

学校代号 10532

学 号 B08051005

分 类 号 0322

密 级



湖南大学  
HUNAN UNIVERSITY

## 博士学位论文

# 基于行波变换的无限维动力系统的分岔研究

学位申请人姓名 韩峰

培 养 单 位 机械与运载工程学院

导师姓名及职称 唐驾时教授

学 科 专 业 一般力学与力学基础

研 究 方 向 非线性动力学

论文提交日期



学校代号：10532

学 号：B08051005

密 级：

湖南大学博士学位论文

# 基于行波变换的无限维动力系统的 分岔研究

学位申请人姓名：韩峰

导师姓名及职称：唐驾时教授

培 养 单 位：机械与运载工程学院

专 业 名 称：一般力学与力学基础

论文提交日期：

论文答辩日期：

答辩委员会主席：



Studies on bifurcations of infinite-dimensional dynamical systems via  
traveling wave transformation

by

HAN feng

B.E. (Hunan University) 2002

M.S. (Hunan University) 2006

A dissertation submitted in partial satisfaction of the

Requirements for the degree of

Doctor of Engineering

in

General and Fundamental Mechanics

in the

Graduate School

of

Hunan University

Supervisor

Professor Tang Jiashi

March, 2013



## 摘 要

无限维动力系统的分岔分析与控制是非线性科学的一个重要研究领域。在流体力学、固体力学、断裂力学、大气动力学、化学反应以及生物演化系统存在大量的分岔行为,例如,粘弹性均质梁的非线性振动、对流和热传导、凝聚态物理、界面生长演化中的非平衡相变等等,因此,需要进行分岔分析与控制。本文以行波变换为基础,通过中心流形方法降维,利用摄动方法求分岔方程,研究了几类经典无限维动力系统的静态分岔问题,并对其控制进行了探讨。

简单介绍了无限维动力系统分岔研究现状以及分岔分析与控制方法。基于一种辅助常微分方程方法研究非线性发展方程的行波解。对辅助方程方法的一般步骤以及现有的几种常见的辅助方程进行了介绍,并对这些辅助方程的求解步骤进行了分析。通过对一个辅助微分方程的解的讨论,并借助扩展双曲正切函数法的一些思想,求得了(2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程和广义(2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的一些精确的行波解。该方法可以推广至其他具有孤子解、三角周期解和椭圆函数解的非线性偏微分方程的求解,前提是行波变换以后的非线性常微分方程要有精确解,如果不可解,则不能用辅助常微分方程方法求解。基于这些精确解,可以直接研究非线性偏微分方程的分岔行为。

利用行波变换和直接积分方法获得了 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程的精确解。并对上述方程的静态分岔行为进行了分析,发现 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程均具有典型的跨临界分岔行为。对于由非线性偏微分方程控制的无限维系统,分岔控制的研究成果还很少。跨临界分岔行为是针对一维系统,可将 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程直接化成为一维系统,对于高维系统要用中心流形等方法对非线性偏微分方程或行波变换后的非线性常微分方程进行约化。该方法还可以对偏微分方程的其他类型的静态分岔,如叉形分岔和鞍结分岔等进行分析。

讨论了非线性偏微分方程和非线性常微分方程一样也具有鞍结分岔、叉形分岔和跨临界分岔行为。将三类非线性偏微分方程通过行波变换,化为一阶常微分方程,并对其进行了静态分岔分析。其中 Burgers 方程、(2+1)维 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers - KP 方程具有跨临界分岔,(2+1)维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程具有鞍结分岔。并通过构造一个偏微分方程,分析了该方程的叉形分岔行为。

采用精确处理方式,用行波变换将非线性偏微分方程变换为常微分方程,用中心流形方法降维,分析了某些无限维非线性系统的鞍结分岔、跨临界分岔、叉形分岔行为,在参数平面了解非线性偏微分方程的解的稳定性。用反馈控制方法

对无限维非线性系统的三类静态分岔进行了控制，分别设计了线性、非线性的反馈控制器，对无限维系统的鞍结分岔、跨临界分岔、叉形分岔行为进行了有效控制。反馈控制器不会改变原系统的分岔特性，而使非线性系统的分岔点发生了改变，系统解的稳定区域发生了改变。

研究了带有激励项的 Burgers-KdV 方程的稳态响应有鞍结分岔行为。在该系统的频率响应中存在跳跃和延迟现象，利用摄动方法，可以得到非线性系统的幅频响应曲线，并由此绘制出系统的分岔图。为了实现该系统的分岔控制，设计了一种反馈控制器，并根据反馈系数的不同而分别进行了线性控制、非线性控制和线性与非线性联合控制。利用上述控制方法，可以改变系统的不稳定区域以及系统的非线性特性。通过对 Burgers-KdV 方程分岔特性及其控制的理论分析和数值模拟，为研究非线性发展方程的分岔控制提供了有效的思路。

**关键词：**无限维动力系统；行波变换；行波解；辅助方程方法；叉形分岔；鞍结分岔；跨临界分岔；分岔控制



## Abstract

Bifurcation analysis and its control of infinite-dimensional dynamical system is a important branch in researching chemistry and biology, including fluid mechanics, solid mechanics, fracture mechanics, atmospheric dynamics, chemical reaction systems, biological evolution system and so on. This paper based on the travelling wave transformation, central manifold and perturbation method, studied the bifurcation and control problem of several kinds of classical infinite-dimensional dynamical system.

