

第一篇、复变函数论与积分变换

第一章 复变函数习题及解答

1.1 写出下列复数的实部、虚部；模和辐角以及辐角的主值；并分别写成代数形式，三角形式和指数形式。（其中 α, R, θ 为实常数）

$$(1) -1 - \sqrt{3}i; \quad (2) 2(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}); \quad (3) 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha;$$

$$(4) e^{1+i}; \quad (5) e^{iR \sin \theta}; \quad (6) i + \sqrt{i}$$

答案 (1) 实部 -1；虚部 $-\sqrt{3}$ ；模为 2；辐角为 $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ；主辐角为 $\frac{4\pi}{3}$ ；原题为代数形式；三角形式为 $2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$ ；指数形式为 $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ 。

$$(2) \text{ 略为 } 2[\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}], \quad 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$(3) \text{ 略为 } [2 \sin(\frac{\alpha}{2})]e^{i \arctan[\cot(\alpha/2)]}$$

$$(4) \text{ 略为 } ee^i; e(\cos 1 + i \sin 1)$$

$$(5) \text{ 略为 } : \cos(R \sin \theta) + i \sin(R \sin \theta)$$

(6) 该复数取两个值

$$\begin{aligned} \text{略为 } \sqrt{2+\sqrt{2}}(\cos \theta + i \sin \theta) &= \sqrt{2+\sqrt{2}}e^{i\theta}, \theta = \arctan(1+\sqrt{2}); \\ \sqrt{2-\sqrt{2}}(\cos \theta + i \sin \theta) &= \sqrt{2-\sqrt{2}}e^{i\theta}, \theta = \pi + \arctan(1-\sqrt{2}); \end{aligned}$$

1.2 计算下列复数

$$(1). (-1+i\sqrt{3})^{10}; \quad (2). (-1+i)^{\frac{1}{3}};$$

$$\text{答案 } (1). -512 + i512\sqrt{3}; \quad (2). 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}} \quad (k=0,1,2);$$

1.3 计算下列复数

$$(1) \sqrt{a+ib}; \quad (2) \sqrt[3]{i};$$

$$\text{答案 } (1) \frac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} + i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}]$$

$$(2) e^{i(\pi/6+2n\pi/3)}$$

1.4 已知 x 为实数，求复数 $\sqrt{1+2ix\sqrt{x^2-1}}$ 的实部和虚部。

【解】 令 $\sqrt{1+2ix\sqrt{x^2-1}} = p+iq, (p, q \in R)$, 即 p, q 为实域(Real).平方得到

$1+2xi\sqrt{x^2-1} = (p^2 - q^2) + 2xyi$, 根据复数相等 , 所以

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = 1 \\ pq = x\sqrt{x^2-1} \end{cases}$$

$$p = \pm x, q = \pm \sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \sqrt{1+2ix\sqrt{x^2-1}} = \pm(x + \sqrt{x^2-1}i)$$

即实部为 $\pm x$, 虚部为 $\pm \sqrt{x^2-1}$

说明 已考虑根式函数是两个值 , 即为 $\pm$ 值 .

1.5 如果 $|z|=1$, 试证明对于任何复常数 a, b 有 $|\frac{az+b}{bz+a}|=1$

【证明】 因为 $|z|=1, \therefore z\bar{z}=1 \therefore z=1/\bar{z}$, 所以

$$|\frac{az+b}{bz+a}| = |\frac{(az+b)\bar{z}}{(\bar{b}z+\bar{a})\bar{z}}| = |\frac{(az+b)\frac{1}{z}}{\bar{b}\bar{z}+az}}| = |\frac{az+b}{b+az}| \cdot |\frac{1}{z}| = |\frac{az+b}{b+az}| = 1$$

1.6 如果复数 $a+ib$ 是实系数方程 $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$ 的根 , 则 $a-ib$ 一定也是该方程的根 .

证 因为 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 均为实数 , 故 $\overline{a_0} = a_0, \overline{a_1} = a_1, \dots, \overline{a_n} = a_n$. 且 $\overline{(z^k)} = (\bar{z})^k$,

故由共轭复数性质有 : $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. 则由已知 $P(a+ib) \equiv 0$. 两端取共轭得

$$\overline{P(a+ib)} = P(\overline{a+ib}) \equiv \bar{0} = 0$$

即 $P(a-ib) \equiv 0$. 故 $a-ib$ 也是 $P(z) = 0$ 之根 .

注 此题仅通过共轭的运算的简单性质及实数的共轭为其本身即得证 . 此结论说明实系数多项式的复零点是成对出现的 . 这一点在代数学中早已被大家认识 . 特别地 , 奇次实系数多项式至少有一个实零点 .

1.7 证明 : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明其几何意义 .

1.8 若 $(1+i)^n = (1-i)^n$, 试求 n 的值.

【解】 因为 $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4})$
 $(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4})$

所以 $\sin \frac{n\pi}{4} = -\sin \frac{n\pi}{4}$ 即为 $\sin \frac{n\pi}{4} = 0$ 所以 $\frac{n\pi}{4} = k\pi, n = 4k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

1.9 将下列复数表为 $\sin \theta, \cos \theta$ 的幂的形式

(1) $\cos 5\theta$; (2) $\sin 5\theta$

答案 (1) $\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5\cos \theta \sin^4 \theta$
 (2) $5\cos^4 \theta \sin \theta - 10\cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta$

1.10 证明: 如果 w 是 1 的 n 次方根中的一个复数根, 但是 $w \neq 1$ 不是主根, 则必有

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$$

【证明】根据题意则

$$w^n = 1$$

$$w \neq 1$$

$$\therefore 1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = \frac{1 - 1}{1 - w} = 0$$

1.11 对于复数 α_k, β_k , 证明复数形式的柯西(Cauchy)不等式:

$$|\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k|^2 \leq (\sum_{k=1}^n |\alpha_k| |\beta_k|)^2 \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \sum_{k=1}^n |\beta_k|^2 \text{ 成立.}$$

【证明】对任意 n 个复数, 由三角不等式知

$$|\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |\beta_k|$$

再由关于实数的柯西不等式得

$$|\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k|^2 \leq (\sum_{k=1}^n |\alpha_k| |\beta_k|)^2 \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \sum_{k=1}^n |\beta_k|^2, \text{证毕.}$$

1.12 证明 $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta - \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}};$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \text{ 成立.}$$

1.13 下列不等式在复数平面上表示怎样的点集？

1) $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$; 2) $2 < |z - z_0| < 3$; 3) $\varphi_0 < \arg z < \varphi_1$; 4) $0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$;

5) $\frac{|z-1|}{|z+1|} < 2$

(答 1) 平面上由 $x=0$ 与 $x=1$ 所构成的宽度为 1 的铅直带形域 ; 2) 以 z_0 为心 , 内半径为

2 , 外半径为 3 的圆环域 ; 3) 顶点在原点 , 开度为 $(\varphi_1 - \varphi_0)$ 的角形区域 ; 4) 宽度为 π

的说平带形域 , 边界为 $y=0$, $y=\pi$; 5) 以 $-\frac{5}{3} = z_0$ 为心 , $R = \frac{4}{3}$ 为半径的圆之外部区域)

1.14 指出下列关系表示的点之轨迹或范围 ; 并说明是何种点集？

1) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$

2) $|z-2| + |z+2| = 5$

解 1) 令 $z = x + iy$, 由 $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$ 知

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z-i) = x > 0 \\ \operatorname{Im}(z-i) = y-1 > 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \arctan \frac{y-1}{x} = \frac{\pi}{4}$$

即 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x > 0 \end{cases}$

这样的点为 z 平面上从点 $z_0 = i$ 出发 (但不含 z_0 点) 与实轴倾角为 $\frac{\pi}{4}$ 的射线 . 此射线所形成的点集既非开集 , 也非闭集 .

2) 设 $z = x + iy$, 则原条件即为

$$|z-2|^2 = (5 - |z+2|)^2 = 25 + |z+2|^2 - 10|z+2|$$

即 $|z-2|^2 - |z+2|^2 - 25 = 10|z+2|$

由模的定义得

$$(8x+25)^2 = 100|z+2|^2 = 100(x^2 + 4x + 4) + 100y^2$$

化简得

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$

这是一椭圆，长半轴为 $\frac{5}{2}$ ，短半轴为 $\frac{3}{2}$ ，中心在原点，它是有界闭集（全部为边界点）。

1.15 描述下列不等式所确定的点集，并指出是区域还是闭区域，有界还是无界，单连通还是多（或复）连通。

$$(1) 2 \leq |z-i| \leq 3$$

$$(2) \operatorname{Re}(iz) \geq 2$$

$$(3) \left| \frac{z-3}{z-2} \right| > 1$$

$$(4) -1 < \arg(z) < -1 + \pi$$

$$(5) |z-1| < 2|z+1|$$

$$(6) |z-1| + |z+2| \leq 5$$

$$(7) |z-2| - |z+2| > 1$$

$$(8) z\bar{z} + iz - i\bar{z} \leq 1$$

解 (1) 是以 i 为圆心、在以 2 为半径的圆外，3 为半径的圆内的圆环，是有界闭区域、多连通。（图形略）

(2) 即 $y \leq -2$ 是下半平面，无界单连通闭区域。

(3) z 到 3 的距离比 z 到 2 的距离大，因此，它是左半平面 $z < 2\frac{1}{2}$ ，去掉 $z = 2$ 一点，是无界的多连通的区域。

(4) 在直线 $y = kx$ 的上方，其中 $k = -\tan 1$ 。无界单连通区域

$$(5) \text{ 即 } (z-1)(\bar{z}-1) < 4(z+1)(\bar{z}+1)$$

$$3z\bar{z} + 5z + 5\bar{z} + 3 > 0$$

$$\text{或 } x^2 + y^2 + 2\frac{5}{3}x + 1 > 0$$

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 > \frac{16}{9} \text{ 是无界多连通区域}$$

(6) 此不等是焦点在 $z = 1$ 和 $z = -2$ 初，长半轴为 $5/2$ 的椭圆内部，为有界单连通闭区域）。

(7) 这是半支双曲线： $4x^2 - \frac{4}{17}y^2 > 1$ ， $\left(x < -\frac{1}{2}\right)$ 部分是无界单连通区域。

(8) 不等式即 $x^2 + y^2 - 2y \leq 1$, 或 $x^2 + (y-1)^2 \leq 0$, 只有当 $x=0$, $y=1$ 成立, 因此, 只代表复平面上一个点 $z=i$.

1.16 已知映射 $w = \frac{1}{z}$, 求

- (1) 圆周的象;
- (2) 直线 $y=x$ 的象;
- (3) 区域 $x>1$ 的象.

答案 (1) $|w| = \frac{1}{|z|} \Big|_{|z|=2} = \frac{1}{2}$, 为圆周

$$(2) w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x(1+i)} = \frac{1-i}{2x}, u = \frac{1}{2x}, v = \frac{-1}{2x}, \therefore u = -v \text{ 直线}$$

$$(3) \text{ 先看直线 } x=1 \text{ 的象, } w = \frac{1}{1+iy} = \frac{1-iy}{1+y^2} \therefore u = \frac{1}{1+y^2}, v = \frac{-y}{1+y^2}, \therefore u^2 + v^2 = u$$

而 $z=0$ 的象 $w = \infty$ 在圆的外部, 因此 $x>1$ 的象是圆的内部即为 $u^2 + v^2 < u$

1.17 讨论下列函数在指定点的极限存在性, 若存在求出其值, 并判断在该点的连续性.

$$1) f(z) = 2x + iy^2, z_0 = 2i \quad 2) f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right), z_0 = 0$$

解 1) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0$

$$\text{则 } u(x, y) = 2x, v(x, y) = y^2, (x_0, y_0) = (0, 2),$$

$$\therefore \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} u(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} 2x = 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} v(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 + 4i = 4i$$

又注意 $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = 4i$

$$\therefore \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = 4i$$

即 $f(z) = 2x + iy^2$ 在点 $z_0 = 2i$ 处极限存在且连续.

2) 设 $z = x + iy$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right) = \frac{1}{2i} \frac{4i xy}{x^2 + y^2} = 2 \frac{xy}{x^2 + y^2} = u(x, y) + i v(x, y)$$

显然, $v(x, y) \equiv 0$ 在 $(0, 0)$ 点极限存在且连续.

但注意 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 2 \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在, 事实上, 令 $y = kx$, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx \rightarrow 0}} 2 \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx \rightarrow 0}} \frac{2k}{1 + k^2} = \frac{2k}{1 + k^2}, \text{ 对 不同 } k \text{ 值 有 不同 结果, 故 知}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 2 \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ 不存在.}$$

所以, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ 不存在. 由连续与极限的关系知 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处极限不存在、

不连续.

注 这两个问题均通过极限存在的充要条件将问题转化为两个二元实函数在对应点 (x_0, y_0) 处极限存在性的判断问题, 这是最常用的方法. 在问题 1) 中, 又根据连徐的另一

等价定义 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 立即得到 $f(z)$ 在 $z_0 = 2i$ 处不仅极限存在, 而且在该点连续的

结论; 在 2) 中, $f(z)$ 实际上是一复变量实值函数, 即 $v(x, y) \equiv 0$, 所以由充要条件只

需判断一个二元实函数 $u(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 点的极限存在性. 由该二元实函数在

$(0, 0)$ 点极限不存在即得 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处极限的不存在性.

1.18 若函数 $f(z)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点连续, 证明

- (1) $\bar{f}(z)$ 在该点连续;
- (2) $|f(z)|$ 的模在该点连续.

计算机仿真编程实践

(说明: 读者可参考第五部分 计算机仿真编程实践)

1.19 使用 Matlab, 或 Mathcad, 或 Mathematic 计算机仿真求解下列复数的实部、虚部; 共轭复数; 模与辐角;

$$(1) -i + \frac{3i}{1+i}; \quad (2) \frac{1}{2+3i}; \quad (3) \frac{(2+3i)(3-4i)}{2i}; \quad (4) i + i^7 - 4i^{17}$$

【解】计算机仿真程序

```
a=[-i+3i/(1+i) 1/(2+3i) (2+3i)*(3-4i)/(2i) i+i^7-4*i^17]
real(a)
imag(a)
conj(a)
abs(a)
angle(a)
```

1.20 计算机仿真计算：

$$(1) (3+i) \times \frac{1-i}{1+3i}; \quad (2) (1+i)^6; \quad (3) (1-i)^{\frac{1}{3}}; \quad (4) (-1)^{\frac{1}{6}}$$

【解】计算机仿真程序

```
(3+i)*(1-i)/(1+3i)
(1+i)^6
(1-i)^(1/3)
(-1)^(1/6)
```

1.21 计算机仿真求解方程

$$z^3 + 8 = 0$$

【解】计算机仿真程序

```
s=solve('z^3+8','z')
```

1.22 计算机仿真编程实践：

若 z_l ($l=1, 2, \dots, n$) 对应为 $z^n - 1 = 0$ 的根，其中 $n \geq 2$ 且取整数. 试用计算机仿真编程验证下列数学恒等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\prod_{\substack{m=1 \\ (m \neq k)}}^n (z_k - z_m)} = 0, \text{ 成立.}$$

【证明】计算机仿真验证程序如下

```
N=100; Sum=0;
for k=1:N
    z(k)=exp(i*2*k*pi/N);
end

for k=1:N
    Multiplex=1;
    for m=1:N
        if m~=k
            Multiplex=Multiplex*( z(k)-z(m))
```

```

end
end
Sum=Sum+1.0/Multiplex

```

```

end

```

1.23 用计算机编程实践方法 (Matlab, Mathcad, Mathematic, C/C++) 实现 :

- (1) 绘出单位圆及其内接正十七边形 ;
- (2) 计算机编程求出边长 ;
- (3) 能否对多变形进行推广 , 得出相应的计算机仿真计算方法.

【解】计算机仿真程序

```

% exercise 1.23(1)

```

```

%n=input('please enter sides n=')

```

```

n=17;

```

```

r=1;

```

```

x1=-r:0.01:r

```

```

q=1-x1.^2

```

```

y1=sqrt(q);

```

```

a=2*r*sin(pi/n)

```

```

N=0:1:n

```

```

x=a/(2*sin(pi/n))*cos(2*pi*N/n)

```

```

y=a/(2*sin(pi/n))*sin(2*pi*N/n)

```

```

plot(x1,y1,'m',x1,-y1,'m',x,y);

```

```

title('单位圆内接正十七边形')

```

```

% exercise 1.23(2)

```

```

t=exp(i*2*pi/17);

```

```

p=0.5*(sqrt(17)-1);

```

```

q=-0.5*(sqrt(17)+1);

```

```

r=0.5*(p+sqrt(p^2+4));

```

```

s=0.5*(q+sqrt(q^2+4));

```

```

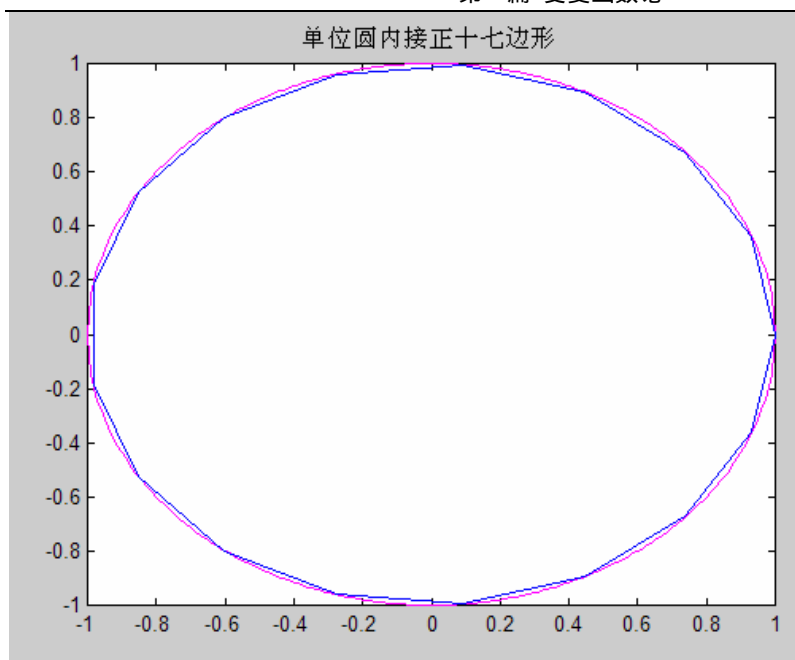
x=0.5*(r+sqrt(r^2-4*s));

```

```

a=sqrt(2-x)

```



1.24 计算机仿真编程验证

对复平面任意两个以上的不重合的有限远点 z_k, z_m , (即保证分母不为零) , 恒等式

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N (z_k - z_m)} = 0 \quad \text{是否还成立呢?}$$

注意式中自然数 $N \geq 2$, 而 m, k 为1至N的整数.

