1}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{6}}$$

$$w_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\quad k=0,1,2,3,4,5$$

$$w_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{1}\quad w_1=i\quad w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\quad w_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

$$w_4=-i\quad w_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

(4) $$(1-i)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$w_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\quad k=0,1,2$$

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos-\frac{\pi}{12}+i\sin-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15}{12}\pi+i\sin\frac{15}{12}\pi\right)$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

15. 若 $(1+i)^n=(1-i)^n$，试求 n 的值。

解　由 $(1+i)^n=(1-i)^n$ 可得

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{-n\pi}{4}\right)$$

即 $\sin\dfrac{n\pi}{4}=\sin\dfrac{-n\pi}{4}$　$\dfrac{n\pi}{4}=-\dfrac{n\pi}{4}+2k\pi$　$n=4k$，k 为整数

16. (1) 求方程 $z^3+8=0$ 的所有根；

(2) 求微分方程 $y'''+8y=0$ 的一般解。

解　(1) $z^3=8(\cos\pi+i\sin\pi)$

$$z_k = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) \quad (k=0,1,2)$$

$z_0 = 1+\sqrt{3}i \quad z_1 = -2 \quad z_2 = 1-\sqrt{3}i$

(2) 求微分方程 $y''' + 8y = 0$ 的一般解。

特征方程为 $\lambda^3 + 8 = 0$ 由上式可知特征根为 $\lambda_1 = -2 \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}i$

因此一般解为 $y = c_1e^{-2t} + e^t(c_2\cos\sqrt{3}t + c_3\sin\sqrt{3}t)$，其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数。

17. 在平面上任意选一点 z，然后在复平面上画出下列各点的位置：

$$-z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{z}$$

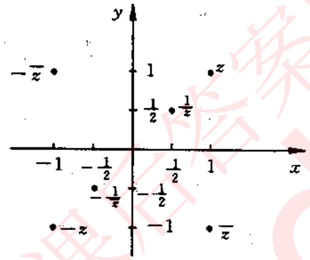

图 1-1

解 设 $z = 1+i$ 则 $-z = -1-i$，

$\bar{z} = 1-i$，$-\bar{z} = -1+i$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

18. 已知两点 z_1 与 z_2（或已知三点 z_1,z_2,z_3），问下列各点 z 位于何处？

(1) $z = \frac{1}{2}(z_1+z_2)$；　　(2) $z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$，其中 λ 为实数；

(3) $z = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$

解 (1) $z = \frac{1}{2}(z_1+z_2)$：位于 z_1 与 z_2 连线中点上；

(2) $z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$（$\lambda$ 为实数）：位于 z_1,z_2 连线上；

(3) $z = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$：位于三角形 z_1,z_2,z_3 重心。

19. 设 z_1,z_2,z_3 三点适合条件：$z_1+z_2+z_3 = 0$，$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$。证明：$z_1,z_2,z_3$ 是内接于单位圆 $|z| = 1$ 的一个正三角形的顶点。

证明

$$\because z_1+z_2+z_3 = 0$$
$$\therefore z_3 = -(z_1+z_2)$$
$$\overline{z_3} = -(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$

$$|z_3|^2 = z_3\overline{z_3} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$$

$$\because |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$
$$\therefore (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = -1$$

$$|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$$
$$= 1+1-(-1) = 3$$

$|z_1-z_2| = \sqrt{3}$　　同理 $|z_1-z_3| = |z_2-z_3| = \sqrt{3}$

$\therefore z_1,z_2,z_3$ 为正三角形。

20. 如果复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，证明 $|z_2-z_1| = |z_3-z_1| = |z_2-z_3|$，并说明这些等式的几何意义。

证明 由 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$

$$= \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\left(\because \frac{(z_2-z_1)+(z_1-z_3)}{(z_3-z_1)+(z_2-z_3)} = \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\right)$$

$$|z_2-z_1|^2 = |z_3-z_1||z_2-z_3| \qquad (1)$$

$$|z_3-z_1|^2 = |z_2-z_1||z_2-z_3| \qquad (2)$$

$\frac{(1)}{(2)}$ 得　$$\frac{|z_2-z_1|^2}{|z_3-z_1|^2} = \frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}$$

$\therefore |z_2-z_1| = |z_3-z_1|$，同理 $|z_1-z_2| = |z_2-z_3|$ 这几个式子表明 z_1,z_2,z_3 构成一个正三角形。

21. 指出下列各题中点 z 的轨迹或所在范围，并作图：

(1) $|z-5| = 6$；　　(2) $|z+2i| \geq 1$

(3) $\mathrm{Re}(z+2) = -1$；　　(4) $\mathrm{Re}(i\bar{z}) = 3$

(5) $|z+i| = |z-i|$；　　(6) $|z+3| + |z+1| = 4$

(7) $\mathrm{Im}(z) \leq 2$；　　(8) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right| \geq 1$

(9) $0 < \arg z < \pi$；　　(10) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$

解 (1) $|z-5| = 6$　以 5 为圆心，以 6 为半径的圆（作图略，下同）

(2) $|z+2i| \geq 1$　在复平面上以 $(0,-2)$ 为圆心，以 1 半径的圆及圆外部区域

(3) $\mathrm{Re}(z+2) = -1$　直线 $x = -3$

(4) $\mathrm{Re}(i\bar{z}) = 3$　直线 $y = 3$

(5) $|z+i| = |z-i|$　实轴

(6) $|z+3|+|z+1|=4$　以$(-3,0)$,$(-1,0)$为焦点,以4为长轴的椭圆

(7) $\mathrm{Im}(z)\leqslant 2$　$y=2$直线及其下方区域

(8) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$　直线$x=\dfrac{5}{2}$及其左方区域

(9) $0<\arg z<\pi$　不包括实轴的上半平面

(10) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$　以$(0,i)$为起始点的$y-x=1$的射线$(x>0)$

22. 描出下列不等式所确定的区域或闭区域,并指明它是有界的还是无界的,单连通的还是多连通的:

(1) $\mathrm{Im}(z)>0$;　(2) $|z-1|>4$

(3) $0<\mathrm{Re}(z)<1$;　(4) $2\leqslant|z|\leqslant 3$

(5) $|z-1|<|z+3|$;　(6) $-1<\arg z<-1+\pi$

(7) $|z-1|<4|z+1|$;　(8) $|z-2|+|z+2|\leqslant 6$

(9) $|z-2|-|z+2|>1$;　(10) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leqslant 4$

解　本题的解法,是将条件转化为直角坐标。(1) $\mathrm{Im}(z)>0$　无界,单连通域。不包括实轴的上半平面。

(2) $|z-1|>4$　无界,多连通,圆周$(x-1)^2+y^2=16$的外部区域(不包括圆周)。

(3) $0<\mathrm{Re}(z)<1$　无界,单连通。由直线$x=0$及$x=1$所构成的带形区域,不包括两直线在内。

(4) $2\leqslant|z|\leqslant 3$　有界,多连通,闭。由$x^2+y^2=4$与$x^2+y^2=9$所围的圆环域;

(5) $|z-1|<|z+3|$　无界,单连通。直线$x=-1$右边的平面区域,不包括直线在内。

(6) $-1<\arg z<-1+\pi$　无界,单连通。由射线$\theta=-1$及$\theta=-1+\pi$构成的角形域,不包括两射线在内。

(7) $|z-1|<4|z+1|$　无界,单连通。中心在$z=-\dfrac{17}{15}$,半径为$\dfrac{8}{15}$的圆周的外部区域(不包括圆周)。

(8) $|z-2|+|z+2|\leqslant 6$　有界,单连通,闭。$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$及其围成区域。

(9) $|z-2|-|z+2|>1$　无界,单连通。双曲线$4x^2-\dfrac{4}{15}y^2=1$的左边分支的内部(含焦点$z=-2$的那部分)区域。

(10) $z\bar{z}-(2+i)z-(z-i)\bar{z}\leqslant 4$　有界,单连通,闭。$(x-2)^2+(y+1)^2=9$及其内部区域。

23. 证明复平面上的直线方程可写成:

$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c$,($\alpha\neq 0$为复常数,$c$为实常数)。

证明　设$\alpha=a+bi$　$z=x+yi$

$$
\begin{aligned}
&(a+bi)(x-yi)+(a-bi)(x+yi)\\
&=ax-ayi+bxi+by+ax+ayi-bxi+by\\
&=2(ax+by)=c
\end{aligned}
$$
以上每步均可倒推,得证。

24. 证明复平面上的圆的方程可写成:

$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0$,(其中$\alpha$为复常数,$c$为实常数)。

证明　设$z=x+yi$　$\alpha=a+bi$

$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0$

$x^2+y^2+(a+bi)(x-yi)+(a-bi)(x+yi)+c=0$

$x^2+y^2+ax-ayi+bxi+by+ax+ayi-bxi+by+c=0$

$x^2+y^2+2(ax+by)+c=0$

$(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2-c$ 以上每步均可倒推,得证。

25. 将下列方程(t为实参数)给出的曲线用一个实直角坐标方程表出:

(1) $z=t(1+i)$;　(2) $z=a\cos t+ib\sin t$,(a,b为实常数)

(3) $z=t+\dfrac{i}{t}$;　(4) $z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$

(5) $z=a\,\mathrm{ch}t+ib\,\mathrm{sh}t$,($a,b$为实常数);

(6) $z=ae^{it}+be^{-it}$;

(7) $z=e^{\alpha t}$($\alpha=a+bi$为复数)

解　(1) $z=t(1+i)$

设　$z=x+yi$

则　$\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases}\Rightarrow x=y$

(2) $z=a\cos t+ib\sin t$

设　$z=x+yi$

则　$\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(3) $z=t+\dfrac{i}{t}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases} \quad xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

(4) $z = t^2 + \dfrac{1}{t^2}i$ $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

则 $$xy = 1 \quad (x > 0, y > 0)$$

(5) $z = a\mathrm{ch}t + ib\mathrm{ch}t$

$x = a\mathrm{ch}t = \dfrac{a(e^t + e^{-t})}{2}$

$y = b\mathrm{ch}t = \dfrac{b(e^t - e^{-t})}{2}$ 得 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(6) $z = ae^{it} + be^{-it}$

$= a\cos t + ia\sin t + b\cos t - bi\sin t$

$= (a+b)\cos t + (a-b)\sin t i$

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t \\ y = (a-b)\sin t \end{cases} \quad \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1$$

(7) $z = e^{at}$($a = a + bi$ 为复数)

$= e^{(a+bi)t} = e^{at} \cdot e^{bti}$

$= e^{at} \cdot (\cos bt + i\sin bt)$

$$\begin{cases} x = \cos bte^{at} \\ y = \sin bte^{at} \end{cases} \quad \frac{y}{x} = \mathrm{tg}bt \quad t = (\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x})/b$$

$$x^2 + y^2 = e^{at} = e^{\frac{2a}{b}\cdot\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$$

26. 函数 $w = \dfrac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线映射成 w 平面上怎样的曲线?

(1) $x^2 + y^2 = 4$;　　(2) $y = x$

(3) $x = 1$;　　(4) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

解　设 z 平面上为　$z = x + iy$, w 平面上点为　$w = a + bi$

(1) $x^2 + y^2 = 4$

$$a + bi = \frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{4} - \frac{yi}{4}$$

$$\begin{cases} x = 4a \\ y = -4b \end{cases} \quad x^2 + y^2 = (4a)^2 + (-4b)^2 = 16a^2 + 16b^2 = 4$$

$a^2 + b^2 = \dfrac{1}{4}$　以(0,0)为圆心,以 $\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆

(2) $y = x$

$$a + bi = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y}i$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2x} \\ b = -\dfrac{1}{2y} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2a} \\ y = -\dfrac{1}{2b} \end{cases} \quad x = y \Rightarrow \frac{1}{2a} = -\frac{1}{2b} \quad a = -b \text{ 为直线}$$

(3) $x = 1$ 设 $z = x + yi$

$$\begin{cases} a = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ b = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{1 + y^2} \\ b = \dfrac{-y}{1 + y^2} \end{cases} \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{1 + y^2} = a$$

$(a - \dfrac{1}{2})^2 + b^2 = \dfrac{1}{4}$　以 $(\dfrac{1}{2}, 0)$ 为圆心,以 $\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆

(4) $(x-1)^2 + y^2 = 1$　设 $z = x + yi$

$$\begin{cases} a = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ b = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad x = (x^2 + y^2)a = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$\dfrac{1}{a^2 + b^2} = \dfrac{2a}{a^2 + b^2}$　$a = \dfrac{1}{2}$ 为直线

27. 已知映射 $w = z^3$,求:

(1) 点 $z_1 = i, z_2 = 1 + i, z_3 = \sqrt{3} + i$ 在 w 平面上的象;

(2) 区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的象

解　(1) 设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$w = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

$\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ 在 w 上的象为 $\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi = -i$

同理　z_2 象为 $-2 + 2i$　z_3 的象为 $8i$

(2) 区域　$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的象　$0 < \arg w < \pi$

28. 证明 §6 定理二与定理三。

证明　(1) 证定理二

设　$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$　$A = u_0 + iv_0$　$z_0 = x_0 + iy_0$

$g(z) = m(x,y) + in(x,y)$　$B = m_0 + in_0$　$z_0 = x_0 + iy_0$

因为由 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，根据定理一，可得

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y) = u_0 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y) = v_0$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} m(x,y) = m_0 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} n(x,y) = n_0$$

1) 则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[u(x,y)\pm m(x,y)] = u_0 \pm m_0 \quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[v(x,y)\pm n(x,y)] = v_0 \pm$ n_0 根据定理一，$\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)] = A \pm B$

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}(u+\mathrm{i}v)(m+\mathrm{i}n)$

$$= u_0m_0 - v_0n_0 + (m_0v_0 + u_0n_0)\mathrm{i} = AB$$

3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\dfrac{(u+\mathrm{i}v)}{(m+\mathrm{i}n)}$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\frac{um+un-(un+vm)\mathrm{i}}{m^2+n^2} = \frac{A}{B}(B\neq 0)$$

(2) 证定理三　$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处连续，

由连续定义可知：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \quad A = u_0 + \mathrm{i}v_0 \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$

根据定理一，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y) = u_0 \quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y) = v_0$

则　　$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，必要性得证。

由题意，充分性显然成立，所以定理三成立。

29. 设函数 $f(z)$ 在 z_0 连续且 $f(z_0)\neq 0$，那末可找到 z_0 的小邻域，在这邻域内 $f(z)\neq 0$。

证明　$f(z)$ 在 z_0 连续，设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z_0) = A(A\neq 0)$，不妨设 $A > 0$。

由极限定义，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{|A|}{2}$，必存在一正数 $\delta(\varepsilon_0)$，使得当 $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon_0)$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon_0$。

即 $f(z) - A| < \dfrac{A}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{A}{2} < |f(z)| < \dfrac{3}{2}A$。$A < 0$ 情形，类似可证。得证

30. 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，证明 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内是有界的，即存在一个实常数 $M > 0$，使在 z_0 的某一去心邻域内有 $|f(z)| \leqslant M$。

证明　由 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，根据极限定义，(如上题所证) 可得 $|f(z)| < \dfrac{3}{2}|A|$ 在某一 $0 < |z - z_0| < \delta$ 邻域内，$f(x) \leqslant M$ 取 $M = \dfrac{3}{2}|A|$

31. 设

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z}{\bar z} - \frac{\bar z}{z}\right), (z\neq 0)$$

试证：当 $z\to 0$ 时，$f(z)$ 的极限不存在。

证明　设 $z = x + y\mathrm{i}$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z}{\bar z} - \frac{\bar z}{z}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{x+y\mathrm{i}}{x-y\mathrm{i}} - \frac{x-\mathrm{i}y}{x+\mathrm{i}y}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{x^2+2xy\mathrm{i}-y^2-x^2+2xy\mathrm{i}+y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 极限不存在(由高等数学下册知)

$\therefore \lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在。

32. 试证 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续。

证明　(1) $\arg z$ 在原点未定义，故不连续。

(2) 在负实轴上取一点 $P(x,0)(x < 0)$

当 z 在上半平面上时 $z\to P$，$\lim\limits_{y\to 0^+}(\arg z) = \pi$

当 z 在下半平面 $z\to P$，$\lim\limits_{y\to 0^-}(\arg z) = -\pi$

$\therefore \arg(z)$ 在 $P(x,0)(x < 0)$ 处不连续

由 $x < 0$ 的任意性知，$\arg z$ 在原点与负实轴上不连续。

流线方程　$x(y+1)=c_1$ 即 $y=\dfrac{c_1}{x}-1$

势函数　$\varphi(x,y)=x^2-(y+1)^2$

等势线方程　$x^2-(y+1)^2=c_2$

(2) $f(z)=z^3=(x+yi)^3=(x^2-y^2+2xyi)(x+yi)$

$=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

$f'(z)=3z^2=3(x^2-y^2+2xyi)$

$v=\overline{f'(z)}=3\bar{z}^2=3(x^2-y^2-2xyi)$

流函数　$\Psi(x,y)=3x^2y-y^3$

流线方程　$(3x^2-y^2)y=c_1$

势函数　$\varphi(x,y)=x(x^2-3y^2)$

等势线方程　$x(x^2-3y^2)=c_2$

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

$f'(z)=-\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$

$v=\overline{f'(z)}=\dfrac{2x^3+2xy^2+2x+(2x^2y+2y^3-2y)i}{(x^2+y^2+1)^2+4x^2y^2}$

流函数　$\Psi(x,y)=\dfrac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

流线方程　$(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2=c_1xy$

势函数　$\varphi(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}$

等势线方程　$\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}=c_2$

第三章　复变函数的积分

古往今来人们开始探索，都应起源于对自然万物的惊异。

——亚里士多德

导　学

学习本章，核心是掌握复积分的计算。后面第四章用级数求积分，第五章用留数计算积分，均是这一问题的发展。在本章习题中，编排了相当比例的复积分计算题。您随意抽取一份复变函数的考试试卷，其中定会有一定分数的考题来测试复积分计算的能力。

本章介绍的复积分计算，一分为三：其一，与《高等数学》中曲线积分的计算公式类似，将曲线的参数方程代入，化为定积分计算；其二，求不定积分，再用牛顿-莱布尼兹公式计算；其三，用公式：$f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ (n=0,1,2,\cdots)$ 计算。$n=0$，即柯西积分公式；$n=1,2,\cdots$ 即高阶导数公式。

另外，已知解析函数的实部或虚部，求解析函数的方法有三种：① 偏积分法；② 不定积分法；③ 线积分法。可在演算题目的过程中，对比掌握。

柯西 - 古萨基本定理有极高的理论价值。

习题全解

1. 沿下列路线计算积分 $\int_0^{3+i}z^2dz$

(1) 自原点至 $3+i$ 的直线段；

(2) 自原点沿实轴至 3，再由 3 铅直向上至 $3+i$；

(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向向右至 $3+i$。

第二章　解析函数

任何节约归根到底是时间的节约。

——马克思

导 学

解析函数是复变函数研究的主要对象，在理论和实践中有着广泛的应用。本章首先引入复变函数导数概念和求导法则，在此基础上定义了解析函数的概念，并着重介绍了判断函数可导和解析的判别方法；其次，把我们熟知的初等函数推广到复数域上来，并研究其解析性；最后以平面流速场和静电场的复势为例，说明解析函数在研究平面场问题中的应用。

学习本章的主要手段是"推导"。本章习题中证明题所占的比例高居全书各章之首。对初等函数的有效把握，须建立在熟练推导之上。比如，三角函数、双曲函数及其反函数，是一个"关系网"，自己拿笔推导数遍后，"自然"就掌握了。

柯西-黎曼方程：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，是全书最重要的公式之一。第三章还会回头研究本公式。

习题全解

1. 利用导数定义推出：

(1) $(z^n)'=nz^{n-1}$（n 为正整数）；　　(2) $\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}$

证明　(1) 令 $f(z)=z^n$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$

当 $n=1$ 时，

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)-z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta z}=1=1\cdot z^{1-1}$$

即

$$(z^1)'=1\times z^{1-1}$$

设当 $n=k$ 时，有 $(z^k)'=kz^{k-1}$

则　$n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}(z^n)'&=(z^{k+1})'=(z\cdot z^k)'=z'\cdot z^k+z(z^k)'\\&=1\cdot z^k+z\cdot k\cdot z^{k-1}\\&=z^k(k+1)=nz^{n-1}\end{aligned}$$

由数学归纳法原理知：

$$(z^n)=nz^{n-1}\quad(n\text{ 为正整数})$$

(2) $(\frac{1}{z})'=-\frac{1}{z^2}$

证明　令 $f(z)=\frac{1}{z}$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{-\Delta z}{z^2+\Delta z\cdot z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{z^2+\Delta z\cdot z}=-\frac{1}{z^2}$$

2. 下列函数何处可导？何处解析？

(1) $f(z)=x^2-iy$；　　(2) $f(z)=2x^3+3y^3i$

(3) $f(z)=xy^2+ix^2y$；　　(4) $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$

解　(1) $f(z)=x^2-iy$

令 $u=x^2,v=-y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即

$$2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

只在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上可导，而在复平面上处处不解析。

(2) $f(z)=2x^3+i3y^3$

$$u=2x^3,v=3y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial v}{\partial y}=9y^2$$

若 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

有 $$6x^2=9y^2$$

即 $$\sqrt{2}\,x=\pm\sqrt{3}\,y$$

即只在 $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\,y=0$ 上可导，但在复平面上处处不解析。

(3) $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$

$$u=xy^2,v=x^2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\frac{\partial v}{\partial y}=x^2$$

满足 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $y^2=x^2\quad 2xy=-2xy\Rightarrow y=\pm x,x=0$ 或 $y=0\Rightarrow x=0,y=0$

即只在 $z=0$ 处可导，在复平面上处处不解析。

(4) $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$

$u=\sin x\operatorname{ch}y,\quad v=\cos x\operatorname{sh}y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\operatorname{sh}y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\operatorname{sh}y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\therefore f(z)$ 在复平面上处处可导，处处解析。

3. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域，并求出其导数：

(1) $(z-1)^5$；　(2) $z^3+2\mathrm{i}z$

(3) $\dfrac{1}{z^2-1}$；　(4) $\dfrac{az+b}{cz+d}$(c,d 中至少有一个不为 0)

解　(1) $(z-1)^5$

$f'(z)=5(z-1)^4$，$f(z)$ 在复平面内处处解析。

(2) $z^3+2\mathrm{i}z$

$f'(z)=3z^2+2\mathrm{i}$，$f(z)$ 在复平面内处处解析。

(3) $\dfrac{1}{z^2-1}$

$f'(z)=\dfrac{-2z}{(z^2-1)^2},\quad z^2-1=0,z=\pm1$

除 $z=\pm1$ 点外，$f(z)$ 在复平面上处处解析。

(4) $\dfrac{az+b}{cz+d}$(c,d 中至少有一个不为 0)

$$f'(z)=\frac{a(cz+d)-(az+b)\cdot c}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

若 $c=0$，则处处解析，若 $c\neq0,cz+d=0,z=-\dfrac{d}{c}$

故除 $z=-\dfrac{d}{c}$ 点外，$f(z)$ 在复平面上处处解析。

4. 求下列函数的奇点：

(1) $\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$；　(2) $\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$