Introduce the research situation of bifurcation and control problem of infinite-dimensional dynamical system.

Based on auxiliary differential equation method, the travelling wave solution of nonlinear evolution equations are investigated. The main steps of the auxiliary differential equation method are introduced and analysed. According to a discussion of auxiliary differential equation and utilizing the extended hyperbolic function expansion method, the exact solution of (2+1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation and generalized (2+1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation are obtained. The method presented in this paper can be applied in solving other equations' solitons, triangle periodic solution and elliptical solution if this equations have exact solution through the travelling wave transformation. Based on this exact solution, the bifurcation behaviors can be investigated directly.

Based in the travelling wave transformation and integral method, the exact solution of Burgers equation and (2+1)-dimensional Burgers equation can be obtained. Then, the static bifurcation of these equations are investigated, which find that the Burgers equation and (2+1)-dimensional Burgers equation have the typical behavior of transcritical bifurcation. The research on bifurcation control of infinite-dimensional dynamical system are seldom. In this paper, the Burgers equation and (2+1)-dimensional Burgers equation are transformed into a one dimensional system. Then, the transcritical bifurcation these two equations are discussed. This method can be also extended to research other kind of static bifurcation like pitchfork bifurcation and saddle node bifurcation.

Discuss that nonlinear partial differential equations also have the pitchfork bifurcation, saddle node bifurcation and transcritical bifurcation like the ordinary

differential equations. Three kinds of equations are transformed into one dimensional ordinary equation and the bifurcation behaviors are investigated. Burgersequation, (2+1)-demensional Burgers equation and (2+1)-demensional Burgers–KP equation have transcritical bifurcation. (2+1)-demensional Kadomtsev-Pet- viashvili equation has saddle node bifurcation. By constructing a new partial differential equation, the pitchfork bifurcation of partial differential equation is also studied.

By utilizing the exactly transformation, the partial differential equation can be transformed into ordinary differential equation. Utilizing the central manifold throem, the ordinary differential equation can be transformed into one dimensional equation. Then the pitchfork bifurcation, saddle node bifurcation and transcritical bifurcation of the transformed equation are investigated. And the stable region of solutons in parameter plane are obtained. Unitlizing the feedback control thorem, the linear controller, nonlinear controller and the hybrid controller are designed to control the pitchfork bifurcation, saddle node bifurcation and transcritical bifurcation respectively. The feedback controllers not change the bifurcation traits of the systems, but shift the bifurcation point and the stable region.

The saddle node bifurcation of forced Burgers-KdV equaton is studied. This sytem has the phenomenon of jump and lag in the frequency response. Based the perturbation method, the frequency response curve can be obtained. Then the bifurcation graph of this system can be also drawn. To achieve the control of bifurcation, a feedback controller is designed. The linear control, nonlinear control and the hybrid control are utilized to shift the unstable region and the nonlinear trait of the system. Then method presented in this paper can be also extended to research other evlution euations.

**KeyWords:** Infinite-dimensional dynamical system; Travelling wave transformation; Travelling wave solutions; auxiliary differential equation method; Pitchfork bifurcation; Saddle node bifurcation; Transcritical bifurcation; Bifurcation control

# 目 录

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| 摘 要 .....                                          | I   |
| Abstract.....                                      | III |
| 目 录 .....                                          | V   |
| 第 1 章 绪 论.....                                     | 1   |
| 1.1 无限维非线性动力系统的分岔研究现状 .....                        | 1   |
| 1.2 分岔分析理论 .....                                   | 3   |
| 1.3 分岔控制方法 .....                                   | 5   |
| 1.3.1 控制理论研究概述 .....                               | 5   |
| 1.3.2 分岔控制方法概述 .....                               | 7   |
| 1.4 研究的主要内容和创新点 .....                              | 8   |
| 第 2 章 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的行波解.....          | 10  |
| 2.1 偏微分方程求解的辅助常微分方程法 .....                         | 10  |
| 2.2 (2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的行波解 .....    | 13  |
| 2.3 广义的(2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的行波解 ..... | 28  |
| 2.4 小结 .....                                       | 34  |
| 第 3 章 Burgers 方程的行波解和跨临界分岔 .....                   | 36  |
| 3.1 Burgers 方程的行波解 .....                           | 36  |
| 3.1.1 Burgers 方程的行波变换.....                         | 37  |
| 3.1.2 Burgers 方程的解 .....                           | 38  |
| 3.2 (2+1)维 Burgers 方程的行波解 .....                    | 41  |
| 3.3 Burgers 方程的跨临界分岔 .....                         | 47  |
| 3.3.1 跨临界分岔的必要条件 .....                             | 47  |
| 3.3.2 Burgers 方程的跨临界分岔 .....                       | 48  |
| 3.4 小结 .....                                       | 49  |
| 第 4 章 无限维系统的三类静态分岔 .....                           | 50  |
| 4.1 无限维系统的鞍结分岔 .....                               | 50  |
| 4.1.1 Kadomtsev-Petviashvili 方程的鞍结分岔 .....         | 50  |
| 4.1.2 非线性 Klein-Gordon 方程的鞍结分岔 .....               | 55  |