(提示: 利用随机函数产生随机数 N_k , 从而验证恒等式是否成立)

【解】计算机仿真程序

```
n=2*round(1000*random('beta',1,1))+2
%n=input('please enter n=')
su=1;
sum=0;
R=0;
Q=0;
for j=1:n
    N1(j)=round(1000*randn(1,1));
    N2(j)=round(1000*randn(1,1));
    if j==1
        N(j)=N1(j)+i*N2(j);
    else
        for m=1:j-R-1
            if N1(j)==real(N(m))&N2(j)==imag(N(m))
                N1(j)
                N2(j)
```

```

    N(m)
    R=R+1
    Q=Q+1
    j
    m
    break
else
end
end
if Q==0
    N(j-R)=N1(j)+i*N2(j);
else
    Q=0
end
end
end
for k=1:n-R
for j=1:n-R
    if j~=k
        su=1/(N(k)-N(j))*su;
    end
end
sum=sum+su;
su=1;
end
sum

```

第二章 解析函数习题及解答

2.1 研究下列函数在任一点处的可导性、解析性 .

1) $f(z) = x^3 - iy^3$; 2) $f(z) = \bar{z}$; 3) $f(z) = |z|$; 4) $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$.

解 1) $\because f(z) = x^3 - iy^3 = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\text{故 } u(x, y) = x^3, v(x, y) = -y^3; \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0, \frac{\partial v}{\partial y} = -3y^2$$

显见, u, v 在全平面有连续一阶偏导, 故 $u(x, y), v(x, y)$ 全平面处处可微, 又令

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

得 $3x^2 = -3y^2$, 即 $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

即, 当且仅当 $x = y = 0$ 时, C-R 方程成立. 所以 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 其他任何点不可导. 由解析的定义可知, $f(z)$ 于全平面处处不解析.

注 由此结果可见, 复变函数可存在孤立的甚至唯一的可导点, 而无孤立的解析点.

2) $f(z) = \bar{z} = x - iy$, 对任一 z_0 , 考虑极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} 1, & \Delta x \neq 0, \Delta y = 0 \\ -1, & \Delta x = 0, \Delta y \neq 0 \end{cases}$$

即对任一 z_0 , 上述极限不存在, 由可导定义知, $f(z) = \bar{z}$ 于任一点 z_0 处不可导. 故全平面不解析.

3) $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y)$

其中 $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v(x, y) \equiv 0$.

所以, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$$

因此, 对 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, C-R 方程不成立.

而当 $(x, y) = (0, 0)$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在, 即

$\frac{\partial u(0, 0)}{\partial x}$ 不存在, 同理, $\frac{\partial u(0, 0)}{\partial y}$ 不存在, 故 $f(z) = |z|$ 在 $z = 0$ 处不可导. 于是, $f(z) = |z|$

于全平面处处不可导, 不解析.

注 在本题讨论中, 仍然采用检验可导充要条件的方法, 由于 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 均连续, 故 u, v 可微, 但 C-R 方程处处不成立. 对 $(x, y) = (0, 0)$, 从偏导定义出发, 得知 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 不存在, 从而 $u(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微, 故对平面任一点, 可导的充要条件不满足.

4) $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = u(x, y) + iv(x, y)$

$u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 且 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 于全平面连续, 故

$f(z)$ 于全平面处处可导, 全平面处处解析.

$$\text{又, } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{因此有 } f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z)$$

注 1. 这里用区域解析的充分条件得到结论;

2. 本题中的 $f(z)$ 是一性质极好的函数: 不仅全平面解析, 且具有特性 $f'(z) = f(z)$, 它正是实指数函数 e^x 在复平面的推广, 即 $f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = \exp z = e^z$. 但应注意这一推广产生的新性质:

1) 由于 $\cos y$ 与 $\sin y$ 以 $2k\pi$ 为周期, 使得 e^z 以 $2\pi i$ 的整数倍为周期.

2) e^z 可取到除 0 以外的任意复值, 包括负值. 这两点是值得注意的.

2.2 证明 如果 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在区域 D 内解析且满足下列条件之一, 则 $f(z)$ 必为一常数.

1) $f(z)$ 在 D 内为实值.

2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析.

3) $|f(z)|$ 在 D 内为常数.

4) $\arg f(z)$ 在 D 内为一常数.

5) 在 D 内有 $au(x, y) + bv(x, y) = c$, 其中 a, b, c 是不全为 0 的实常数.

6) $\operatorname{Re}(f(z))$ 或 $\operatorname{Im}(f(z))$ 在 D 内为常数.

7) 在 D 内有 $f'(z) = 0$.

证 首先, 由条件

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ a) u, v 均在 D 内可微, 且 b)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ 在 } D \text{ 内处处成立.}$$

1) 因为 $f(z)$ 在 D 内取实值, 即 $v(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D$. 于是 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$,

$(x, y) \in D$. 将此结果代入 C-R 方程 b), 得 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, (x, y) \in D$. 所以

$u(x, y) = A, (x, y) \in D$.

即 $f(z) = A, z \in D$ (A 为一常数)

2) 于 $\overline{f(z)} = u(x, y) - i v(x, y) = u(x, y) + i[-v(x, y)]$ 在 D 内解析.

因而除条件 a), b) 成立之外, 条件 c) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ 成立.

联立 b), c) 得

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $(x, y) \in D$. 又由 b) 或 c) 得 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

所以在 D 内, 恒有 $u(x, y) = A$, $v(x, y) = B$. 即 $f(z) = A + iB$ 为常数.

3) 由于 $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)} \equiv C$, $(x, y) \in D$.

1° 若 $C = 0$, 则 $|f(z)| \equiv 0$, $z \in D \Leftrightarrow f(z) \equiv 0$, $z \in D$.

2° 若 $C \neq 0$, 则由 $u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv C^2 \neq 0$, 两端分别关于 x, y 求偏导得:

$$e) \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

将 b) 代入 e) 得

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

由 $u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv C^2 \neq 0$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \quad (x, y) \in D$$

代入 b) 得 $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, $(x, y) \in D$

于是 $u(x, y) \equiv A$, $v(x, y) \equiv B$

即 $f(z) = A + iB$, $z \in D$ (A, B 为任意实常数)

3) 因为 $\arg f(z) \equiv \text{常数}$, $z \in D$, 由主值支 $\arg \omega$ 的表达式得

$$f) \arctan \frac{v(x, y)}{u(x, y)} \equiv \text{常数} = C, \text{ 及 } u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv C^2 \neq 0, (x, y) \in D$$

$$1^\circ \text{ 若 } C = 0, \text{ 则 } \begin{cases} v(x, y) \equiv 0 \\ u(x, y) > 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

归为 1) 的情形, 得证.

2° 若 $C \neq 0$, 对 c) 两端分别关于 x, y 求偏导得

$$\begin{cases} \frac{u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2 + v^2} = 0 \\ \frac{u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}}{u^2 + v^2} = 0 \end{cases} \quad (u^2 + v^2 \neq 0) \quad \text{即} \quad \begin{cases} u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

将 b) 代入得

$$\begin{cases} u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ v \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

$$\because u^2(x, y) + v^2(x, y) \neq 0, \therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\text{再由 b) 即得} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

从而得 $f(z) = A + iB$, $z \in D$ (A, B 为任意实常数)

5) $\because au(x, y) + bv(x, y) = c$, $(x, y) \in D$, 且 a, b, c 是不全为 0 的实常数.

所以有 $a^2 + b^2 \neq 0$. 于是对上式两端分别关于 x, y 求偏导得

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

将 b) 代入得

$$\begin{cases} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ b \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

因为 $a^2 + b^2 \neq 0$, 故得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

再由条件 b) 即得 $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. 于是得

$$f(z) \equiv A + iB, \quad z \in D \quad (A, B \text{ 为任意实常数})$$

6) 1° 若 $\text{Im}(f(z)) \equiv C = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内取实值. 即 1) 所证. 若 $\text{Im}(f(z)) \equiv C \neq 0$ 即

$$v(x, y) \equiv C, \quad (x, y) \in D$$

则 $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, $(x, y) \in D$, 代入 b), 即得

$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$. $(x, y) \in D$, $\therefore f(z) = A + iB$, $z \in D$ (A, B 为任意实常数)

2° 若 $\operatorname{Re}(f(z)) \equiv C$, 即 $u(x, y) \equiv C$, $(x, y) \in D$

则 $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, 则由 b) 知 $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, 即 $f(z) = A + iB$, $z \in D$

7) 由于 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$. 所以若在 D 内有 $f'(z) = 0$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $(x, y) \in D$,

由条件 b) 即得 $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $(x, y) \in D$.

所以 $f(z) = A + iB$, $z \in D$ (A, B 为任意实常数).

注 以上各命题的论证均是在 $f(z)$ 于区域 D 上解析的前提下进行的, 否则结论不一定成立.

例如, $f(z) = |z|$ 为一实值函数, 满足条件 1). 但它于全平面不解析 (见 1-26 题,

3). 显然 $f(z) = |z|$ 在任何区域 D 上不可能取常数值, 即无题中的结论.

2.3 证明在极坐标系下的柯西 - 黎曼条件为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

【提示: 可利用 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, 然后根据复合函数求导证明】

2.4 设 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在 D 内解析. 证明 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$.

证 令 $|f(z)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y) = G(x, y)$

$$\text{则} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \quad (1)$$

$$\text{同理得} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

并注意 $f(z)$ 在 D 内解析.

$$\text{所以有} \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{即} \quad |f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

且 u, v 均为调和函数, 即 $\Delta u = \Delta v = 0$. 于是 (1) + (2) 得

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 4 |f'(z)|^2$$

注 本题证明中用到解析函数三条性质: (1) 实、虚部满足 C-R 方程. (2)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3) \text{ 实部、虚部均为调和函数. 即 } \Delta u = 0, \Delta v = 0.$$

2.5 证明解析函数 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 的实、虚部所确定的曲线族 $u(x, y) = C$ 与 $v(x, y) = B$ 在 $f'(z) \neq 0$ 的点处是正交的. (C, B 为任意实数)

证 因为在 $f'(z) \neq 0$ 的点 (x, y) , 曲线族 $u(x, y) = C$ 在该点处的切线斜率为

$$k_1 = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

$$\text{曲线族 } v(x, y) = B \text{ 在该点处的切线斜率为 } k_2 = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}}.$$

所以 $k_1 k_2 = -1$. 即曲线族 $u(x, y) = C$ 与曲线族 $v(x, y) = B$ 正交.

(2) 对使得 $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ 的点 (x, y) , 曲线族 $u(x, y) = C$ 在该点处的切线为铅直线 ($\frac{dx}{dy} = 0$), 而曲线族 $v(x, y) = B$ 在该点处的切线为水平线 ($\frac{dy}{dx} = 0$), 故二者正交, 同

理, 当 $\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 时, 二者也正交.

注 1. 本题证明中用到曲线与曲线正交即为二者在交点处切线的正交这一概念;

2. 本题的结论是解析函数在 $f'(z) \neq 0$ 处的又一性质.

2.6 已知下列调和函数求复势表达式 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. 并写成关于 z 的表达式.

$$1) u(x, y) = 2y(x-1), f(2) = -i \quad 2) v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, x > 0$$

解 由于 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 解析, 所以 $u(x, y), v(x, y)$ 满足 C-R 方程.

$$1) u(x, y) = 2y(x-1), \text{ 故 } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2y.$$

由此得 $v(x, y) = y^2 + C(x)$, 这里 $C(x)$ 为 x 的任一可导函数. 又由 $\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$ 得

$$C'(x) = -2(x-1)$$

所以 $C(x) = -x^2 + 2x + C_1$, C_1 为任一实常数.

$$\text{于是 } v(x, y) = y^2 - x^2 + 2x + C_1.$$

$$\text{令 } z = 2, \text{ 即 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 得 } f(2) = i C_1 = -i \quad C_1 = -1$$

于是, 满足条件的解析函数为

$$f(z) = 2y(x-1) + i(y^2 - x^2 + 2x - 1)$$

$$\text{所以 } f(z) = -i(z-1)^2$$

2) 在极坐标系下, C-R 方程为
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r} \end{cases}$$
 形式.

令 $v = \arctan \frac{y}{x} = \theta$ (则由 $x > 0$ 得 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$), 有 $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial r} = 0$, 所以得 $r \frac{\partial u}{\partial r} = 1$,

$$\text{即 } \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$$

解得 $u(r, \theta) = \ln r + C(\theta)$ $C(\theta)$ 为 θ 的任一可导函数.

又由 $\frac{\partial u}{\partial \theta} = C'(\theta) = -r \frac{\partial v}{\partial r} = 0$ 得 $C(\theta) = C_1$. C_1 为任一实常数.

所以 $u(r, \theta) = \ln r + C_1$

$$f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta) = \ln r + C_1 + i \theta$$

注意 $r = |z|$, $\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arg z$ ($x > 0$) 得

$$f(z) = \ln|z| + i \arg z + C_1$$

2.7 设 $v(x, y) = e^{px} \sin y$, 求 p 之值, 使 v 为一调和函数, 并求一解析函数 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$.

解 因为 $v(x, y) = e^{px} \sin y$, 所以

$$\frac{\partial v}{\partial x} = p e^{px} \sin y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = p^2 e^{px} \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{px} \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{px} \sin y$$

$$\text{由 } \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^{px} \sin y [p^2 - 1] = 0, \text{ 得 } p = \pm 1.$$

(1) 当 $p = 1$ 时, $v(x, y) = e^x \sin y$. 由 1-32 题的方法易求出调和函数 $u(x, y) = e^x \cos y + c$, 则 $f(z) = e^x \cos y + C + i e^x \sin y = e^z + C$ 为所求解析函数, 其中 C 为任意实常数.

(2) 当 $p = -1$ 时, $v(x, y) = e^{-x} \sin y$. 可求得调和函数 $u(x, y) = -e^{-x} \cos y + C_1$ (C_1 为任一实常数). 于是所求的解析函数为

$$f(z) = -e^{-x} \cos y + C_1 + i e^{-x} \sin y = -e^{-z} [\cos(-y) + i \sin(-y)] + C_1 = -e^{-z} + C_1 \quad (\text{全平面解析})$$

2.8 计算下列复数

$$1) (1+i)^i \quad 2) 1^z, \text{ 其中 } z = x+iy; \quad 3) \ln(-i);$$

$$4) i^{1+i}; \quad 5) \ln(-2)$$

$$\text{解 } 1) (1+i)^i = e^{i \ln(1+i)} = e^{i \left[\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} + i 2k\pi \right]} = e^{-\left(\frac{1}{4} + 2k\right)\pi + i \ln \sqrt{2}} \quad (k \text{ 为整数})$$

$$2) 1^z = 1^{x+iy} = e^{(x+iy)(i 2k\pi)} = e^{-2ky\pi} (\cos 2k\pi x + i \sin 2k\pi x) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

当 $k = 0$ 时得 $1^z = 1$

$$3) \ln(-i) = \ln|-i| + i \arg(-i) + i 2k\pi = -i \frac{\pi}{2} + i 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$4) i e^{(1/2+2k)\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); 5) \ln 2 + i(2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

注 (i) 以上各题均由定义求得;

(ii). 值得注意的是, 1 只是 1^z 无穷多个值中的一个值 (对应于 $k = 0$), 这与实变函数中的概念不同.

2.9 求解方程 $\sin z + \cos z = 0$

$$\sin z + \cos z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \therefore e^{iz}(1-i) = -e^{-iz}(1+i)$$

【解】 $e^{2iz} = -\frac{1+i}{1-i} = -i = e^{i(2n\pi - \frac{\pi}{2})}$

$$\therefore z = n\pi - \pi/4, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

2.10 解下列方程

$$1) \sin z = 0 \qquad 2) 1 + e^z = 0$$

解 2) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$

$$e^{iz} = e^{-iz}, \text{ 即 } e^{i2z} = 1$$

$$\text{由对数函数定义得 } i2z = \ln 1 = i2k\pi$$

$$z_k = k\pi, \quad k \text{ 为任意整数.}$$

$$3) \text{ 由 } e^z + 1 = 0 \text{ 得 } e^z = -1$$

$$\text{由对数函数定义得 } z_k = \ln(-1) = i(2k+1)\pi \quad k \text{ 为任意整数}$$

$$\text{主值为 } z_0 = \pi i$$

2.11 证明, 对任何数 (复数、实数) ω , 方程 $\cos z = \omega$ 均有解.