解　(1) 由 $z(z^2+1)=0$ 得 $z=0,z=\pm\mathrm{i}$

奇点：$0,\pm\mathrm{i}$

(2) 由 $(z+1)^2(z^2+1)=0$，得 $z=\pm\mathrm{i},z=-1$

奇点：$\pm\mathrm{i},-1$

5. 复变函数的可导性与解析性有什么不同？判断函数的解析性有哪些方法？

答：复变函数的可导性与解析性在区域内一致。在某一点不一致，解析一定可导，但在某一点可导，不一定解析。

三种方法：① 定义法；② 定理一；③ 定理三。

6. 判断下列命题的真假。若真，请给以证明；若假，请举例说明。

(1) 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，那末 $f'(z_0)$ 存在；

命题为假。

例如，$f(z)=x+2y\mathrm{i}$

(2) 如果 $f'(z_0)$ 存在，那末 $f(z)$ 在 z_0 解析；

命题为假。

例如，$f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 可导，但不解析。

(3) 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导；

命题为假。

例如，见上例，不解析的点叫奇点，但可能有导数。

(4) 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那末 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点；

命题为假。

例如，$f(z)=\dfrac{1}{z-1},g(z)=\dfrac{-1}{z-1}$

$z_0=1$ 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一奇点，但不是 $f(z)+g(z)=0$ 和 $f(z)/g(z)=-1$ 的奇点。

(5) 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导(指偏导数存在)，那末 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 亦可

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\frac{y}{r^2}$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{y}{r^2}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

即
$$x\frac{\partial u}{\partial r}-y\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\qquad(1)$$

由 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{r^2}=-\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\frac{y}{r^2}$$

即
$$y\frac{\partial u}{\partial r}+x\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\qquad(2)$$

仅将 $\frac{\partial u}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial r}$ 看做线性方程组中的 x_1,x_2，其余看做系数 a_{11},a_{12} 等，

联立求解(1)(2)得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

10. 证明：如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那末 $f(z)$ 是常数。

(1) $f(z)$ 恒取实值；　(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；

(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数；　(4) $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数；

(5) $au+bv=c$，其中 a,b 与 c 为不全为零的实常数

证明　(1) $f(z)\equiv u(x,y)$ 即 $v(x,y)\equiv 0$

于是，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$f(z)$ 解析则 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$，且满足 $C-R$ 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$\therefore f'(z)=0,\quad f(z)\equiv C$

(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析

题设 $f(z)=u+iv$ 在 D 内解析，

有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\qquad(1)$$

又　$\overline{f(z)}=u-iv$ 在 D 内解析得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\qquad(2)$$

由(1)(2)得　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$\therefore u\equiv C_1,v=C_2$

$\therefore f(z)=C_1+iC_2$

(3) $|f(z)|$ 在 D 内为一常数，

证法一　若 $|f(z)|\equiv C=0$ 则 $f(z)=0$ 成立

若 $|f(z)|\equiv C\neq 0$ 则 $f(z)\neq 0$

且有

$$f(z)\cdot\overline{f(z)}=C^2$$

即
$$\overline{f(z)}=\frac{C^2}{f(z)}\text{ 也解析}$$

于是由(2)知　$f(z)\equiv C$

证法二　由 $f(z)=u+iv$

得
$$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}=C\neq 0$$

上式两边分别对 x,y 求偏导

$$\frac{2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}}{2\sqrt{u^2+v^2}}=0$$

$$\frac{2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}}{2\sqrt{u^2+v^2}}=0$$

即
$$\begin{cases}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

题设 $f(z)$ 在 D 内解析，

则满足 $C-R$ 方程：　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

即
$$\begin{cases}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0 & (1)\\ v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}=0 & (2)\end{cases}$$

仅将$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$看成线性方程组中的$x_1,x_2$，其余看成$a_{11},a_{12}$等系数

系数矩阵：$\begin{vmatrix} u & v \\ v & -u \end{vmatrix} = -(u^2+v^2) = -C^2 \neq 0$

由克莱姆法则有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

即 $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow u \equiv c_1, v \equiv c_2 \Rightarrow f(z) \equiv c_1 + ic_2$$

(4) $\arg f(z)$ 在 D 内为一常数

证明　设 $\arg f(z) = \theta \equiv c$，

则$\frac{v}{u} = \mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}c = c'$

$v = u \cdot c'$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = c'\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -c'\frac{\partial u}{\partial x}$

即$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - c'\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ c'\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$

系数矩阵 $\begin{vmatrix} 1 & -c' \\ c' & 1 \end{vmatrix} = 1 + c'^2 \neq 0$

由克莱姆法则知：$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$，再由 C-R 方程得$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

于是，$u \equiv c_1, v \equiv c_2$

即，$f(z) = c_1 + ic_2$

(5) $au + bv = c$

证明　若 $a = 0$，则 $bv = c$，v 为实常数；由 $f(z)$ 解析，满足 C-R 方程，可知 u 可为定常数；于是 $f(z)$ 为常数。

若 $a \neq 0$，由 $au + bv = c$　得 $u = \frac{c - bv}{a}$

有$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}$

于是$\frac{\partial v}{\partial y} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{\partial v}{\partial y}$

即$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right]\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\therefore u \equiv c_1, v = c_2$

$\therefore f(z) = c_1 + ic_2$

11. 下列关系是否正确？

(1) $\overline{e^z} = e^{\bar z}$；　　(2) $\overline{\cos z} = \cos\bar z$

(3) $\overline{\sin z} = \sin\bar z$

解　(1) $\overline{e^z} = e^{\bar z}$ 正确。因为：

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\overline{e^z} = e^x(\cos y - i\sin y)$

而 $$e^{\bar z} = e^{\overline{x+iy}} = e^{x-iy} = e^x \cdot e^{-iy}$$
$$= e^x[\cos(-y) + i\sin(-y)]$$
$$= e^x(\cos y - i\sin y)$$

$\overline{e^z} = e^{\bar z} = e^x(\cos y - i\sin y)$

(2) $\overline{\cos z} = \cos\bar z$ 正确。因为：

$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cdot \mathrm{ch}y - i\sin x\mathrm{sh}y$

$\overline{\cos z} = \cos x\mathrm{ch}y + i\sin x\mathrm{sh}y$

而 $$\cos\bar z = \cos(\overline{x+iy}) = \cos(x - iy) = \cos x\mathrm{sh}y + i\sin x\mathrm{sh}y$$

$\overline{\cos z} = \cos\bar z = \cos x\mathrm{sh}y + i\sin x\mathrm{sh}y$

(3) $\overline{\sin z} = \sin\bar z$ 正确。因为：

$$\overline{\sin z} = \overline{\sin(x+iy)} = \overline{\sin x\mathrm{ch}y + i\cos x\mathrm{sh}y}$$
$$= \sin x\mathrm{ch}y - i\cos x\mathrm{sh}y$$
$$\sin\bar z = \sin(\overline{x+iy}) = \sin(x - iy)$$
$$= \sin x\mathrm{ch}(-y) + i\cos x\mathrm{sh}(-y)$$
$$= \sin x\mathrm{ch}y - i\cos x\mathrm{sh}y$$

$\overline{\sin z} = \sin\bar z = \sin x\mathrm{ch}y - i\cos x\mathrm{sh}y$

12. 找出下列方程的全部解：

(1) $\sin z = 0$；　　(2) $\cos z = 0$；

(3) $1 + e^z = 0$；　　(4) $\sin z + \cos z = 0$

解　(1) $\sin z = 0$

即 $$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x\mathrm{ch}y + i\cos x\mathrm{sh}y = 0$$

$$\begin{cases} \sin x\mathrm{ch}y = 0 & (1) \\ \cos x\mathrm{sh}y = 0 & (2) \end{cases}$$

$\because \mathrm{ch}y \neq 0$ 由(1)式：

得 $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$

代入(2)式得

$$\cos k\pi \,\mathrm{sh}y = 0$$

$\because \cos k\pi = \pm 1 \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1 \cdots)$

$\therefore \mathrm{sh}y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore z_k = x + \mathrm{i}y = k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$

(2) $\cos z = 0$

设 $z = x + \mathrm{i}y$，则

$$\cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \,\mathrm{ch}y - \mathrm{i}\sin x \,\mathrm{sh}y = 0$$

$$\begin{cases} \cos x \,\mathrm{ch}y = 0 & (1) \\ \sin x \,\mathrm{sh}y = 0 & (2) \end{cases}$$

$\because \mathrm{ch}y \neq 0$，由(1)式得

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$$

代入(2)式得

$$\sin(k\pi + \frac{\pi}{2})\mathrm{sh}y = 0$$

$\because \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm 1 \neq 0, (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$

$\therefore \mathrm{sh}y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore z_k = x + \mathrm{i}y = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$

(3) $1 + e^z = 0$

$\because 1 + e^z = 0 \Rightarrow e^z = -1$

$\therefore z_k = \mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}[\arg(-1) + 2k\pi] = \mathrm{i}(\pi + 2k\pi)$

$= (2k + 1)\pi\mathrm{i} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$

(4) $\cos z + \sin z = 0$

$\cos z = -\sin z \Rightarrow \mathrm{tg}z = -1$

$z_k = \mathrm{Arctg}(-1) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$

$= -\frac{\mathrm{i}}{2}[\mathrm{Ln}(1 - \mathrm{i}) - \mathrm{Ln}(1 + \mathrm{i})]$

$= -\frac{\mathrm{i}}{2}[(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\mathrm{i}) - (\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}) + 2k\pi\mathrm{i}]$

$= -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)$

13. 证明：

(1) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$；

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$；

(2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$；

(3) $\sin 2z = 2\sin z \cos z$；

(4) $\mathrm{tg}2z = \dfrac{2\mathrm{tg}z}{1 - \mathrm{tg}^2 z}$；

(5) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z, \cos(z + \pi) = -\cos z$；

(6) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y, |\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$

证明 (1) $\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

$$= \frac{e^{\mathrm{i}z_1} + e^{-\mathrm{i}z_1}}{2} \cdot \frac{e^{\mathrm{i}z_2} + e^{-\mathrm{i}z_2}}{2} - \frac{e^{\mathrm{i}z_1} - e^{-\mathrm{i}z_1}}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{e^{\mathrm{i}z_2} - e^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}}$$

$$= \frac{e^{\mathrm{i}(z_1 + z_2)} + e^{-\mathrm{i}(z_1 + z_2)}}{2}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{\mathrm{i}(z_1 + z_2)} + e^{-\mathrm{i}(z_1 + z_2)}}{2}$$

$\therefore \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_2$

同理 $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(2) 左边 $= \left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 = 1 =$ 右边

(3) 证法一 右边 $= 2 \cdot \dfrac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \cdot \dfrac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$

$$= \frac{e^{\mathrm{i}2z} - e^{-2z\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \sin 2z = \text{左边}$$

证法二 在(1) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ 中

令 $z_1 = z_2 = z$ 可得(2)。

(4) 右边 $= \dfrac{2\sin z/\cos z}{1 - \sin^2 z/\cos^2 z} = \dfrac{2\sin z \cdot \cos z}{\cos^2 z - \sin^2 z}$

$$= \frac{2\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right) \cdot \left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)}{\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z} - e^{\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{2\mathrm{i}z} - e^{-2\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}}{\dfrac{e^{\mathrm{i}2z} + e^{-2\mathrm{i}z}}{2}} = \frac{\sin 2z}{\cos 2z} = \mathrm{tg}2z = \text{左边}$$

(5) 左边 $= \sin\frac{\pi}{2}\cos(-z) + \cos\frac{\pi}{2}\sin(-z)$

$= \cos z =$ 右边

(6) $|\cos z|^2 = |\cos x \operatorname{ch} y + i\sin x \operatorname{sh} y|^2$

$= (\cos x \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2$

$= \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y$

$= \cos^2 x(1 + \operatorname{sh}^2 y) + (1 - \cos^2 x)\operatorname{sh}^2 y$

$= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$

同理 $$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

14. 说明：

(1) 当 $y \to \infty$ 时，$|\sin(x+iy)|$ 和 $|\cos(x+iy)|$ 趋于无穷大；

(2) 当 t 为复数时，$|\sin t| \leqslant 1$ 和 $|\cos t| \leqslant 1$ 不成立

解 (1) $\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y$

$$|\cos(x+iy)| = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}$$

$$= \sqrt{(1-\sin^2 x)(1+\operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}$$

$$= \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \geqslant |\operatorname{sh} y|$$

$\operatorname{sh} y$ 为奇函数，只须证：$y > 0$ 时，$\operatorname{sh} y > y$，则有 $|\operatorname{sh} y| > |y|$，从而得

$$|\cos(x+iy)| > |y|$$

即得 $$y \to \infty \text{ 时}, |\cos(x+iy)| \to \infty$$

下证：$y > 0$ 时，$\operatorname{sh} y > y$

而这是个高等数学问题。

令 $f(y) = \operatorname{sh} y - y$，$f'(y) = \operatorname{ch} y - 1 > 0$

$\therefore f(y) \uparrow$ (当 $y > 0$ 时)

而 $$f(0) = \operatorname{sh}0 - 0 = 0$$

$\therefore f(y) > f(0) = 0$

即 $$\operatorname{sh} y > y \quad (\text{当 } y > 0 \text{ 时})$$

关于 $|\sin(x+iy)|$ 为无穷大(当 $y \to \infty$)，也可类似证明。

(2) 当 t 为复数时，$|\sin t| \leqslant 1$ 和 $|\cos t| \leqslant 1$ 不成立，以 $\cos z$ 为例

$$\cos z|_{z=i} = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1.5471$$

$\therefore$ $$|\cos z|_{z=i}| > 1$$

15. 求 $\operatorname{Ln}(-i)$，$\operatorname{Ln}(-3+4i)$ 和它们的主值。

解 $$\operatorname{Ln}(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) + i(2k\pi)$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i$$

$$= (2k - \frac{1}{2})\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$\therefore$ 主值为：$-\frac{\pi}{2}i$

$$\operatorname{Ln}(-3+4i) = \ln|-3+4i| + i\operatorname{Arg}(-3+4i)$$

$$= \ln 5 + i\operatorname{arctg}(-\frac{4}{3}) + 2k\pi i$$

$$= \ln 5 + i(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) + 2k\pi i$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$\therefore$ 主值为：$\ln 5 + i(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3})$。

16. 证明对数的下列性质：

(1) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$；

(2) $\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$

证明

(1) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\arg(z_1 \cdot z_2) + 2k\pi i$

$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\arg z_1 + 2l\pi i + i\arg z_2 + 2m\pi i$

$= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$

(2) $\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2k'\pi i$

$= \ln|z_1| - \ln|z_2| + i\arg z_1 - i\arg z_2 + 2k\pi i$

$= \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$

等式成立。

17. 说明下列等式是否正确：

(1) $\operatorname{Ln} z^2 = 2\operatorname{Ln} z$； (2) $\operatorname{Ln}\sqrt{z} = \frac{1}{2}\operatorname{Ln} z$

解 (1) 不正确。因为：

由 $$z = re^{i\theta}, z^2 = r^2 e^{i2\theta}$$

$$\operatorname{Ln} z^2 = \ln|z^2| + i(2\theta + 2k\pi)$$

$$= 2\ln|z| + i(2\theta + 2k\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$$

$$2\mathrm{Ln}z = 2\ln|z| + \mathrm{i}(2\theta + 4k\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (2)$$

比较(1)式与(2)式发现：

(1)式的值比(2)式的值要多一些。

(2)不正确。因为

$$\mathrm{Ln}\sqrt{z} = \ln|\sqrt{z}| + \mathrm{i}(\arg\sqrt{z} + 2k\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| + \mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2} + 2k\pi\right) \qquad (1)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z = \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| + \mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) \qquad (2)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

(2)式比(1)式取值要多一些。

18. 求 $e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，$\exp[(1+\mathrm{i}\pi)/4]$，$3^{\mathrm{i}}$ 和 $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的值。

解 (1) $e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = e \cdot e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = e\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\mathrm{i}e$

(2) $\exp[(1+\mathrm{i}\pi)/4]$

$$\because \exp(x + \mathrm{i}y) = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

$$\therefore \exp[(1+\mathrm{i}\pi)/4] = \exp\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1 + \mathrm{i})$$

(3) $3^{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}3}$，

而 $$\mathrm{Ln}3 = \ln|3| + \mathrm{i}[\arg(3) + 2k\pi] = \ln 3 + 2k\pi\mathrm{i}$$

$$\therefore \quad 3^{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}[\ln 3 + 2k\pi\mathrm{i}]} = e^{\mathrm{i}\ln 3 - 2k\pi}$$

$$= e^{-2k\pi}e^{\mathrm{i}\ln 3} = e^{-2k\pi}(\cos\ln 3 + \mathrm{i}\sin\ln 3)$$

(4) $$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})} = e^{\mathrm{i}\{\ln|1+\mathrm{i}| + \mathrm{i}[\arg(1+\mathrm{i}) + 2k\pi]\}}$$

$$= e^{\mathrm{i}(\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}2k\pi)} = e^{\mathrm{i}\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}^2(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$$

$$= e^{\mathrm{i}\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \cdot e^{\mathrm{i}\ln\sqrt{2}}$$

$$= e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}\left(\cos\frac{\ln 2}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\ln 2}{2}\right)$$

19. 证明：$(z^a)' = az^{a-1}$，其中 a 为实数。

证明 $$(z^a)' = (e^{a\mathrm{Ln}z})' = e^{a\mathrm{Ln}z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(a\mathrm{Ln}z)$$

$$= z^a \cdot a \cdot \frac{1}{z} = az^{a-1}$$

20. 证明：

(1) $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$；　　(2) $\mathrm{sh}^2 z + \mathrm{ch}^2 z = \mathrm{ch}2z$；

(3) $\mathrm{sh}(z_1 + z_2) = \mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2 + \mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2$，

$\mathrm{ch}(z_1 + z_2) = \mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2 + \mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$

证明 (1) $$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = \left(\frac{e^{-z} + e^z}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{-z} - e^z}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{-2z} + e^{2z} + 2}{4} - \frac{e^{-2z} + e^{2z} - 2}{4} = 1$$

(2) $$\mathrm{sh}^2 z + \mathrm{ch}^2 z = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} + \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4}$$

$$= \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2}$$

$$= \mathrm{ch}2z$$

(3) $$\mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2 + \mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2 = \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}$$

$$= \frac{2e^{z_1}e^{z_2} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4}$$

$$= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \mathrm{sh}(z_1 + z_2)$$

$$\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2 + \mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2 = \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}$$

$$= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{2}$$

$$= \mathrm{ch}(z_1 + z_2)$$

21. 解下列方程：

(1) $\mathrm{sh}z = 0$；　　(2) $\mathrm{ch}z = 0$；

(3) $\mathrm{sh}z = \mathrm{i}$

解 (1) $\because \mathrm{sh}z = \frac{1}{\mathrm{i}}\sin\mathrm{i}z = -\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z$

$\therefore \mathrm{sh}z = 0$ 即 $\sin\mathrm{i}z = 0$

由 $$\sin\mathrm{i}z = \sin[\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)] = \sin(-y + \mathrm{i}x)$$

$$= \sin(-y)\mathrm{ch}x + \mathrm{i}\cos y\,\mathrm{sh}x = 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin(-y)\mathrm{ch}x=0 & (1)\\ \cos y\,\mathrm{sh}x=0 & (2)\end{cases}$$

由(1)$\mathrm{ch}x\neq0\Rightarrow\sin y=0\Rightarrow y=k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$代入

(2)$\cos(k\pi)\mathrm{sh}x=0,(\pm1)\mathrm{sh}x=0$

$\Rightarrow\mathrm{sh}x=0\Rightarrow x=0$

$\therefore z_k=x+\mathrm{i}y=0+\mathrm{i}k\pi=k\pi\mathrm{i}\quad k=0,\pm1,\cdots$

(2) $\because\mathrm{ch}z=\cos(\mathrm{i}z)=0$

而
$$\begin{aligned}\cos(\mathrm{i}z)&=\cos[\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)]\\&=\cos(-y+\mathrm{i}x)=\cos(-y)\mathrm{ch}x-\mathrm{i}\sin(-y)\mathrm{sh}x\\&=\cos y\,\mathrm{ch}x+\mathrm{i}\sin y\,\mathrm{sh}x=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{ch}x\cos y=0 & (1)\\ \sin y\,\mathrm{sh}x=0 & (2)\end{cases}$$

$\because\mathrm{ch}x\neq0$,由(1)式$\Rightarrow\cos y=0$

$$\Rightarrow y=k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\cdots$$

代入(2),得 $\sin\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{sh}x=0$

$$\Rightarrow(\pm1)\mathrm{sh}x=0\Rightarrow\mathrm{sh}x=0\Rightarrow x=0$$

$$\begin{aligned}\therefore z_k&=x+\mathrm{i}y=0+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\\&=\mathrm{i}\,\frac{\pi+2k\pi}{2}\\&=\frac{2k+1}{2}\pi\mathrm{i}\\&\quad(k=0,\pm1,\cdots)\end{aligned}$$

(3) 由(1)的推导过程知
$$\begin{aligned}\mathrm{sh}z&=-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z\\&=(-\mathrm{i})(-\sin y\,\mathrm{ch}x+\mathrm{i}\cos y\,\mathrm{sh}x)\\&=\mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin y\,\mathrm{ch}x=1 & (1)\\ \cos y\,\mathrm{sh}x=0 & (2)\end{cases}$$

由(2)式,若$\mathrm{sh}x=0$,得$\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=0\Rightarrow x=0$

将$x=0$代入(1)得$1\cdot\sin y=1\Rightarrow y=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

若$\cos y=0$得$y=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,代入(1)得

$$\sin(k\pi+\frac{\pi}{2})\mathrm{ch}x=1$$

$\therefore\mathrm{ch}x=\pm1$

又$\because\mathrm{ch}x>0$恒成立,舍去$\mathrm{ch}x=-1$

$\therefore\mathrm{ch}x=1\quad\therefore x=0,y=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore z_k=x+\mathrm{i}y=(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})\mathrm{i}(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

22. 证明:(2.3.19)与(2.3.20)。

证明
$$\mathrm{ch}\mathrm{i}y=\frac{e^{\mathrm{i}y}+e^{-\mathrm{i}y}}{2}=\frac{\cos y+\mathrm{i}\sin y+\cos y-\mathrm{i}\sin y}{2}=\cos y$$
$$\mathrm{sh}\mathrm{i}y=\frac{e^{\mathrm{i}y}-e^{-\mathrm{i}y}}{2}=\frac{\cos y+\mathrm{i}\sin y-\cos y+\mathrm{i}\sin y}{2}=\mathrm{i}\sin y$$

即:$\mathrm{ch}\mathrm{i}y=\cos y,\mathrm{sh}\mathrm{i}y=\mathrm{i}\sin y$ (2.3.19)