|                                            |            |
|--------------------------------------------|------------|
| 4.1.3 (2+1)维 KD 方程的鞍结分岔 .....              | 57         |
| 4.2 无限维系统的跨临界分岔 .....                      | 58         |
| 4.3 无限维系统的叉形分岔 .....                       | 61         |
| 4.4 结论 .....                               | 63         |
| <b>第 5 章 无限维系统的静态分岔控制 .....</b>            | <b>64</b>  |
| 5.1 自动控制原理 .....                           | 65         |
| 5.1.1 自动控制形式 .....                         | 65         |
| 5.1.2 反馈控制 .....                           | 66         |
| 5.2 跨临界分岔控制 .....                          | 67         |
| 5.3 鞍结分岔控制 .....                           | 69         |
| 5.4 叉形分岔控制 .....                           | 72         |
| 5.5 小结 .....                               | 74         |
| <b>第 6 章 Burgers-KdV 方程的鞍结分岔及其控制 .....</b> | <b>75</b>  |
| 6.1 Burgers-KdV 方程的行波变换 .....              | 75         |
| 6.2 求 Burgers-KdV 方程的分岔方程 .....            | 77         |
| 6.3 鞍结分岔行为 .....                           | 78         |
| 6.4 鞍结分岔控制 .....                           | 79         |
| 6.4.1 分岔控制方程 .....                         | 80         |
| 6.4.2 线性和非线性控制 .....                       | 82         |
| 6.5 mKdV 方程的鞍结分岔 .....                     | 85         |
| 6.6 小结 .....                               | 88         |
| <b>总结与展望 .....</b>                         | <b>89</b>  |
| <b>参考文献 .....</b>                          | <b>91</b>  |
| <b>附录 A 攻读学位期间发表论文目录 .....</b>             | <b>102</b> |

# 第1章 绪 论

动力系统的分岔指的是系统的动力特性随着某些参数的变化而发生质的改变,尤其是系统的平衡状态的稳定性发生改变或出现解轨道分支。分岔是一类常见的、重要的非线性现象,并与其它的非线性现象(如混沌、突变、分形等等)密切相关。非线性动力系统的分岔现象不仅在数学领域如拓扑、几何、微分方程、动力系统理论,而且在工程科学如电网、神经网络、流体动力学、电路、化学反应等方面都扮演重要的角色。在这些方面,许多学者都作了大量的研究,取得了一定的成就。对于无限维动力系统(Infinite Dimensional Dynamic systems),包括由时间演化的偏微分方程、积分-微分方程和时滞微分方程等描述的系统,若考虑其轨线在无限维的巴拿赫空间上,并且其状态或相一般同时与时间和空间相关,此时它的动力学特征和分岔的研究要比有限维动力系统复杂的多。这类系统广泛的存在于非线性振动、流体力学、空气动力学和大量的反应扩散问题中。一般的无限维系统研究内容包括吸引子和惯性流形(Attractor and Inertial Manifold)、混沌(Chaos)、分岔(Bifurcation)、分形(Fractal)、孤立子(Soliton)等。本文将重点研究一些经典偏微分方程的行波解以及分岔和稳定性等问题。在参数发生变化时,系统拓扑性质改变的现象就是分岔,它可以使一个看似简单的系统突然走向复杂,甚至可能从确定性走向随机或者混沌状态。因此,研究分岔尤其是无限维系统的分岔具有重要意义。

## 1.1 无限维非线性动力系统的分岔研究现状

18 世纪以来对非线性振动、天体力学和流体力学中一些失稳现象的探讨,是研究分岔问题的起源,其具应用背景深刻。对于杆件在纵向压力作用下的屈曲问题,伯努利和欧拉等人早在 18 世纪中叶就做出研究。在研究自引力介质的椭圆形旋转液体星的平衡图形时,雅可比于 1834 年首先引入“分岔(Bifurcation)”这个术语。雷诺在 1883 年发现在临界雷诺数时层流转变为湍流的现象,并从此开始了流动稳定性的研究。1885 年,庞加莱提出了旋转液体平衡图形的演化过程的分岔理论。虽然大量的分岔现象被范德波、安德罗诺夫等学者在 20 世纪 30 年代研究非线性振动时发现就已被发现。但是,在之后较长的时间里,分岔研究主要是在应用层面中进行。直到上世纪 60 年代,现代数学理论的逐渐形成以及电子计算机技术的大力发展和不同领域中混沌现象的发现等,都促使分岔理论迅速发展。