证 在 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 中, 令 $t = e^{iz}$, 则 $\cos z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$, 且

$$t = e^{iz} = e^{-y} (\cos x + i \sin x), \text{ 所以 } t \neq 0. \text{ 且 } t \text{ 可取到任意非 } 0 \text{ 值.}$$

$$\text{于是, 原方程即为 } \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \omega, \text{ 即 } t^2 - 2\omega t + 1 = 0. \text{ 所以 } t = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}. \text{ (这里}$$

$$\sqrt{\omega^2 - 1} \text{ 有两个根)}$$

$$\text{故 } e^{iz} = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1} \neq 0, \text{ 由对数函数定义得}$$

$$z = \frac{1}{i} \ln(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}) = -i \ln(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})$$

$$\text{所以 } \omega + \sqrt{\omega^2 - 1} \neq 0. \text{ 故右端对任意 } \omega \text{ 均有意义, 得证.}$$

注 这里的结果说明两点: (1) 复变量余弦函数可取到任意值 (复、实值), 而不象实余弦函数取值区间仅为 $[-1, 1]$ (2) 所得结果改变 z 与 ω 的位置, 即得 $\omega = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ 这正是 $\omega = \cos z$ 的反函数. 可对 $\sin z$ 进行同样讨论, 此略.

2.12 求 ω , 使对任意 z , 有 $\sin(z + \omega) = \sin z$.

解 由 $\sin z$ 的定义, 即求满足方程 $e^{i(z+\omega)} - e^{-i(z+\omega)} = e^{iz} - e^{-iz}$ 的一切 ω 值.

整理化简即得 $e^{i2z} \cdot e^{i\omega}(1 - e^{-i\omega}) = -(1 - e^{-i\omega})$, 对任意 z 成立. 且因 $e^{i2z} \cdot e^{i\omega} \neq 0$.

故得 $1 - e^{-i\omega} = 0$, 即 $-i\omega = \ln 1 = i2k\pi$. k 为任意整数.

所以 $\omega = 2m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

注 由此题结果可见, 复变量正、余弦函数为周期函数, 且周期与实变量正、余弦的相同.

2.13 若某解析函数的实部等于虚部的平方, 证明该解析函数必为常数.

【提示, 参考例 2.6.1 即可证明, 这是该例的一个特殊情况】

本章计算机编程实践

2.14 计算机编程计算 $z_1 = e^{1-i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 3^{\sqrt{2}}$, $z_3 = (1+i)^i$, $z_4 = i^i$

【解】计算机仿真程序

```
z1=exp(1-i*pi/2)
z2=3^sqrt(2)
for k=0:9 % 9 是任意选定的整数
z3=exp(i*(1.0/2*log(2)+i*pi/4+i*2*pi*k))
z4=exp(i*(i*pi/2+i*2*pi*k))
end
```

2.15 计算机编程计算 $z_1 = \operatorname{Ln}(-3+4i)$, $z_2 = \ln(i-1)$

【解】计算机仿真程序

```
for k=0:99 %99是任意取的整数值, 也可取负整数
z1=log(-3+4*i)+i*2*k*pi
% 特别说明: 在MATLAB中用log 表示以e为底的对数, 即ln
end
z2=log(i-1)
```

2.16 计算机编程解方程 $\sin z = 2$

【说明: $s=\operatorname{solve}(' \sin(z)-2', 'z')$

% 上述方法不能直接解出 z , 读者可先进行推导, 然后在求解】

2.17 计算机编程计算 $\operatorname{Arc} \tan(1+i)$

【解】 $\operatorname{atan}(1+i)$

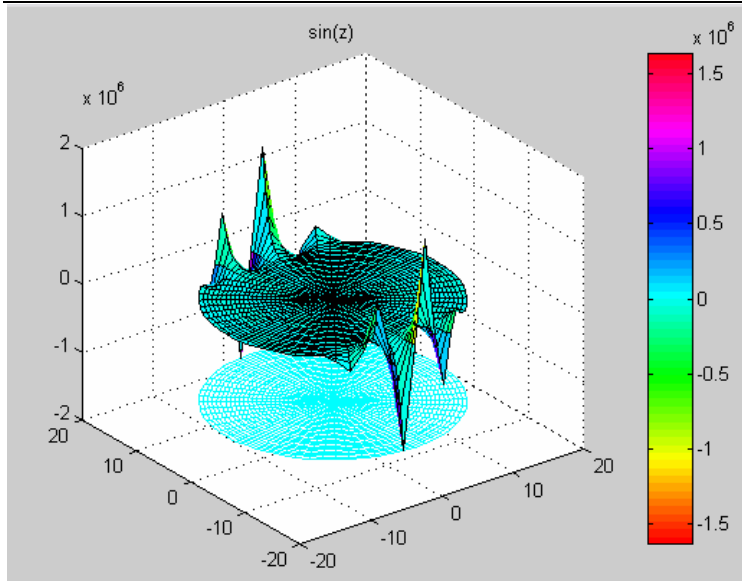
2.18 计算机求解方程 $e^z + 1 = 0$

【解】 $s=\operatorname{solve}(' \exp(z)+1', 'z')$

2.19 计算机仿真(Matlab, Mathcad, Mathematic)绘出 $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$, ctanz 的图形.

【解】计算机仿真程序如下

```
%(1) sinz
z=15*cplxgrid(30);
cplxmap(z, sin(z));
colorbar('vert');
title('sin(z)')
```



```
% (2) cosz
```

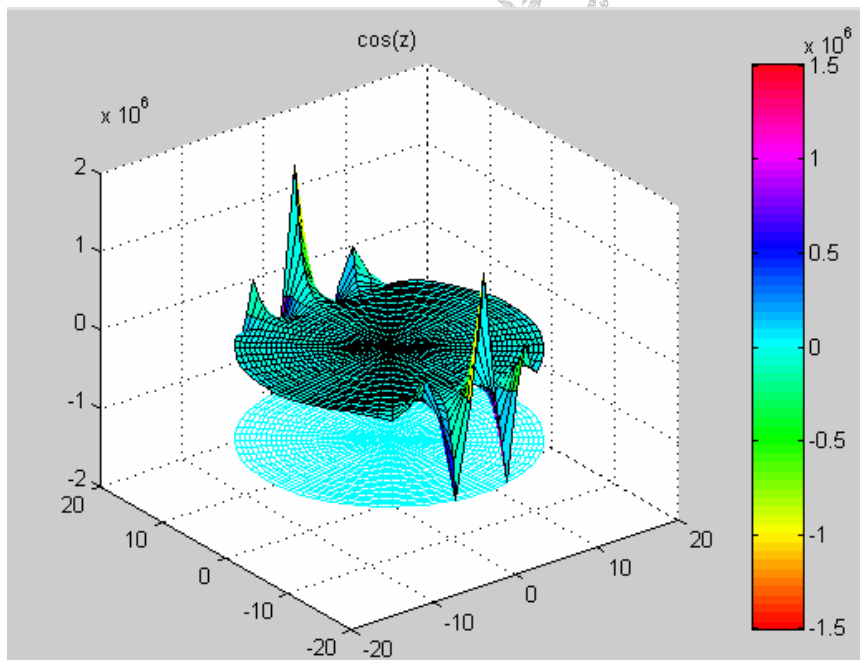
```
figure
```

```
z=15*cplxgrid(30);
```

```
cplxmap(z,cos(z));
```

```
colorbar('vert');
```

```
title('cos(z)')
```

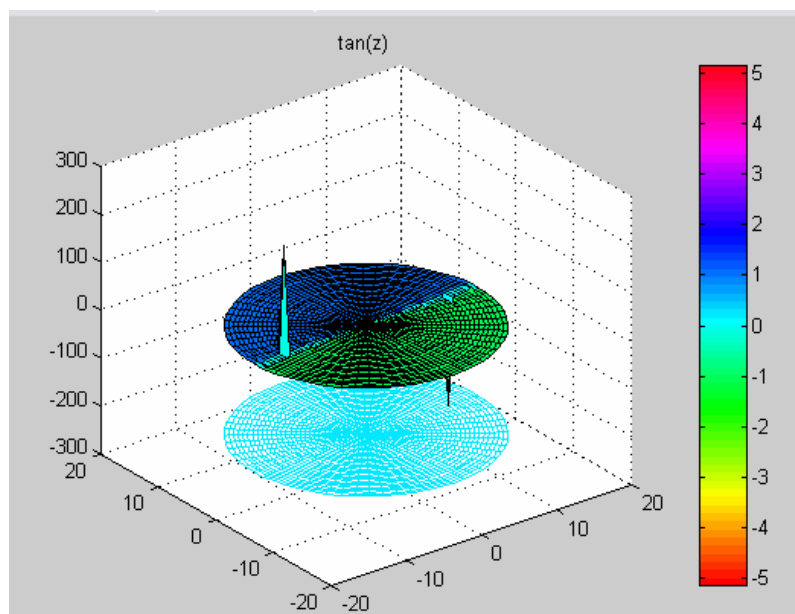


```
%(3) tanz
```

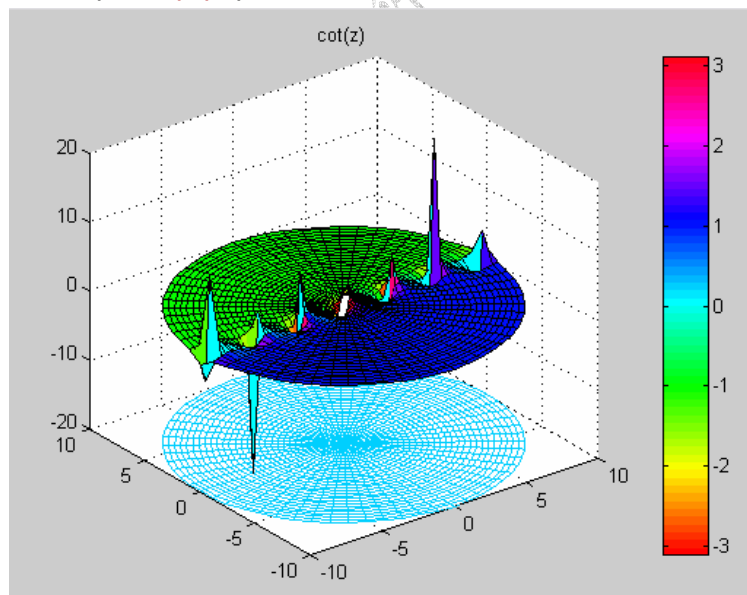
```
figure
```

```
z=15*cplxgrid(30);
```

```
cplxmap(z,tan(z));
colorbar('vert');
title('tan(z)')
```



```
%(4) ctanz
figure
z=10*cplxgrid(30);
cplxmap(z,cot(z));
colorbar('vert');
title('cot(z)')
```



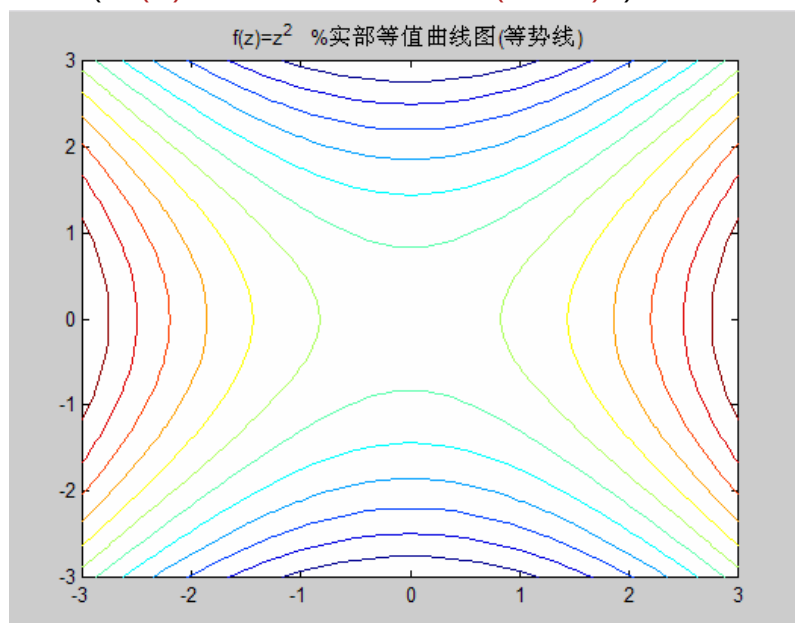
2.20 对于下列解析函数，分别用计算机仿真方法（Matlab,Mathcad,Mathmatic）绘出其实

部和虚部的等值曲线图。(如等势线、电力线)

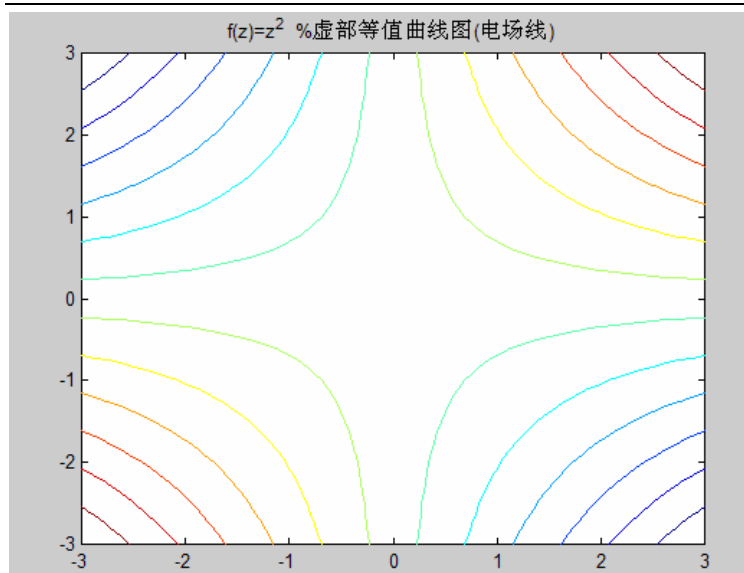
(1) $f(z) = z^2$; (2) $f(z) = z^3$

【解】计算机仿真程序

```
% 2.20 (1)
[X,Y,Z]=peaks;
Z=X.^2-Y.^2;      %计算格点上的函数值
contour(X,Y,Z,12)
title('f(z)=z^2 %实部等值曲线图(等势线)')
```



```
Z=2.*X.*Y;
figure
contour(X,Y,Z,12)
title('f(z)=z^2 %虚部等值曲线图(电场线)')
```



% 2.20 (2)

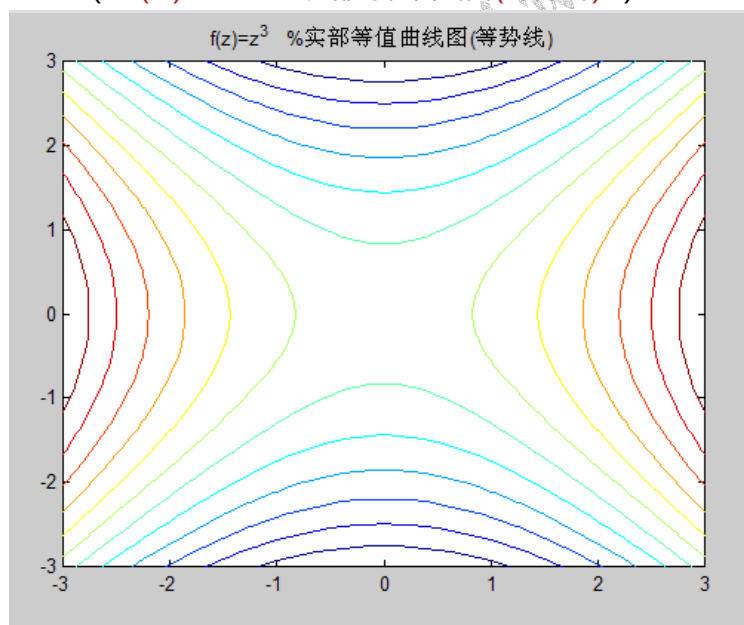
figure

[X,Y,Z]=peaks;

Z=X.^2-Y.^2; %计算格点上的函数值

contour(X,Y,Z,12)

title('f(z)=z^3 %实部等值曲线图(等势线)')

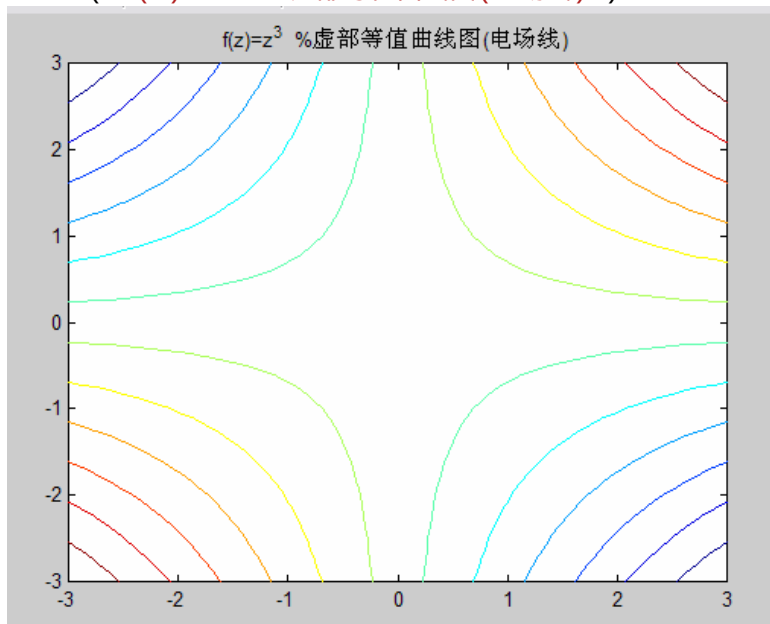


Z=2.*X.*Y;

figure

contour(X,Y,Z,12)

title('f(z)=z^3 %虚部等值曲线图(电场线)')