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x+\mathrm{i}y)&=\cos\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)=\cos(-y+\mathrm{i}x)\\&=\cos(-y)\cos\mathrm{i}x-\sin(-y)\sin\mathrm{i}x\\&=\cos y\,\mathrm{ch}x+\sin y\,\mathrm{sh}x\\ \mathrm{sh}(x+\mathrm{i}y)&=\mathrm{i}\sin[(x+\mathrm{i}y)(-\mathrm{i})]=\mathrm{i}\sin(y-\mathrm{i}x)\\&=\mathrm{i}\sin y\cos\mathrm{i}x-\mathrm{i}\cos y\sin\mathrm{i}x\\&=\mathrm{sh}x\cos y+\mathrm{i}\,\mathrm{ch}x\sin y(2,3,20)\text{ 得证。}\end{aligned}$$

23. 证明:$\mathrm{sh}z$的反函数$\mathrm{Arsh}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$。

证明 $\because z=\mathrm{sh}w=\mathrm{i}\sin(-\mathrm{i}w)$

$\therefore -\mathrm{i}w=\arcsin(-\mathrm{i}z)$

$$\begin{aligned}w&=\mathrm{i}\arcsin(-\mathrm{i}z)\\&=\mathrm{i}[-\mathrm{i}\mathrm{Ln}(\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i}z)+\sqrt{1-(-\mathrm{i}z)^2})]\\&=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})\end{aligned}$$

*24. 已知平面流速场的复势$f(z)$为

(1) $(z+\mathrm{i})^2$; (2) z^3; (3) $\dfrac{1}{z^2+1}$

求流动的速度以及流线和等势线的方程。

解 (1)
$$\begin{aligned}f(z)&=(z+\mathrm{i})^2=(x+y\mathrm{i}+\mathrm{i})^2\\&=x^2-(y+1)^2+2x(y+1)\mathrm{i}\end{aligned}$$

$f'(z)=2(z+\mathrm{i})\quad v=\overline{f'(z)}=2(\bar{z}-\mathrm{i})=2x-2(y+1)\mathrm{i}$

流函数 $\Psi(x,y)=2x(y+1)$

流线方程　$x(y+1)=c_1$ 即 $y=\dfrac{c_1}{x}-1$

势函数　$\varphi(x,y)=x^2-(y+1)^2$

等势线方程　$x^2-(y+1)^2=c_2$

(2) $f(z)=z^3=(x+yi)^3=(x^2-y^2+2xyi)(x+yi)$

$$=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$$

$f'(z)=3z^2=3(x^2-y^2+2xyi)$

$v=\overline{f'(z)}=3\bar{z}^2=3(x^2-y^2-2xyi)$

流函数　$\Psi(x,y)=3x^2y-y^3$

流线方程　$(3x^2-y^2)y=c_1$

势函数　$\varphi(x,y)=x(x^2-3y^2)$

等势线方程　$x(x^2-3y^2)=c_2$

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

$f'(z)=-\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$

$v=\overline{f'(z)}=\dfrac{2x^3+2xy^2+2x+(2x^2y+2y^3-2y)i}{(x^2+y^2+1)^2+4x^2y^2}$

流函数　$\Psi(x,y)=\dfrac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

流线方程　$(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2=c_1xy$

势函数　$\varphi(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}$

等势线方程　$\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}=c_2$

第三章　复变函数的积分

> 古往今来人们开始探索，都应起源于对自然万物的惊异。
>
> ——亚里士多德

导　学

学习本章，核心是掌握复积分的计算。后面第四章用级数求积分，第五章用留数计算积分，均是这一问题的发展。在本章习题中，编排了相当比例的复积分计算题。您随意抽取一份复变函数的考试试卷，其中定会有一定分数的考题来测试复积分计算的能力。

本章介绍的复积分计算，一分为三：其一，与《高等数学》中曲线积分的计算公式类似，将曲线的参数方程代入，化为定积分计算；其二，求不定积分，再用牛顿-莱布尼兹公式计算；其三，用公式：$f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,(n=0,1,2,\cdots)$ 计算。$n=0$，即柯西积分公式；$n=1,2,\cdots$ 即高阶导数公式。

另外，已知解析函数的实部或虚部，求解析函数的方法有三种：① 偏积分法；② 不定积分法；③ 线积分法。可在演算题目的过程中，对比掌握。

柯西-古萨基本定理有极高的理论价值。

习题全解

1. 沿下列路线计算积分 $\int_0^{3+i}z^2dz$

(1) 自原点至 $3+i$ 的直线段；

(2) 自原点沿实轴至 3，再由 3 铅直向上至 $3+i$；

(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向向右至 $3+i$。

解(1) $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

故写为 $\quad z = 3t + it \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\therefore dz = (3 + i)dt$

$$\therefore \int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 (3t + it)^2 (3 + i) dt$$

$$= (3 + i)^3 \int_0^1 t^2 dt$$

$$= (3 + i)^3 \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(3 + i)^3 = 6 + \frac{26}{3}i$$

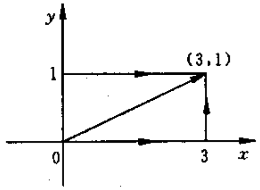

图 3-1

(2) $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{(0,0)}^{(3,0)} z^2 dz + \int_{(3,0)}^{(3,1)} z^2 dz = \int_{c_1} z^2 dz + \int_{c_2} z^2 dz$

c_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

c_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

代入原式 $\quad \int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 \cdot 9t^2 \cdot 3dt + \int_0^1 (3 + it)^2 \cdot idt$

$$= 6 + \frac{26}{3}i$$

(3) $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{(0,0)}^{(0,1)} z^2 dz + \int_{(0,1)}^{(3,1)} z^2 dz = \int_{c_1} z^2 dz + \int_{c_2} z^2 dz$

c_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

c_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

代入原式 $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 -t^2 \cdot idt + \int_0^1 (3t + 1)^2 \cdot 3dt$

$$= 6 + \frac{26}{3}i$$

2. 分别沿 $y = x$ 与 $y = x^2$ 算出积分 $\int_0^{1+i} (x^2 + iy)dz$ 的值。

解 (1) $y = x$

参数方程 $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\therefore z = t + it = t(1 + i)(0 \leqslant t \leqslant 1)$

$\therefore dz = (1 + i)dt$

$$\therefore \int_0^{1+i} (x^2 + iy)dz = \int_0^1 (t^2 + it)(1 + i)dt$$

$$= (1 + i)\left[\int_0^1 (t^2 + it)dt\right]$$

$$= (1 + i)\left[\frac{1}{3}t^3 + i\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$= (1 + i)\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

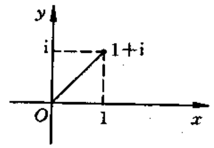

图 3-2

(2) $y = x^2$

参数方程 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$\therefore$ 复参数方程 $\quad z = t + it^2 (0 \leqslant t \leqslant 1)$

$dz = (1 + i2t)dt$

$$\therefore \int_0^{1+i} (x^2 + iy)dz = \int_0^1 (t^2 + it^2)(1 + i2t)dt$$

$$= (1 + i)\int_0^1 t^2(1 + i2t)dt$$

$$= (1 + i)\int_0^1 (t^2 + i2t^3)dt$$

$$= (1 + i)\left(\frac{1}{3}t^3 + i\frac{1}{2}t^4\right)\Big|_0^1$$

$$= (1 + i)\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

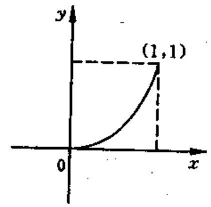

图 3-3

3. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，C 为 B 内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = 0, \quad \oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = 0$$

是否成立？如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

解 不一定成立。

令 $\quad f(z) = z \quad C: |z| = 1$

$z = re^{i\theta} = e^{i\theta}$

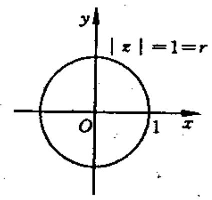

图 3-4

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$
$$= x + iy$$

即
$$\mathrm{Re}[f(z)] = x = \cos\theta$$
$$\mathrm{Im}[f(z)] = y = \sin\theta$$
$$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$$

$$\therefore \oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi}\cos\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}(-\sin\theta\cos\theta + i\cos^2\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin2\theta + i\,\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d(2\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-\cos2\theta) + \frac{1}{2}i\sin2\theta + \frac{i}{2}2\theta\right]\Big|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{i}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{i}{2}2\pi = i\pi \neq 0$$

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi}\sin\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{i}{2}\sin2\theta - \sin^2\theta\right)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{i}{2}\sin2\theta - \frac{1}{2}(1-\cos2\theta)\right]d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{i}{2}(-\cos2\theta) - \frac{1}{2}\sin2\theta - \frac{1}{2}2\theta\right]\Big|_0^{2\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = -\pi \neq 0$$

但
$$\oint_{|z|=1} z\,dz = \oint_{|z|=1}\mathrm{Re}[f(z)]dz + i\oint_{|z|=1}\mathrm{Im}[f(z)]dz$$
$$= i\pi + (-i\pi) = 0$$

$f(z)$ 在 $|z| = 1$ 上及内处处解析。

4. 利用在单位圆上 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 的性质，及柯西积分公式说明 $\oint_C \bar{z}dz = 2\pi i$，其中 C 为正向单位圆周 $|z| = 1$。

解 $\because \bar{z} = \frac{1}{z}(|z| = 1, z\bar{z} = 1)$

$$\therefore \oint_C \bar{z}dz = \oint_{|z|=1}\frac{1}{z-0}dz = 1\cdot 2\pi i = 2\pi i$$

(柯西积分公式的变形 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$ 而此题中 $f(z) = 1$)

5. 计算积分 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周：

(1) $|z| = 2$;　　(2) $|z| = 4$

解 (1) $|z| = 2$ 方法一

$\because z\cdot\bar{z} = |z|^2 = 4$, $\therefore \bar{z} = \frac{4}{z}$

$$\therefore \oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=2}\frac{\frac{4}{z}}{2}dz$$
$$= \oint_{|z|=2}\frac{2}{z-0}dz = 2\times 2\pi i = 4\pi i$$

方法二

$\because |z| = 2$

$\therefore z = 2e^{i\theta}$,　$dz = 2ie^{i\theta}d\theta$

$\bar{z} = 2e^{-i\theta}, \theta: 0 \to 2\pi$

$$\therefore \oint_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{|z|}dz = \int_0^{2\pi}\frac{2e^{-i\theta}}{2}2ie^{i\theta}d\theta$$
$$= 2i\int_0^{2\pi}d\theta = 2i\cdot 2\pi = 4\pi i$$

(2) $|z| = 4$

同理
$$\oint_{|z|=4}\frac{\bar{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=4}\frac{\frac{16}{z}}{4}dz = \oint_{|z|=4}\frac{4}{z}dz$$
$$= 4\times 2\pi i = 8\pi i$$

6. 试用观察法得出下列积分的值，并说明观察时所依据的是什么？C 是正向的圆周 $|z| = 1$。

(1) $\oint_C \frac{dz}{z-2}$;　　(2) $\oint_C \frac{dz}{z^2+2z+4}$

(3) $\oint_C \frac{dz}{\cos z}$;　　(4) $\oint_C \frac{dz}{z-\frac{1}{2}}$

(5) $\oint_C ze^z dz$;　　(6) $\oint_C \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2)}$

解 (1) $\oint_C \frac{dz}{z-2}=0$

因奇点 $z=2$ 在 $|z|=1$ 之外，利用柯西 - 古萨定理即得。

(2) $\oint_C \frac{dz}{z^2+2z+4}=\oint_C \frac{dz}{(z+1)^2+3}=0$

奇点 $\begin{matrix} z+1=3i, & z=-1+3i \\ z+1=-3i, & z=-1-3i \end{matrix}$ 均在 $|z|=1$ 之外。

(3) $\oint_C \frac{dz}{\cos z}=0$

奇点 $\cos z=0$，$z=(k+\frac{1}{2})\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 均在 $|z|=1$ 之外。

(4) $\oint_C \frac{dz}{z-\frac{1}{2}}=2\pi i\cdot1=2\pi i$

$\because z=\frac{1}{2}$ 是奇点，$z_0=\frac{1}{2}\in\{z\,\|z|\leqslant1\}$ $f(z)=1$ 在 $|z|=1$ 内解析

$\therefore$ 可用柯西积分公式。

(5) $\oint_C ze^z dz=0$

$f(z)=ze^z$ 在 $|z|=1$ 内处处解析，由柯西—古萨定理即得。

(6) $\oint_C \frac{dz}{(z-\frac{i}{2})(z+2)}=\frac{2}{4+i}\left[\oint_C \frac{1}{z-\frac{i}{2}}dz-\oint_C \frac{dz}{z+2}\right]$

由于 $\frac{i}{2}$ 在 $C:|z|=1$ 内，从而 $\oint_C \frac{dz}{z-\frac{i}{2}}=2\pi i$，而 -2 不在 $C:|z|=1$ 内，从

而 $\oint_C \frac{dz}{z+2}=0$

因此 $\oint_C \frac{dz}{(2-\frac{i}{2})(z+2)}=\frac{2}{4+i}\cdot2\pi i=\frac{4\pi i}{4+i}$

7. 沿指定曲线的正向计算下列各积分：

(1) $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz, C:|z-2|=1$;

解 由柯西积分公式 $f(z)=e^z$ 在 C 上及内解析

$\therefore$ 原式 $=2\pi i\cdot e^z\Big|_{z=2}=2\pi e^2 i$

(2) $\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}$, $C:|z-a|=a$;

解 **方法一** 原式 $=\oint_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz=2\pi i\times\frac{1}{z+a}\Big|_{z=a}$

$=\frac{\pi i}{a}$（柯西 - 积分公式）

方法二 原式 $=\frac{1}{2a}\left[\oint_C \frac{1}{z-a}dz-\oint_C \frac{1}{z+a}dz\right]$

$=\frac{1}{2a}[2\pi i-0]$

$=\frac{\pi i}{a}$

(3) $\oint_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}, C:|z-2i|=\frac{3}{2}$;

解 $z=\pm i$ 是奇点，但是 C 内只有一个奇点 $z=i$，如图 3-5；C_1 是包围 $z=i$ 的正向圆周。

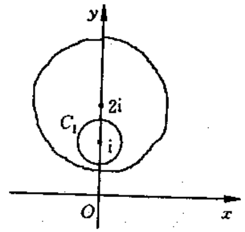

图 3-5

$C_1:|z-i|=r$

$\therefore$ 由复合闭路定理

原式 $=\oint_{C_1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$

柯西积分公式 $=\oint_{C_1} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i}dz$

$=2\pi i\frac{e^{ii}}{i+i}=\frac{\pi}{e}$

(4) $\oint_C \frac{zdz}{z-3}, C:|z|=2$;

解 原式 $=0$（用柯西 - 古萨定理）

$\because$ 奇点 $z=3$ 在 $C:|z|=2$ 之外。

(5) $\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}, C:|z|=r<1$;

解 原式 $=0$（用柯西 - 古萨定理）

$\because z=\pm1, z=1, z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

均在 $C:|z|=r<1$ 之外。

(6) $\oint_C z^3\cos z dz$，C 为包围 $z=0$ 的闭曲线；

解 原式 = 0(用柯西-古萨定理)

(7) $\oint_C \dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}, C: |z| = \dfrac{3}{2};$

解 由复合闭路定理,及柯西积分公式

$$原式 = \oint_{|z-i|=\varepsilon} \frac{\dfrac{dz}{(z^2+4)(z+i)}}{z-i} + \oint_{|z+i|=\varepsilon} \frac{\dfrac{dz}{(z^2+4)(z-i)}}{(z+i)}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{2i(4-1)} + \frac{1}{-2i(4-1)}\right] = 0$$

($z = \pm 2i$ 在 C 之外)

(8) $\oint_C \dfrac{\sin z dz}{z}, C: |z| = 1;$

解 原式 $= 2\pi i \cdot \sin z|_{z=0} = 0$(柯西积分公式)

(9) $\oint_C \dfrac{\sin z dz}{\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)^2}, C: |z| = 2;$

解 $f(z) = \sin z$

由解析函数求导公式

$$原式 = 2\pi i(\sin z)'|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

(10) $\oint_C \dfrac{e^z dz}{z^5}, C: |z| = 1$

解 $原式 = \dfrac{2\pi i}{4!}(e^z)^{(4)}\Big|_{z=0} = \dfrac{\pi i}{12}$

8. 计算下列各题:

(1) $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz;$

$$原式 = \frac{1}{2}\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} d(2z)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{\pi i}^{3\pi i} = \frac{1}{2}[e^{6\pi i} - e^{-2\pi i}] = 0$$

(2) $\int_{\frac{\pi}{6}i}^{0} \mathrm{ch}3z dz;$

$$原式 = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}i}^{0} \mathrm{ch}(3z)d(3z)$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{sh}3z\Big|_{\frac{\pi}{6}i}^{0} = \frac{1}{3}\left[\mathrm{sh}0 - \mathrm{sh}\frac{\pi}{2}i\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}i = -\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{\pi}{2}i} - e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2} = -\frac{1}{3}i$$

(3) $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz;$

$$原式 = \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{1-\cos 2z}{2} dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[z - \frac{1}{2}\sin 2z\right]\Big|_{-\pi i}^{\pi i}$$

$$= \pi i - \frac{1}{2}\sin 2\pi i$$

$$= \pi i - \frac{i}{2}\mathrm{sh}2\pi = \left(\pi - \frac{1}{2}\mathrm{sh}2\pi\right)i$$

(4) $\int_0^1 z\sin z dz;$

$$\int_0^1 z\sin z dz = -\int_0^1 z d(\cos z)$$

$$= -\left[z\cos z|_0^1 - \int_0^1 \cos z dz\right]$$

$$= -[z\cos z - \sin z]\Big|_0^1$$

$$= -(\cos 1 - \sin 1) = \sin 1 - \cos 1$$

(5) $\int_0^i (z-1)e^{-z} dz;$

$$\int_0^i (z-1)e^{-z} dz = -\int_0^i (z-1)d(e^{-z})$$

$$= -\left[(z-1)e^{-z}\Big|_0^i - \int_0^i e^{-z} dz\right]$$

$$= -\left[(z-1)e^{-z}\Big|_0^i + \int_0^i e^{-z} d(-z)\right]$$

$$= -[(z-1)e^{-z} + e^{-z}]\Big|_0^i$$

$$= -\{[(i-1)e^{-i} + e^{-i}] - (-1+1)\} = -ie^{-i}$$

$$= -i[\cos(-1) + i\sin(-1)] = -\sin 1 - i\cos 1$$

(6) $\int_1^i \dfrac{1+\mathrm{tg}z}{\cos^2 z} dz$(沿 1 到 i 的直线段)

$$原式 = \int_1^i (1+\mathrm{tg}z)\sec^2 z dz$$

$$= \int_1^i (1+\mathrm{tg}z) d\,\mathrm{tg}z$$

$$= \left[\mathrm{tg}z + \frac{1}{2}(\mathrm{tg}z)^2\right]\Big|_1^i$$

$$= \mathrm{tg}i + \frac{1}{2}(\mathrm{tg}i)^2 - \left[\mathrm{tg}1 + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 1\right]$$

$$= -\left(\mathrm{tg}1 + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 1 + \frac{1}{2}\mathrm{th}^2 1\right) - i\,\mathrm{th}1$$

$$\left(\because \mathrm{tg}i = \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{\frac{e^{-1} - e^{+1}}{2i}}{\frac{e^{-1} + e^{+1}}{2}} = \frac{e^{-1} - e^{+1}}{i(e^{-1} + e^{+1})} = \frac{-i\,\mathrm{sh}1}{\mathrm{ch}1} = -i\,\mathrm{th}1\right)$$

$$(\mathrm{tg}i)^2 = (i\,\mathrm{th}1)^2 = -\mathrm{th}^2 1$$

9. 计算下列积分：

(1) $\oint_C \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right)dz$，其中 C：$|z| = 4$ 为正向；

解 设 C_1, C_2 是 C 内二个互不包含不相交的正向圆周，而各包围 $z = -1$ 与 $z = -2i$ 由复合闭路定理及柯西积分公式

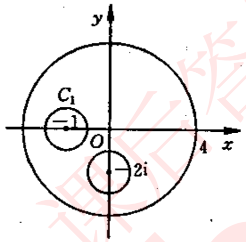

图 3-6

$$\text{原式} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$

$$= \oint_{C_1}\left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right)dz + \oint_{C_2}\left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right)dz$$

$$= 2\pi i \cdot 4 + 0 + 0 + 2\pi i \cdot 3$$

$$= 14\pi i$$

(2) $\oint_C \frac{2i}{z^2+1}dz$，其中 C：$|z - 1| = 6$ 为正向；

解 $z = \pm i$ 为奇点，C_1, C_2 为包含 $i, -i$ 的圆周且它们是互不相交正向圆周，都位于 $|z + 1| = 6$ 内部

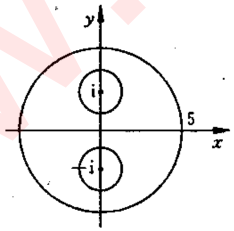

图 3-7

$$\text{原式} = \oint_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz$$

$$= \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2}\right)\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz$$

$$= 2\pi i - 0 + 0 - 2\pi i = 0$$

(3) $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3}dz$，其中 C_1：$|z| = 2$ 为正向，C_2：$|z| = 3$ 为负向；

解 原式 $= \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = \oint_{C_1} - \oint_{C_2^-}$

$\big(z = 0$ 为奇点，$f(z) = \cos z$，$f'(z) = -\sin z$，$f''(z) = -\cos z$ 由解析函数求导公式$\big)$

$$= \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0} - \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0}$$

$$= 0$$

(4) $\oint_C \frac{dz}{z-i}$，其中 C 为以 $\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{6}{5}i$ 为顶点的正向菱形；

解 取 C_1 为 C 内只含 $z = i$ 的正向小圆周，则

$$\text{原式} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

(5) $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz$，其中 a 为 $|a| \neq 1$ 的任何复数，C：$|z| = 1$ 为正向。

解 1) 当 $|a| > 1$，$z = a$ 在 C 之外，由柯西－古萨定理，原式 $= 0$

2) 当 $|a| < 1$，由解析函数求导公式 $f(z) = e^z$

$$\text{原式} = \frac{2\pi i}{2!}(e^z)''\Big|_{z=a} = \pi i e^a$$

10. 证明：当 C 为任何不通过原点的简单闭曲线时，$\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 0$。

证明 (1) 若 $z = 0$ 在 C 之外，由柯西－古萨定理有 $\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 0$

(2) 若 $z = 0$ 在 C 之内，作 C_1：中心在原点，半径足够小的正向圆周。则由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{1}{z^2}dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z^2}dz = 0$$

$$\left(\because \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}\right)$$

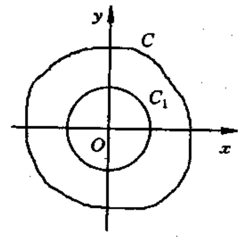

图 3-8

11. 下列两个积分的值是否相等？积分(2)的值能否利用闭路变形原理从(1)的值得到？为什么？

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{\bar z}{z}dz$；　　(2) $\oint_{|z|=4}\frac{\bar z}{z}dz$