无限维动力学系统<sup>[1-3]</sup>通常是指定义在巴拿赫空间或希尔伯特(Hilbert)空间中的非线性动力系统。该类系统通常由一个或一组耦合的偏微分方程、时滞微分方程和积分微分方程来构成。众所周知,四十多年来,人们对有限维动力系统的研究已形成比较系统的分支学科。然而,在人类生存的大自然中,存在着更多高维以及无限维的问题。流体力学(Hydrodynamics)中的湍流问题和固体力学中的梁或杆等的非线性振动问题,其动力学模型可用一个关于时间和空间变量的非线性波动方程来描述<sup>[4]</sup>;此外,断裂力学中应力分析的边界问题、化学与生物中的反应扩散问题等等,都可以利用无限维动力系统来描述。近几年来,孤子系统的研究逐渐成为热门,各种形式的孤立子解及其精确或近似解析表达式都得到了较充分的研究和求解,常见的求解方法有散射反演方法、Hirota 双线性方法、Tanh 函数法和齐次平衡法等等各种变换方法。通常,我们称这类具有孤子解的非线性演化方程为可积孤子系统,如 KdV 方程、Klein-Gordon 方程、非线性薛定谔方程等等。同时在耗散结构作用下,当这类系统亦可演化出分岔与混沌现象。若将有限维系统进行无限维推广后的系统视为无限维动力系统;如将贝纳尔(Benard)对流方程组的未知函数作傅里叶展开取前三项,可得到著名的洛伦兹方程(Lorenz)。

与有限维系统相比,无限维动力系统具有更丰富和更复杂的非线性动力学特征。如湍流混沌问题可能存在与无限维系统的空间上,而有限维仅存在于时间上。又如有规律的斑图结构自组织形成的原因是由于反应扩散体系内部的非线性和耗散相互作用所引起的均匀态出现不稳。由于该问题涉及时空理论,近年来成为了许多物理、力学和化学学者们探讨的热门话题。通过对具耗散结构非线性发展方程的整体吸引子和惯性流形进行系统、全面的研究, O. A. Ladyzhenskaya, M. I. Vishik, R. Teman<sup>[1]</sup>等人引入分形维数(即分维)来研究复杂吸引子结构,同时,进一步提出了近似惯性流形和非线性 Galerkin 方法<sup>[2]</sup>。此外, Evans<sup>[5]</sup>等在偏微分方程解的存在性问题和性质上进行了系统的阐述,其中在偏微分方程的研究中具有很理想的应用。

无限维动力系统也可分为自治和非自治的,其中常被研究的非自治系统有无限维时滞系统、具有外部强迫振动项的系统。无限维动力系统还可以分为随机系统和确定系统。在流体力学、凝聚物理、非线性光学、以及表面动力学等许多领域中都有随机无限维系统的出现,通常只有随机力和噪声系数都是很小的系统可被研究。由于概率分布已知,随机扰动的动力学行为将不难得到,虽然这一类随机扰动的性质被证实与确定性系统具有一定的相似性,然而,近年来的一些研究成果也表明,该类随机扰动也具有与确定性系统不一样的特征和现象。

无穷维动力系统的研究包括混沌(Chaos)与湍流、失稳与分岔(Bifurcation)、孤立子(Soliton)等。作为流体力学近年来热点方向,湍流的相关问题被国内外学

者们广泛研究；偏微分方程混沌理论的建立是 Li<sup>[6-11]</sup>通过在有限模态下进行混沌分析后得到的。惯性流形上的有限维系统则由 Teman<sup>[1]</sup>, Guo<sup>[12-15]</sup>等人构造出。戴<sup>[14]</sup>等人通过研究非线性偏微分方程的一类特殊的同宿轨解，并通过对该解进行数值模拟来得到混沌图。另外，由于孤子理论涉及一类具有重要物理意义的解，该解是研究系统通向混沌的重要途径，因而被认为是当前研究的热点问题<sup>[15-18]</sup>。

无限维动力系统的分岔研究不是纯理论的研究，而是有着广泛的工程背景 and 实际意义。日常生活和工程系统都与无限维动力系统的分岔研究有着密切的联系。在很多学科领域，如分岔控制和控制理论、材料结构的定性分析、化学反应过程的控制等，分岔研究都扮演着重要的角色。近年来，无限维动力系统的分岔研究被越来越多的国内外学者所重视。Ma<sup>[19-28]</sup>基于线性全连续场谱理论和中心流形定理提出了吸引子分岔理论，此外，随机分岔也得到广泛的研究，Blömker<sup>[29-31]</sup>等通过幅值方程或随机中心流形约化来进行分岔分析。Yi<sup>[32]</sup>、Li<sup>[33-36]</sup>等人分析了耦合的反应扩散方程的各种非平衡相变和图灵斑图的形成。在无限维动力系统分岔研究问题的数值模拟上，Ding 和 Chen<sup>[37-39]</sup>利用差分法进行分岔和混沌分析。在工程计算问题中，Galerkin 截断方法<sup>[40]</sup>也被广泛运用。通过利用有限差分法，Kong<sup>[41]</sup>等人计算和模拟了多孔对流分岔现象和临界点。Luo<sup>[42]</sup>等采用有限差分方法，研究了流体力学中的连续系统分岔特性，获得了平衡解和流场中变量空间分布的变化。无限维动力系统分岔和拓扑分析理论被 Kielhofer<sup>[43]</sup>较有体系的总结了出来。Golubitsky<sup>[44]</sup>等人则详细介绍了奇异性理论和群理论在分岔分析中的应用，其中涉及了一些重要的理论基础，如 Lyapunova-Schmidt 约化方法、Banach 空间中的隐函数定理等等。