第三章 复变函数的积分习题及其解答

3.1 如果函数 $f(z)$ 是在【1】单连通区域；【2】复通区域中的解析函数，问其积分值与路径有无关系？

【答案 单连通 无关，复连通 有关】

3.2 计算积分 $\oint_{|z|=\sqrt{2}} \frac{dz}{z^3-1}$ 的值

【答案 0】

3.3 计算积分 $\int_L \frac{dz}{z^2-a^2}$ ：其中 $a>0$ ，设 L 分别为

(1) $|z|=a/2$; (2) $|z-a|=a$; (3) $|z+a|=a$

【答案 (1)0; (2) $\frac{\pi i}{a}$; (3) $-\frac{\pi i}{a}$ 】

3.4 计算积分 $\int_C \operatorname{Im} z dz$ ，其中积分曲线 C 为

(1) 从原点到 $2+i$ 的直线段；

(2) 上半圆周 $|z|=1$ ，起点为 1 ，终点为 -1 ；

(3) 圆周 $|z-a|=R$ ($R>0$) 的正方向 (逆时针方向)

【答案 (1) $1+i/2$; (2) $-\pi/2$; (3) $-\pi R^2$ 】

3.5 计算积分 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz$ 的值，

(1) $|z|=2$; (2) $|z|=4$;

【答案 (1) $4\pi i$; (2) $8\pi i$ 】

3.6 计算积分的值 $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$

【答案 $e+1/e$ 】

3.7 计算下列积分的值

$$(1) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\cos z}; (2) \oint_{|z|=2} ze^z dz; (3) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2z+4}; (4) \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z+\frac{1}{2i})(z+2)}$$

【答案 (1) 0; (2) 0; (3) 0; (4) $\frac{4\pi i}{4+i}$ 】

3.8 计算

$$(1) \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-3} dz; (2) \oint_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)^2(2z+1)} dz;$$

$$(3) \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz; (4) \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z-2)} dz$$

$$(5) \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^5} dz; (6) \oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2+4)}$$

【答案 (1) 0; (2) 0; (3) $-\pi i \cos i$; (4) $-\frac{3}{2}\pi i$; (5) $\frac{\pi i}{12}$; (6) $-\frac{\pi}{8}$ 】

3.9 计算积分

$$(1) (1) \int_0^1 z \sin z dz; (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch} 3z dz; (3) \int_0^1 (z-1)e^{-z} dz$$

【答案 (1) $\sin 1 - \cos 1$; (2) $\frac{1}{3}i$; (3) $1 - \cos 1 + i[\sin(1) - 1]$ 】

3.10 计算复数 (1) $\oint_{C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz$, 其中 $C_1: |z|=2$ 顺时针方向; $C_2: |z|=3$ 逆时针方向.

$$(2) \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-a)^3} dz, \text{ 其中复常数 } |a| \neq 1$$

【答案 (1) 0; (2) 当 $|a| > 1, 0 < |a| < 1, \pi e^a i$ 】

3.11 设 L 为不经过点 b 和 $-b$ 的简单正向 (逆时针) 曲线, b 为不等于零的任何复数, 试就曲线 L 与 b 的各种可能计算积分的值.

$$I = \oint_L \frac{z}{(z+b)(z-b)} dz$$

【答案 (1) L 不含 $\pm b$, 则 $I=0$; (2) L 含 b , $I = \frac{\pi i}{b}$; L 含 $-b$, $I = -\frac{\pi i}{b}$; (3) 两点在内部 $I=0$ 】

3.12 已知 $h(z) = \oint_{|\xi|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{3}\xi}}{\xi-z} d\xi$, 试求 $h(i), h(-i)$, 以及当 $|z| > 2$ 时, $h'(z)$ 的值.

【 $h(i) = \pi(-\sqrt{3}+i); h(-i) = \pi(\sqrt{3}+i); |z| > 2, h'(z) = 0$ 】

3.13 计算积分 $\oint_C \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz$, 其中 常数 a 在闭曲线 C 内部

【答案 $\frac{1}{2}(2+a)e^a$ 】

3.14 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 且 $|a| \neq 1$, 证明: 积分

$$\oint_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-|a|^2} & (|a| < 1) \\ \frac{2\pi}{|a|^2-1} & (|a| > 1) \end{cases}$$

3.15 利用积分 $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z+2}$ 的值, 证明 $\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0$

3.16 计算积分 $\oint_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z-a|^2}$, ($|a| \neq r$)

(提示: 令 $c: z = re^{i\theta} \Rightarrow |dz| = \frac{r}{iz} dz$, 注意到点 $a, \frac{r^2}{\bar{a}}$ 是关于圆周 $|z|=r$ 的对称点)

3.15.已知

$$f(z) = \int_{|\zeta|=2} \frac{\sin \frac{\pi}{4} \zeta}{\zeta - z} d\zeta$$

求 $f(1-2i), f(1), f'(1)$.

3.18 计算积分 (2) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{e^z z^2} dz$

本章计算机仿真编程

3.19 计算机仿真编程验证 3.15 的积分结果 $\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0$

【解】计算机仿真程序

```
syms x;
```

```
IS=int('(1+2*cos(x))/(5+4*cos(x))','x',0,2*pi) %求解析积分
```

```
vpa(IS)
```

3.20 计算机仿真计算下列积分的值 (沿非闭合路径的积分)

$$(1) I_1 = \int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz; \quad (2) I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}i} \operatorname{ch} 3z dz; \quad (3) I_3 = \int_0^i (z-1)e^{-z} dz;$$

$$(4) I_4 = \int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z} dz, \text{ 其积分的路径为沿 } 1 \text{ 到 } i \text{ 的直线段.}$$

(说明: 沿闭合路径的积分可以利用留数的定义, 留数定理来计算; 而留数可以利用计算机仿真编程 Matlab 直接求解)

【解】计算机仿真程序

```
syms z;
```

```
IS1=int('exp(2*z)','z',-pi*i,3*pi*i) ;
```

```
I1=vpa(IS1)
```

```
% (2)
```

```
IS2=int('cosh(3*z)','z',0,pi/6*i) ;
```

```
I2=vpa(IS2)
```

```
% (3)
```

```
IS3=int('(z-1)*exp(-z)','z',0,i)
```

```
I3=vpa(IS3)
```

% (4)

IS4=int(' (1+tan(z))/(cos(z)^2)', 'z', 1, i)

I4=vpa(IS4)

第四章 解析函数的幂级数展开习题及解答

4.1 判断级数的收敛性，绝对收敛性。

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$$

解 1) $\because i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} + i \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \right]$$

由实数项级数收敛的狄利赫利判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$ 均收敛. 故由

复数项级数收敛充要条件知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. 但 $\left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 非绝对收敛.

2) 因 $\left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2} \right|$ 收敛, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ 收敛, 且为绝对收敛.

注 由此两题可见, 对于复数项级数, 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛; 而收敛 $\neq$ 绝对收敛. 2) 可作为此种情况的例子.

4.2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 处收敛, 而在 $z=3$ 处发散? 说明理由.

答 不可能. 因为若在 $z=0$ 处发散, 则由 Abel 定理, 在一切满足 $|z-2| < |0-2| = 2$ 的 z 处级数均为收敛, 显见, $z=3$ 满足此不等式故不可能在 $z=3$ 处发散.

4.3 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, 其中 $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1+i}{2} \right)^k$, 并由此判断复数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^k$ 的敛散性.

解 设 $\alpha = \frac{1+i}{2}$. 注意 $|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha^k = \alpha (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) = \frac{\alpha(1 - \alpha^n)}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} - \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \right] = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (\alpha^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0)$$

将 $\alpha = \frac{1+i}{2}$ 代入得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = i$$

由复数项级数收敛的定义可知, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^k$ 收敛于 i . 即 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^k = i$

注 1. 这里的 S_n 即为复数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ 的部分和序列, 求 S_n 之极限中利用了

$|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha^n \rightarrow 0$ 的结论. 由 S_n 极限存在得 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ 收敛结论, 这是最基本的方法.

4.4 证明: 若 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ 收敛(这时称 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ 绝对收敛).

证 设 $\alpha_k = a_k + i b_k$, 则 $|a_k| \leq |\alpha_k|$. 由正项级数比较判别法, $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$,

$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ 均收敛. 又由实数项级数知识知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛. 于是由复数项级数收敛的充要条件得 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛.

注 若 $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ 收敛, 称 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 绝对收敛. 则本题的结论说明复数项级数绝对收敛, 则必收敛.

证明方法用的是实数项级数对应的统一性质. 应注意 $\sum \alpha_k$ 收敛 $\neq \sum |\alpha_n|$ 收敛, 故不能由 $\sum |\alpha_k|$ 发散推出 $\sum \alpha_k$ 发散.

4.5 设极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 证明下列三个级数有同一收敛半径: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径为 $R = \frac{1}{\lambda}$, ($\lambda \neq 0$), 由收敛幂级数性质,

在 $|z| < R$ 内, 对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 可逐项积分、逐项求导, 所得结果收敛半径不变. 故知

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \text{ 及 } \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \text{ 收敛半径仍为 } R = \frac{1}{\lambda}.$$

在 $\lambda = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $R = +\infty$. 上述性质仍成立.

4.6 将下列函数展为幂级数，并求收敛半径.

$\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 展为 z 的幂级数

解 $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在 $z=0$ 处解析，且以 $\pm i$ 为奇点，故可知其 Taylor 展式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R=1$.

设 $z^2 = \xi$ ，将 $\frac{1}{(1+\xi)^2}$ 展为 ξ 的幂级数，再代入 $\xi = z^2$ 即可得所求(由展式唯一性保证).

因为 $\frac{1}{1+\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^n \quad |\xi| < 1$

在 $|\xi| < 1$ 内逐项微分得

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(1+\xi)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \xi^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) \xi^n \\ \therefore \frac{1}{(1+\xi)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \xi^n \quad |\xi| < 1 \end{aligned}$$

于是 $\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n} \quad |z| < 1$

4.7 计算下列积分：(积分路径均为正项)

$$1) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{1-z}} dz}{z^5} \quad 2) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\arctan z}{z^{99}} dz \quad 3) \oint_{|z|=\frac{\pi}{4}} \frac{dz}{z^5 \cos z} \quad \text{解}$$

1) 因为 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $|z| < 1$ 内解析，且积分路径 $|z| = \frac{1}{2}$ (正向) 围绕 $z=0$ ，本身及其内部完全属于 $|z| < 1$ ，故由高阶导数公式知

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{1-z}} dz}{z^5} = \frac{2\pi i}{4!} (e^{\frac{1}{1-z}})^{(4)} \Big|_{z=0}$$

又由 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z=0$ 邻域 Taylor 展开式系数知，原积分 $= 2\pi i a_4$ ， a_4 为展开式中 z^4 之系数.

所以
$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{1-z}} dz}{z^5} = 2\pi i \left(\frac{73}{24} e \right)$$

2) 因为主值分支 $\arctan z$ 在 $|z| < 1$ 内解析，积分路径 $|z| < 1$ 内解析，积分路径 $|z| = \frac{1}{2}$ (正

向)本身及其内部完全位于 $|z| < 1$ 内, 且围绕 $z = 0$, 故由高阶导数公式及 $\arctan z$ 在 $z = 0$ 邻域 Taylor 展开式系数知:

$$\text{原积分} = 2\pi i a_{98} = 0 \quad (\text{偶次幂系数均为 } 0)$$

3) 因为 $\frac{1}{\cos z}$ 在 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 内解析, 且积分路径 $|z| = \frac{\pi}{4}$ 围绕 $z = 0$ 本身及其内部完全属于 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 内, 故由高阶导数公式及 $\frac{1}{\cos z}$ 在 $z = 0$ 邻域 Taylor 展开式系数知原积分 = $2\pi i a_4$ (a_4 为 z^4 之系数)

$$\text{故有} \quad \text{原积分} = 2\pi i \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{12}\pi i$$

4.8 在 $z = 0$ 的邻域将 $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$ 展为 Taylor 级数, 并求收敛半径.

解 因为 $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$ 在 $z \neq 1$ 的区域内解析, 故可在 $z = 0$ 的邻域内展为 Taylor 级数, 且收敛半径 $R = |1 - 0| = 1$.

所以在 $|z| < 1$ 内有展开式 $\frac{e^z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \cdots & |z| < 1 \\ e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots & |z| < +\infty \end{aligned}$$

由幂级数乘法得

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots) \\ &= 1 + 2z + (1 + \frac{1}{2} + 1)z^2 + \left(1 + \frac{1}{3!} + 1 + \frac{1}{2!}\right)z^3 + \cdots \\ &= 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \cdots & |z| < +\infty \end{aligned}$$

4.9 在 $z_0 = 0$ 的邻域上将 $\frac{\sin z}{z}$ 展开.

【解】函数 $\frac{\sin z}{z}$ 在原点没有定义, $z_0 = 0$ 是奇点. 引用 $\sin z$ 在原点的邻域上的展开式

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} + \cdots, \quad |z| < +\infty$$

为避开奇点, 从 z 平面上挖去原点的复平面 $0 < |z| < +\infty$ 上, 用 z 除 $\sin z$ 的展开式, 就得到

$$\frac{\sin z}{z} \text{ 的展开式}$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k} + \cdots, \quad 0 < |z| < +\infty$$

其实, 如果定义一个函数

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

则 $f(z)$ 在整个复平面上都是解析的, 从而得到 $f(z)$ 在 $z_0 = 0$ 的邻域上的展开式

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k} + \cdots, \quad 0 < |z| < +\infty$$

正是解析函数 $f(z)$ 的 Taylor 展开式.

4.10 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域内展为 Laurent 级数

1) $1 < |z| < 2$ 2) $|z| > 2$

解 1) 因为 $f(z) = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)}$, 将 $f(z)$ 在环域 $1 < |z| < 2$ 内展为 Laurent 级数,

即要将 $f(z)$ 展为形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$ 的级数, 因为 $f(z)$ 在 $1 < |z| < 2$ 内解析, 由 Laurent 定

理, 上述展示存在, 为得到它, 注意 $\frac{1}{z-2}$ 在 $|z| < 2$ 内解析, 且

$$\left| \frac{z}{2} \right| < 1, \text{ 故}$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n = -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \quad |z| < 2$$

又因 $1 < |z|$, 所以 $\frac{1}{|z|} < 1$.

$$\text{故} \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \quad 1 < |z|$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \quad 1 < |z| < 2$$

2) 当 $|z| > 2$ 时, 对于 $f(z) = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)}$ 有

$$0 < \left| \frac{1}{z} \right| < \left| \frac{2}{z} \right| < 1$$

仿 1), 有 $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \quad 1 < 2 < |z|$

而 $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n} \quad \left|\frac{2}{z}\right| < 1$

$$\begin{aligned} \therefore f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n} \quad |z| > 2 \end{aligned}$$

4.11 下列推导是否正确? 为什么?

用长除法得

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad (1)$$

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots \quad (2)$$

(1)+(2)得

左端 = 0

$$\therefore \text{右端} = \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = 0$$

答 推导不正确, 因为(1)与(2)成立均有条件:

对(1), 只有当 $|z| < 1$ 方能成立, 而对(2), 只有当 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, 即 $|z| > 1$ 方能成立, 即(1)与(2)

没有同时成立的公共点集, 故二者不能相加(由 Laurent 级数收敛的定义), 所以上述结果是错误的.

4.12 将下列函数在 ∞ 的去心邻域展为 Laurent 级数, 并指出其收敛域.

1) $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ 2) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z^2}}$

解 1) 因为 $f(z)$ 在 $1 < |z| < +\infty$ 内解析, 故可在环域内展为 Laurent 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$

令 $\xi = \frac{1}{z}$ $0 < |\xi| < 1$, 且

$$f(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{\xi^2})^2} = \xi^4 \cdot \frac{1}{(1+\xi^2)^2} = \phi(\xi)$$

$$\frac{1}{(1+\xi^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \xi^{2n} \quad 0 < |\xi| < 1$$

所以 $\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \xi^{2n+4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \xi^{2(n+2)} \quad 0 < |\xi| < 1$

于是 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{-2(n+2)} \quad 1 < |z| < +\infty$

此即 $f(z)$ 在 ∞ 去心邻域内的 Laurent 展示.

2) 因为 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z^2}}$ 在 $1 < |z| < +\infty$ 内解析, 故在此邻域内展为 Laurent 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$, 令

$\xi = \frac{1}{z}$, 则 $1 < |\xi| < +\infty$.

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\xi^2} e^{\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{2n-2} \quad 0 < |\xi| < +\infty$$

所以 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2-2n} \quad 1 < |z| < +\infty$

此即 $f(z)$ 在 ∞ 去心邻域内的 Laurent 展示.