解　(1)$z=2e^{i\theta}$　　$\bar z=2e^{-i\theta}$　　$\theta:0\to2\pi$

$\therefore dz=2ie^{i\theta}d\theta$

$$\therefore \text{原式}=\oint_{|z|=2}\frac{\bar z}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{-i\theta}}{2e^{i\theta}}\cdot 2ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}2ie^{-i\theta}d\theta=-2e^{-i\theta}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=-2(1-1)=0$$

(2) 可以利用闭路变形定理从(1)值得到：由于(1)(2)上只都有一个奇点 $z=0$，且当利用闭路变形定理时，在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)=\frac{\bar z}{z}$ 点 $z=0$。

12. 设区域 D 为右半平面，z 为 D 内圆周 $|z|=1$ 上的任意一点，用在 D 内的任意一条曲线 C 连结原点与 z，证明 $\mathrm{Re}\left[\int_0^z\frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\right]=\frac{\pi}{4}$。[提示：可取从原点沿实轴到 1，再从 1 沿圆周 $|z|=1$ 到 z 的曲线作为 C。]

解　$C:\overline{OA}+\widehat{AB}$　$0\to z$

$\overline{OA}:\zeta=x,x:0\to1$　$d\zeta=dx$

$\widehat{AB}:\zeta=e^{i\theta}$　$\theta:0\to\theta$

$d\zeta=ie^{i\theta}d\theta$

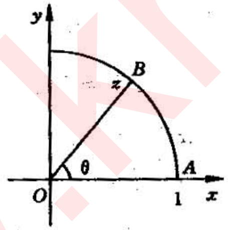

图 3-9

$$\int_C f(z)dz=\int_{\overline{OA}}+\int_{\widehat{AB}}$$

$$=\int_{\overline{OA}}\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}+\int_{\widehat{AB}}\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^\theta\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}$$

$$=\mathrm{arctg}x\Big|_0^1+\int_0^\theta\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i(2\theta)}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^\theta\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i(2\theta)}}$$

$$\mathrm{Re}\left[\int_C f(z)dz\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{\pi}{4}+\int_0^\theta\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{2i\theta}}\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\mathrm{Re}\left[\int_0^\theta\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}\right]$$

下证：

$$\mathrm{Re}\left[\int_0^\theta\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}\right]=0$$

$$\int_0^\theta\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}=i\int_0^\theta\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos2\theta+i\sin2\theta}d\theta$$

$$\xlongequal[\text{并整理}]{\text{分母有理化}}i\int_0^\theta\frac{(\cos\theta+\cos\theta\cos2\theta+\sin\theta\sin2\theta)+i(-\cos\theta\sin2\theta+\sin\theta+\sin\theta(\cos2\theta))}{(1+\cos2\theta)^2+(\sin2\theta)^2}d\theta$$

实部分子：$-\cos\theta\sin2\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos2\theta$

$=-\cos\theta\sin2\theta+\sin\theta(1+\cos2\theta)$

$=-\cos\theta\sin2\theta+\sin\theta\cdot2\cos^2\theta$

$=-\cos\theta\sin2\theta+\cos\theta\sin2\theta=0$

$$\therefore\mathrm{Re}\left[\int_0^\theta\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}\right]=0\quad\text{得证。}$$

13. 设 C_1 与 C_2 为相交于 M,N 两点的简单闭曲线，它们所围的区域分别为 B_1 与 B_2。B_1 与 B_2 的公共部分为 B，如果 $f(z)$ 在 B_1-B 与 B_2-B 内解析，在 C_1,C_2 上也解析，

证明：$\oint_{C_1}f(z)dz=\oint_{C_2}f(z)dz$。

证明　$\because f(z)$ 在 B_1-B,B_2-B 内解析，且在 C_1,C_2 上解析。

$C_1=L_1+L_1',C_2'=L_2+L_2'$ 即在 L_1,L_1',L_2,L_2' 上也解析。

$\therefore f(z)$ 在 B_1-B 上及边界 L_1+L_2' 也解析，

在 B_2-B 上及边界 L_2+L_1' 也解析

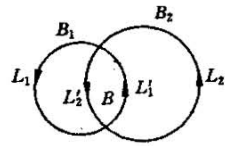

图 3-10

$\therefore$ 由柯西-古萨定理

$$\oint_{L_1+L_2'^-}f(z)dz=0\qquad\oint_{L_2+L_1'^-}f(z)dz=0$$

$$\therefore\oint_{L_1+L_2'^-}=\oint_{L_2+L_1'^-}$$

即

$$\int_{L_1}+\int_{L_2'^-}=\int_{L_2}+\int_{L_1'^-}$$

$$\int_{L_1}-\int_{L_1'^-}=\int_{L_2}-\int_{L_2'^-}$$

$$\int_{L_1}+\int_{L_1'}=\int_{L_2}+\int_{L_2'}$$

即
$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

14. 设 C 为不经过 α 与 $-\alpha$ 的正向简单闭曲线，α 为不等于零的任何复数，试就 α 与 $-\alpha$ 跟 C 的各种不同位置，计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z$ 的值。

解 (1) 当 C 包括 α，而不包括 $-\alpha$

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{\frac{z}{z+\alpha}}{z-\alpha}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}=\pi\mathrm{i}$$

(2) 当 C 包括 $-\alpha$，而不包括 α

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{\frac{z}{z-\alpha}}{z+\alpha}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\frac{-\alpha}{-\alpha-\alpha}=\pi\mathrm{i}$$

(3) 当 C 包括 $\alpha,-\alpha$

设 C_1,C_2 为两个互不相交且互不包含的正向小圆周且各自包含自己的奇点 $\alpha,-\alpha$。

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)\frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}+\pi\mathrm{i}=2\pi\mathrm{i}$$

(4) 当 C 不包括 α，又不包括 $-\alpha$，则由柯西-古萨定理知，

$$\oint_C \frac{z\mathrm{d}z}{z^2-\alpha^2}=0$$

15. 设 C_1 与 C_2 为两条互不包含，也不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2\mathrm{d}z}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin z\mathrm{d}z}{z-z_0}\right]=\begin{cases} z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时} \\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时}\end{cases}$$

证明 (1) 当 z_0 在 C_1 内时，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\sin z}{z-z_0}\right]\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot z^2\Big|_{z=z_0}+0\right]=z_0^2$$

(2) 当 z_0 在 C_2 内时，

$$\text{原式}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[0+2\pi\mathrm{i}\cdot\sin z\Big|_{z=z_0}\right]=\sin z_0$$

16. 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C:|z|=r,0<r$

<1 的积分等于零，问 $f(z)$ 是否必需在 $z=0$ 处解析？试举例说明之。

解 不一定，如：$\oint_C \frac{1}{z^n}\mathrm{d}z=0(n\geqslant 2)$

17. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于 D。如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立，试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立。

证明 由于 $f(z),g(z)$ 在内处处解析故在 C 内及 C 上也处处解析，设 z_0 为 C 内任一点，由于 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(z_0)$

又
$$\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}g(z_0)$$

$\because$ 在 C 上，$f(z)=g(z)$

$$\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$\therefore 2\pi\mathrm{i}f(z_0)=2\pi\mathrm{i}g(z_0)$$

$$\therefore f(z_0)=g(z_0)$$

由 z_0 的任意性，在 C 内的所有点有

$$f(z)=g(z)$$

18. 设区域 D 是圆环域，$f(z)$ 在 D 内解析，以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1 与 K_2，K_2 包含 K_1，z_0 为 K_1,K_2 之间任一点，试证 (3.5.1) 仍成立，但 C 要换成 K_1+K_2(见图)。

证明 如右图，在 K_1 和 K_2 组成的圆环内，做包含 z_0 的一个圆周，然后作连线 AB，CD，EF，这样，此图形被分成若干段弧 C_1,C_2，C_3,C_4,C_5,C_6

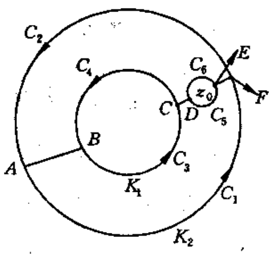

图 3-11

从而就得 $AFEDCBA$ 和 $ABCDEFA$ 形成两条全在 D 内的简单闭曲线，从而知

$$\oint_{AFEDCBA} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{ABCDEFA} f(z)\mathrm{d}z=0$$

将上面两式相加，由于各个连线分别走两次且方向相反，因而积分值相抵消

$$\oint_{C_1+C_5^-+C_3^-} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_4^-+C_6^-+C_2} f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) + iv(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)]d\theta$$

等式两边实部相等，即有

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)d\varphi$$

(2) 由(1)结论，对于任意 $r, 0 \leqslant r \leqslant r_0$，都有

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)d\varphi$$

从而

$$\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} r\left[\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)d\varphi\right]dr$$

$$= \frac{2\pi}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} r u(x_0, y_0)dr$$

$$= \frac{2\pi}{\pi r_0^2} u(x_0, y_0)\cdot\frac{r_0^2}{2} = u(x_0, y_0)$$

因此 $u(x_0, y_0) = \dfrac{1}{\pi r_0^2}\displaystyle\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r d\varphi dr$

*33. 如果 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的正向圆周：$|z| = R$，它的内部全含于 D。设 z 为 C 内一点，并令 $\tilde{z} = R^2/\bar{z}$，试证

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \tilde{z}}d\zeta = \oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}d\zeta = 0$$

证明 由于 $\tilde{z} = \dfrac{R^2}{\bar{z}}$，$|\bar{z}| = |z| < R$

所以 $|\tilde{z}| > R$

$f(z)$ 在 D 内处处解析，正向圆周 C 含于 D 中，从而 $f(\zeta)/\zeta - \tilde{z}$ 在 C 上和其内部解析，再根据柯西积分定理，得

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \tilde{z}}d\zeta = \oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}d\zeta = 0$$

*34. 根据柯西积分公式与习题 33 的结果，证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right]f(\zeta)d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})}d\zeta$$

其中 C 为 $|z| = R$。

证明 根据柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad (\text{其中 } z \text{ 为 } C \text{ 内一点})$$

又由上题结论：

$$\oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}d\zeta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2 - \zeta\bar{z}}d\zeta = 0$$

两式相加，得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2 - \zeta\bar{z}}d\zeta\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right)d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right]f(\zeta)d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})}d\zeta$$

*35. 如果令 $\zeta = Re^{i\theta}, z = re^{i\varphi}$，验证

$$\frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} = \frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \frac{i d\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

并由 34 题的结果，证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}d\theta$$

取其实部，得

$$u(x, y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}d\theta$$

这个积分称为泊松(Poisson)积分。通过这个公式，一个调和函数在一个圆内的值可用它在圆周上的值来表示。

证明 $$\frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} = \frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta - z)\left(\frac{R^2}{\zeta} - \bar{z}\right)} = \frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}$$

根据题意 $\zeta = Re^{i\theta}, z = re^{i\varphi}$ 得

$$d\zeta = iRe^{i\theta}d\theta$$

从而

$$\frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} = \frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \frac{\frac{iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta}}}{(Re^{i\theta} - re^{i\varphi})(Re^{-i\theta} - re^{-i\varphi})}$$

$$\int_{L_1}+\int_{L_1'}=\int_{L_2}+\int_{L_2'}$$

即
$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

14. 设 C 为不经过 α 与 $-\alpha$ 的正向简单闭曲线，α 为不等于零的任何复数，试就 α 与 $-\alpha$ 跟 C 的各种不同位置，计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z$ 的值。

解 (1) 当 C 包括 α，而不包括 $-\alpha$

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{\frac{z}{z+\alpha}}{z-\alpha}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{\alpha+\alpha}=\pi\mathrm{i}$$

(2) 当 C 包括 $-\alpha$，而不包括 α

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{\frac{z}{z-\alpha}}{z+\alpha}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\frac{-\alpha}{-\alpha-\alpha}=\pi\mathrm{i}$$

(3) 当 C 包括 $\alpha,-\alpha$

设 C_1,C_2 为两个互不相交且互不包含的正向小圆周且各自包含自己的奇点 $\alpha,-\alpha$。

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)\frac{z}{z^2-\alpha^2}\mathrm{d}z=\pi\mathrm{i}+\pi\mathrm{i}=2\pi\mathrm{i}$$

(4) 当 C 不包括 α，又不包括 $-\alpha$，则由柯西-古萨定理知，

$$\oint_C \frac{z\mathrm{d}z}{z^2-\alpha^2}=0$$

15. 设 C_1 与 C_2 为两条互不包含，也不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2\mathrm{d}z}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin z\mathrm{d}z}{z-z_0}\right]=\begin{cases}z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时}\\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时}\end{cases}$$

证明 (1) 当 z_0 在 C_1 内时，

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\sin z}{z-z_0}\right]\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot z^2\Big|_{z=z_0}+0\right]=z_0^2$$

(2) 当 z_0 在 C_2 内时，

$$\text{原式}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[0+2\pi\mathrm{i}\cdot\sin z\Big|_{z=z_0}\right]=\sin z_0$$

16. 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C:|z|=r,0<r$

<1 的积分等于零，问 $f(z)$ 是否必需在 $z=0$ 处解析？试举例说明之。

解 不一定，如：$\oint_C \frac{1}{z^n}\mathrm{d}z=0(n\geqslant 2)$

17. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于 D。如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立，试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立。

证明 由于 $f(z),g(z)$ 在内处处解析故在 C 内及 C 上也处处解析，设 z_0 为 C 内任一点，由于 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(z_0)$

又
$$\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}g(z_0)$$

$\because$ 在 C 上，$f(z)=g(z)$

$$\therefore \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$\therefore 2\pi\mathrm{i}f(z_0)=2\pi\mathrm{i}g(z_0)$$

$$\therefore f(z_0)=g(z_0)$$

由 z_0 的任意性，在 C 内的所有点有

$$f(z)=g(z)$$

18. 设区域 D 是圆环域，$f(z)$ 在 D 内解析，以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1 与 K_2，K_2 包含 K_1，z_0 为 K_1,K_2 之间任一点，试证(3.5.1)仍成立，但 C 要换成 K_1+K_2(见图)。

证明 如右图，在 K_1 和 K_2 组成的圆环内，做包含 z_0 的一个圆周，然后作连线 AB，CD，EF，这样，此图形被分成若干段弧 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6

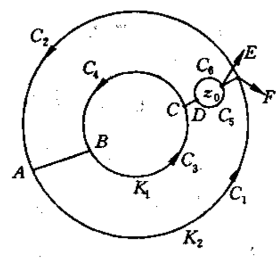

图 3-11

从而就得 $AFEDCBA$ 和 $ABCDEFA$ 形成两条全在 D 内的简单闭曲线，从而知

$$\oint_{AFEDCBA} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{ABCDEFA} f(z)\mathrm{d}z=0$$

将上面两式相加，由于各个连线分别走两次且方向相反，因而积分值相抵消

$$\oint_{C_1+C_5^-+C_3^-} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_4^-+C_6^-+C_2} f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$\oint_{C_1+C_2} + \oint_{C_3^-+C_4^-} + \oint_{C_5^-+C_6^-} = 0$$

$$\oint_{K_1} f(z)\mathrm{d}z - \oint_{K_2} f(z)\mathrm{d}z - \oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

从而 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{K_1} f(z)\mathrm{d}z - \oint_{K_2} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{K_1+K_2} f(z)\mathrm{d}z$

把 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}\cdot\dfrac{1}{2\pi i}$ 代入 $f(z)$ 等式也成立。

因而 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1+K_2}\dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$，又 $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$

综上有 $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1+K_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

19. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，且不为零，C 为 B 内任何一条简单闭曲线，问积分

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

是否等于零？为什么？

解 等于零，$\because f(z)$ 在 B 内处处解析

$\therefore$ 由有关定理知，$f(z)$ 有各阶导数，且仍为解析函数

$\therefore f'(z)$ 在 B 内处处解析

$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 B 内处处解析

$\therefore$ 由柯西-古萨定理，$\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 0$

20. 试说明柯西-古萨基本定理中的 C 为什么可以不是简单闭曲线？

解 若 C 不是简单闭曲线，如打结有交点

即 $C = C_1^- + C_2$，其中 C_1^-，C_2 如图 3-12

$\because C$ 在 B 内，$f(z)$ 在 B 内解析

$\therefore f(z)$ 在 C_1，C_2 上及内均解析

$\therefore$ 由柯西-古萨定理 $\oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$

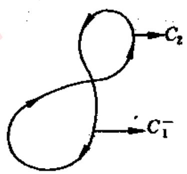

图 3-12

$$\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\therefore \oint_C = \oint_{C_1^-} + \oint_{C_2} = 0$$

$$\therefore \oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

21. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在 D 内但不在 C 上的任意一点 z_0，等式

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

成立。

证明 $\because f(z)$ 在 D 内解析

$\therefore f'(z)$ 在 D 内解析

$\because C$ 为 D 内任一正向简单曲线，任取 $z_0\in D$，且 z_0 在 C 内

由柯西积分公式：

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

由有关定理

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^2}$$

22. 如果 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 都具有二阶连续偏导数，且适合拉普拉斯方程，而 $s=\varphi_y-\psi_x$，$t=\varphi_x+\psi_y$，那末 $s+it$ 是 $x+iy$ 的解析函数。

证明 $\because s=\varphi_y-\psi_x \quad t=\varphi_x+\psi_y$

$\therefore \dfrac{\partial s}{\partial x} = \varphi_{yx}-\psi_{xx}$，$\dfrac{\partial s}{\partial y} = \varphi_{yy}-\psi_{xy}$

$\dfrac{\partial t}{\partial x} = \varphi_{xx}+\psi_{yx}$，$\dfrac{\partial t}{\partial y} = \varphi_{xy}+\psi_{yy}$

$\because \varphi,\psi$ 都具有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程

$\therefore$ 有 $\varphi_{yx}=\varphi_{xy}$，$\psi_{xy}=\psi_{yx}$

$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$，$\psi_{xx}+\psi_{yy}=0$

$$\therefore \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial t}{\partial x}$$

又 ∵s,t具有一阶连续偏导数

∴$s+\mathrm{i}t$是$x+\mathrm{i}y$解析函数。

23. 设u为区域D内的调和函数及$f=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$，问$f$是不是$D$内的解析函数？为什么？

解 是，∵$f=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}=U+\mathrm{i}V$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial x}=u_{xx},\ \frac{\partial U}{\partial y}=u_{xy}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-u_{yx},\ \frac{\partial V}{\partial y}=-u_{yy}$$

又由 $u_{xx}+u_{yy}=0$

$$\therefore \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

∴f是D内的解析函数。

24. 函数$v=x+y$是$u=x+y$的共轭调和函数吗？为什么？

解 不是，∵u,v为调和函数。

但$f(z)=(x+y)+\mathrm{i}(x+y)$并不解析

$$\because u=v=x+y$$

$$u_x=1,u_{xx}=0,u_y=1,u_{yy}=0$$

$$\therefore u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0$$

∴u,v为调和函数，

但$f(z)=(x+y)+\mathrm{i}(x+y)=u+\mathrm{i}v$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1=\frac{\partial v}{\partial x}$$

不同时满足$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 即$f(z)$不解析

∴u,v不是共轭调和函数。

25. 设u和v都是调和函数，如果v是u的共轭调和函数，那末u也是v的共轭调和函数。这句话对吗？为什么？

解 不对，∵u,v都调和。

$$\therefore u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0.$$

∵v是u的共轭调和函数

$$\therefore u_x=v_y,u_y=-v_x$$

但若u也是v的共轭调和函数，

$$v_x=u_y,v_y=-u_x$$

由此得 $u_x=u_y=0,\ v_x=v_y=0 \Rightarrow u=C_1,\ v=C_2$

即当u,v为常数时，互为共轭，除此情况则命题不成立。

26. 证明：一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数。

证明 设u,v是一对共轭调和函数：

$$\therefore u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0$$

且 $u_x=v_y,u_y=-v_x$

$$\because (uv)_x=u_xv+uv_x$$

$$(uv)_{xx}=u_{xx}v+u_xv_x+u_xv_x+uv_{xx}$$

$$=u_{xx}v+2u_xv_x+uv_{xx}$$

同理 $(uv)_{yy}=u_{yy}v+2u_yv_y+uv_{yy}$

$$\therefore (uv)_{xx}+(uv)_{yy}$$

$$=u_{xx}v+2u_xv_x+uv_{xx}+u_{yy}v+2u_yv_y+uv_{yy}$$

$$=v(u_{xx}+u_{yy})+2(u_xv_x+u_yv_y)+v(v_{xx}+v_{yy})$$

$$=0$$

$$\therefore (uv)_{xx}+(uv)_{yy}=0$$

∴(uv)仍为调和函数。

27. 如果$f(z)=u+\mathrm{i}v$是一解析函数，试证：

(1) $\mathrm{i}\overline{f(z)}$也是解析函数；

证明 ∵$\overline{\mathrm{i}f(z)}=\overline{\mathrm{i}(u+\mathrm{i}v)}=\overline{\mathrm{i}(u-\mathrm{i}v)}=\overline{v+\mathrm{i}u}=v-\mathrm{i}u$

∵$f(z)=u+\mathrm{i}v$解析

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(-u)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(-u)}{\partial x}$$

∴$\mathrm{i}\overline{f(z)}$也是解析函数。

(2) $-u$是v的共轭调和函数；

∵$f(z)=u+\mathrm{i}v$是解析函数

∴u,v均为调和函数

∴ $-u,v$也是调和函数

为证 $-u$ 是 v 的共轭调和函数

只须证：$f(z)=v-iu$ 是解析函数

由(1)可知　$f(z)=v-iu=\overline{i\,f(z)}$ 解析

∴ $-u$ 是 v 的共轭调和函数

(3) $\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2$

设 $f(z)=u+iv$ 则 $|f(z)|^2=u^2+v^2$

∵ $f(z)$ 在 D 内解析

∴ $f(z)$ 在 D 内任意阶导数存在

于是　$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

同理　$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

∵ $f(z)$ 在 D 内解析

∴ u,v 均为调和函数，即 $u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0$

且满足柯西-黎曼方程，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\therefore\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2$$

$$=2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$+2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$=4\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

∵ $f'(z)=u_x+iv_x$　$|f'(z)|^2=u_x^2+v_x^2$

$$\therefore\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

28. 证明：$u=x^2-y^2$ 和 $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但是 $u+iv$ 不是解析函数。

证明　∵ $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

∵ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$

∴ u 是 z 平面上的调和函数

v 是 z 平面上除去 $z\neq 0$ 的调和函数。

但　$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$

∴ $f(z)=u+iv$ 不是解析函数。

29. 求具有下列形式的所有调和函数 u：

(1) $u=f(ax+by)$，a 与 b 为常数；

(2) $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$。[提示：(1) 令 $t=ax+by$，因 $u_{xx}+u_{yy}=0$，从而有 $f''(t)=0$；(2) 令 $t=\frac{y}{x}$]