## 1.2 分岔分析理论

根据文[45]中的介绍，分岔是指任意小的参数变化导致结构不稳定的动力系统的相轨迹拓扑结构发生的突然变化。设有区域  $U \subseteq R^n$  和  $J \subseteq R^m$ 。考虑一个含有参数  $\mu$  的系统：

$$x' = f(x, \mu) \quad (1.1)$$

其中  $x \in U$  为状态变量， $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T \subseteq R^m$  为控制变量。若随着参数  $\mu$  的连续变动，系统(1.1)的拓扑结构突然在参数  $\mu_0 \in J$  处发生变化，则称系统(1.1)在参数  $\mu = \mu_0$  处产生了分岔，并称  $\mu_0$  为分岔值，所有分岔值组成的集合称为分岔集。一般情况下，动力系统的分岔研究可根据研究对象的不同而分为静态分岔和动态分岔两大类分岔，对奇点个数及其类型或稳定性的研究称为静态分岔，包括叉形、鞍结点、跨临界分岔等。动力系统的时间相关流变化称为动态分岔，包括闭轨

分岔、Hopf 分岔、同宿或异宿轨分岔、准和倍周期分岔等等。此外，动力系统的分岔分析还可归类为全局分岔和局部分岔。局部分岔是指在实际研究中，只讨论平衡点或闭轨附近的某个邻域内向量场的分岔行为，全局分岔包括同、异宿轨分岔。

分岔问题的研究内容较广，主要归纳为以下几个方面<sup>[45]</sup>

- (1) 找出分岔集和发生分岔的条件，并画出平面分岔图；
- (2) 研究发生分岔之后出现新的定性与稳定性问题；
- (3) 计算发生分岔的临界条件和分岔解，特别是奇点和闭轨；
- (4) 考察各类不同类的分岔作用和分岔与混沌的关系。

常见的分岔分析方法则有 Melnikov 函数法、PB 规范形方法、小波差分法、奇异性理论、Shilnikov 法、摄动法、隐函数定理、拓扑度和 Conley 指标法等。但对于无限维动力系统的分岔是在无限维的巴拿赫空间上处理的，因此分析方法将更加复杂，常见的方法有以下几种：

- (1) 行波解约化和对称约化<sup>[43,44,46,47,48]</sup>

利用如下的行波变换

$$u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

将某些孤子系统变换成一个平面系统，再利用分岔理论得到相图分支，从而得到更多可能的行波解行为和同宿孤子解，以及混沌的存在。

- (2) 扩展方程法<sup>[41,49,50,51]</sup>

该方法的思路是引入一个新的方程附加到原系统，来达到去除分岔奇异性的目的。

- (3) Galerkin 有限模截断<sup>[2,40,52-55]</sup>

对于巴拿赫空间上的边值问题，该方法是可以使无限维系统化成为有限维形式。

- (4) 近似惯性流形截断方法<sup>[1,56-63]</sup>

该方法比经典的 Galerkin 方法更好的逼近于原无限维系统的动力学行为，是近年来新发展出的约化方法，在有限维流形上的约化系统决定了系统解的长时间行为，并且动力系统的流在有限的时间内都会进入到它的一个很薄的小邻域内，因此这种方法在研究无穷维动力系统长时间行为时能发挥重要作用。

- (5) 差分方法<sup>[38,39,64]</sup>

该方法是讨论无限维系统的动力学行为的一种有效地数值方法，结合小波理论的小波有限差分法等方法也已有很多成果，并且改进的差分法的优势也已被验证。



## 1.3 分岔控制方法

### 1.3.1 控制理论研究概述

1932 年,奈奎斯特发表关于反馈放大器稳定性的经典论文,该文通常被认为是控制论发展的起点。随着科学技术的不断发展和人类认识自然界的不断加深,控制理论逐步从经典控制理论迈向现代控制理论。当研究对象为线性单回路系统时,属于经典控制理论的范畴,而现代控制理论则着重研究多变量系统。二十世纪六十年代,卡尔曼提出了状态变量法,并以此开创了对现代控制理论的研究。而现代控制理论的基础则由庞特里亚金和贝尔曼所奠定,他们提出的极大值原理和动态规划极大的推动了现代控制理论的发展。自此以后,现代控制理论有了长足的发展,自适应控制,变结构控制,模型参数控制等方法相继提出。虽然,人们对于线性系统的研究已经形成了完善的理论体系,然而,严格来讲,几乎所有人们接触的系统都是非线性的,换句话说,非线性是普遍存在的,是大自然的本质,而线性更多的只是一种合理的假设和对非线性问题的简化。因此,随着科学的不断进步,人类不能满足于对线性现象的研究,而是要将触角深入这个充满非线性和复杂动态的世界。

正是这种对大自然不断探索的渴求,推动者控制理论一步步发展至今天。然而,现代控制理论依然面临着诸多的挑战,最艰巨的挑战就是非线性的本质。对于卫星的定位与姿态控制、精密数控机床的运动控制以及机械人控制等模型,其运动范围是较大的,受控系统的体积和内部的精密程度等客观因素都不可避免的决定着不能采用线性模型来对上述系统进行简化研究。此外,利用泰勒展开来研究上述大范围、高精度系统的控制问题也是缺乏有效性的,要想实现上述系统的控制,必须要采用更有效的非线性控制方法。同时,随着分岔、混沌、奇异吸引子等现象的一一揭示和广泛研究,人们进一步认识到利用线性特征来近似描述非线性现象是相当局限和不足的,上述现象均已远远超出了人们对线性系统的掌握和理解,线性系统理论完全无法用来解释这一类现象,科研工作者们需要在非线性控制理论和应用方面取得进一步突破。