4.13 将 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展为 Laurent 级数, 并计算积分 $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$

(答 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2-n}$; $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i$)

4.14 计算积分: (路径为正向)

设 $f(z) = \int_0^z e^{\xi^2} d\xi$, 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{2n+1}} dz$. (n 为自然数)

(答 积分 = 0)

4.15 计算下列积分(路径均为正向)

1) $\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z-i)}$ 2) $\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5} dz$ 3) $\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} dz$

解 1) 积分路径位于环域 $1 < |z-i| < +\infty$ 内, 围绕 $z=i$, 简单、正向、闭, 且 $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$

在该环域内解析, 故由 Laurent 系数公式知

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z-i)} = \oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{(z-i)^{0+1}} = 2\pi i C_0$$

其中 C_0 为 $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$ 在环域 $1 < |z-i| < +\infty$ 内 Laurent 展开式的常数项.

可求出 $C_0 = 0$ ，所以

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2(z-i)} = 0$$

2) 积分路径位于环域 $|z| > 1$ 内，围绕 $z = 0$ ，简单、正向、闭，且 $\varphi(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ 在该环域内解析，由 Laurent 系数公式知

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5} dz = \oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} \cdot \frac{dz}{z^{4+1}} = 2\pi i \cdot C_4$$

C_4 为 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在环域 $|z| > 1$ 内 Laurent 展开式的 z^4 系数，且 $C_4 = 0$

故

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z^5} dz = 0$$

$$3) \oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} dz = \oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} \cdot \frac{dz}{z^{-1+1}} = 2\pi i \cdot C_{-1}$$

C_{-1} 为 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在环域 $|z| > 1$ 内 Laurent 展开式中 z^{-1} 的系数，知 $C_{-1} = -1$ ，即

$$\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{1-z}} dz = 2\pi i \cdot C_{-1} = -2\pi i$$

4.16 计算积分：(路径为正向)

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^n} \cos \frac{1}{z} dz, n \text{ 为自然数.}$$

(答 $n=1$ 时，积分 $= 2\pi i$ ， $n>1$ 时，积分 $= 0$.)

本章计算机仿真编程实践

(要求：对下述各题，要求尝试计算机仿真编程求解)

4.17 尝试计算机仿真编程(Matlab, Mathematic, Mathcad) 求出 $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$

邻域的 Taylor 级数，并求收敛半径。

(提示：答 $f(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \dots$ $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} = R$)

【解】计算机仿真程序

% (1)

taylor(1/(1-z-z^2), 0)

% (2) Because $C_{n+2} = C_{n+1} + C_n$; therefore : $R = 1 + 1/R$

RR=solve('R^2-R-1', 'R')

% 注意到取正的根，即为收敛半径

4.18 级数展开法(确定系数)计算积分 $\oint_{|z|=\sqrt{2}} \frac{dz}{z^{100}-1}$, 并实践编程验证.

【解】计算机仿真程序

```
N=100; Sum=0;
for k=1:N
    z(k)=exp(i*2*k*pi/N);
end
for k=1:N
    Multiplex=1;
    for m=1:N
        if m~=k
            Multiplex=Multiplex*( z(k)-z(m))
        end
    end
    Sum=Sum+1.0/Multiplex;
end
Integration=2*pi*i*Sum
```

4.19 将函数 $\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在下列区域内展为幂级数, 并利用 Matlab 级数展开法验证.

1) $|z| < 1$ 内; 2) $1 < |z| < 2$ 内; 3) $|z| > 2$

(答 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) z^n$; 2), 3) 见 7 题答案, 其中 $a=1, b=2$)

【解】计算机仿真程序

```
% (1)
T1=taylor(1/(z^2-3*z+2),0)
% (2) % (3) 分析并推导后展开即可
```

4.20 将 $\frac{1}{z^2(z-i)}$ 在下列区域内展为罗郎级数, 并用 Matlab 级数展开法验证.

1) $0 < |z-i| < 1$ 2) $|z-i| > 1$

解 1) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-i}$, 其中 $\frac{1}{z-i}$ 在 $|z-i| > 1$ 内解析, 故可作 Taylor 展

开, 注意 $\frac{1}{z^2} = \left(\frac{-1}{z}\right)$, 而

$$\frac{-1}{z} = i \frac{1}{1 + \frac{z-i}{i}} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{i}\right)^n$$

逐项求导得

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{i^{n-1}} n(z-i)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i^{n+2}} (n+1)(z-i)^n \quad |z-i| < 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i^{n+2}} (n+1)(z-i)^{n-1} \\ &= \frac{1}{z-i} \sum_{n=-1}^{\infty} i^{n-1} (n+2)(z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < 1 \end{aligned}$$

2) 因为 $|z-i| > 1$, 故 1) 中关于 $\frac{1}{z}$ 的展开式无效, 但 $\left| \frac{1}{z-i} \right| < 1$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{z} &= \frac{1}{z-i+i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} \\ &= \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{z-i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^n}{(z-i)^{n+1}} \end{aligned}$$

由环域内收敛 Laurent 级数可逐项求导的性质有

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \left(\frac{-1}{z} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (n+1)(z-i)^{-n-2} \\ \therefore f(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (n+1)(z-i)^{-(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (n+1)}{(z-i)^{n+3}} \\ &\quad 1 < |z-i| < +\infty \end{aligned}$$

计算机仿真程序

% (1) `taylor(1/(z^2*(z-i)), i)` 不能直接展开, 需要对被展开函数进行适当推导才能展开

% 比如 可以理解为 $-1/z$ 展开式的导数, 再乘以 $1/(z-i)$ 的展开式。

```
syms z
```

```
f1=taylor(1/z^2, 8, i)
```

```
f=f1*(1/(z-i))
```

% (2) 分析推导, 可得出其展开式

第五章 留数定理习题及其解答

5.1 设有 $f(z) = \cdots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} \cdots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \cdots$, 能否说 $z=0$ 为 $f(z)$ 本性奇点? 为什么?

答: 这个级数由两部分组成: 即 $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$. 第一个级数当 $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ 即 $|z| > 1$ 时收

敛,第二个级数当 $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ 即 $|z| < 2$ 时收敛。于是所给级数在环域 $1 < |z| < 2$ 内收敛(成立),且和

$$\text{函数 } f(z) = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} = \frac{-1}{z^2 - 3z + 2}。 \text{显然 } z=0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的解析点。可见}$$

此级数并非在 $z=0$ 的去心邻域内成立。故不能由其含无限多个负幂项断定 $z=0$ 的性质。

注：此例说明，判断孤立奇点 z_0 类型虽可从 $f(z)$ 的 Laurent 展开式含有负幂项的情况入手，但切不可忘掉必须是在去心邻域内的 Laurent 展式，否则与 z_0 是什么性质的点没有关系。

5.2 证明：如果 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 z_0 必为 $f'(z)$ 的 $m-1$ 阶零点，其中 $m > 1$ 。

证 因为 $f(z)$ 在 z_0 点解析，且 z_0 为其 m 阶零点。故 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内 Taylor 展式为

$$f(z) = C_m(z-z_0)^{m-1} + C_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots \quad \text{其中 } C_m \neq 0. \quad |z-z_0| < R.$$

由 Taylor 级数在收敛圆内可逐项微分性质有

$$f'(z) = C_m m(z-z_0)^{m-1} + C_{m+1}(m+1)(z-z_0)^m + \cdots \quad |z-z_0| < R.$$

$$\because C_m \neq 0 \quad \therefore C_m m \neq 0$$

右端即为 $f'(z)$ 在 $|z-z_0| < R$ 内的 Taylor 展开式，由解析函数零点定义知， $f'(z)$ 以 z_0 为 $m-1$ 阶零点。

注 本证明仅用到解析函数零点定义及幂级数在收敛圆内可逐项求导的性质。

5.3 判断下列函数在无穷远点的性态

$$1) z + \frac{1}{z} \quad 2) \sin z + \frac{1}{z^2} \quad 3) e^{z-\frac{1}{z}} \quad 4) \frac{1}{\sin z + \cos z}$$

解 1) 因为 $f(z) = z + \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析，且所给形式即为它在该区域内的 Laurent 展式，所以 ∞ 为 $f(z)$ 的一级极点 ($z=0$ 为一级极点)。

2) 因为 $\sin z + \frac{1}{z^2}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析，且在此区域内有

$$\sin z + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} + z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots$$

即在 ∞ 的去心邻域里的 Laurent 展式中含有无限多个 z 的正幂项，故 ∞ 为 $\sin z + \frac{1}{z^2}$ 的本性奇点 (0 为二级极点)。

$$3) \text{ 因为 } f(z) = e^{z-\frac{1}{z}} = \frac{e^z}{e^{\frac{1}{z}}}$$

e^z 在 $z=0$ 处解析, $e^{\frac{1}{z}}$ 以 $z=0$ 为本性奇点。

在 $f(z)$ 中令 $\xi = \frac{1}{z}$, 得 $\varphi(\xi) = \frac{1}{f(\xi)}$ 。 $\xi=0$ 为 $\varphi(\xi) = \frac{1}{f(\xi)}$ 的本性奇点, 即 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

$$4) \quad f(z) = \frac{1}{\sin z + \cos z}$$

令 $\sin z + \cos z = 0$, 得 $e^{i2z} = -i$, 即 $e^{i2z} = e^{-i\frac{\pi}{2} + i2k\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

$z_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为 $\sin z + \cos z$ 的零点, 且

$$[\sin z + \cos z]'_{z_k} = \cos z_k - \sin z_k = \sqrt{2}(-1)^k \neq 0 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$z_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ 为 $f(z) = \frac{1}{\sin z + \cos z}$ 的一级极点。

且 $z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, 故, ∞ 为 $f(z)$ 的非孤立奇点。

注 当 ∞ 为孤立奇点时, 一般直接从函数在 ∞ 的去心邻域内的 Laurent 展开入手, 判断其类型, 但对 3), 因 $f(z)$ 有一定的特性 ($f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{f(z)}$), 故可利用这一特性进行判断。

5.4 求出下列函数的奇点, 并对孤立奇点指出类型。

$$1) \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2} \quad 2) \frac{e^{z^2} - 1}{z^3} \quad 3) \cos z + \frac{1}{z} \quad 4) e^z \quad 5) \frac{1}{\cos \frac{1}{z}} \quad 6) \frac{z^3 \sin z}{(1 - e^z)^3}$$

(答 1) $0, \infty$ 均为本性奇点; 2) 0 为一级极点, ∞ 为本性奇点; 3) 0 为一级极点, ∞ 为本性奇点; 4) ∞ 为唯一奇点, 且为本性奇点; 5) 0 为非独立奇点, $z_k = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为一级极点, ∞ 为可去奇点; 6) 0 为可去奇点, ∞ 为本性奇点)。

5.5 计算下列各函数在指定点的留数:

1) $\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}$, 在 $z=\pm 1, \infty$ 处。

2) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$, 在 $z=0, \infty$ 处。

解 1) 因为 $z=1$ 为 $f(z)$ 的一级极点, 故由留数计算规则有

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}, 1 \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z+1)^3} = \frac{1}{8}$$

对 ∞ , 由留数计算规则有

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}, \infty\right] = -\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}, 0\right] = 0$$

又 $f(z)$ 在扩充复平面内仅有孤立奇点, 故留数和为 0, 于是可得

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z-1)(z+1)^3}, -1\right] = -\frac{1}{8}$$

2) $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$, 由留数定义, $\operatorname{Res}[f(z), 0]$ 等于 $(1-e^{2z})$ 在 $z=0$ 处 Taylor 展式中 z^3 项的系数。

$$\begin{aligned} 1-e^{2z} &= 1 - \left[1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \cdots \right] \\ &= -2z - \frac{(2z)^2}{2!} - \frac{(2z)^3}{3!} - \cdots \quad |z| < +\infty \end{aligned}$$

$$\text{有} \quad a_3 = -\frac{4}{3}, \quad \operatorname{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4}, 0\right] = -\frac{4}{3}$$

注意 $f(z)$ 于扩充复平面内仅有两个奇点, 其留数和为 0, 故 $\operatorname{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4}, \infty\right] = \frac{4}{3}$ 。

5.6 计算下列函数在 $z=0, \infty$ 处的留数

1) $\cos \frac{1}{z}$; 2) 在 $z^m \sin \frac{1}{z}$, 在 $z=0, \infty$ 处 (m 为自然数)。

解

1) $f(z) = \cos \frac{1}{z}$ 在扩充平面仅有两个奇点。注意 $\cos \xi$ 在 $|\xi| < +\infty$ 内 Taylor 展式中只有偶次项。

故 $f(z) = \cos \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内 Laurent 展式中无 z^{-1} 项, 即 $\operatorname{Res}[f(z), 0] = 0$ 。

且环域 $0 < |z| < +\infty$ 也是 ∞ 的去心邻域。故上述展式也是 ∞ 处的 Laurent 展式。

因此 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$

2) $f(z) = z^m \sin \frac{1}{z}$, m 为自然数。

由留数定义知, $\operatorname{Res}[f(z), 0]$ 等于 $\sin \frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内 Lauernt 展式中 $z^{-(m+1)}$ 的系数。注意在该环域有

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} + \cdots$$

$$\operatorname{Res}\left[z^m \sin \frac{1}{z}, 0\right] = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \text{ 为奇数时} \\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, & \text{当 } m = 2n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

5.7 计算 $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$

【答案 2π 】

5.8 求下列函数在指定点的留数

1) $\frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$ 在 ∞ 点。 2) $\cos z + \frac{1}{z}$ 在 ∞ 点。 3) $\frac{z^3 \sin z}{(1-e^z)^3}$ 在 ∞ 点。

(答: 1) 1; 2) -1; 3) 0;)

5.9 计算函数 $\frac{1}{(z-\alpha)^m(z+\beta)}$, (m 为自然数, $\alpha \neq \beta$), 在 α, β, ∞ 处的留数。

【解】 $f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^m(z+\beta)} = \frac{\frac{1}{(z-\alpha)^m}}{(z+\beta)}$ ($\alpha \neq \beta$, m 为自然数)
 $z = \beta$ 为 $f(z)$ 的一级极点, ($\alpha \neq \beta$)

$$\operatorname{Res}[f(z), \beta] = \frac{1}{(\beta-\alpha)^m}$$

为求 $\operatorname{Res}[f(z), \alpha]$, 注意 m 为自然数, 只要求 $\frac{1}{z-\beta}$ 在 α 点邻域 Taylor 展式中 $(z-\alpha)^{m-1}$

的系数 a_{m-1} 即可

$$\frac{1}{z-\beta} = \frac{1}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(\beta-\alpha)^{n+1}} (z-\alpha)^n$$

$$a_{m-1} = \frac{-1}{(\beta-\alpha)^m}, \text{ 故 } \operatorname{Res}[f(z), \alpha] = \frac{-1}{(\beta-\alpha)^m}$$

又由 $f(z)$ 于扩充复平面仅有奇点 α, β, ∞ , 故

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}[f(z), \alpha] - \operatorname{Res}[f(z), \beta] = 0$$

5.10 计算下列积分

1) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz, \quad k = 5, k = 4, -5, -2,$

2) $\oint_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{z^k \sin z} dz, \quad k = -2, 2, 5$

解 1) 因为积分路径 $|z|=1$ 位于环域 $0 < |z| < \pi$ 内, 且围绕 $z=0$, 简单、正向、闭, $\frac{1}{\sin z}$ 在该环域内解析, 故可知所求积分为

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_{k-1}$$

其中 a_{k-1} 为 $\frac{1}{\sin z}$ 在环域 $0 < |z| < \pi$ 内 Lauernt 展式 z^{k-1} 项的系数。

因此 $k=5$ 时, $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_4 = 0$ (上述展式中无偶次幂项)。

$$k=4 \text{ 时, } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_3 = 2\pi i \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right]$$

$$k=-5 \text{ 时, } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_{-6} = 0 \quad (\text{无偶次幂项}).$$

$$k=-2 \text{ 时, } \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i a_{-3} = 0 \quad \left(\frac{1}{\sin z} \text{ 以 } 0 \text{ 为一级极点} \right).$$

2) 同 1) 道理, 但积分路径位于环域 $\pi < |z| < 2\pi$ 内, 且围绕 $z=0$, 简单、正向、闭, $\frac{1}{\sin z}$ 在此环域内解析。

所以
$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i C_{k-1}$$

其中 C_{k-1} 为 $\frac{1}{\sin z}$ 在环域 $\pi < |z| < 2\pi$ 内 Laurent 展式中 z^{k-1} 项系数。

因而 $k=-2$ 时,
$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i C_{-3} = 2\pi i (-2\pi^2) = -4\pi^3 i$$

$$k=2 \text{ 时, } \oint_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i C_1 = 2\pi i \left(\frac{1}{3!} - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{2\pi^3 i}{3!} - 4i$$

$$k=5 \text{ 时, } \oint_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{z^k \sin z} dz = 2\pi i C_4 = 0 \quad (\text{展式中无偶次幂项})$$

5.11 计算下列积分 (积分路径均为正向);

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$$

解 因为 $f(z) = \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}$ 在 $1 < |z| < +\infty$ 内解析。路径 $|z|=2$ 位于该环域内, 围绕 $z=0$, 简单、正向、闭, 故由 ∞ 留数定义有

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} f(z)dz &= -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right] \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[e^z \cdot \frac{1}{1+z} \frac{1}{z^4}, 0\right] = 2\pi i C_3\end{aligned}$$

这里 C_3 为 $\varphi(z) = \frac{e^z}{1+z}$ 在 $0 < |z| < 1$ 内 Laurent 展式 (即 $\frac{e^z}{1+z}$ 在 $|z| < 1$ 内 Taylor 展式)

的 z^3 项系数, 由幂级数乘法易求得: $C_3 = \frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} = -\frac{1}{3}$ 。

$$\text{即 } \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^z dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\pi i$$

5.12 计算积分 (积分方向为正方向)

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz \quad (n \text{ 为自然数})$$

解:

当 $n=1$ 时 $z=-1$ 为 $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$ 的一级极点, 故

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{1+z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z}, -1\right) = 2\pi i$$

当 $n \neq 1$ 时, 积分路径内围绕了 $f(z) = \frac{z^{2n}}{1+z^n}$ 的 n 个一级极点

$$z_k = e^{\frac{i(1+2k)\pi}{n}} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (z_k^n = -1)$$

由留数定理有

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{2n}}{1+z^n}, z_k\right)$$

$$\text{因为 } \operatorname{Res}\left(\frac{z^{2n}}{1+z^n}, z_k\right) = \frac{z_k^{2n-n+1}}{n} = \frac{z_k^n \cdot z_k}{n} = -\frac{z_k}{n} \quad (\because z_k^n = -1)$$

$$\text{所以 } \oint_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-z_k}{n} = -\frac{2\pi i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

$$5.13 \text{ 计算定积分 } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\alpha \cos \theta + \alpha^2}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

解: 被积式为 $\cos \theta$ 的有理函数, 故令 $z = e^{i\theta}$, 则 $\cos \theta = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ 。代入原积分, 得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(1 - 2\alpha \frac{z^2+1}{2z} + \alpha^2)iz} \\
 &= \frac{i}{\alpha} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - (\alpha + \frac{1}{\alpha})z + 1} = \frac{i}{\alpha} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - \alpha)(z - \frac{1}{\alpha})}
 \end{aligned}$$

则 $|z|=1$ 内包围 $f(z) = \frac{dz}{(z - \alpha)(z - \frac{1}{\alpha})}$ 的一个奇点 $z_0 = \alpha$ ，且为一级极点。

故，由留数定理有

$$I = \frac{i}{\alpha} \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z - \alpha)(z - \frac{1}{\alpha})}, \alpha \right] 2\pi i = -\frac{2\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{\alpha}} \Big|_{z=\alpha} = -\frac{2\pi}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - \alpha^2}$$

5.14 计算定积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ 。

解： $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ ，设 $R(z) = \frac{1}{1+z^4}$ 。则 $R(z)$ 为 z 的有理函数，且分母次数为 4，

分子次数为 0 ($m - n = 4 > 2$)。且 $R(z)$ 在实轴上无奇点，在上半平面的奇点为 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ， $z_2 = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ 均为一级极点。

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i (\operatorname{Res}(\frac{1}{1+z^4}, z_1) + \operatorname{Res}(\frac{1}{1+z^4}, z_2)) \\
 &= \pi i \cdot (-\frac{1}{4})(z_1 + z_2) = -\frac{\pi i}{4}(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3}{4}\pi}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

5.15 计算定积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx$ 。

解：首先注意 $\frac{\sin x}{x(1+x^2)} = \frac{\sin x}{x} - \frac{x \sin x}{1+x^2}$ 。

$$\text{则 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(1+x^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$$

故只要计算第二项的值即可：设 $f(z) = \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$ ， $R(z) = \frac{z}{1+z^2}$ 的分母次数比分子次数高 1，在实轴上无奇点，在上半平面有一个一级极点 $z_0 = i$ 。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{1+x^2}dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}dx \\ &= 0 + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i] = 2\pi i \cdot \frac{1}{2e} = \frac{\pi i}{e}\end{aligned}$$

由此 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2e}$

于是 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e} = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{e})$

注： 要注意 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 是一实变量复值积分，且实部为奇函数，虚部为偶函数，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_0] \text{ 按实部等于实部，虚部等于虚部得最后结果。}$$

5.16 计算实积分 (1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 \theta} d\theta$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x} \quad (a > 0)$

【答案 (1) $\sqrt{2}\pi$; (2) $\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$ 】

5.17 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1}$

【答案 $-\frac{\pi}{2}$ 】

5.18 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2} dx$ 的值

【答案 $\frac{\pi}{2a} e^{-ma}$ 】

5.19 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{(x^2+a^2)^2} dx$ 的值

【答案 $\frac{m\pi}{4a} e^{-ma}$ 】

5.20 若函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 解析，且 $u-v = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$ ，试求 $f(z)$ 。

【答案 $f(z) = -iz^3 + c$ 】

5.21 利用复变函数环路积分方法，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}$$

(提示：考虑函数 $\frac{1}{2iz^4 \sin \pi z}$ 沿着仅包围某一个奇点 $z = n(n \neq 0)$ 的环路 l_n 的积分)

计算机仿真编程实践

5.22 计算机仿真计算 (利用 Matlab 计算机求解出留数, 然后求积分)

$$\oint_{|z|=2} \frac{zdz}{z^{1000} + 1}$$

【解】计算机仿真程序

%利用一阶极点求留数的方法, 可以计算某奇点的留数为

$z/(1000*z^{999})=1/(1000*z^{998})$

%然后求和再乘以 $2*\pi*i$

N=1000;

Sum=0;

for k=1:N

z(k)=exp(i*2*k*pi/N);

Sum=Sum+1/(1000.*z(k)^998);

end

Integrate=2*i*pi*Sum

5.23 计算机仿真计算 (1) $\frac{e^{z^2}-1}{z^3}$ 在 0 点 (2) $\frac{z-3}{z^3+5z^2}$ 在 0 点处的留数。

(答案 (1) 1; (2) $\frac{8}{25}$.)

【解】计算机仿真程序

%(1)

syms z

f=(exp(z^2)-1)/z^3

limit(diff(f*z^3,z,2)/prod(1:2),z,0)

%(2)

syms z

f=(z-3)/(z^3+5*z^2)

limit(diff(f*z^3,z,2)/prod(1:2),z,0)

5.24 利用计算机仿真编程的方法计算积分

(积分方向为正方向)

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{1+z^n} dz \quad (n \text{ 为自然数}).$$

【解】计算机仿真程序

%利用一阶极点求留数的方法, 可以计算某奇点的留数为

$z(k)^{(2n)}/(n*z(k)^{(n-1)})=(z(k)^{(n+1)})/n$

%然后求和再乘以 $2*\pi*i$

n=100;

Sum=0;

for k=1:n

```

z(k)=exp(i*2*k*pi/n+i*pi/n);
Sum=Sum+(z(k)^(n+1))/n;
end
Integrate=2*i*pi*Sum

```

5.25 利用计算机仿真计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$ ，并验证典型实例结果。

【解】计算机仿真程序

%积分的计算可以转化为瞬时针,积分反号,然后再利用无界区域的柯希公式(注意奇点 $z=3$)
 $z=3$

```
Integrate=-2*pi*i/((z-1)*(z+i)^10)
```

第六章 保角映射习题及解答

6.1 一个解析函数所构成的映射在什么条件下具有伸缩率和转动角的不变性?试讨论映射 $w = z^2$ 在复平面上的每点都具有这个性质吗?

【答案 在导数不等于零的条件下具有伸缩率和转动角的不变性;显然 $w = z^2$ 除 $z = 0$ 外均具有此性质】

6.2 求 $w = z^2$ 在点 $z = i$ 处的伸缩率和转动角,问 $w = z^2$ 将经过点 $z = i$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向映射成 w 平面上那个方向?并作图表示.

【答案 伸缩率 : $|w'(i)| = 2$; 旋转角 : $\text{Arg} w'(i) = \frac{\pi}{2}$; w 平面上虚轴的正向】

6.3 求所给区域在指定映射下的象

$$(1) 0 < \text{Im}(z) < \frac{1}{2}; \quad \omega = \frac{1}{z} \quad (2) \text{Re}(z) > 1, \text{Im}(z) > 0; \quad \omega = \frac{1}{z}$$

解 (1) $0 < \text{Im}(z) < \frac{1}{2}$ 为水平带域,其边界为 $y = 0$ 及 $y = \frac{1}{2}$. 首先求出其边界的象曲线.

$$\omega = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{(-y)}{x^2 + y^2} = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\text{对边界 } y = 0, \text{ 有 } \begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{x} \\ v(x, 0) = 0 \end{cases} \text{ 即其象为 } v = 0$$

$$\text{对边界 } y = \frac{1}{2}, \text{ 有 } \begin{cases} u\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ v\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -2v$$

故得 $u^2 + (v+1)^2 = 1$ 边界 $y = \frac{1}{2}$ 的象为圆周 $u^2 + (v+1)^2 = 1$

最后来确定所给区域内部的象：

$$\text{由 } \begin{cases} u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases} \text{ 及 } y > 0, \text{ 知 } v < 0$$

$$\text{又由 } y < \frac{1}{2} \text{ 得 } u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} > -2v = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

故有 $u^2 + (v+1)^2 > 1$

所以区域 $0 < \text{Im}(z) < \frac{1}{2}$ 在映射 $\omega = \frac{1}{z}$ 下的象为 W 平面的下半平面除去圆盘

$u^2 + (v+1)^2 \leq 1$ 所余区域。

$$(2) \omega = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{(-y)}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

区域 $\text{Re}(z) > 1, \text{Im}(z) > 0$ 之边界为 $l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=y \end{cases}, y > 0; l_2: \begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}, x > 1.$

$$\begin{cases} u(1, y) = \frac{1}{1 + y^2} \\ v(1, y) = \frac{-y}{1 + y^2} \end{cases}, y > 0, \text{ 消去 } y \text{ 得 } \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

即 l_1 的象为圆周 $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$

在 l_2 上, 有 $\begin{cases} u(x,0) = \frac{1}{x} \\ v(x,0) = 0 \end{cases}, x > 1$. 即 $\begin{cases} 0 < u < 1 \\ v = 0 \end{cases}$. 故 l_2 的象为 u 轴上线段 $(0,1)$. 再来

求区域 $\operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Im}(z) > 0$ 内部的象.

$x > 1$

$$\text{由} \begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \text{得 } u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2} < \frac{x}{x^2+y^2} = u$$

即 $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 < \frac{1}{4}$, 所以其象在此圆内部. 又 $y > 0$, 故由 $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ 知 $v < 0$. 及

其象位于 W 平面的下半平面, 于是, 区域 $\operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Im}(z) > 0$ 在映射 $\omega = \frac{1}{z}$ 下的象为 W

平面的半圆域 $\begin{cases} \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 < \frac{1}{4} \\ v < 0 \end{cases}$, 如图 1.10.

6.4 在映射 $w = iz$ 下, 下列图形映射为什么图形?

1) 以 $z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = 1$ 为顶点的三角形;

2) 圆域 $|z-1| \leq 1$

【答案 (1) $w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = i$ 为顶点的三角形;

(2) 圆域 $|w-i| \leq 1$ 】

6.5 求出将点 $z = 1, i, -i$ 依次映为点 $\omega = 1, 0, -1$ 的分式线性映射. 由此映射将单位圆 $|z| < 1$ 映为什么?

解 设 $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i, \omega_1 = 1, \omega_2 = 0, \omega_3 = -1$, 于是由条件知, 所求分

式线性映射为 $\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} : \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

将 z_k 与 $\omega_k (k=1,2,3)$ 代入得 $\frac{\omega - 1}{\omega - 0} : \frac{-1 - 1}{-1 - 0} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{-i - 1}{-i - i}$

化简得 $\omega = \frac{-1+2i}{5} \cdot \frac{z-i}{z-\frac{4-3i}{5}}$

这就是满足 $\omega_k = f(z_k) (k=1,2,3)$ 的分式线性映射.

$z = \frac{4-3i}{5}$ 映为 W 平面的 ∞ ，而 $z = \frac{4-3i}{5}$ 位于 $|z|=1$ 上，故由分式线性映射的保圆性知， $|z|=1$ 变为直线。再注意 ω_k 与 z_k 的位置，可知 $|z|=1$ 映为 W 平面的实轴。又因为沿方向 $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ 在 $|z|=1$ 上行进时，单位圆内部位于行进者左侧，由分式线性映射保角性， $|z|<1$ 的象应为与行进者沿方向 $\omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_3$ 在 u 轴行进时的左侧。故知 $|z|<1$ 映为 $\text{Im}(\omega)<0$ ，即下半平面。或者，注意 $z=0$ 映为 $\frac{1-2i}{5} = \omega$ ，即 $|z|<1$ 内有一点映为 $\text{Im}(\omega)<0$ 内一点，由分式线性映射的一一对应性，必有 $|z|<1$ 映为 $\text{Im}(\omega)<0$ 。

注 这里由唯一决定分式线性映射的基本条件 $\omega_k = f(z_k)$ ($k=1,2,3$) 求得变换。并由于 $|z|=1$ 上有一点 $z = \frac{4-3i}{5}$ 映为 ω 平面的 ∞ ， $|z|=1$ 上的 z_k 映为 ω 平面实轴上的 ω_k ($k=1,2,3$)。便可知 $|z|=1$ 的象为实轴。上述确定 $|z|<1$ 的象为 $\text{Im}(\omega)<0$ 的保角映射。

6.6 证明：映射 $w = z + \frac{1}{z}$ 把圆周 $|z|=c \neq 0$ 映射为椭圆：

$$u = (c + c^{-1}) \cos \theta, \quad v = (c - c^{-1}) \sin \theta$$

6.7 如果分式线性映射 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ 将上半平面 $\text{Im}(z)>0$

(1) 映射成上半平面 $\text{Im}(w)>0$ ；(2) 映射成下半平面 $\text{Im}(w)<0$

那么系数 a, b, c, d 满足什么条件？

【答案 (1) $ad - bc > 0$; (2) $ad - bc < 0$ 】

6.8 如果分式线性映射 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ 将 z 平面上的直线映射成 $|w|<1$ ，那么它的系数应该满足什么条件？

【答案 $ad - bc \neq 0, |a| = |c|$ 】

6.9 试求将 $|z|<R$ 的圆域映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射。

【答案 $w = e^{i\varphi} \left(\frac{z - Ra}{R - az} \right), |a|<1$ 】

6.10 试求将 $|z|<1$ 映射成 $|w-1|<1$ 的分式线性映射。

【答案 $w = 1 + e^{i\varphi} \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right), |a|<1$ 】

6.11 求把右半平面 ($\text{Re}(z)>0$) 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射。

【答案 $w = e^{i\theta} \left(\frac{z-\bar{a}}{z+a} \right)$, 其中 $\text{Re}(a)>0$, θ 为任意实数。】

6.12 求将上半平面映为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $\omega = f(z)$ ，并分别满足下列条件：

$$f(i) = 0, \quad f(-1) = 1$$

【解】 直接利用公式 $\omega = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$, α 为上半平面任一点, θ 为任一实数. 此映射将上

半平面映为单位圆. 代入条件 $f(i)=0$ 得 $\omega = e^{i\theta} \frac{z-i}{z+i}$, 代入条件 $f(-1)=1$ 得 $-\sin\theta + i\cos\theta = 1$

$$\begin{cases} \sin\theta = -1 \\ \cos\theta = 0 \end{cases}, \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ 即 } e^{i\theta} = -i$$

$\omega = -i \frac{z-i}{z+i}$ 为所求.

6.13 求将上半平面映为单位圆 $|\omega| < 1$ 的分式线性映射 $\omega = f(z)$, 并分别满足下列条件:
 $f(i)=0$, $\arg f'(i)=0$

同上题的讨论, 可设所求映射为 $\omega = k \frac{z-i}{z+i}$, 其中 $|k|=1$.

为了确定 k , 注意条件 $\arg f'(i)=0$, 只要选 k , 使 $f'(i) > 0$ 即可.

由 $f'(z) = k \frac{2i}{(z+i)^2}$ 得 $f'(i) = \frac{1}{2i}k$, 由 $\begin{cases} f'(i) = \frac{k}{2i} > 0 \\ |k|=1 \end{cases}$ 得 $k=i$

$\omega = i \frac{z-i}{z+i}$ 即为所求.

6.14 求将单位圆映为单位圆的映射, 并分别满足条件

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

解 由条件 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 及分式线性映射的保对称性, $z=\frac{1}{2}$ 关于单位圆周 $|z|=1$ 的对称点

$z=2$ 必映为 $\omega=0$ 关于 $|\omega|=1$ 的对称点 $\omega=\infty$. 于是, 可设 $\omega = k \frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$ (k 待定), 又

由于 $|z|=1$ 的象为 $|\omega|=1$. 故在 $|z|=1$ 上, 有

$$|\omega| = |k| \frac{\left|z-\frac{1}{2}\right|}{|z-2|} \cdot \frac{|\bar{z}|}{2} = \frac{|k|}{2} \frac{|2-\bar{z}|}{|z-2|} = \frac{|k|}{2} = 1$$

$|k|=2$. 即当取 $|k|=2$ 时, 映射 $\omega = k \frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$ 不仅将 $|z|=1$ 映为 $|\omega|=1$, 且单位圆内部映为单位圆内部.

$$\text{只要选 } k, \text{ 使得 } \begin{cases} \operatorname{Re}\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \\ \operatorname{Im}\left(f'\left(\frac{1}{2}\right)\right) < 0 \end{cases} \quad \text{即可.} \quad f'(z) = -\frac{3k}{2} \cdot \frac{1}{(z-2)^2}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}k \quad \text{由 } |k| = 2 \text{ 得 } k = 2i$$

$$\text{即 } \omega = 2i \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2} = i \frac{2z - 1}{z - 2} \text{ 为所求.}$$

注 本题利用分式线性映射的性质, 先导出满足第一个条件的分式线性映射之一般形式, 进而由第二个条件确定系数 k .

6.15 求出将 Z 平面的右半平面 ($\operatorname{Re}(z) > 0$) 映为 W 平面上单位圆外部 $|\omega| > 1$ 的分式线性映射的一般式.