解　(1) $u=f(ax+by)$

设 $t=ax+by$

∴ $u=f(t)$

$u_x=f'(t)a$，$u_{xx}=a^2f''(t)$

$u_y=f'(t)b$，$u_{yy}=b^2f''(t)$

∵ u 为调和函数 ∴ $u_{xx}+u_{yy}=0$

$f''(t)a^2+f''(t)b^2=0$　$f''(t)(a^2+b^2)=0$

∴ $f''(t)=0$，　$f'(t)=C_1$，　$f(t)=C_1t+C_2$

∴ $u=f(t)=f(ax+by)=C_1(ax+by)+C_2$

(2) $u=f(\frac{y}{x})$，　设 $t=\frac{y}{x}$　$u=f(t)$

$u_x=-f'(t)\frac{y}{x^2}$，　$u_{xx}=f''(t)(-\frac{y}{x^2})(-\frac{y}{x^2})+f'(t)\frac{2y}{x^3}$

$u_y=f'(t)\frac{1}{x}$，　$u_{yy}=f''(t)\frac{1}{x}\frac{1}{x}=f''(t)\frac{1}{x^2}$

∵u 为调和函数

∴$u_{xx}+u_{yy}=0$

∴$f''(t)\left(\frac{-y}{x^2}\right)^2+f'(t)\frac{2y}{x^3}+f''(t)\frac{1}{x^2}=0$

即 $f''(t)[y^2+x^2]+f'(t)2xy=0$

∵$y=tx$

∴$f''(t)[(tx)^2+x^2]+f'(t)\cdot(xt)\cdot 2x=0$

$f''(t)(t^2+1)+f'(t)2t=0$

$$\frac{f''(t)}{f'(t)}=-\frac{2t}{t^2+1}$$

两边取不定积分：

$$\int\frac{f''(t)}{f'(t)}\mathrm{d}t=-\int\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$\ln f'(t)=-\ln(t^2+1)+\ln C_1=\ln\frac{1}{t^2+1}+\ln C_1$$

$$f'(t)=\frac{C_1}{t^2+1}$$

$$\int f'(t)\mathrm{d}t=\int C_1\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$f(t)=C_1\mathrm{arctg}t+C_2$

∴$u=f\left(\frac{y}{x}\right)=C_1\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+C_2$

30. 由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$。

(1) $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$；

解 方法一 $u_x=x^2+4xy+y^2+(x-y)(2x+4y)$

$u_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)$

$u_{xx}=2x+4y+2x+4y+(x-y)\cdot 2=6(x+y)$

$u_{yy}=-(4x+2y)+(-1)(4x+2y)+(x-y)\cdot 2$

$=-6(x+y)$

∴$u_{xx}+u_{yy}=0$

即 $u(x,y)$ 是 z 平面上的调和函数

∵$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为解析函数

∴ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\therefore v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-[-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)]\mathrm{d}x$$

$$+[(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)]\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2+6xy-3y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C$$

∴$f(z)=u+\mathrm{i}v$

$=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$

$+\mathrm{i}(-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C)$

$=(x^3+3x^2y-3xy^2-y^3)$

$+\mathrm{i}(-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3)+\mathrm{i}C$

$=(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)^3+\mathrm{i}C$

$=(1-\mathrm{i})z^3+\mathrm{i}C$

方法二 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y$

$=(x^2+4xy+y^2+2x^2+4xy-2xy-4y^2)$

$-\mathrm{i}(-x^2-4xy-y^2+4x^2-4xy+2xy-2y^2)$

$=(3x^2-3y^2+6xy)-\mathrm{i}(3x^2-3y^2-6xy)$

$=(3x^2+6xy\mathrm{i}-3y^2)-\mathrm{i}(3x^2+6xy\mathrm{i}-3y^2)$

$=3(x^2+2xy\mathrm{i}-y^2)-3\mathrm{i}(x^2+2xy\mathrm{i}-y^2)$

$=3(x+\mathrm{i}y)^2-3\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^2$

$=3(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)^2$

∴$f(z)=(1-\mathrm{i})z^3+\mathrm{i}C$

(2) $v=\frac{y}{x^2+y^2}$，$f(2)=0$；

解 方法一

$$\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

∵ $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$$\therefore u(x,y)=\int\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=x\int\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}+g(x)$$

$$\because \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)$$

$$=-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)$$

即 $$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow g(x)=C$$

$$\therefore f(z)=u+\mathrm{i}v$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}+C+\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$=C+\frac{-x+\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=C-\frac{1}{z}$$

$$\because f(2)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$$

方法二

$$\because v_x=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad v_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\mathrm{i}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2-2xy\mathrm{i}-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(-x+\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{z^2}$$

$$\therefore f(z)=-\frac{1}{z}+C$$

$$\because f(2)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$$

(3) $u=2(x-1)y, f(2)=-\mathrm{i}$;

解 方法一

$$\because u_x=2y, u_y=2(x-1)$$

$$u_{xx}=0, u_{yy}=0$$

$$\therefore u_{xx}+u_{yy}=0$$

$\therefore u$ 是 z 平面上的调和函数

由 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

∴ 其共轭调和函数为

$$v=\int 2y\mathrm{d}y=y^2+g(x) \qquad (1)$$

而 $$v_x=-u_y=-2(x-1) \qquad (2)$$

由(1)得 $$v_x=g'(x) \qquad (3)$$

由(2)(3)得 $$g'(x)=2-2x$$

$\therefore g(x)=2x-x^2+C$ 代入(1)

$$v=y^2+2x-x^2+C$$

$$\therefore f(z)=u+\mathrm{i}v$$

$$=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2+2x-x^2+C)$$

$$=-\mathrm{i}[\mathrm{i}2xy-\mathrm{i}2y+x^2-2x-y^2-C]$$

$$=-\mathrm{i}[(x+\mathrm{i}y)^2-2(x+\mathrm{i}y)-C]$$

$$=-\mathrm{i}[(z-1)^2]+(1+C)\mathrm{i}$$

$$\because f(2)=-\mathrm{i}$$

$$\therefore -\mathrm{i}(2-1)^2+(1+C)\mathrm{i}=-\mathrm{i}\Rightarrow C=-1$$

$$\therefore f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2$$

方法二 $u_x=2y, u_y=2(x-1)$

$$\therefore f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=2y-\mathrm{i}[2(x-1)]$$

$$=-\mathrm{i}(2x+2y\mathrm{i})+\mathrm{i}$$

$$=-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}$$

$$=-\mathrm{i}2z+2\mathrm{i}$$

$$\therefore f(z)=-\mathrm{i}z^2+2\mathrm{i}z+C$$

$$\because f(2)=-\mathrm{i},\therefore C=-\mathrm{i}$$

$$\therefore f(z)=-\mathrm{i}z^2+2\mathrm{i}z-\mathrm{i}$$

$$=-\mathrm{i}(z^2-2z+1)$$

$$=-\mathrm{i}(z-1)^2$$

(4) $v=\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}, x>0$

解

$$\because v_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$v_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

由
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore u = \int \frac{x}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y)$$

又由
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y)$$

$$\therefore -\frac{y}{x^2+y^2} = -\left[\frac{y}{x^2+y^2} + g'(y)\right]$$

$$\therefore g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

$$\therefore u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$$

$$\begin{aligned}\therefore f(z) &= u + iv \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ &= \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + C + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ &= \ln|z| + i\arg z + C = \operatorname{Ln} z + C\end{aligned}$$

31. 设 $v = e^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z) = u + iv$

解　v 为调和函数 $\therefore \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = pe^{px}\sin y, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = p^2e^{px}\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{px}\cos y, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^{px}\sin y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = p^2e^{px}\sin y - e^{px}\sin y = 0$$

$$(p^2-1)e^{px}\sin y = 0$$

$p^2 = 1$，即当 $p = \pm 1$ 时，v 为调和函数

(1) 当 $p = 1$ 时，$v = e^x\sin y$

$$v_x = e^x\sin y, v_y = e^x\cos y$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(z) &= v_y + iv_x \\ &= e^x\cos y + ie^x\sin y = e^x(\cos y + i\sin y) \\ &= e^x\cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z\end{aligned}$$

$$\therefore f(z) = e^z + C_1$$

(2) 当 $p = -1$ 时，$v = e^{-x}\sin y$

$$v_y = e^{-x}\cos y = u_x$$

$$\therefore u = \int u_x dx = \int e^{-x}\cos y dx = -e^{-x}\cos y + C_2(y)$$

$$u_y = e^{-x}\sin y + C_2'(y) = -v_x = e^{-x}\sin y$$

$$\therefore C_2'(y) = 0 \Rightarrow C_2(y) = C_2$$

$$\therefore u = -e^{-x}\cos y + C_2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(z) &= u + iv = -e^{-x}\cos y + C_2 + ie^{-x}\sin y \\ &= -e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)) + C_2 \\ &= -e^{-(x+iy)} + C_2 = -e^{-z} + C_2\end{aligned}$$

$$\therefore f(z) = -e^{-z} + C_2$$

*32. 如果 $u(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数，C 为 D 内以 z_0 为中心的任何一个正向圆周：$|z-z_0| = r$，它的内部全含于 D。试证：

(1) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等于 $u(x,y)$ 关圆周 C 上的平均值，即

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)d\varphi;$$

(2) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等于 $u(x,y)$ 在圆域 $|z-z_0| \leqslant r_0$ 上的平均值。

即
$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)r d\varphi dr$$

提示：利用平均值公式(3.5.3)。

证明　(1) 令 $z = z_0 + re^{i\theta}$，利用柯西积分公式

$$\begin{aligned}f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} re^{i\theta}\cdot i d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta\end{aligned}$$

从而　$u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)$

$$= \frac{\mathrm{i}d\theta}{R^2 - Rre^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)} - Rre^{\mathrm{i}(\varphi-\theta)} + r^2}$$

$$= \frac{\mathrm{i}d\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}$$

由上题结论

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} d\zeta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} (R^2 - r^2) f(Re^{\mathrm{i}\theta}) \cdot \frac{\mathrm{i}d\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{\mathrm{i}\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta$$

令 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，对上式两边做比较，取其实部

$$u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta$$

*36. 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内及 C 上解析，且不恒为常数，n 为正整数。

(1) 试用柯西积分公式证明：

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta$$

(2) 设 M 为 $f(\zeta)$ 在 C 上的最大值，L 为 C 的长，d 为 z 到 C 的最短距离，试用积分估值公式(3.1.10)于(1)中的等式，证明不等式：

$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(3) 令 $n \to +\infty$，对(2)中的不等式取极限，证明：$|f(z)| \leqslant M$。这个结果表明：在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得（最大模原理）。

根据这一结果可知：在无源无旋的平面稳定非等速的流速场中的流速最大值，即它的复势 $f(z)$ 的模 $|f'(z)|$，不能在场的内部取得，只能在场的边界上取得。

证明 (1) 由于 $f(z)$ 在 C 内及 C 上解析，由解析函数性质知 $g(z) = [f(z)]^n$ 在 C 内及 C 上也解析，从而根据柯西积分公式，得

$$g(z) = [f(z)]^n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta$$

即
$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta$$

(2) 由(1)的结论有

$$|[f(z)]^n| = |f(z)|^n$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_C \left|\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z}\right| d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta - z|} d\zeta$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M^n \cdot L}{d} \quad (|f(\zeta)| \leqslant M, |\zeta - z| \geqslant d)$$

两边开 n 次方， $|f(z)| \leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$

(3) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$，从而对(2)中不等式两边取极限，有

$$|f(z)| \leqslant M \quad (n \to \infty)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 均不存在

∴ $\{\alpha_n\}$ 发散

(5) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

∵ $\left|\sin\dfrac{n\pi}{2}\right| \leqslant 1$，$\left|\cos\dfrac{n\pi}{2}\right| \leqslant 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2} = 0$

∴ $\{\alpha_n\}$ 收剑于 0

2. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n = \begin{cases} 0, & |\alpha| < 1, \\ \infty, & |\alpha| > 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ \text{不存在}, & |\alpha| = 1, \alpha \neq 1 \end{cases}$$

证明 令 $\alpha = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(1) $|\alpha| < 1$，即 $r < 1$

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

∴ $0 \leqslant |\alpha^n| \leqslant r^n(|\cos n\theta| + |i\sin n\theta|) \leqslant 2r^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0 \quad (r < 1)$

∴ 由两边夹定理，$\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha^n| = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n = 0$

(2) $|\alpha| > 1$，即 $r > 1$

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty \quad (r > 1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}|\alpha^n| = \lim_{n\to\infty} r^n = \infty$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\alpha^n = \infty$$

(3) $\alpha = 1 \Rightarrow r = 1$，即 $\alpha = \cos 0 + i\sin 0$

∴ $\alpha^n = \cos 0n + i\sin 0n = \cos 0 = 1$，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n = 1$

(4) $|\alpha| = 1$，但 $\alpha \neq 1$，即 $r = 1$ $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta (\theta \neq 0)$

∴ $\alpha^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\theta$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\theta$ 均不存在

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n$ 不存在。

3. 判别下列级数的绝对收敛性与收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$

解 (1) $z_n = \dfrac{i^n}{n} = \dfrac{1}{n}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + i\,\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}(-1)^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot(-1)^k$$

以上两级数均为收敛的交错级数。

∴ 原级数收敛

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{i^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，为调和级数，发散

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$ 为条件收敛。

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$

令 $$z_n = \frac{i^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cos\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k)}\cdot(-1)^k$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)}\cdot(-1)^k$$

以上两级数均为收敛的交错级数。

∴ 原级数收敛

又 $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{i^n}{\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

$\ln n=\ln(1+n-1)<n-1 \quad (n-1>0)$

$\therefore \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n-1}$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 为调和级数，发散

由比较判别法知：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ 条件收敛

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$

令 $z_n=\frac{(6+5i)^n}{8^n}$

$\because 6+5i=\sqrt{61}(\cos\theta+i\sin\theta),\quad \theta=\mathrm{arctg}\frac{5}{6}$

$\therefore z_n=\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

又 $\because |z_n|=\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$ 且 $\left|\frac{\sqrt{61}}{8}\right|<1$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|$ 收敛

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$ 绝对收敛，因而也收敛。

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$

令 $z_n=\frac{\cos in}{2^n}=\frac{1}{2^n}\frac{e^n+e^{-n}}{2}=\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{e}{2})^n+\frac{1}{2}(\frac{1}{2e})^n$

$\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{e}{2})^n$ 发散

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{2e})^n$ 收敛

$\therefore$ 原级数发散。

4. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

(2) 每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；

(3) 每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数。

解 (1) 不正确。

在收敛圆内的点处处收敛，而收敛圆周上的点可能收敛，也可能发散。

(2) 不正确。

和函数在收敛圆内处处解析。

(3) 不正确。

每一个在 z_0 解析的函数才一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数。

5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

解 不能。

令 $z-2=y\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}c_ny^n$

$\because$ 在 $z=0$ 收敛 $\quad\therefore$ 在 $y=-2$ 处收敛

即在 $|y|<2$ 内均绝对收敛

当 $z=3$ 时，$\because z-2=y=1$

$\therefore |y|<2$

$\therefore$ 在 $z=3$ 处一定绝对收敛。

6. 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$($p$ 为正整数)； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^nz^n$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\frac{i}{n}\right)(z-1)^n$； (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$

解 (1) $c_n=\frac{1}{n^p}$

$\therefore \lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p}$

$\therefore R=\frac{1}{\lambda}=1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$

$$c_n=\frac{(n!)^2}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(\frac{n+1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$=\infty\left(\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}\right)$$

$\therefore R=0$

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+\mathrm{i})^n\cdot z^n$

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$$

$$c_n=(1+\mathrm{i})^n=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}$$

$$\therefore R=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\cdot z^n$

$c_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\quad |c_n|=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=1$

$\therefore R=1$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)(z-1)^n$

$$c_n=\mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{n}}}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{1}{n}+\cos(-\frac{1}{n})+\mathrm{i}\sin(-\frac{1}{n})}{2}$$

$$=\cos\frac{1}{n}$$

$$|c_n|=\left|\cos\frac{1}{n}\right|$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}}\right|=\frac{1}{1}=1$$

$\therefore R=1$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\mathrm{ln}\,\mathrm{i}n}\right)^n$

$$\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}n=\ln|\mathrm{i}n|+\mathrm{i}(\arg\mathrm{i}n)=\ln n+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

$$\therefore|\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}n|=\left(\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore|c_n|=\frac{1}{|\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}n|^n}=\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

$\therefore R=\infty$

7. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$。

(提示　$|(\mathrm{Re}c_n)z^n|<|c_n||z|^n$)

证明　$\because\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 收敛

$|[\mathrm{Re}(c_n)]z^n|=|\mathrm{Re}(c_n)||z^n|\leqslant|c_n||z|^n$

$\therefore$ 由比较判别法知：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(c_n)z^n$ 收敛

$\because\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R。　$|\mathrm{Re}(c_n)|\leqslant|c_n|$

令　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径为 R'

$$\therefore\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\mathrm{Re}(c_n)|}=\frac{1}{R'}$$

$\therefore R'\geqslant R$

即　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(c_n)z^n$ 的收敛半径 $R'\geqslant R$

8. 证明如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在($\neq\infty$)，则下列三个幂级数有相同的收敛半径：

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$; $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$

证明 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在 $\therefore \lambda_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$

$$\because \lambda_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda_1$$

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$

$$\because \lambda_3 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda_1$$

$\therefore$ 由(1)、(2)和(3)知：$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

综上可得 $R_1 = \frac{1}{\lambda_1} = R_2 = \frac{1}{\lambda_2} = R_3 = \frac{1}{\lambda_3}$

即三个幂级数有相同的收敛半径。

9. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛，而 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ 发散，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 1。

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \lambda|z| = 1$

$\therefore |z| = \frac{1}{\lambda}$

(1) 若 $0 < \lambda < 1$

此时 $|z| > 1 \therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda < 1$

$\therefore$ 由判别法知：$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ 收敛

这与已知 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ 发散矛盾

(2) 若 $\lambda > 1$

$\therefore |z| = \frac{1}{\lambda} < 1$

又已知 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = 1$ 处收敛

$\therefore$ 在单位圆处仍有收敛点，这与收敛半径相矛盾。

综上可知必有 $\lambda = 1$

$\therefore R = \frac{1}{\lambda} = 1$

10. 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在它的收敛圆的圆周上一点 z_0 处绝对收敛，证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛。

证明 设 z 为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 收敛圆周上的一点，由于在此圆周上点 z_0 绝对收敛，且又有

$$|c_n z^n| = |c_n||z^n| = |c_n||z_0^n|$$

所以，此级数在其收敛圆周上绝对收敛。根据阿贝尔定理可知，满足 $|z| < |z_0|$ 的 z，此级数必绝对收敛。

综上可知，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在其收敛圆所围成的闭区域上，绝对收敛。

11. 把下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径：

(1) $\frac{1}{1+z^3}$； (2) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$； (3) $\cos z^2$；

(4) $\operatorname{sh} z$； (5) $\operatorname{ch} z$； (6) $e^{z^2}\sin z^2$；

(7) $e^{\frac{z}{z-1}}$； (8) $\sin\frac{1}{1-z}$

(提示 $\sin\frac{1}{1-z} = \sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right) = \sin 1\cos\frac{z}{1-z} + \cos 1\sin\frac{z}{1-z}$)

解 (1) $\because \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, |z| < 1$

$\therefore \frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + z^6 - z^9 + \cdots + (-1)^n z^{3n} + \cdots$

$|z^3| < 1$

$\therefore |z| < 1$

$\therefore R = 1$

(2) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$

$\because \dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, |z| < 1$

$\therefore \dfrac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 + \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots$

$|z^2| < 1$ 即 $|z| < 1$

$\therefore \left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)' = \dfrac{-2z}{(1+z^2)^2}$

$\therefore \dfrac{1}{(1+z^2)^2} = -\dfrac{1}{2z}\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'$

$= 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \cdots$

且 $|z| < 1$

$\therefore \quad R = 1$

(3) $\cos z^2$

$\because \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \cdots, |z| < +\infty$

$\because \cos z^2 = 1 - \dfrac{z^4}{2!} + \dfrac{z^8}{4!} - \dfrac{z^{12}}{6!} + \cdots, |z^2| < +\infty$

$\therefore |z| < +\infty$

$\therefore \quad R = +\infty$

(4) $\operatorname{sh} z$

$\because \operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots, R = +\infty$

$e^{-z} = 1 - z + \dfrac{z^2}{2!} - \dfrac{z^2}{3!} + \cdots, R = +\infty$

$\operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}\left[\left(1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - z + \dfrac{z^2}{2!} - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots\right)\right]$

$= z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots, R = +\infty$

(5) $\operatorname{ch} z$

$\because \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\therefore \operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}\left[\left(1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots\right) + \left(1 - z + \dfrac{z^2}{2!} - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots\right)\right]$

$= 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots$

且 $R = +\infty$

(6) $e^{z^2} \sin z^2$

$\because e^{z^2} = 1 + z^2 + \dfrac{z^4}{2!} + \dfrac{z^6}{3!} + \cdots, (R = +\infty)$

$\sin z^2 = z^2 - \dfrac{z^6}{3!} + \dfrac{z^{10}}{5!} + \cdots$

$\therefore e^{z^2} \sin z^2 = \left(1 + z^2 + \dfrac{z^4}{2!} + \dfrac{z^6}{3!} + \cdots\right) \times \left(z^2 - \dfrac{z^6}{3!} + \dfrac{z^{10}}{5!} - \cdots\right)$

$= z^2 + z^4 + \dfrac{z^6}{3} + \cdots$

且 $R = +\infty$

(7) $e^{\frac{z}{z-1}}$

$\because \dfrac{z}{z-1} = -\dfrac{z}{1-z}$

$= -(z + z^2 + z^3 + \cdots)$

$= -z\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}, \quad |z| < 1$

$\therefore e^{\frac{z}{z-1}} = e^{-(z+z^2+z^3+\cdots)}$

$= 1 - (z + z^2 + z^3 + \cdots) + \dfrac{1}{2!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^2$

$- \dfrac{1}{3!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 + \cdots$

$= 1 - z - \dfrac{1}{2}z^2 - \dfrac{1}{6}z^3 + \cdots, \quad |z| < 1$，即 $R = 1$

(8) $\sin \dfrac{1}{1-z}$

$\sin \dfrac{1}{1-z} = \sin\left(1 + \dfrac{z}{1-z}\right)$

$= \sin 1 \cos \dfrac{z}{1-z} + \cos 1 \sin \dfrac{z}{1-z}$

$\because \dfrac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$

且 $|z| < 1$

$\therefore \sin \dfrac{z}{1-z} = (z + z^2 + z^3 + \cdots) - \dfrac{1}{3!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^3$

$+ \dfrac{1}{5!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^5 + \cdots$

$$= z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \cdots, |z| < 1$$

$$\cos\frac{z}{1-z} = 1 - \frac{1}{2!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^2 + \frac{1}{4!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}z^2 - z^3 + \cdots, |z| < 1$$

$$\therefore \sin\frac{1}{1-z} = \sin 1\left(1 - \frac{1}{2}z^2 - z^3 + \cdots\right) + \cos 1\left(z + z^2 - \frac{5}{6}z^3 + \cdots\right)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot z + \left(\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1\right)z^2 + \left(\frac{5}{6}\cos 1 - \sin 1\right)z^3 + \cdots, \quad |z| < 1, \text{即 } R = 1$$

12. 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\dfrac{z-1}{z+1}, z_0 = 1$；　　(2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0 = 2$；