早期的、传统的非线性控制研究是以死区、饱和、摩擦和间隙等几种特殊的非线性因素为基本研究对象,其主要方法有:相平面法和描述函数法。而对于非线性系统稳定性的分析,则主要有以下理论分析方法:绝对稳定性理论、李雅普诺夫理论和输入输出稳定性理论。

上世纪 80 年代以来,计算机科学的飞速发展推动了非线性科学的研究进展,人们越来越重视也越来越多的开始研究非线性科学,非线性分析、非线性泛函以及非线性动力学等学科都迅速的发展起来。同时,非线性控制理论也取得了一定的进展。主要表现在以下方面<sup>[65]</sup>:

### （1）微分几何方法

通过微分同胚映射来进行坐标变换并根据变换后的系统引入非线性反馈，来实现非线性系统的精确线性化是微分几何方法的主要思想，通过上述步骤可将非线性系统的研究转化为线性系统的研究。李群、李代数是运用该方法的重要工具。利用微分几何方法研究非线性系统，是现代数学理论发展的结果，在近 20 年的非线性系统研究中，微分几何方法已经成为主流。

### （2）微分代数方法

微分代数控制方法的产生源自于 1986 年，Isidori 发现了微分几何控制理论中的一些病态问题。非线性系统可逆性和动态反馈设计问题的题可利用代数控制理论从微分代数角度来研究。然而，上述两种方法存在一个共同的缺点，那就是它们所使用的数学工具比较抽象，而且，随着理论和应用的不断发展，上述两种方法逐渐表现出一些不足之处。第一，如果将线性系统的结果直接运用到研究非线性系统，会遇到计算上的困难。第二，能够利用线性系统的结果来进行近似研究的非线性系统并不普遍，而是只有一类特定的系统。

### （3）变结构控制理论

变结构控制理论是目前研究非线性控制系统的较普遍、较系统的一种综合方法。该方法的研究经历了三个重要的发展阶段，第一阶段主要由前苏联学者在上世纪五十年代完成，但由于微分物理无法实现，该阶段的研究并未受到足够的重视。第二个阶段是上世纪六十年代，这一阶段的研究使得空间不再局限于规范空间，切换流形也不再局限于超平面。然而，这一阶段的研究缺少硬件的支持，使得其研究依旧局限在理论研究的范畴。第三阶段的研究则开始于上世纪八十年代，随着计算机技术的发展和普及，以及大功率电子元件的技术的发展，变结构的控制的研究真正进入了一个全新的时代。变结构滑模控制实现起来并不复杂，并且有这较强的鲁棒性和抗干扰能力。虽然该方法有着诸多的优点，但是变结构滑模控制也不可避免的存在不足之处，主要表现在研究范围受局限以及是会产生抖振等，大部分研究仍局限于数值模拟。

### （4）逆系统方法

作为一种近几年新提出来的一种方法，逆系统方法可以视为一种反馈线性化的方法。其基本思想是：通过求取被控过程的逆过程，将之串联在被控过程前面，得到解耦的被控对象，然后再用线性系统理论进行设计。通过近几年的研究和发发展，以利用数学分析的逆系统方法，对一般的非线性系统进行了反馈控制的研究。由于在发电机组领域、多溶液位系统、机械手控制、卫星姿态控制等方面均有广泛的应用和成功的案例，使得逆系统方法在应用层面上得到了飞速的发展。

### （5）非线性频域控制理论

用时域分析法分析和研究系统的动态特性和稳态误差最为直观和准确，但

是，由于高阶微分方程的求解并不是一件简单的工作，人们开始利用频域分析法来研究非线性系统，并以可将微分方程变成代数方程的拉普拉斯变换和傅立叶变换作为数学工具。然后在频域内进行控制系统的分析与设计<sup>[66,67]</sup>。频域分析法弥补了时域分析法的不足，频域法是一种基于频率特性对系统进行分析 and 设计的图解方法，因此，其与时域分析法相比具有很多优点。第一，系统闭环稳定性可由系统开环的频率特性得出。第二，系统的时域指标与确定频域指标的系统频率特性之间存在对应关系。因此，可根据在选择系统结构参数时可以参考系统频率曲线的一些已知特性。第三，利用微分方程或者试验方法，均可求得系统的频率特性。尤其是对于一些难以建立微分方程的系统而言，具有更重要的意义。对于非线性控制系统，人们也一直探求如何用频域法解决它的分析与设计问题，20 世纪 40 年代，N.Wiener 第一次使用 Volterra 级数描述非线性系统，此后 Brockett 和 Sanberg 把 Volterra 级数开创性的应用到控制系统的分析中，波波夫判据和圆判据<sup>[68,69]</sup>则为频域稳定性的判断提供了有效方法方法。