解 首先, $z_1 = iz$ 可将 Z 平面的右半平面映为 Z_1 平面的上半平面. 所以只要考虑将 Z_1 上半平面映为 W 平面上单位圆外部的映射即可. 由分式线性映射的一一对应性可知, 将上半平面映为单位圆外部的映射一般式为

$$\omega = k \frac{z_1 - \alpha}{z - \alpha}, \quad \text{其中 } |k| = 1, \operatorname{Im} \alpha < 0$$

于是, 将 $z_1 = iz$ 代入, 得 $\omega = k \frac{iz - \alpha}{iz - \alpha}, |k| = 1, \operatorname{Im} \alpha < 0$. 即是将 z 平面右半平面映为 W 平面单位圆外部的分式线性映射的一般式.

6.16 求出任一双方单值且保角的映射, 使单位圆 $|z| < 1$ 映为铅直条形区域 $0 < \operatorname{Re} \omega < a$.

解 第一步: 采用分式线性映射将单位圆映为上半平面 (注意分式线性映射全平面双方单值、保角, 故只要取上半平面映为单位圆映射的逆映射即可)

$$z_1 = i \frac{1+z}{1-z}$$

第二步: 用对数函数映射 $z_2 = \ln z_1$ (主值分支) 将上半平面映为宽度为 π 的水平带形区域.

第三步: 经伸缩及旋转变换 $\omega = \frac{a}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}} z_2$, 可将水平带域映为铅直带域 $0 < \operatorname{Re}(z) < a$.

$$\text{复合后即得所求: } \omega = -i \frac{a}{\pi} \ln \frac{i+z}{1-z}.$$

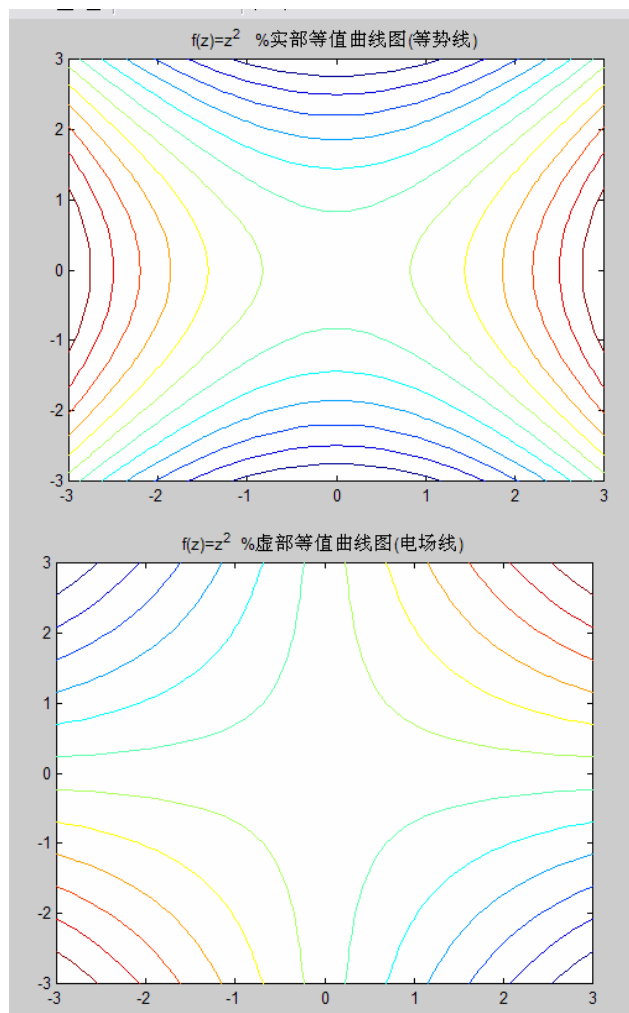
注 1. 由于我们十分熟悉上半平面映为单位圆的分式线性映射 $\omega = \frac{z-i}{z+i}$, 并且分式线性映射为全平面双方单值、保角, 故只要求其逆映射, 即为由单位圆映为上半平面的映射. 从上半平面映为带域 $0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$ 时, 应采用主值分支 $f(z) = \ln z$;

计算机仿真编程实践

6.17 用计算机仿真 (Matlab) 的方法绘出函数 $w = z^2$ 的实部和虚部 .

【解】仿真程序

```
[X,Y,Z]=peaks;
Z=X.^2-Y.^2;           %计算格点上的函数值
contour(X,Y,Z,12)
title('f(z)=z^2  %实部等值曲线图(等势线)')
Z=2.*X.*Y;
figure
contour(X,Y,Z,12)
title('f(z)=z^2  %虚部等值曲线图(电场线)')
```



6.18 求所给区域在指定映射下的象, 并进行计算机仿真绘出图形 .

$$\operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < 1, \omega = \frac{i}{z}$$

【解】区域 $\operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < 1$ 的边界为

$$l_1: \begin{cases} x=0 \\ y=y \end{cases}, y \in [0, 1], l_2: \begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}, x \geq 0, l_3: \begin{cases} x=x \\ y=1 \end{cases}, x \geq 0$$

$$\omega = \frac{i}{z} = \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\text{由 } \begin{cases} u(0, y) = \frac{1}{y}, y \in (0, 1) \\ v(0, y) = 0 \end{cases} \text{, 得 } l_1 \text{ 的象为 } u \text{ 轴上的半射线 } \begin{cases} u=u \\ v=0 \end{cases}, u \geq 1, \text{ 又由 } \begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = \frac{1}{x} \end{cases},$$

$$x \geq 0 \text{ 知, } l_2 \text{ 的象为上半虚轴 } \begin{cases} u=0 \\ v=v \end{cases}, v > 0$$

$$\begin{cases} u(x, 1) = \frac{1}{1+x^2} \\ v(x, 1) = \frac{x}{1+x^2} \end{cases}, x \geq 0, \text{ 消去 } x \text{ 可得 } l_3 \text{ 的象为半圆周 } \begin{cases} \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4} \\ v \geq 0 \end{cases} \text{. 对区域内}$$

$$\text{部, } \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = x > 0 \\ \operatorname{Im}(z) = y > 0 \end{cases} \begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} > 0 \\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2} > 0 \end{cases}$$

$$\text{又因为 } y < 1, \text{ 所以 } u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{y}{x^2 + y^2} = u, \text{ 即 } \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 > \frac{1}{4}$$

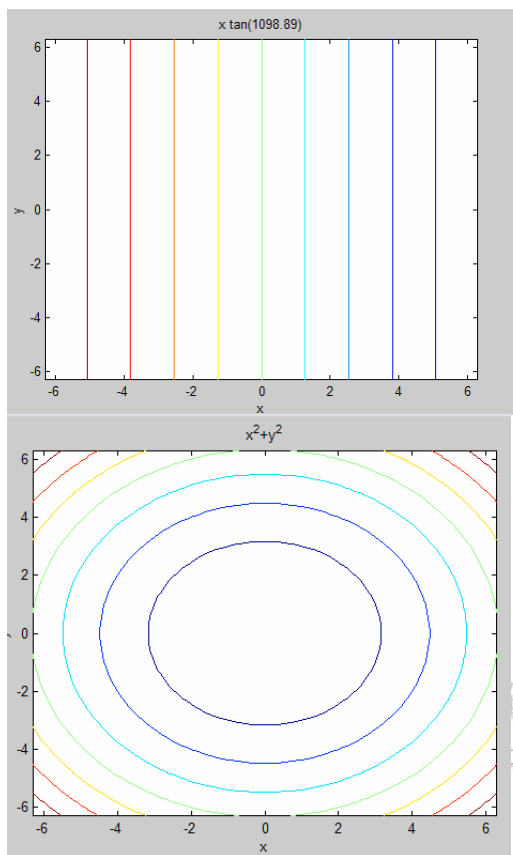
所给区域在 $\omega = \frac{i}{z}$ 下的象为 W 平面第一象限去掉半圆 $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}, v \geq 0$ 之后的区域.

6.19 证明: 在映射 $w = e^{iz}$ 下, 互相正交的直线族 $\operatorname{Re}(z) = x = C_1$ 与 $\operatorname{Im}(z) = C_2$ 依次映射成互相正交的直线族 $v = u \tan C_1$ 与圆族 $u^2 + v^2 = e^{-2C_2}$. 并计算机仿真绘出曲线图形.

【计算机仿真程序】

```
%exercise(1)
ezcontour('x*tan(1098.89)'), colormap(jet)
```

```
%exercise(2)
figure
ezcontour('x^2+y^2'),colormap(jet)
```



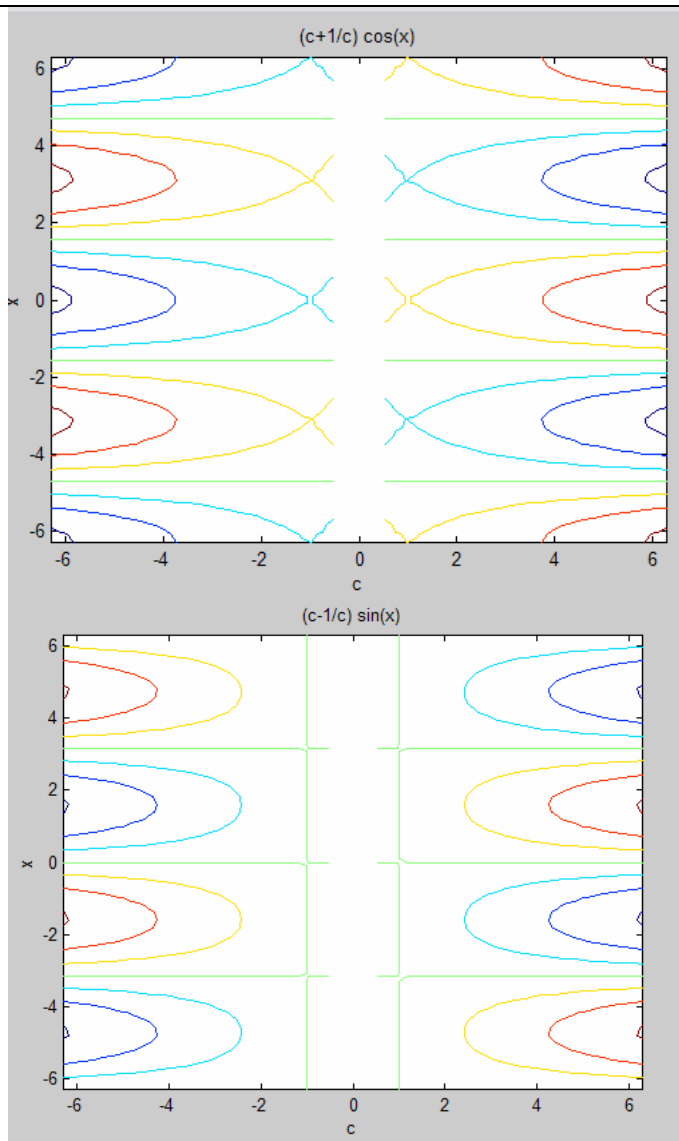
6.20 证明：映射 $w = z + \frac{1}{z}$ 把圆周 $|z| = c \neq 0$ 映射为椭圆：

$$u = (c + c^{-1}) \cos \theta, \quad v = (c - c^{-1}) \sin \theta$$

并计算机仿真绘出等值线图形。

【解】计算机仿真程序

```
%exercise(1)
c=109;
ezcontour('(c+1/c)*cos(x)'),colormap(jet)
%exercise(2)
figure
ezcontour('(c-1/c)*sin(x)'),colormap(jet)
```



第七章 傅里叶变换习题及解答

7.1 求函数 $f(x) = \sin \omega_0 x$ 的傅氏变换 $F[f(x)]$.

【答案 $i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ 】

7.2 求 $\delta(x - x_0)$ 的傅氏变换.

【答案 $e^{-i\omega x_0}$ 】

7.3 设 $F[f(x)] = F(\omega)$, 求 $F[(2x-3)f(x)]$

【答案 $2iF'(\omega) - 3F(\omega)$ 】

7.4 证明, 傅里叶逆变换也满足线性性质

$$F^{-1}[\alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)] = \alpha F^{-1}[F_1(\omega)] + \beta F^{-1}[F_2(\omega)]$$

7.5 证明 $F^{-1}[F(\omega \pm \omega_0)] = e^{\mp i\omega_0 x} f(x)$

7.6 设 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-5t}, & t \geq 0 \end{cases}$ 求 $F[f(t)]$

【答案 $\frac{5-i\omega}{25+\omega^2}$ 】

7.7 设 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t} \sin 2t, & t \geq 0 \end{cases}$, 求 $F[f(t)]$

【答案 $(i\omega+1)^2+4$ 】

7.8 若 $F[f(x)] = \frac{1}{a+i\omega}$, 求 $f(x)$

【答案 $f(x) = e^{-ax}u(x)$ ($a > 0$)】

7.9 $F[f(t)] = F(\omega)$, 求 $F[f(t)\cos \omega_0 t]$

【答案 $\frac{F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)}{2}$ 】

7.10 证明 若 $F[f(x)] = F(\omega)$, 其中 a 为非零的常数, $t_0 > 0$, 根据傅氏变换性质证明

$$F[f(ax-x_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}x_0}, F[f(x_0-ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(-\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}x_0},$$

9.11 设 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, 求 $F^{-1}[F(\omega)]$.

解 $F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi e^{j\omega t} \delta(\omega) d\omega = e^{j\omega t} \Big|_{\omega=0} = 1$

即 $f(t) = 1$ 与 $2\pi\delta(\omega)$ 构成一 F -氏变换对

$$F[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

[注] 1. 这里可以看见, 广义函数 δ -函数对应的 F -氏变换,

F -氏逆变换已不是氏积分定理意义下的, 故称为广义 F -氏变换,

因为在古典意义 F -氏变换下, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$ 是无意义的;

2. 因为 $F[1] = F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ 。可见常数 1 的频谱为在 $\omega=0$ 点强度为 2π 的脉冲 $2\pi\delta(\omega)$

9.12 设 $f(t)$ 定义于 $(-\infty, +\infty)$, 求 $f(t)*u(t)$, 并求 $F[f*u(t)]$.

$$\text{解 } f_1 * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau, \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau \geq t \end{cases}$$

对任意 $t \in (-\infty, +\infty)$, $f(\tau) \neq 0$ 与 $u(t-\tau) \neq 0$ 的公共区间为 $\tau < t$.

$$\text{于是 } f(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$$

由卷积定理, 有

$$F\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = F[f(t)*u(t)] = F[f(t)] \bullet F[u(t)]$$

设 $F[f(t)] = F(\omega)$, 则有

$$F\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = F(\omega) \bullet \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)t()$$

注. 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \pi F(0)\delta(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \pi F(0)\varphi(0)$ 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi F(\omega)\delta(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \pi F(0)\varphi(0)$$

(其中 $\varphi(\omega)$ 为任意连续函数, 且当 $|\omega|$ 足够大时取零值).

由 δ -函数的定义知

$$\pi F(\omega)\delta(\omega) = \pi F(0)\delta(\omega)$$

7.13 利用能量积分计算下列广义积分值.

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{1+t^2}\right]^2 dt \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]^2 dt \quad 3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt \quad 4) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{t}{1+t^2}\right]^2 dt$$

解 1) 设 $F\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = F(\omega)$, 则有能量积分有

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{1+t^2}\right]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{因为 } F\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{1+t^2} dt$$

$$= 2 \bullet \frac{\pi}{2} e^{-|\omega|} \quad \omega \in (-\infty, +\infty)$$

所以 $|F(\omega)|^2 = \pi^2 e^{-2|\omega|}$

于是

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \bullet 2 \int_0^{+\infty} \pi^2 e^{-2\omega} d\omega = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

2) 设 $F\left[\frac{1+\cos t}{t}\right] = F(\omega)$, 则 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-j\omega t} dt = -2j \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} \sin \omega t dt$$

因为

$$= -2j \left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t \cos t}{t} dt \right] = -2j [I_1 - I_2]$$

由 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (狄利克雷积分)

$$\text{可计算得 } I_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cos \omega t}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |\omega| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & |\omega| = 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

在 I_2 中, 当 $\omega > 0$ 与 $\omega < 0$ 时, 分别令 $\omega t = \tau$ 与 $-\omega t = \tau$ 可计算得

$$I_2 = \begin{cases} 0, & |\omega| < 1 \\ -\frac{\pi}{4}, & \omega = -1 \\ \frac{\pi}{4}, & \omega = 1 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > -1 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega > 1 \end{cases} \quad \text{及} \quad |I_1 - I_2| = \begin{cases} 0, & |\omega| > 1 \\ \frac{\pi}{4}, & |\omega| = 1 \\ \frac{\pi}{2}, & 0 < |\omega| < 1 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

所以 $|F(\omega)|^2 = \begin{cases} 0, & |\omega| > 1 \\ \frac{\pi^2}{4}, & |\omega| = 1 \\ \pi^2, & 0 < |\omega| < 1 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$

于是 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi^2 d\omega = \pi$

3) 因为 $\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos 2t}{2t}$

设 $F\left[\frac{1 - \cos 2t}{2t}\right] = F_1(\omega), F\left[\frac{1 - \cos t}{t}\right] = F(\omega)$

则 $F_1(\omega) = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (此称为 F-矢变换相似性质)

所以
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]^2 dt \end{aligned}$$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1 - \cos 2t}{2t} \right]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]^2 dt = \frac{\pi}{2}$ (由 2) 结果得)

4) 设 $F\left[\frac{t}{1+t^2}\right] = F_1(\omega), F\left[\frac{t}{1+t^2}\right] = F(\omega)$. 由象函数微分性质得 $F_1(\omega) = jF(\omega)$.