(3) $\dfrac{1}{z^2}, z_0 = -1$；　　(4) $\dfrac{1}{4-3z}, z_0 = 1 + i$；

(5) $\text{tg}z, z_0 = \dfrac{\pi}{4}$；　　(6) $\text{arctg}z, z_0 = 0$

解 (1) $\because \dfrac{z-1}{z+1} = (z-1)\dfrac{1}{(z-1+2)} = \dfrac{z-1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, |z| < 1$$

$$\therefore \frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1}{2}\left[1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1} + \cdots\right]$$

$$= \frac{z-1}{2} - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n$$

$$\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z-1| < 2, \quad R = 2$$

(2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, \quad z_0 = 2$

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{z+2} - \frac{2}{z+1}\right) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

$$\because \frac{1}{z+2} = \frac{1}{4+(z-2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{z-2}{4} + \left(\frac{z-2}{4}\right)^2 - \cdots\right], \left|\frac{z-2}{4}\right| < 1$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{z-2}{3} + \left(\frac{z-2}{3}\right)^2 - \cdots\right], \left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2}{4}\left(1 - \frac{z-2}{2^2} + \frac{1}{2^{2\cdot 2}}(z-2)^2 + \cdots\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z-2}{3} + \frac{(z-2)^2}{3^2} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{2n}} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$$

$$\left|\frac{z-2}{4}\right| < 1 \text{ 且 } \left|\frac{z-2}{3}\right| < 1 \Rightarrow |z-2| < 3, \text{即 } R = 3$$

(3) $\dfrac{1}{z^2}, z_0 = -1$

$$\because \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{1-(z+1)}$$

$$= -[1 + (z+1) + (z+1)^2 + \cdots], |z+1| < 1$$

$$\therefore \left(\frac{1}{z}\right)' = -[1 + 2(z+1) + 3(z+1)^2 + \cdots + n(z+1)^{n-1} + \cdots], |z+1| < 1$$

$$\therefore \frac{1}{z^2} = 1 + 2(z+1) + \cdots + n(z+1)^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n \quad \text{且 } R = 1$$

(4) $\dfrac{1}{4-3z}, z_0 = 1 + i$

$$\because \frac{1}{4-3z} = \frac{1}{4-3[z-(1+i)]-3-3i}$$

$$= \frac{1}{1-3i-3[z-(1+i)]}$$

$$= \frac{1}{1-3i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]}$$

$$= \frac{1}{1-3i}\left\{1 + \frac{3}{1-3i}[z-(1+i)] + \left(\frac{3}{1-3i}\right)^2 [z-(1+i)]^2 + \cdots\right\}$$

此时 $\left|\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right| < 1$

$$\therefore \frac{1}{4-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$$

$$\because \left|\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right| < 1$$

$$\Rightarrow |z-(1+i)| < \frac{|1-3i|}{3} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

(5) $\operatorname{tg} z, z_0 = \frac{\pi}{4}$

令 $f(z) = \operatorname{tg} z,\quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \quad (\operatorname{tg} z)' = \sec^2 z \quad (\operatorname{tg} z)'\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 2$$

$$(\operatorname{tg} z)'' = 2\sec z \cdot \sec z \cdot \operatorname{tg} z = 2\sec^2 z \operatorname{tg} z$$

$$(\operatorname{tg} z)''\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 4$$

$$\therefore c_0 = 1, c_1 = \frac{2}{1!} = 2, c_2 = \frac{4}{2!} = 2, \cdots$$

$$(\operatorname{tg} z)''' = 2(2\sec^2 z \operatorname{tg}^2 z + \sec^4 z)$$

$$(\operatorname{tg} z)^{(3)}\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 2(4+4) = 16$$

$$\therefore c_3 = \frac{16}{3!} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \operatorname{tg} z = 1 + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots \left(R = \frac{\pi}{4}\right)$$

(6) $\operatorname{arctg} z, z_0 = 0$

$$\because (\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$$

$$\therefore \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$$

又 $\because \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots, |z^2| < 1$ 即 $|z| < 1$

$$\therefore \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}, |z| < 1 \therefore R = 1$$

13. 为什么在区域 $|z| < R$ 内解析且在区间 $(-R, R)$ 取实数值的函数 $f(z)$ 展开成 z 的幂级数时，展开式的系数都是实数？

解 由解析函数展开为泰勒级数的唯一性得：$f(z)$ 在 $|z| < R$ 内的展开式应与 $f(x)$ 在 $|x| < R$ 内展开式一致。$f(x)$ 在 $|x| < R$ 内展开式的系数是实数。

于是，$f(z)$ 在 $|z| < R$ 内展开式系数都是实数。

14. 证明在 $f(z) = \cos\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 以 z 的各幂表出的洛朗展开式中的各系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta \, d\theta, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

[提示 在对应教材公式(4.4.8)中，取 C 为 $|z| = 1$，在此圆上设积分变量 $\zeta = e^{i\theta}$，然后证明 c_n 的积分的虚部等于零]

证明 $f(z) = \cos\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

令 $z = e^{i\theta}$

$dz = ie^{i\theta}d\theta$

$\theta: 0 \to 2\pi$

$z_0 = 0$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{(e^{i\theta})^{n+1}} ie^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{in\theta}} i\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta)[\cos n\theta - i\sin n\theta] d\theta$$

其虚部 $$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta$$

由于 $$\cos[2\cos(\theta+2\pi)]=\cos(2\cos\theta)$$

$$\sin n(\theta+2\pi)=\sin(n\theta+2n\pi)=\sin n\theta$$

令 $$g(\theta)=\cos(2\cos\theta)\sin n\theta$$

$$\begin{aligned}g(\theta+2\pi)&=\cos[2\cos(\theta+2\pi)]\sin n(\theta+2\pi)\\&=\cos(2\cos\theta)\sin n\theta\\&=g(\theta)\end{aligned}$$

$g(\theta)$ 以 2π 为周期

又 $$\begin{aligned}g(-\theta)&=\cos[2\cos(-\theta)]\sin n(-\theta)\\&=\cos(2\cos\theta)(-\sin n\theta)\\&=-\cos(2\cos\theta)\cdot\sin n\theta\\&=-g(\theta)\end{aligned}$$

$\therefore g(\theta)$ 为奇函数

$$\therefore \text{虚部}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)\mathrm{d}\theta=0$$

$$\therefore c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta\quad(n=0,\pm1,\cdots)$$

15. 下列结论是否正确？

用长除法得

$$\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+z^4+\cdots,$$

$$\frac{z}{z-1}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

因为 $$\frac{z}{1-z}+\frac{z}{z-1}=0$$

所以 $$\cdots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots=0$$

解　不正确。

$$\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\cdots,|z|<1$$

$$\frac{z}{z-1}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots,|z|>1$$

用长除法所得到的两式的取值范围不同，故不能相加。

16. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数：

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，$1<|z|<2$；

(2) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}$，$0<|z|<1$；$0<|z-1|<1$；

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，$0<|z-1|<1$；$1<|z-2|<+\infty$；

(4) $\dfrac{1}{e^{1-z}}$，$1<|z|<+\infty$；

(5) $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$，在以 i 为中心的圆环域内；

(6) $\sin\dfrac{1}{1-z}$，在 $z=1$ 的去心邻域内；

(7) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$，$3<|z|<4$；$4<|z|<+\infty$

解　(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，$1<|z|<2$，

令 $$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\frac{a}{z+i}+\frac{b}{z+i}+\frac{c}{z-2}$$

则 $$1=a(z-i)(z-2)+b(z+i)(z-2)+c(z^2+1)$$

令 $z=i$　则　$1=2i\cdot b(i-2)$

$$b=\frac{1}{2i(i-2)}=\frac{-1+2i}{10}$$

$z=2\Rightarrow1=5c\quad c=\dfrac{1}{5}$

$z=-i\Rightarrow1=-2i(-i-2)a$

$$a=\frac{1}{2i(i+2)}=\frac{-1-2i}{10}$$

$\therefore$ 当 $1<|z|<2$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}&=\frac{-1-2i}{10}\frac{1}{(z+i)}+\frac{-1+2i}{10}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{5}\frac{1}{z-2}\\&=\frac{-1-2i}{10}\frac{1}{z(1+\frac{i}{z})}+\frac{-1+2i}{10}\frac{1}{z(1-\frac{i}{z})}\\&\quad+\frac{1}{5}(-\frac{1}{2})\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\\&=\frac{-1-2i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^{n+1}}+\frac{-1+2i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{-1-2i}{10}\right)(-1)^n+\left(\frac{-1+2i}{10}\right)\right]\frac{i^n}{z^{n+1}}$$

$$-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}}+\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\cdots+\frac{2}{z^4}+\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}-\cdots\right)$$

(2) $\frac{1}{z(1-z)^2}$, $0<|z|<1$; $0<|z-1|<1$

① $0<|z|<1$

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}$$

$\because \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots,|z|<1$

$$\therefore\left(\frac{1}{1-z}\right)'=-\frac{-1}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$=1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{z(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z}nz^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-2}$$

$$=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n,\quad 0<|z|<1$$

② $0<|z-1|<1$

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}\cdot\frac{1}{z}$$

$\because \frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n,\quad |z|<1$

$\therefore \frac{1}{z}=\frac{1}{1+z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad |z-1|<1$

$$\therefore \frac{1}{z(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-2}(z-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad 0<|z-1|<1$$

(3) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ $0<|z-1|<1$; $1<|z-2|<+\infty$

① $0<|z-1|<1$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)-1}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

② $1<|z-2|<+\infty$

则

$$\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}}$$

(4) $e^{\frac{1}{1-z}}$, $1<|z|<+\infty$

$\because 1<|z|<+\infty$

$\therefore \frac{1}{|z|}<1$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$e^{\frac{1}{1-z}}=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots$$

(5) $\frac{1}{z^2(z-i)}$，在以 i 为中心的圆环域内

① $0<|z-i|<1$

$$\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{(z-i+i)^2}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{i^2[1+\frac{(z-i)}{i}]^2}=\frac{-1}{z-i}\frac{1}{[1-i(z-i)]^2}$$

∵ $\frac{1}{(1-\zeta)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\zeta^{n-1},|\zeta|<1$

∴ $|i(z-i)|<1$ 即 $|z-i|<1$

$$\frac{1}{[1-i(z-i)]^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-1}$$

∴ $$\frac{1}{z^2(z-i)}=-\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot i^2\cdot i^{n-1}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n+1}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{i^{n+1}\cdot i^{n+1}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{i^{2(n+1)}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(i^2)^{n+1}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}},0<|z-i|<1$$

② $1<|z-i|<+\infty$

$$\frac{1}{(z-i+i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)^2}$$

∵ $\frac{1}{1+\zeta}=1-\zeta+\zeta^2-\zeta^3+\cdots,|\zeta|<1$

∴ $\left(\frac{1}{1+\zeta}\right)'=-\frac{1}{(1+\zeta)^2}=-(-1+2\zeta-3\zeta^2+\cdots)$

∴ $$\frac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)^2}=1-2\left(\frac{i}{z-i}\right)^2+3\left(\frac{i}{z-i}\right)^3-4\left(\frac{i}{z-i}\right)^4+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1}$$

∴ $$\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{(z-i)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\frac{i^{n-1}}{(z-i)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}},1<|z-i|<\infty$$

(6) $\sin\frac{1}{1-z}$，在 $z=1$ 的去心邻域内

在 $0<|z-1|<+\infty$

∵ $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots,|z|<+\infty$

∴ $$\sin\frac{1}{1-z}=-\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=-\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots\right]$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}},0<|z-1|<+\infty$$

(7) $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$ $3<|z|<4;4<|z|<+\infty$

① $3<|z|<4$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{6}{4-z}-\frac{2}{z-3}$$

$$=1-\frac{6}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{4}}-\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n-\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}z^n-2\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n,3<|z|<4$$

② $4<|z|<+\infty$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{6}{4-z}-\frac{2}{z-3}$$

$$=1+\frac{6}{z-4}-\frac{2}{z-3}$$

$$=1+\frac{6}{z}\frac{1}{1-\frac{4}{z}}-\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$=1+\frac{6}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n-\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot2^{2n-1}-2\cdot3^{n-1})z^{-n},4<|z|<\infty$$

17. 函数 $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$ 能否在圆环域 $0<|z|<R$ $(0<R<+\infty)$ 内展开成洛朗级数?为什么?

解 $f(z)=\operatorname{tg}\frac{1}{z}$

令 $z_k=\dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$, $k=0,\pm1,\cdots$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{z_k}=\infty$$

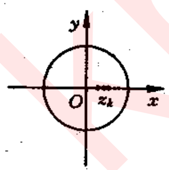

图 4-1

$\therefore z_k=\dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ 是 $f(z)=\operatorname{tg}\frac{1}{z}$ 的不解析点,即奇点。

又 $\because \lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$

$\therefore \{z_k\}$ 以 $z=0$ 为极限

即 $f(z)=\operatorname{tg}\frac{1}{z}$ 在 $z=0$ 处的任意小的去心邻域内,总有不可导的点 z_k,故不能保证 $f(z)=\operatorname{tg}\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<R$ 内处处解析。

$\therefore f(z)=\operatorname{tg}\frac{1}{z}$ 不可以在 $0<|z|<R$ 内展开为洛朗级数。

18. 如果 k 为满足关系 $k^2<1$ 的实数,证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

(提示 对 $|z|>k$ 展开 $(z-k)^{-1}$ 成洛朗级数,并在展开式的结果中置 $z=e^{i\theta}$,再令两边的实部与实部相等,虚部与虚部相等。)

证明 在 $|z|>k$ 时

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z(1-\frac{k}{z})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}\quad(k^2<1)$$

令 $z=e^{i\theta}$

则 $$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{\cos\theta-k+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{(\cos\theta-k)^2+i\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}\tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}k^ne^{-(n+1)i\theta}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}k^n[\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta]\tag{2}$$

(1)=(2)⇒两边的实部相等、虚部相等,得证。

19. 如果 C 为正向圆周 $|z|=3$,求积分 $\oint_C f(z)dz$ 的值。设 $f(z)$ 为:

(1) $\dfrac{1}{z(z+2)}$; (2) $\dfrac{z+2}{(z+1)z}$;

(3) $\dfrac{1}{z(z+1)^2}$; (4) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$

解 (1) $\because \dfrac{1}{z(z+2)}=\dfrac{1}{2z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{z}{2}}$

$$=\frac{1}{2z}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\cdots\right)$$

$\because \left|\frac{z}{2}\right|<1$, $\therefore |z|<2$

故 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)}$ 在域 $C:|z|=3$ 内不全解析。

设 C_1,C_2 为两两互不相交,互不包含之圆周,且各自包围奇点 $z=0$,

$z=-2$

$$\therefore \oint_C f(z)\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z+2)}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z+2)}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i+\frac{1}{-2}\cdot 2\pi i=0$$

(2) $\because \dfrac{z+2}{(z+1)z}=\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{1}{1+z}\right)$

故在 $C:|z|=3$ 内 $f(z)$ 不全解析

设 C_1,C_2 为既不相交又不包含且各自包含奇点 $z=0$，$z=-1$ 的小圆周。

由柯西积分公式

$$\oint_C\frac{z+2}{z(z+1)}\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$$

$$=2\cdot 2\pi i-2\pi i=2\pi i$$

(3) $\dfrac{1}{z(z+1)^2}$

设 C_1,C_2 为互不相交，又互不包含的两小圆域，且各自包含着奇点 $z=0$，$z=-1$

$$\therefore \oint_C f(z)\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)\mathrm{d}z$$

$$+\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i-2\pi i=0$$

(4) 方法一　设 C_1,C_2 为互不相交且互不包含的两小圆域，且各自包围着奇点 $z=-1$，$z=-2$

$$\therefore \oint_C\frac{z}{(z+1)(z+2)}\mathrm{d}z=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{-1}{-1+2}2\pi i+\frac{-2}{-2+1}2\pi i$$

$$=2\pi i$$

方法二　$\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=z\left(\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{z+2}\right)$

$\because z=-1,-2$ 为奇点，$|z|=3$ 以 0 为中心

$\therefore$ 展开为 z 的幂级数，$f(z)$ 中的 z 不动

在 $1<|z|<2$ 及 $2<|z|<+\infty$ 内 $f(z)$ 解析

而 $|z|=3$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内

$\therefore$ 将 $\dfrac{1}{z+1},\dfrac{1}{z+2}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内展为点于 z 的洛朗级数。

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\cdots,\ \left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>1$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\cdots,\ \left|\frac{2}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>2$$

$$\therefore \frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\cdots\right)-\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{3}{z^3}+\cdots$$

$$\therefore \frac{z}{(z+2)(z+1)}=\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}+\cdots$$

$\therefore c_{-1}=1$

$$\therefore \oint_C\frac{z}{(z+1)(z+2)}\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=2\pi i\cdot 1=2\pi i$$

20. 试求积分 $\oint_C\left(\sum\limits_{n=-2}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z$ 的值，其中 C 为单位圆 $|z|=1$ 内的任何一条不经过原点的简单闭曲线。

解　$$\sum_{n=-2}^{\infty}z^n=z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$\because \sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 在 $|z|<1$ 内收敛，

$\therefore$ 可对其逐项积分：

$$\oint_C\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z=\oint_C\left(z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\mathrm{d}z$$

$$= \oint_C z^{-2}dz + \oint_C z^{-1}dz + \sum_{n=0}^{\infty}\oint_C z^n dz$$

$$= 0 + 2\pi i + 0 = 2\pi i$$

已知：$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 2\pi i & n = 0 \end{cases}$

$f(z) = z^n$ 在 $|z| < 1$ 内解析

第五章　留数

> 领悟音乐的人，能从一切世俗的烦恼中超脱出来。
>
> ——贝多芬

导 学

留数理论是复积分和复级数理论相结合的产物，除提供了计算积分的新方法外，本身也是复变函数论的重要理论。本章以洛朗级数为工具，对解析函数的孤立奇点进行分类研究。然后介绍留数定理，应用留数定理可把计算沿闭曲线的积分转化为计算在孤立奇点处的留数，应用留数定理还可计算一些定积分和广义积分。

而算留数无非是算算导数及极限，这就容易多了。高等数学中一些复杂难解的积分，用留数就很快地解了，这表明，学新东西后要善于回头。

习题全解

1. 下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级：

(1) $\frac{1}{z(z^2+1)^2}$

解　方法一　$\frac{1}{f(z)} = z(z-i)^2(z+i)^2$

当 $z = 0$ 时是 $\frac{1}{f(z)}$ 的一级零点。

当 $z = \pm i$ 时是 $\frac{1}{f(z)}$ 的二级零点。

$\therefore z = 0$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

$z = \pm i$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

第四章 级数

> 受苦的人没有悲观的权利。
>
> ——尼采

导学

这一章我们将介绍复数项级数。在学习高等数学时，已经知道级数和数列的关系。在本章，我们将看到，关于复数项的级数和复变函数项级数的某些概念和定理都是实数域内的相应内容在复数域内的直接推广。本章介绍了复数项和复变函数项级数的基本概念与性质，然后主要讨论了泰勒级数和罗伦级数，并围绕如何将解析函数展开成泰勒级数或罗伦级数这一中心内容进行展开，这两类级数都是研究解析函数的重要工具。

要在对比中学习：①将复变函数与高等数学中的级数部分进行对比；②在复变函数中将泰勒展开与洛朗展开进行对比。

级数展开时应优先考虑用间接展开法。即：借助一些已知函数（如 e^z，$\sin z$，$\cos z$，$\ln(1+z)$ 等）的展开式，利用级数的四则运算性质和逐项导数微分性质来求某函数的展开式。

习题全解

1. 下列数列$\{\alpha_n\}$是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

(1) $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$；　(2) $\alpha_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$；

(3) $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$；　(4) $\alpha_n=e^{-n\pi i/2}$；

(5) $\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-n\pi i/2}$

解 (1) $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$

$=\dfrac{(1+ni)^2}{1+n^2}=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}+\dfrac{2n}{1+n^2}i$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{1+n^2}=-1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{1+n^2}=0$

$\therefore\{\alpha_n\}$ 收敛于 -1

(2) $\alpha_n=(1+\dfrac{i}{2})^{-n}$

令 $x=1,y=\dfrac{1}{2}$，　$\varphi=\arctg\dfrac{1}{2}$

则 $r=\sqrt{1^2+(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$1+\dfrac{i}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(\dfrac{2}{\sqrt{5}}+i\dfrac{1}{\sqrt{5}})$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}e^{i\varphi}$

$\alpha_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}e^{-in\varphi}$

$=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)$

$=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)$

$\because\left|\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right|<1$　　$|\cos n\varphi|\leqslant 1$　　$|\sin n\varphi|\leqslant 1$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n}\cos n\varphi=0$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n}\sin n\varphi=0$

$\therefore\{\alpha_n\}$ 收剑于 0

(3) $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$

$\therefore\{\alpha_n\}$ 发散

(4) $\alpha_n=e^{-\frac{n\pi i}{2}}$

$=\cos\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$=\cos\dfrac{n\pi}{2}-i\sin\dfrac{n\pi}{2}$

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{(z-b)^{2n-1}}=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),b]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\Big[(z-b)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\Big]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to b}[(z-a)^{-n}]^{(n-1)}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots[-n-(n-2)]$$

$$\lim_{z\to b}\frac{1}{(z-a)^{2n-1}}=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-2+2)}{(n-1)!}\frac{1}{(b-a)^{2n-1}}$$

$$=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\frac{(-1)^{2n-1}}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=-\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}=-\mathrm{Res}[f(z),a]$$

$$\therefore\ \oint_c f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}0=0$$

③当$|a|<1<|b|$

则 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$ 在$|z|=1$内只有$z=a$是其n级极点

$$\therefore\ \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),a]$$

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\Big[(z-a)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\Big]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-b)^{-n}]^{(n-1)}$$

$$=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=\frac{(n-1)!\,(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!\,(n-1)!}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)n(n+1)\cdots(2n-2)}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$\therefore\ \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),a]$$

$$=2\pi\mathrm{i}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2\pi(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}\mathrm{i}$$

10. 判定$z=\infty$是下列各函数的什么奇点？并求出在∞的留数：

(1) $\exp(\frac{1}{z^2})$；

解

$\because \lim\limits_{z\to\infty}\exp(\frac{1}{z^2})=0$

$\therefore z=\infty$是可去奇点

$\exp(\frac{1}{z^2})=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!\,z^4}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^6}+\cdots,c<|z|<+\infty$

$\therefore C_{-1}=0$

$\therefore \mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=0$

(2) $\cos z-\sin z$

解

$\lim\limits_{z\to\infty}[\cos z-\sin z]$不存在。

$\therefore z=\infty$是本性奇点

$$\cos z-\sin z=(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots)-(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots)0<|z|<+\infty$$

$$=1-z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}-(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$\therefore C_{-1}=0$