### 1.3.2 分岔控制方法概述

一般来说，非线性系统的分岔现象是十分复杂。然而，它与混沌有着很大的不同，分岔不像混沌那样难以预测。因此，人们从一开始就没有对分岔能否控制这一问题产生过多的疑问。然而，分岔控制研究一开始就遇到如何应用常规技术的困难，因为我们并不只是需要简单的把分岔现象消除掉，更多的是要达到镇定或改变其动力学性质的目的。从目前来看，能够用来控制分岔的方法并不是很多，并且都有着其理论分析和实验或模拟验证，在工程、生物、物理、化学等诸多领域有着广泛的应用。

众所周知，人类生活的大自然本身就是充满这非线性的，因此对非线性现象的研究是自然科学研究的一个重点课题，随着人们对非线性科学研究的逐步深入，越来越多学者对分岔控制产生了浓厚的兴趣，并使得分岔控制研究逐渐成为非线性科学研究的一个新的热点<sup>[70]</sup>。分岔现象在非线性系统中是普遍存在的，比如，在一些工程实际问题中，由于存在 Duffing 振子从而使得系统产生鞍结分岔，导致跳跃、滞后等一系列破坏性的动力学行为。此时，通过施加适当的非线性控制器，可有效的消除鞍结分岔，大大减小系统的振幅。因此，对非线性系统的分岔控制进行全面地研究是非常有意义的工作，不仅具有理论意义，更具有应用价值。近年来，一个新的、专门的研究方向——非线性系统的分岔控制，正在逐步在国际上形成。目前，分岔控制的主要手段有线性和非线性反馈方法<sup>[71-83]</sup>、应用 washout-filter 方法<sup>[84-89]</sup>、频域分析和逼近方法<sup>[90-100]</sup>、规范型方法<sup>[91,101]</sup>等等。更详细的介绍请参考文献<sup>[102-108]</sup>。一般而言，线性或非线性反馈方法是最有效的分岔控制方法。当系统的分岔控制涉及到极限环时，可通过频域分析法得到比较理想的结果。在

分岔分析中最自然和精确的工具当属规范形理论,因此该理论在分岔控制方面应有广泛的应用前景。

为了得到受控系统所需要的动力学行为,我们把分岔控制的主要任务总结为研究分岔控制的理论和提出分岔控制的方法两方面。在分岔控制的理论、方法和应用前景等方面,Chen G 等已经作了详尽的叙述<sup>[102]</sup>。在电网控制与稳定、轴向风流压缩机、心脏病节律控制和喷气发动机控制等等方面,科学家们已经取得了一定的成果。典型的分岔控制包括:将原系统固有的分岔行为延迟<sup>[99]</sup>;设计参数值,使之产生新的分岔<sup>[109-119]</sup>;设计参数值,改变平衡点的位置<sup>[102]</sup>;改变原非线性系统的拓扑结构,改变分岔类型<sup>[83]</sup>;改变原系统极限环的多样性<sup>[116,117]</sup>、幅值、频率等等。

对于自治系统静态分岔的控制而言,一些典型的线性和非线性的控制器相继被设计,并用来控制系统的动力学行为。然而在另一方面,非自治系统的分岔控制研究则要进展得缓慢很多。Yabuno H<sup>[81]</sup>和 Ji J C 和 Leung A Y T<sup>[118]</sup>对 Duffing 系统进行了初步的分析。并分别利用线性和非线性联合作用的反馈控制器以及线性时滞反馈控制器,对 Duffing 系统的分岔行为进行了控制,延迟了跨临界分岔,消除了鞍结分岔,拓展了系统平凡解的稳定区域。同时,还有许多学者利用时滞反馈控制器<sup>[119-124]</sup>,自适应控制器<sup>[125-133]</sup>,鲁棒控制<sup>[134]</sup>对自治系统的分岔进行了分析和研究。通过对电力系统的研究,乔宇等<sup>[135]</sup>提出了针对电力系统的有效的分岔控制方法,通过对非线性离散系统利用状态反馈、参数调整方法,罗晓曙等<sup>[132]</sup>控制了离散系统的倍周期分岔和混沌。同时,对于分岔控制的实验研究在国内外基本上还是空白。

从目前来看,分岔控制的研究成果已在许多流域得到了广泛的应用。如化学工程<sup>[96]</sup>、机械工程<sup>[79-81,96]</sup>、电子工程<sup>[136]</sup>、航空和航天工程<sup>[82,137]</sup>、生物医学<sup>[88,89]</sup>、物理和化学<sup>[138]</sup>、电力工程<sup>[139]</sup>以及气象<sup>[140]</sup>等领域,显示出其可观的前景和巨大的潜力。

## 1.4 研究的主要内容和创新点

1. 基于一种辅助常微分方程方法研究非线性发展方程的行波解。介绍了辅助方程方法的一般步骤以及现有的几种常见的辅助方程,并对这些辅助方程进行了简单的分析。通过对一个辅助微分方程的解的讨论,并借助扩展双曲正切函数法的一些思想,求得了(2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程和广义(2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的一些精确的行波解。基于这些精确解,可以直接研究非线性偏微分方程的分岔行为。

2. 利用行波变换和直接积分方法获得了 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程的精确解。并对上述方程的静态分岔行为进行了分析,发现 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程均具有典型的跨临界分岔行为。该方法还可以对偏微分方程的其