由 2) 知, $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|} = \begin{cases} \pi e^{-\omega}, & \omega \geq 0 \\ \pi e^{\omega}, & \omega < 0 \end{cases}$

因为 $F_1(\omega) = \begin{cases} -\pi e^{-\omega}, & \omega > 0 \\ \pi e^{\omega}, & \omega < 0 \end{cases}$ 且注意 $F_1(0) = 0$

所以 $|F_1(\omega)|^2 = \pi^2 e^{-2|\omega|} = |F(\omega)|^2$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{T}{1+t^2} \right]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

(由 2) 结果得)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$$

计算机仿真求解傅氏变换

7.14 已知时域函数 $f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$, ($a > 0$), 利用计算机仿真求解该函数的傅氏变换.

【解】计算机仿真程序

```
syms t w; syms a positive
f=1/(t^2+a^2);
F=fourier(f,t,w)
```

7.15 已知 $f(t) = \frac{\sin^2(at)}{t}$, ($a > 0$), 计算机求解 $F[f(t)]$.

【解】计算机仿真程序

```
syms t w; syms a positive
f=sin(a*t)^2/t;
```

```
F=fourier(f,t,w)
```

7.16 设函数 $f(t) = \frac{e^{-a|t|}}{\sqrt{|t|}}$, 试用 Matlab 提供的 现成函数 和 直接积分的方法 分别求解傅氏变换.

【解】计算机仿真程序

```
syms w t;
syms a positive
f=exp(-a*abs(t))/sqrt(abs(t));
F=fourier(f,t,w)
```

%说明: 从结果看来, 由于 MATLAB 和 MAPLE 自身的不完善, 目前还不能直接求取该函数的 Fourier 变换,

%只能通过适当变化后才能求其 Fourier 变换.

7.17 试求函数 $f(x) = x^n e^{-ax}$, ($a > 0, n = 1, 2, 3, \dots, 10$) 的余弦傅氏变换.

【解】计算机仿真程序

```
syms x w; syms a positive
for i=1:10
    f=x^i*exp(-a*x);
    F=int(f*cos(w*x),t,0,inf);
```

```
latex(simple(F))
```

```
end
```

7.18 求分段函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & (0 < x < a) \\ 0, & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases}$ 的傅氏变换.

【解】计算机仿真程序

```
f=cos(x);
```

```
F=simple(int(f*cos(w*x),x,0,a));
```

```
latex(F)
```

第八章 拉普拉斯变换习题及解答

8.1 求下列函数的拉普拉斯变换

(1) $u(1 - e^{-t})$; (2) $u(3t - 5)$; (3) $(t - 1)^2 e^t$

8.2 求函数 $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t < \pi \\ t, & t > \pi \end{cases}$ 的拉氏变换

8.3 求函数 $\frac{\sin t - t \cos t}{2}$ 的拉氏变换

8.4 求函数 $F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$ 的拉氏逆变换

8.5 求下列函数的反演 (即求拉氏逆变换)

(1) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$; (2) $F(p) = \frac{2p + 5}{p^2 + 4p + 13}$; (3) $F(p) = \frac{1}{(p + 1)^4}$

8.6 设 $F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p + 2)}$, 求 $L^{-1}[F(p)]$

8.7 设 $L^{-1}(1) = \delta(t)$, 求 $L^{-1}[\frac{p^2}{p^2 + 1}]$

8.8 在傅氏变换中, 写出函数 $f_1(t), f_2(t)$ 的卷积表达式.

8.9 利用卷积定理, 求下列函数的拉氏逆变换

(1) $F(p) = \frac{a}{p(p^2 + a^2)}$; (2) $F(p) = \frac{1}{p(p - 1)(p - 2)}$

8.10 证明卷积满足加法的分配律 $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

8.11 试确定实数 m , 使 $L[t^m]$ 存在, 并求 $L[t^m]$.

解

因为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^m] &= \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \int_0^1 t^m e^{-st} dt + \int_1^{+\infty} t^m e^{-st} dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

在 I_1 中, $|e^{-st}|$ 有界, 且仅当 $m > -1$ 时 I_1 收敛, 在 I_2 中, 对 $\operatorname{Re}(s) > 0$, 任意实数 m , 均收敛, 故当 $m > -1$ 时, $\mathcal{L}[t^m]$ 存在.

1° 当 $m > 0$ 时, 令 $st = z$ 有

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \frac{1}{s^{m+1}} \int_0^{\infty} z^m e^{-z} dz$$

右端的积分除 m 为自然数外, 被积函数 $z^m e^{-z} = g(z)$ 在 $z = 0$ 处不解析 (且为非孤立奇点),

现对 $\varepsilon > 0$, 考虑积分 $\int_{\varepsilon}^{\infty} z^m e^{-z} dz$ (当 $m > 0$ 不为自然数时, 取 z^m 得主值分支).

因为 $g(z)$ 在 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 内解析, 故对 $\varepsilon > 0$ 积分与路径无关, 于是 $\int_{\varepsilon}^{\infty} z^m e^{-z} dz = \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^m e^{-x} dx$ 注

意 $\int_{\varepsilon}^{+\infty} x^m e^{-x} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx = \Gamma(m+1)$. 即

$$\int_0^{\infty} z^m e^{-z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} z^m e^{-z} dz = \Gamma(m+1)$$

所以

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad (m > 0) \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

2° 当 $m = 0$ 时, $\mathcal{L}[t^m] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} = \frac{\Gamma(0+1)}{s^{0+1}}$.

3° 当 $m \in (-1, 0)$ 时, 因为 $m+1 > 0$, 由 1° 得

$$\mathcal{L}[t^{m+1}] = \frac{\Gamma(m+2)}{s^{m+2}} = \frac{(m+1)\Gamma(m+1)}{s^{m+2}}$$

且 $t^m = \frac{1}{m+1} [t^{m+1}]$, $t^{m+1}|_{t=0} = 0$. 于是由微分性质与线性性质有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1}{m+1}(t^{m+1})'\right] &= \frac{1}{m+1} \bullet s\mathcal{L}(t^{m+1}) \\ &= \frac{s}{m+1} \bullet \frac{(m+1)\Gamma(m+1)}{s^{m+2}} = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

综合 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ 得, 当 $m > -1$ 时

$$\mathcal{L}[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

注 1. 当 $m > 0$ 时, 通过 $g(z) = z^m e^{-z}$ 在 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 内解析, 将 $\int_{\varepsilon}^{\infty} g(z) dz$ ($\varepsilon > 0$) 化为沿

实轴积分 $\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x) dx$, 且利用 Γ -函数的定义得到结果; 当 $m = 0$ 时由 $\mathcal{L}$ -氏变换定义得到结果; 当

$m \in (-1, 0)$ 时利用 $\mathcal{L}$ -氏变换微分性质及 $m > 0$ 的结果得到结果.

2. Γ -函数指由含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{m-1} dt$ 所定义的函数 $\Gamma(m)$. (其中 $m > 0$). 其基本性

质为递推关系 $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$, 当 m 为自然数时, 有 $\Gamma(m+1) = m!$, 由定义可知 $\Gamma(1) = 1$. 由定

义及概率积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ 可得 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

8.12 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$, $\operatorname{Re}(p) > c$, 试对 $a > 0, b \geq 0$, 导出 $\mathcal{L}[f(at-b)]$ 与 $F(p)$ 的关系.

解 因为 $\mathcal{L}[f(at-b)] = \int_0^{+\infty} f(at-b)e^{-st} dt$ 令 $at-b = \xi$, 则

$t = \frac{1}{a}(\xi + b)$, $dt = \frac{1}{a}d\xi$. 注意当 $t < 0$ 时有 $f(t) = 0$, 所以

$$\mathcal{L}[f(at-b)] = \frac{1}{a} \int_{-b}^{+\infty} f(\xi) e^{-s\frac{1}{a}(\xi+b)} d\xi = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} \int_0^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{s}{a}\xi} d\xi = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

注 当 $b=0$ 时, 有 $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$. 称为 $\mathcal{L}$ -氏变换的相似性质; 注意到

$$f(at-b) = f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right], \text{ 可见本题给出的是相似性质与延迟性质之结合情形. } (a>0, b\geq 0)$$

8.13 求下列函数的拉氏逆变换.

$$(1) F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2} \quad (2) F(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4} \quad (3) F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}$$

解 (1) 因 $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}$, 且 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t$.

有卷积定理有

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \cos t * \cos t = \int_0^t \cos \tau \cos(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t + \cos(2\tau-t)] d\tau = \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad F(s) &= \frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4} = \frac{s+3}{(s+1)\left[(s+1)^2+3\right]} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2+3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+3} \end{aligned} \quad (\text{部分分式})$$

于是利用位移性质、线性性质及已知的基本变换式可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+3}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+3}\right] = \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1}\right] = \frac{2}{3} e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{3} \frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right] = \frac{2}{3} e^{-t} \cos \sqrt{3}t$$

所以 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{e^{-t}}{3} [2 + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t] = f(t)$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 因为 } F(s) &= \ln \frac{s+1}{s-1} = \int_s^\infty \left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right] ds = 2 \int_s^\infty \mathcal{L} \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right] ds \\ &= 2 \int_s^\infty \mathcal{L} [sht] ds = 2 \mathcal{L} \left[\frac{sht}{t} \right] \end{aligned}$$

所以 $f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = \frac{2sht}{t}$

8.14 求下列函数的拉氏逆变换.

$$(1) F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13} \quad (2) F(s) = \frac{1}{(s+1)^4} \quad (3) F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

解 (1) $F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13} = \frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2} = 2 \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{3} \frac{3}{(s+2)^2+3^2}$

因为 $\mathcal{L}^{-1} \left[2 \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} \right] = 2e^{-2t} \cos 3t$ $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{3} \frac{3}{(s+2)^2+3^2} \right] = \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t$

所以 $f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = e^{-2t} \left[2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right]$

$$(2) F(s) = \frac{1}{(s+1)^4} = \frac{\Gamma(3+1)}{(s+1)^{3+1}} \bullet \frac{1}{\Gamma(3+1)} = \frac{1}{3!} \bullet \frac{\Gamma(3+1)}{(s+1)^{3+1}}$$

由位移性质及 $\mathcal{L} [t^3] = \frac{\Gamma(3+1)}{s^{3+1}}$, 得

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(3+1)}{(s+1)^{3+1}} \right] = e^{-t} \bullet t^3$$

所以 $f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] = e^{-2t} \left[2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right]$

$$(3) F(s) = \frac{s^2-a^2}{[s^2+a^2]^2} = \frac{s}{s^2+a^2} \bullet \frac{s}{s^2+a^2} - \frac{a}{s^2+a^2} \bullet \frac{a}{s^2+a^2}$$

由卷积定理得

$$\begin{aligned}
 f(t) &= L^{-1}[F(s)] = \cos at * \cos at - \sin at * \sin at \\
 &= \int_0^t \cos at \cos a(t-\tau) d\tau - \int_0^t \sin at \sin a(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_0^t [\cos a\tau \cos(at-a\tau) - \sin a\tau \sin(at-a\tau)] d\tau \\
 &= \int_0^t \cos[a\tau + (at-a\tau)] d\tau = t \cos at
 \end{aligned}$$

计算机仿真实践

8.15 原函数为 $f(t) = x^2 e^{-2x} \sin(x + \pi)$ ，试用计算机仿真求解其拉氏变换，并对结果进行反演变换，验证是否能变换为原函数。

【解】计算机仿真程序

```
syms t a
f=t^2*exp(-2*t)*sin(t+pi);
L=laplace(f)
pretty(L)
```

8.16 用计算机仿真方法求解 $L^{-1}[\frac{p^2}{p^2+1}]$

【解】计算机仿真程序

```
syms p
f=p^2/(p^2+1);
L=laplace(f)
L=simple(L)
```

8.17 计算机仿真方法求解函数 $F(x) = \frac{-x^5 + 7x^4 - 6x^2 - x + 1}{x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}$ 的拉氏逆变换，即求 $f(t)$ 。

【解】计算机仿真程序

```
syms p
f=(-p^5+7*p^4-6*p^2-p+1)/(p^6-4*p^5+3*p^4+2*p^3+p^2+1);
L=ilaplace(f)
pretty(L)
```

8.18 已知 $f(t) = e^{-5t} \cos(2t+1) + 5$ ，试用计算机仿真方法求出 $[\frac{d^5 f(t)}{dt^5}]$

【解】计算机仿真程序

```
syms t s
% 编写程序时，用s代表变量p
f=exp(-5*t)*cos(2*t+1)+5;
F=simple(laplace(diff(f,t,5)))
```

第一篇 复变函数论综合测试题

一 填空

1. 写出余弦函数 $\cos z$ 的虚部_____ ; 其中 $z = x + iy$, x, y 为实数.
2. 已知一解析函数 $f(z)$ 的虚部为 $x + y$, 则该解析函数 $f(z) =$ _____ ;
3. 已知一解析函数 $f(z) = u + iv$, 其实部、虚部满足 $v = u^8$, 则该解析函数 $f(z) =$ _____ ;
4. 判断复数项级数的敛散性. 问复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 是_____ 级数(本题需填入是否收敛, 是否绝对收敛, 条件收敛)
5. 已知函数 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$, 则 $\text{Res}f(0) =$ _____ ; $\text{Res}f(1) =$ _____ ; $\text{Res}f(\infty) =$ _____ .
6. 函数 $w = \frac{z}{R}$, 将 z 平面的图形: 以原点为中心, R 为半径的圆, 映射为 w 平面上的_____ (图形).

二 求解方程 $2\text{ch}^2 z - 3\text{ch} z = -1$ 三 若函数 $f(z) = u + iv$ 解析, 且 $u - v = (x^2 + 4xy + y^2)(x - y)$, 求该函数 $f(z)$.四 用留数理论计算实积分 $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$ 五 计算积分 $I = \oint_{|z|=a} \frac{\cos \pi z}{(z-1)^3} dz, (a > 1)$ 六 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}$ 七 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4} dx, (a > 0)$ 八 试将函数 $f(z) = \frac{1}{z+1}$ 按下列要求展开为幂级数, 并指出展开级数的名称和收敛范围.(1) 在 $f(z)$ 的孤立奇点的去心邻域展开;(2) 以 $z = i$ 为中心展开.九 求把角形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ 映射为单位圆 $|w| < 1$ 的一个保角映射.十 求下列变换: (1) 傅氏变换 $F[\cos \omega_0 x]$; (2) 拉氏逆变换 $L^{-1}[\frac{1}{p^2 + 1}]$

第一篇 综合测试题答案

一. 1【答案】 $-\sin x \sinh y$; 2【答案】 任意复常数; 3【答案】 收敛, 非绝对收敛, 仅条件收敛;4. 【答案】 $1, -1, 0$; 5【答案】 以原点为中心的单位圆: $|z| < 1$

二【答案】 $z = i(2k\pi + \pi/3), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 三【答案】 $f(z) = -iz^3 + C$;

四【答案】 2π ; 五【答案】 $\pi^3 i$; 六【答案】 $\sqrt{2}\pi$; 七【答案】 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(\sin \frac{a}{\sqrt{2}} + \cos \frac{a}{\sqrt{2}})e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}$

八【答案】 (1) 罗朗级数 $\frac{1}{z+1}$; (2) 第一种情况: $|z-i| < \sqrt{2}$, 泰勒级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k$,

第二种情况: $|z-i| > \sqrt{2}$, 罗朗级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (i+1)^{k-1} \frac{1}{(z-i)^k}$]

九【答案】 $w = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$; 十【答案】 (1) $\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$; (2) $f(t) = \sin t, t > 0$]

附：第一篇 复变函数论 参考文献和书籍

- 【1】彭恒武 徐锡申 编著《理论物理基础》北京大学出版社 P210-214, P491-494, 1999 年 5 月
- 【2】邵惠民 《数学物理方法》 科学出版社 2004 年
- 【3】杨巧林 《复变函数与积分变换》 机械工业出版社 2002 年
- 【4】吴崇试 编著 《数学物理方法》北京大学出版社 P145-151 1999 年 4 月
- 【5】杨华军 “复变函数论典型环路积分的理论分析”《四川大学学报》P69-74, Aug. Vol 38 Sep, 2001
- 【6】盖云英等编 《复变函数与积分变换》科学出版社 2001 年
- 【7】周绍森 等编《数学物理方法解题指导》江西高校出版社 P9 1993 年
- 【8】宋香暖 “复变函数积分的几何意义”天津商学院学报 Vol.22.No.3 May 2004
- 【9】黄大奎等编 《数学物理方法》高等教育出版社 2001 年
- 【10】梁昆森 编 《数学物理方法》高等教育出版社, P66-70, 2001 年 4 月
- 【11】朱石焕 “复变函数展成幂级数的新方法” P4-7 安阳师大学报, 2000, 第 6 期
- 【12】童金玉 “复变函数的三个问题” 华中师范大学 数学系, P11-14, 1998, Vol 3
- 【13】李建林 编著 《复变函数与积分变换》西北工业大学 P97-102, 2001 年元月
- 【14】数学手册编委会 《现代数学手册》 华中科技大学出版社 1999
- 【15】李惜雯 编著 《数学物理方法》西安交通大学出版社 P95-99, 2001 年 9 月
- 【16】陈守信 编著 《数学物理方程》河南大学出版社 P178-185, 2000 年 6 月
- 【17】葛嚙林 薛康 编著 《杨 - 巴克斯特方程》上海科技出版社 P69-81, 1999 年 12 月