$\therefore \mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=0$

(3) $\dfrac{2z}{3+z^2}$

解　$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z}{3+z^2}=0$

$\therefore z=\infty$是可去奇点。

$3+z^2=0\Rightarrow z=\pm\sqrt{3}\,i$

在$\sqrt{3}<|z|<+\infty$内

$$\frac{2z}{3+z^2}=2z\frac{1}{z^2(1+\frac{3}{z^2})}=\frac{2}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z^2}}$$

$$=\frac{2}{z}(1-\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^4}-\cdots)$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{6}{z^3}+\cdots$$

$\therefore C_{-1}=2$

$\therefore \mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-2$

11. 求 Res[$f(z)$,∞]的值

(1)$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$;

解 方法一

$f(z)$在扩充复平面上有奇点 $z=\pm1, z=\infty$

$\therefore \operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),-1]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$

而 $z=\pm1$,是 $f(z)$的一级极点

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{e^z}{(z+1)(z-1)}=\frac{e}{1+1}=\frac{e}{2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{e^z}{(z+1)(z-1)}=\frac{e^{-1}}{-1-1}=-\frac{e^{-1}}{2}$$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\left(\frac{e}{2}-\frac{e^{-1}}{2}\right)=-\frac{e-e^{-1}}{2}=-\operatorname{sh}1$$

方法二

$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$在 $1<|z|<+\infty$展开

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$$

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right)$$

$$\therefore \frac{e^z}{z^2-1}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z}+\frac{1}{7!}\frac{1}{z}+\cdots\right)+\cdots$$

$$=\cdots+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\right)+\cdots$$

$$\therefore C_{-1}=1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots$$

$$\because e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$\therefore \frac{e^1-e^{-1}}{2}=\operatorname{sh}1=1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots$$

$\therefore \operatorname{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-\operatorname{sh}1$

(2)$f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$

解 方法一

$f(z)$在扩充复平面上有奇点 $z=0,-1,4,\infty$

将 $f(z)$在 $4<|z|<+\infty$上展为洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=\frac{1}{z}\frac{1}{z^4(1+\frac{1}{z})^4}\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}$$

$$=\frac{1}{z^6}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-4}\left(1-\frac{4}{z}\right)^{-1}$$

$\because C_{-1}=0$, $\therefore \operatorname{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=0$

方法二

$\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),-1]+\operatorname{Res}[f(z),4]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$

$z=0, z=4$ 是 $f(z)$的一级极点

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}z\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=-\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),4]=\lim_{z\to4}(z-4)\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=\frac{1}{2^2}\frac{1}{5^4}$$

$z=-1$ 是 $f(z)$的 4 级极点

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{3!}\lim_{z\to-1}\left[\frac{1}{z(z-4)}\right]^{(3)}$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to-1}\frac{1}{4}\left[\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z}\right]^{(3)}$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to-1}\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{z-4}\right)^{(3)}-\left(\frac{1}{z}\right)^{(3)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}\lim_{z\to-1}\left[\frac{-6}{(z-4)^4}-\frac{-6}{z^4}\right]$$

$$=-\frac{1}{4\cdot5^4}+\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{2^2}\frac{1}{5^4}+\frac{1}{4}$$

$\therefore \operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),-1]+\operatorname{Res}[f(z),4]$

$=-\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$

12. 计算下列各积分,C 为正向圆周:

(1) $\displaystyle\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$, $C:|z|=3$

解 令 $z^4+2=0\Rightarrow z_k=\sqrt[4]{-2}$

$$=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad k=0,1,2,3$$

$$z_0=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_1=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_2=2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4})=-2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$z_3=2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4})=-2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$

可见 $z=z_k$　$k=0,1,2,3$ 均在 $|z|=3$ 内且均为 $f(z)$ 的 3 级极点

又 $z^2+1=0$，$z_{4,5}=\pm i$，在 $|z|=3$ 内，且均为 2 级极点

即这 6 个极点均在 $|z|=3$ 内

$$\therefore \oint_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=0}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]$$

但在整个扩充复平面上有奇点为 z_k，$(k=0,\cdots 5)$ 及 $z=\infty$

$$\therefore \sum_{k=0}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]+\text{Res}[f(z),\infty]=0$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]=-\text{Res}[f(z),\infty]=(-C_{-1})=C_{-1}$$

为了求 $\text{Res}[f(z),\infty]$ 在 $3<|z|<\infty$ 内将 $f(z)$ 展为 z 的洛朗级数

$$f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}=\frac{z^{15}}{z^4(1+\frac{1}{z^2})^2z^{12}(1+\frac{2}{z^4})^3}$$

$$=\frac{z^{15}}{z^{16}}\frac{1}{(1+\frac{1}{z^2})^2}\frac{1}{(1+\frac{2}{z^4})^3}$$

$$=\frac{1}{z}(1+\frac{1}{z^2})^{-2}(1+\frac{2}{z^4})^{-3}$$

$$=\frac{1}{z}(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots)^2(1-\frac{2}{z^4}+\frac{4}{z^8}-\frac{8}{z^{12}}+\cdots)^3$$

$$=\frac{1}{z}+\cdots$$

$\therefore C_{-1}=1$，$\text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-1$

$$\therefore \oint_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=0}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]$$

$$=2\pi i\{-\text{Res}[f(z),\infty]\}=2\pi i[-(-C_{-1})]=2\pi i$$

(2) $\oint_c \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，$C:|z|=2$

解

$\because |z|=2$ 内有两个奇点 $z=0$，$z=-1$

$$\therefore \oint_c f(z)dz = 2\pi i\{\text{Res}[f(z),0]+\text{Res}[f(z),-1]\}$$

在 $z=-1$ 处，令 $P(z)=z^3e^{1/z}$，$Q(z)=1+z$

$P(-1)=-e^{-1}\neq 0$

$Q(-1)=0$　　$Q'(z)|_{z=-1}=1\neq 0$

$\because z=-1$ 是 $f(z)$ 的一级极点

$$\therefore \text{Res}[f(z),-1]=\frac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z=-1}=\frac{-e^{-1}}{1}=-\frac{1}{e}$$

$\because z=0$ 是奇点

$\therefore$ 在 $z=0$ 的环域 $0<|z|<1$ 内将 $f(z)$ 展开为关于 z 的洛朗级数

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6-\cdots$$

$$\therefore f(z)=\frac{z^3e^{1/z}}{1+z}=z^3(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots)$$
$$(1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6-\cdots)$$

$$=z^3(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots$$
$$-z-1-\frac{1}{2!z}-\frac{1}{3!z^2}-\frac{1}{4!z^3}-\frac{1}{5!z^4}-\frac{1}{6!z^5}-\cdots$$
$$+z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\frac{1}{5!z^3}+\frac{1}{6!z^4}+\cdots$$
$$-z^3-z^2-\frac{z}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!z}-\frac{1}{5!z^2}-\frac{1}{6!z^3}-\cdots+\cdots)$$

$$=z^3[\cdots+\frac{1}{z^4}[\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots]$$

$$=\cdots+\frac{1}{z}(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots)+\cdots$$

$\because$ 含无穷多项负幂项

$\therefore z=0$ 是本性奇点。且

$$C_{-1}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots$$

$$\because e^{-z}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$\therefore e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$\therefore \frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots=e^{-1}-(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})=e^{-1}-\frac{1}{3}$$

$$\therefore C_{-1}=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}$$

$\therefore \text{Res}[f(z),0]+\text{Res}[f(z),-1]=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}+(-\frac{1}{e})=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ 原式 $=2\pi i(-\frac{1}{3})=-\frac{2}{3}\pi i$

(3) $\oint \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz$($n$ 为一正整数),$C:|z|=r>1$

解:

① 当 $n=1$ 时,$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz=\oint_C \frac{z^2}{1+z}dz=2\pi i$

② 当 $n\neq 1$ 时,令 $1+z^n=0, z_k=\sqrt[n]{-1}=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}(k=0,1,\cdots,n-1)$

共有 n 个一级极点 z_k 全在 $|z|=r>1$ 内

$\therefore \oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\text{Res}[f(z),z_k]$

而 $\lim_{z\to\infty}\frac{z^{2n}}{1+z^n}=\infty$

$\therefore z=\infty$ 为奇点

$\therefore$ 在整个扩充复平面上有 $(n+1)$ 个奇点:

$z_k, k=0,1,\cdots,n-1, z=\infty$

$\sum_{k=0}^{n-1}\text{Res}[f(z),z_k]+\text{Res}[f(z),\infty]=0$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\text{Res}[f(z),z_k]=-\text{Res}[f(z),\infty]$

$=-(-C_{-1})=C_{-1}$

以下求 C_{-1}:将 $f(z)$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内展开为洛朗级数

$f(z)=\frac{z^{2n}}{1+z^n}=z^{2n}\frac{1}{1+z^n}=z^{2n}\frac{1}{z^n(1+\frac{1}{z^n})}$

$=z^n(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{z^{3n}}+\cdots)$

$=z^n-1+\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$

$\because$ 最高次正幂为 z^n,$\therefore z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 n 级极点,且 $C_{-1}=0$

$\therefore \text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=0$

$\therefore \oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\text{Res}[f(z),z_k]=2\pi i\{-\text{Res}[f(z),\infty]\}$

$=2\pi i[-(-C_{-1})]=0$

13. 计算下列积分:

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta$;

解 令 $z=e^{i\theta}$ 则 $dz=izd\theta$ $d\theta=\frac{dz}{iz}$

$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{z^2-1}{2iz}$

原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{10iz+3z^2-3}dz$

$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{(\sqrt{3}z+\frac{5}{\sqrt{3}}i)^2+(\frac{4}{\sqrt{3}})^2}dz$

$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{(\sqrt{3}z+\frac{5}{\sqrt{3}}i-\frac{4}{\sqrt{3}}i)(\sqrt{3}z+\frac{5}{\sqrt{3}}i+\frac{4}{\sqrt{3}}i)}dz$

$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{\sqrt{3}(z+\frac{i}{3})\sqrt{3}(z+3i)}dz$

$=2\pi i(\frac{2}{3}\frac{1}{z+3i})|z=-\frac{i}{3}$

$=\frac{\pi}{2}$

(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\ (a>b>0)$

解

原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{(\frac{z-z^{-1}}{2i})^2}{a+\frac{b}{2}(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz}$

$=-\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{6z^2(z^2+\frac{2a}{b}z+1)}dz$

$\because z^2+\frac{2a}{b}z+1=\{z-(\frac{-a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1})\}\{z-(-\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1})\}$

$0<|-\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}|=\frac{1}{1-\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}<1(a>b>0)$

$\therefore$ 原式 $=-\frac{\pi}{b}\{\text{Res}[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+\frac{2a}{b}z+1)},0]$

$$+\mathrm{Res}[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+\frac{2a}{b}z+1)},(-\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1})])$$

$$=\frac{-\pi}{b}(-\frac{2a}{b}+\frac{2}{b}\sqrt{a^2+b^2})$$

$$=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2})$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

解

如图 5-1，当 $r>1$ 时，由留数定理知：

$$\int_0^r\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_{-r}^r\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_r}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}$$

$$+\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[\frac{1}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}]$$

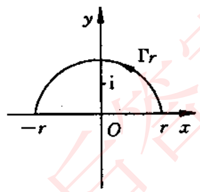

图 5-1

$$\because\left|\int_{\Gamma_r}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}\right|\leqslant\frac{\pi r}{(r^2-1)}\to 0\quad(r\to+\infty)$$

$$\mathrm{Res}[\frac{1}{(1+z^2)^2},\mathrm{i}]$$

$$=\frac{1}{(2-1)!}[(z+\mathrm{i})^{-2}]^{(2-1)}|_{z=\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=2\lim_{r\to+\infty}\int_0^r\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\frac{-\mathrm{i}}{4}=\frac{\pi}{2}$$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

解 设 $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$ 它在上半平面内有两个一级极点

$z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ $\quad z_2=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}$ $\quad 1+z^4=0$ $\quad z=\sqrt[4]{-1}=\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{4}\mathrm{i}}$ $\quad k=0,1,2,3$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\frac{z^2}{(1+z^4)'}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}=\frac{z^2}{4z^3}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{1}{4z}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\frac{z^2}{(1+z^4)'}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}}=\frac{z^2}{4z^3}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{1}{4z}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Res}[f(z),z_1]+\mathrm{Res}[f(z),z_2]\}$$

$$=2\pi\mathrm{i}(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}})$$

$$=2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{4}(-\sqrt{2}\,\mathrm{i})=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$

解 设 $r>3$，由留数定理

$$\int_{-r}^r\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+4z+5},-2+\mathrm{i}\right]$$

$$-\int_{\Gamma_r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+4z+5}\mathrm{d}z$$

当 $z=x+\mathrm{i}y\in\Gamma_r$ 时 $\quad|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}|=\mathrm{e}^{y}\leqslant 1$

$$\therefore\left|\int_{\Gamma_r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}{y^2+4y+5}\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\frac{\pi r}{r^2-4r-5}\to 0(r\to+\infty)$$

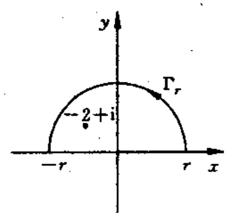

图 5-2

又 $\because\mathrm{Res}[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+4z+5},-2+\mathrm{i}]$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2z+4}\bigg|_{z=-2+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-1-2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\lim_{r\to+\infty}\mathrm{Re}[\int_{-r}^r\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x]$$

$$=\mathrm{Re}(\pi\mathrm{e}^{-1-2\mathrm{i}})$$

$$=\frac{\pi\cos 2}{\mathrm{e}}$$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解 这里 $m=2,n=1,$.

$\therefore m-n=1$

$\therefore R(z)$ 在实轴上无孤立奇点

故所求积分存在 $\qquad R(z)=\frac{z}{1+z^2}$

在上半平面内有一级极点 $\quad z=\mathrm{i}$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}e^{ix}dx = 2\pi i\mathrm{Res}[R(z)e^{iz},i] = 2\pi i\frac{e^{-1}}{2} = \pi i e^{-1}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx = \pi e^{-1}$$

14. 试用下图中的积分路线，求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

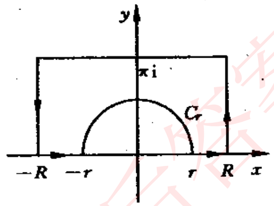

图 5-3

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

由柯西-古萨基本定理有：

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx$$
$$+ i\int_0^{\pi}\frac{e^{i(R+iy)}}{R+iy}dy$$
$$+ \int_R^{-R}\frac{e^{i(x+\pi i)}}{x+\pi i}dx + i\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i(-R+iy)}}{-R+iy}dy = 0$$

令 $x=-t$，有

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx = \int_R^r\frac{e^{-it}}{t}dt = -\int_r^R\frac{e^{-ix}}{x}dx$$

故 $$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx = 2i\int_r^R\frac{\sin x}{x}dx$$

$$\int_0^{\pi}\frac{e^{i(R+iy)}}{R+iy}dy = \int_0^{\pi}\frac{e^{-y}e^{iR}}{R+iy}dy = e^{iR}\int_0^{\pi}\frac{e^{-y}}{R+iy}dy \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

同理 $$\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i(-R+iy)}}{-R+iy} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

又 $$\int_R^{-R}\frac{e^{i(x-\pi)}}{x-\pi}dx = \int_R^{-R}\frac{e^{ix}\cdot e^{-i\pi}}{x-\pi}dx \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

由例 4 知 $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = -\pi i$

故 $$2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi i$$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

*15. 利用公式(5·4·1)计算下列积分

(1) $\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}dz$；(2) $\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}dz$；(3) $\oint_{|z|=3}\mathrm{tg}z dz$；(4) $\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}dz$

解

已知 $\oint_{c=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(N-P)$（$N$：零点个数，$P$：极点个数）

(1) 设 $f(z)=z$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内只有一个 1 级零点故

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z} = 2\pi i$$

(2) 设 $f(z)=z^2-1$ 则 $z=\pm 1$ 是 $f(z)$ 的 1 级零点

$$\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\frac{2z}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}2\pi i\cdot 2 = 2\pi i$$

(3) 设 $f(z)=\cos z$ 则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内有两个零点

$$\oint_{|z|=3}\mathrm{tg}z dz = -\oint_{|z|=3}\frac{-\sin z}{\cos z}dz = -2\pi i\cdot 2 = -4\pi i$$

(4) $$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}dz = \oint_{|z|=3}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_{|z|=3}\frac{1}{z}dz - \oint_{|z|=3}\frac{1}{z+1}dz$$

而 z 和 $z+1$ 在 $|z|=3$ 内分别只有一个零点故

$$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}dz = 2\pi i \quad \oint_{|z|=3}\frac{1}{z+1}dz = 2\pi i$$

故 $$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}dz = 0$$

*16. 设 C 为区域 D 内的一条正向简单闭曲线，z_0 为 C 内一点，如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$。在 C 内 $f(z)$ 无其他零点，试证：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz = z_0$$

证明 因为 z_0 是 $f(z)$ 的一阶 0 点，故存在 $R_\rho>0$ 当 $0<|z-z_0|<R_\rho$ 时

$$f(z) = (z-z_0)g_\rho(z)$$

其中 $g_\rho(z)$ 是 $|z-z_0|<R_\rho$ 内无零点的解析函数，从而

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{g'_\rho(z)}{g_\rho(z)} \quad (0<|z-z_0|<R_\rho)$$

故 $$\mathrm{Res}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = z_0$$

又 $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ 在 D 内只有奇点 z_0，故由留数定理有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Res}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}, z_0\right) = z_0$$

*17. 设 $\varphi(z)$ 在 C：$|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<1$，证明：在 C 内只有一个 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$。

证明 设 $f(z)=-z$，$g(z)=\varphi(z)$ 则

当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|=|z|=1$ $|g(z)|=|\varphi(z)|<1$

故 $\varphi(z)-z$ 在 $|z|<1$ 内的零点个数与 $-z$ 相同。即有一个，从而在 C 内只有一点 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$

*18. 证明：当 $|a|>e$ 时，方程 $e^z-az^n=0$ 在单位圆 $|z|=1$ 内有 n 个根。

证明 设 $f(z)=az^n$ $g(z)=-e^z$

当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|=|a||z|^n=|a|>e$，$|g(z)|=e^{\cos\theta}\leqslant e$

故 e^z-az^n 在 $|z|<1$ 内的零点的个数与 az^n 相同，即有 n 个。

*19. 证明：方程 $z^7-z^3+12=0$ 的根都在 $1\leqslant|z|\leqslant2$ 内

证明 (1)设 $f(z)=z^7$ $g(z)=-z^3+12$

当 $|z|=2$ 时 $|f(z)|=2^7$ $|g(z)|=|-2^3+2|=4$，故

z^7-z^3+12 在 $|z|<2$ 内的零点个数与 z^7 相同即 7 个

(2)设 $f(z)=12$，$g(z)=z^7-z^3$

当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|=12$，$|g(z)|<|z^7|+|z^3|=2$

从而 z^7-z^3+12 在 $|z|<1$ 零点个数为 0

由①②可知方程 $z^7-z^3+12=0$ 的根都在圆环域 $1\leqslant|z|\leqslant2$ 内。

第六章 共形映射

> 有规则必有例外。
>
> ——塞万提斯

导 学

共形映射是从几何的角度对解析函数的性质和应用进行讨论，它在流体力学、电磁学、热传导理论等领域有广泛的应用，它能把在比较复杂区域上所讨论的问题转化到比较简单区域上讨论。本章先介绍共形映射的概念和性质，然后进一步研究分式线性函数和几个初等函数所构成的共形映射的性质。

习题全解

1. 求 $w=z^2$ 在 $z=i$ 处的伸缩率和旋转角。问：$w=z^2$ 将经过点 $z=i$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向映射成 w 平面上那一个方向？并作图。

解 $\because w'=2z$；$w'|_{z=i}=2i$

$\therefore |w'(i)|=|2i|=2$ 伸缩率

$\arg w'(i)=\arg(2i)=\dfrac{\pi}{2}$ 旋转角(即转动角)

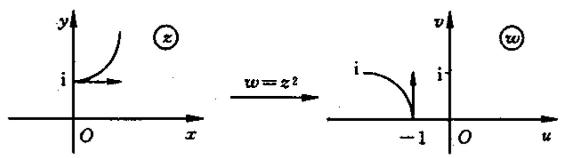

图 6-1

$$= \oint_c z^{-2}dz + \oint_c z^{-1}dz + \sum_{n=0}^{\infty}\oint_c z^n dz$$

$$= 0 + 2\pi i + 0 = 2\pi i$$

已知：$\oint_c \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 2\pi i & n = 0 \end{cases}$

$f(z) = z^n$ 在 $|z| < 1$ 内解析

第五章　留数

> 领悟音乐的人，能从一切世俗的烦恼中超脱出来。
>
> ——贝多芬

导 学

留数理论是复积分和复级数理论相结合的产物，除提供了计算积分的新方法外，本身也是复变函数论的重要理论。本章以洛朗级数为工具，对解析函数的孤立奇点进行分类研究。然后介绍留数定理，应用留数定理可把计算沿闭曲线的积分转化为计算在孤立奇点处的留数，应用留数定理还可计算一些定积分和广义积分。

而算留数无非是算算导数及极限，这就容易多了。高等数学中一些复杂难解的积分，用留数就很快地解了，这表明，学新东西后要善于回头。

习题全解

1. 下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级：

(1) $\frac{1}{z(z^2+1)^2}$

解　方法一　$\frac{1}{f(z)} = z(z-i)^2(z+i)^2$

当 $z=0$ 时是 $\frac{1}{f(z)}$ 的一级零点。

当 $z=\pm i$ 时是 $\frac{1}{f(z)}$ 的二级零点。

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

$z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

方法二 $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{z}\varphi(z)$ 且 $\varphi(z)\neq 0$，当 $z=0$ 时

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{z(z+i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\varphi(z)$ 且 $\varphi(z)\neq 0$，当 $z=i$ 时

$\therefore z=i$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

同理 $z=-i$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

(2) $\frac{\sin z}{z^3}$

解 $z=0$ 是奇点。

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}\cdots$$

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

(3) $\frac{1}{z^3-z^2-z+1}$

解 $\frac{1}{z^3-z^2-z+1}=\frac{1}{z^2(z-1)-(z-1)}=\frac{1}{(z^2-1)(z-1)}$

$$=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}$$

$\therefore z=-1$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

$z=1$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

(4) $\frac{\ln(z+1)}{z}$

解 $\frac{\ln(z+1)}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots\right)=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\cdots$

$\therefore$ 不包括负幂项

$z=0$ 为可去奇点。

$z=-1$ 也是奇点，但它不是孤立奇点。

$\because \ln z$ 在 $z=0$ 及负实轴上处处不解析，

$\therefore \ln(z+1)$ 在 $z=-1$ 及此外的负实轴上也是处处不解析。

即 $z=-1$ 不是孤立奇点。

(5) $\frac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$；

解 方法一

$1+z^2=0\Rightarrow z=\pm i$，故 $z=\pm i$ 是 $1+z^2$ 的一级零点。

$1+e^{\pi z}=0\Rightarrow e^{\pi z}=-1$

$\therefore \pi z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i(\pi+2\pi k)=i\pi(2k+1)$

$\therefore z=i(2k+1)$

当 $k=0, z=i, k=-1, z=-i$

$\because (1+e^{\pi z})|_{z=i(2k+1)}=0$

$(1+e^{\pi z})'|_{z=i(2k+1)}=\pi e^{\pi z}|_{z=i(2k+1)}$

$$=\pi[\cos\pi(2k+1)+i\sin\pi(2k+1)]$$

$$=-\pi\neq 0$$

$\therefore z_k=i(2k+1)$ $k=0,\pm 1,\cdots$ 是 $1+e^{\pi z}$ 的一级零点。

综上可知：

$z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的二级极点。

$z_k=i(2k+1), k=1,\pm 2\cdots$ 为 $f(z)$ 的一级极点

方法二

$1+e^{\pi z}=1+e^{\pi z-(2k+1)\pi i+(2k+1)\pi i}$

$$=1-e^{\pi[z-(2k+1)i]}$$

$$=1-\left\{1+\pi[z-(2k+1)i]+\frac{1}{2!}[\pi(z-2k+1)i]^2+\cdots\right\}$$

$$=-\pi[z-(2k+1)i]-\frac{\pi^2}{2!}[z-(2k+1)i]^2-\cdots$$

$$=-[z-(2k+1)i]\left\{\pi+\frac{\pi^2}{2!}[z-(2k+1)i]+\cdots\right\}$$

$\therefore$ 可知：$z_k=(2k+1)i$ $k=0,\pm 1,\cdots$ 是 $1+e^{\pi z}$ 的一级零点

$\therefore z_k=(2k+1)i$ 为 $\frac{1}{1+e^{\pi z}}$ 的一级极点。

(6) $\frac{1}{e^{z-1}}$

解 方法一

$$\lim_{z\to 1^-} e^{\frac{1}{z-1}}=0 \qquad \lim_{z\to 1^+} e^{\frac{1}{z-1}}=+\infty$$

$\therefore \lim\limits_{z\to 1} e^{\frac{1}{z-1}}$ 不存在。

$\therefore z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

方法二

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots$$

含无穷多个负幂项

$\therefore z=1$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

(7) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$

解 方法一

$$e^z-1=0\Rightarrow e^z=1$$

$z=\mathrm{Ln}1=\ln|1|+i(0+2k\pi)=2k\pi i \quad k=0,\pm1,\cdots$

$\because (e^z-1)|_{z=2k\pi i}=0$

$(e^z-1)'|_{z=2k\pi i}=e^z|_{z=2k\pi i}=1\neq0$

$\therefore z=2k\pi i$ 是 e^z-1 的一级零点。

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点。

$z_k=2k\pi i, k=\pm1,\cdots$ 为 $f(z)$ 的一级极点。

方法二

$$\begin{aligned}e^z-1&=(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)-1\\&=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\\&=z(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots)\end{aligned}$$

$\therefore z=0$ 是 e^z-1 的一级零点。

$$\begin{aligned}e^z-1&=e^{z-2k\pi i+2k\pi i}-1\\&=e^{z-2k\pi i}-1\\&=(1+(z-2k\pi i)+\frac{(z-2k\pi i)^2}{2!}+\cdots)-1\\&=(z-2k\pi i)[1+\frac{z-2k\pi i}{2!}+\frac{(z-2k\pi i)^2}{3!}+\cdots]\end{aligned}$$

$\therefore z_k=2k\pi i$ 是 e^z-1 的一级零点。

(8) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$（n 为正整数）

解 方法一

$$z^n+1=0\Rightarrow z^n=-1$$

$\therefore z_k=\sqrt[n]{-1}=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{n}, k=0,1,\cdots,n-1$

$\because \lim\limits_{z\to z_k}\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}=\infty$

$\therefore z=z_k$ 是 $f(z)$ 的极点。

$z_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 是 $z^n+1=0$ 的所有根。

$\therefore z^n+1=(z-z_0)\cdots(z-z_{n-1})=0$

$\therefore z=z_k$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

方法二

令 $P(z)=z^{2n}\quad Q(z)=1+z^n$

$P(z),Q(z)$ 在 z_k 解析，且 $P(z_k)\neq0, Q(z_k)=0$

$Q'(z_k)=nz_k^{n-1}\neq0$

$\therefore z=z_k$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

(9) $\dfrac{1}{\sin z^2}$

解 $\sin z^2=z^2-\dfrac{(z^2)^3}{3!}+\cdots=z^2(1-\dfrac{z^4}{3!}+\cdots)$

$\therefore z=0$ 是 $\sin z^2$ 的二级零点。

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

$\because \sin z^2=0\Rightarrow z^2=\pm k\pi, k=1,2,\cdots$

①$z^2=k\pi\Rightarrow z_k=\pm\sqrt{k\pi}, k=1,2,\cdots$

②$z^2=-k\pi=i^2k\pi\Rightarrow z_k=\pm i\sqrt{k\pi}, k=1,2,\cdots$

$(\sin z^2)|_{z=z_k}=0$

$(\sin z^2)'|_{z=z_k}\neq0$

$\therefore$ 可知：$z_k=\pm\sqrt{k\pi}, z_k=\pm i\sqrt{k\pi}(k=1,2,\cdots)$ 均为 $f(z)$ 的一级极点。

2. 求证：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级零点，那末 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

证明 $\because z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点

$\therefore f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z), \varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq0$

$$\begin{aligned}\because f'(z)&=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)\\&=(z-z_0)^{m-1}[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)]\end{aligned}$$

$\varphi(z)$ 在 z_0 解析

令 $g(z)=m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)$

则 $g(z)$ 在 z_0 解析，且 $g(z_0)\neq0$

$\therefore z_0$ 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

3. 验证：$z=\dfrac{\pi}{2}i$ 是 $\mathrm{ch}z$ 的一级零点

证明 方法一

$$\operatorname{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$\operatorname{ch}z$ 在 $z=\frac{\pi}{2}i$ 解析

$$\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}i=\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2}=\frac{1}{2}[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}]=0$$

$$(\operatorname{ch}z)'|_{z=\frac{\pi}{2}i}=(\operatorname{sh}z)|_{z=\frac{\pi}{2}i}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}-e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}]$$

$$=i\neq0$$

$\therefore \frac{\pi}{2}i$ 是 $\operatorname{ch}z$ 的一级零点

方法二

$$e^z=e^{z-\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{2}i}=e^{\frac{\pi}{2}i}e^{z-\frac{\pi}{2}i}=ie^{z-\frac{\pi}{2}i}$$

$$=i[1+(z-\frac{\pi}{2}i)+\frac{1}{2!}(z+\frac{\pi}{2}i)^2+\cdots]$$

$$e^{-z}=e^{-z+\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{2}i}=e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{-(z-\frac{\pi}{2}i)}=-ie^{-(z-\frac{\pi}{2}i)}$$

$$=-i[1-(z-\frac{\pi}{2}i)+\frac{1}{2!}(z-\frac{\pi}{2}i)^2-\cdots]$$

$$\therefore e^z+e^{-z}=2i[(z-\frac{\pi}{2}i)+\frac{1}{3!}(z-\frac{\pi}{2}i)^3+\cdots]$$

$$=2i(z-\frac{\pi}{2}i)[1+\frac{1}{3!}(z-\frac{\pi}{2}i)^2+\cdots]$$

$$\therefore \frac{e^z+e^{-z}}{2}=i(z-\frac{\pi}{2}i)[1+\frac{1}{3!}(z-\frac{\pi}{2}i)^2+\cdots]$$

$$\therefore \operatorname{ch}z=(z-\frac{\pi}{2}i)i[1+\frac{1}{3!}(z-\frac{\pi}{2}i)^2+\cdots]$$

$\therefore z=\frac{\pi}{2}i$ 是 $\operatorname{ch}z$ 的一级零点

4. $z=0$ 是函数 $(\sin z+\operatorname{sh}z-2z)^{-2}$ 的几级极点？

解 方法一

$$\operatorname{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$e^{-z}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$\therefore e^z-e^{-z}=2z+2\frac{z^3}{3!}+2\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$\therefore \operatorname{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

$$\therefore \sin z+\operatorname{sh}z-2z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots-2z$$

$$=2\frac{z^5}{5!}+\cdots=z^5(\frac{2}{5!}+\cdots)$$

$$\therefore (\sin z+\operatorname{sh}z-2z)^2=z^{10}(\frac{2}{5!}+\cdots)^2$$

$\therefore z=0$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 10 级零点。

故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的 10 级极点。

方法二

令 $f(z)=(\sin z+\operatorname{sh}z-2z)$　　$f(0)=0$

$f'(z)=\cos z+\operatorname{ch}z-2$　　$f'(0)=0$

$f''(z)=-\sin z+\operatorname{sh}z$　　$f''(0)=0$

$f'''(z)=-\cos z+\operatorname{ch}z$　　$f'''(0)=0$

$f^{(4)}(z)=\sin z+\operatorname{sh}z$　　$f^{(4)}(0)=0$

$f^{(5)}(z)=\cos z+\operatorname{ch}z$　　$f^{(5)}(0)\neq0$

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$ 的 5 级零点。

令 $f(z)=z^5g(z)$　$\because g(0)\neq0$　且 $g(z)$ 在 0 点解析

即 $z=0$ 是 $\frac{1}{\sin z+\operatorname{sh}z-2z}$ 的 5 级极点

$\therefore z=0$ 为 $\frac{1}{(\sin z+\operatorname{sh}z-2z)^2}$ 的 10 级极点

5. 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那末

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\text{（或两端均为}\infty\text{）}$$

证明

$\because f(z_0)=g(z_0)=0$　$(f(z),g(z)$ 以 z_0 为零点$)$

$f(z),g(z)$ 解析且不恒为 0。

$$\therefore \frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}$$

两边取极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

(由 $f'(z),g'(z)$ 也解析⇒连续)。

6. 设函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点(或零点)，那末下列三个函数：

(1) $\varphi(z)\psi(z)$；(2) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$；(3) $\varphi(z)+\psi(z)$ 在 $z=a$ 处各有什么性质？

解

∵$z=a$ 是 $\varphi(z)$ 的 m 级极点

∴$\varphi(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m}g_\varphi(z)$，$g_\varphi(z)$ 在 a 点解析且 $g_\varphi(a)\neq 0$

∴$z=a$ 是 $\psi(z)$ 的 n 级极点。

∴$\psi(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n}g_\psi(z)$，$g_\psi(z)$ 在 a 点解析且 $g_\psi(a)\neq 0$

(1) $\varphi(z)\psi(z)=\dfrac{1}{(z-a)^{m+n}}g_\varphi(z)g_\psi(z)$

$g_\varphi(z)g_\psi(z)$ 在 a 解析，且 $g_\varphi(a)g_\psi(a)\neq 0$

∴$z=a$ 是 $\varphi(z)\psi(z)$ 的 $m+n$ 级极点。

(2) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{1}{(z-a)^{m-n}}\dfrac{g_\varphi(z)}{g_\psi(z)}$

当 $m>n$ 时，a 是 $m-n$ 级极点

当 $m<n$ 时，a 是 $n-m$ 级极点

当 $m=n$ 时，a 是可去奇点

(3) $\varphi(z)+\psi(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m}g_\varphi(z)+\dfrac{1}{(z-a)^n}g_\psi(z)$

①当 $m>n$ 则为 m 级极点

②当 $n>m$ 则为 n 级极点　(取 m,n 最大者)

③当 $m=n$ 时若 $g_\varphi(a)+g_\psi(a)\neq 0$ 则 a 为 n 级极点

若 $g_\varphi(a)+g_\psi(a)=0$ 则 a 为低于 n 级极点或可去奇点

如 $\varphi(z)=\dfrac{z}{z-a}$，$\psi(z)=-\dfrac{a}{z-a}$，$\varphi(z)+\psi(z)=1$

∴$z=a$ 也可能为可去奇点。

7. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点；这个函数又有下列洛朗展开式：

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},\ |z-1|>1,$$

所以"$z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点"，又其中不含 $(z-1)^{-1}$ 幂，因此 $\mathrm{Res}[f(z),1]=0$，这些说法对吗？

解　不对。

$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$

∴$z=1$ 是 $f(z)$ 的二级极点

洛朗展开式应在 $0<|z-1|<1$ 内展开

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$=\frac{1}{1+z-1}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots$$

可知：$z=1$ 是 $f(z)$ 的二级极点

且 $\mathrm{Res}[f(z),1]=C_{-1}=-1$

因为孤立奇点的分类必须根据在这个邻域内的洛朗展开式来决定，题中洛朗展开式是在 $|z-1|>1$ 展开的，故不符合要求。

8. 求下列各函数 $f(z)$ 是有限奇点处的留数：

(1) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$

解

$z=0,z=2$ 均是一级极点

∴$\mathrm{Res}[f(z),0]=\dfrac{z+1}{z-2}\Big|_{z=0}=-\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{Res}[f(z),2]=\dfrac{z+1}{z}\Big|_{z=2}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$

解 方法一

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\{1-[1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\cdots]\}$$

$$=\frac{1}{z^4}[-2z-\frac{2^2z^2}{2!}-\frac{2^3z^3}{3!}-\frac{2^4z^4}{4!}\cdots]$$

$$=-\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{z}-\frac{2}{3}\cdots$$

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点

$\therefore \mathrm{Res}[\frac{1-e^{2z}}{z^4},0]=-\frac{4}{3}$

方法二

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4}$$

$z^4=0$ $\therefore z=0$ 是 z^4 的 4 级零点

又 $(1-e^{2z})|_{z=0}=0$ 而 $(1-e^{2z})'|_{z=0}=-2e^{2z}|_{z=0}\neq 0$

故 $z=0$ 是 $1-e^{2z}$ 的 1 级零点，从而 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点。

$$\therefore \mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}[z^4\frac{1-e^{2z}}{z^4}]\frac{1}{3!}$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}(-8e^{2z})=-\frac{4}{3}$$

(3) $\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$

解

$z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的三级极点

$$\therefore \mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}[(z-i)^3\frac{1+z^4}{(z-i)^3(z+i)^3}]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[\frac{z^4+4z^3i-3}{(z+i)^4}]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{-12z^2+12}{(z+i)^5}$$

$$=-\frac{3}{8}i$$

同理可得：$\mathrm{Res}[f(8),-i]=\frac{3}{8}i$

(4) $\frac{z}{\cos z}$

解 $\cos z=0\Rightarrow z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

令 $P(z)=z, Q(z)=\cos z$

$P(z),Q(z)$ 在 $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 均解析

$P(z)|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}\neq 0$ $\quad Q(z)|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=0$

$Q'(z)|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=-\sin z|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=-(-1)^k=(-1)^{k+1}\neq 0$

$\therefore z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

$\therefore \mathrm{Res}[f(z),z_k]=\frac{P(z)}{Q'(z)}|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=(-1)^{k+1}(k\pi+\frac{\pi}{2}),(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

(5) $\cos\frac{1}{1-z}$

解 $\cos\frac{1}{1-z}=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(1-z)^4}\cdots$

$\because$ 不含正幂项，含无穷多负幂项

$\therefore z=1$ 是本性奇点

且 $\mathrm{Res}[f(z),1]=C_{-1}=0$

(6) $z^2\sin\frac{1}{z}$

解 $z^2\sin\frac{1}{z}=z^2(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots)$

$$=z-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^3}-\cdots$$

含无穷多负幂项

$\therefore z=0$ 是本性奇点

且 $\mathrm{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{3!}=C_{-1}=-\frac{1}{6}$

(7) $\frac{1}{z\sin z}$

解 $z\sin z=z(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\cdots)$

$$=z^2(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}\cdots)$$

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点

$\sin z=0\Rightarrow z=k\pi$ $\quad k=\pm 1,\pm 2,\cdots$

$\because (z\sin z)|_{z=k\pi}=0$

$(z\sin z)'|_{z=k\pi}=(\sin z+z\cos z)|_{z=k\pi}$

$$=\sin k\pi+k\pi\cos k\pi=k\pi(-1)^k\neq 0$$

$\therefore z=k\pi,k=\pm 1,\cdots$ 是 $f(z)$ 的一级极点

$$\operatorname{Res}_{(k\neq 0)}[f(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)\frac{1}{z\sin z}$$

$$=\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{z\sin z}$$

$$=\lim_{z\to k\pi}\frac{1}{\sin z+z\cos z}=\frac{1}{\sin k\pi+k\pi\cos k\pi}$$

$$=\frac{1}{k\pi(-1)^k}=\frac{(-1)^k}{k\pi}$$

$(z\sin z)|_{z=0}=0$

$(z\sin z)'|_{z=0}=(\sin z+z\cos z)|_{z=0}=0$

$(z\sin z)''|_{z=0}=(\cos z+z\sin z-z^2\sin z)|_{z=0}=2\neq 0$

$\therefore z=0$ 是 $z\sin z$ 的二级零点

$z=0$ 是 $f(z)$的二级极点

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2\frac{1}{z\sin z}]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[\frac{z}{\sin z}]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-\cos z+z\sin z}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2}=0$$

$\therefore \operatorname{Res}[f(z),0]=0$

(8) $\dfrac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}$

解　令 $P(z)=\operatorname{sh}z$　$Q(z)=\operatorname{ch}z$，取 $z_k=(k+\frac{1}{2})\pi i$

$P(z)$，$Q(z)$在 z_k 解析

$P(z_k)=\operatorname{sh}z_k=\operatorname{sh}[(k+\frac{1}{2})\pi i]$

$Q(z_k)=0$

$Q'(z)|_{z=z_k}=\operatorname{sh}z|_{z=z_k}=\operatorname{sh}[(k+\frac{1}{2})\pi i]\neq 0$

$\therefore z_k=(k+\frac{1}{2})\pi i$ 是 $f(z)$的一级极点

$\therefore \operatorname{Res}[f(z),(k+\frac{1}{2})\pi i]=\frac{P(z)}{Q'(z)}|_{z=z_k}$

$$=\frac{\operatorname{sh}[(k+\frac{1}{2})\pi i]}{\operatorname{sh}[(k+\frac{1}{2})\pi i]}=1$$

9. 计算下列各积分(利用留数;圆周均取正向):

(1) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}dz$

解

$\because \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$

$\therefore z=0$ 是 $f(z)$的可去奇点

$\therefore \operatorname{Res}[f(z),0]=0$

$\therefore$ 由留数定理得

原式$=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),0]\}$

$=2\pi i 0$

$=0$

(2) $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$

解

$\because z=1$ 是 $f(z)$的二级极点

$$\therefore \operatorname{Res}[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2},1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[(z-1)^2\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}]$$

$$=\lim_{z\to 1}2e^{2z}=2e^2$$

$\therefore$ 原式$=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),1]\}$

$=2\pi i 2e^2$

$=4e^2\pi i$

(3) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}dz$(其中 m 为整数)

解

$$\because \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\therefore 1-\cos z=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\frac{1-\cos z}{z^m}=\frac{1}{2!}z^{2-m}-\frac{1}{4!}z^{4-m}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-m}}{(2n)!}+\cdots$$

①当 $m=3,5,7,\cdots$时，C_{-1}分别为上式中第一项系数，第二项系数，第三项

系数…，此时，设 $m=2k+1$，则 $k=1,2,3,\cdots$

$C_{-1}=(-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{1}{(m-1)!}$

原式 $=2\pi iC_{-1}=(-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{2\pi i}{(m-1)!}$

②当 m 为偶数或小于 3 的奇数时，$\frac{1-\cos z}{z^m}$ 的展开式中，不含 $\frac{1}{z}$ 项，即 $C_{-1}=0$

∴此时，原式 $=0$

(4) $\oint_{|z-2i|=1}\text{th}z\text{d}z$；

解

$\text{th}z=\frac{\text{sh}z}{\text{ch}z}$ 由 $\text{ch}z=0$ 即 $\frac{e^{-z}+e^z}{2}=0$

$\Rightarrow z_k=(k+\frac{1}{2})\pi i\quad k\in N$

令 $P(z)=\text{sh}z\quad Q(z)=\text{ch}z$

$\therefore P(z_k)=\text{sh}z_k\neq0\quad Q(z_k)=\text{ch}z_k=0$

$Q'(z_k)=\text{sh}z_k\neq0$

∴可知 $z_k=(k+\frac{1}{2})\pi i$ 是它的一级极点

$C:|z-2i|=i$

只有取 $k=0$，即 $z=\frac{\pi i}{2}$ 在 $c:|z-2i|<1$ 内

$\therefore \text{Res}[f(z),\frac{\pi}{2}i]=\frac{P(z)}{Q'(z)}|_{z=\frac{\pi}{2}i}=\frac{\text{sh}z}{\text{sh}z}|_{z=\frac{\pi}{2}}=1$

$\therefore \oint_{|z-2i|=1}\text{th}z\text{d}z=2\pi i\text{Res}[f(z),-\frac{\pi}{2}i]=2\pi i1=2\pi i$

(5) $\oint_{|z|=3}\text{tg}\pi z\text{d}z$；

解 $\text{tg}\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$

$\cos\pi z=0\Rightarrow\pi z=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$z_k=k+\frac{1}{2}\quad k=0,\pm1\cdots$

令 $P(z)=\sin\pi z\quad Q(z)=\cos\pi z$

$P(z_k)\neq0,\quad Q(z_k)=0$

$Q'(z_k)=-\pi\sin(z_k)\neq0$

$\therefore z_k=k+\frac{1}{2}$ 是 $f(z)$ 的一级极点

$\therefore \text{Res}[f(z),z_k]=\frac{P(z)}{Q'(z)}|_{z=z_k}$

$=\frac{\sin\pi z}{-\pi\sin\pi z}|_{z=z_k}=-\frac{1}{\pi}$

$\because |z|=3$

$\therefore z_k=k+\frac{1}{2},k=0,\pm1,\pm2,-3$，在 $|z|=3$ 内，

即 $z=\pm\frac{1}{2},z=\pm\frac{3}{2},z=\pm\frac{5}{2}$

$\therefore \oint_{|z|=3}\text{tg}\pi z\text{d}z=2\pi i\sum_k 6\text{Res}[f(z),z_k]=2\pi i6(-\frac{1}{\pi})=-12i$

(6) $\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\text{d}z$；($n$ 为正整数，且 $|a|\neq1,|b|\neq1,|a|<|b|$)

[提示 试就 $|a|,|b|$ 与 1 的大小关系分别进行讨论]

解

$f(z)=\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$

$\therefore z=a,b$ 均为 $f(z)$ 的 n 级极点

①当 $1<|a|<|b|$ 时

则 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 内无奇点

即 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 内处处解析

∴由柯西—古萨定理 $\oint_{|z|=1}f(z)\text{d}z=0$

②当 $|a|<|b|<1$

则 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 内有两个 n 级极点 $z=a,z=b$

$\therefore \oint_{|z|=1}f(z)\text{d}z=2\pi i\{\text{Res}[f(z),a]+\text{Res}[f(z),b]\}$

$\text{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\text{d}^{n-1}}{\text{d}z^{n-1}}[\frac{1}{(z-a)^n}\frac{1}{(z-b)^n}(z-a)^n]$

$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\text{d}^{n-1}}{\text{d}z^{n-1}}[\frac{1}{(z-b)^n}]$

$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-b)^{-n}]^{(n-1)}$

$=\frac{1}{(n-1)!}(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots[-n-(n-2)]\cdot$