他类型的静态分岔，如叉形分岔和鞍结分岔等进行分析。

3. 讨论了非线性偏微分方程和非线性常微分方程一样也具有鞍结分岔、叉形分岔和跨临界分岔行为。将三类非线性偏微分方程通过行波变换，化为一阶常微分方程，并对其进行了静态分岔分析。其中 Burgers 方程、(2+1)维 Burgers 方程和 (2+1)维 Burgers-KP 方程具有跨临界分岔，(2+1)维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程具有鞍结分岔。并通过构造一个偏微分方程，分析了该方程的叉形分岔行为。

4. 采用精确处理方式，用行波变换将非线性偏微分方程变换为常微分方程，用中心流形方法降维，分析了某些无限维非线性系统的鞍结分岔、跨临界分岔、叉形分岔行为，在参数平面了解非线性偏微分方程的解的稳定性。用反馈控制方法对无限维非线性系统的三类静态分岔进行了控制。反馈控制器不会改变原系统的分岔特性，而使非线性系统的分岔点发生了改变，系统解的稳定区域发生了改变。

5. 研究了带有激励项的 Burgers-KdV 方程的稳态响应有鞍结分岔行为。利用摄动方法，可以得到非线性系统的幅频响应曲线，并由此绘制出系统的分岔图。为了实现该系统的分岔控制，设计了一种反馈控制器，并根据反馈系数的不同而分别进行了线性控制、非线性控制和线性与非线性联合控制。利用上述控制方法，可以改变系统的不稳定区域以及系统的非线性特性。通过对 Burgers-KdV 方程分岔特性及其控制的理论分析和数值模拟，为研究非线性发展方程的分岔控制提供了有效的思路。

## 第 2 章 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程的行波解

非线性(2+1)维Nizhnik–Novikov–Veselov方程是描述不可压缩流体的动力学行为的一个理想模型，很多学者都研究过这个方程。广义Nizhnik–Novikov–Veselov方程可以通过PTA进行线性化，并以此得到大量的周期解和局部解<sup>[141]</sup>。文献<sup>[142]</sup>通过利用WTC截断方法首次求得了Nizhnik–Novikov–Veselov方程的含有两个任意函数的广义解。文献<sup>[143]</sup>基于Nizhnik–Novikov–Veselov方程的双线性形式构造了一种矢量不对称Nizhnik–Novikov–Veselov方程。文献<sup>[144,145]</sup>基于扩展的映射方法和线性变量分离法求得了Nizhnik–Novikov–Veselov方程包含任意函数的一族新的变量分离解。基于广义双曲函数变换和auto-Bäcklund变换，文献<sup>[146]</sup>求得了(2+1)维Nizhnik–Novikov–Veselov方程大量的新精确解。

本章利用辅助常微分方程方法，求解(2+1)维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程和广义(2+1)维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程,并求得了上述方程的大量的精确行波解。该方法亦可推广至具有孤波解、三角周期波解和椭圆函数解的偏微分方程。

### 2.1 偏微分方程求解的辅助常微分方程法

非线性发展方程一般可描述成如下形式：

$$N(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

引入如下行波变换

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = kx + ct \quad (2.2)$$

其中， $k$  和  $c$  为待定常数。经过上述变换，发展方程变为常微分方程

$$F(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (2.3)$$

设方程(2.3)具有如下形式的解

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i f^i(\xi) \quad (2.4)$$

其中  $a_i$  为待定常数，正整数  $m$  可以通过平衡(2.3)中的最高阶导数项和非线性项来得到。

与其他求解方法不同，在此引入一类辅助方程，使得(2.4)中的  $f(\xi)$  满足辅助

方程。然后，通过求解辅助方程来获得一大类  $f(\xi)$  的形式。将这些  $f(\xi)$  与解(2.4)一起代入方程(2.3)。令方程各项系数为零，即可得到一系列的非线性代数方程，通过求解这些非线性代数方程组成的代数方程组，即可确定所有的未知系数。该方程组的每一组解即为方程(2.3)的一个解。因此，选取合适的辅助方程对于构造非线性发展方程的行波解具有重要的意义。常见的辅助方程有 Riccati 方程，三角函数型方程，双曲函数型方程和 Jacobi 椭圆函数型方程等等。

### (1) Riccati 方程

选用 Riccati 方程作为辅助方程<sup>[146,147]</sup>，即使  $f(\xi)$  满足一类 Riccati 方程，例如选取如下的常系数 Riccati 方程

$$f'(\xi) = f^2(\xi) + l \quad (2.5)$$

通过研究上式，可得到如下形式的解：

#### (a) 孤子解 ( $l < 0$ )

$$f = -\sqrt{-l} \coth(\sqrt{-l}\xi) \quad (2.6)$$

$$f = -\sqrt{-l} \tanh(\sqrt{-l}\xi) \quad (2.7)$$

#### (b) 周期波解 ( $l > 0$ )

$$f = \sqrt{l} \tan(\sqrt{l}\xi) \quad (2.8)$$

$$f = -\sqrt{l} \cot(\sqrt{l}\xi) \quad (2.9)$$

#### (c) 变量分离解 ( $l = 0$ )

$$f = -\frac{1}{\xi} \quad (2.10)$$

其中， $l$  为常数。

由(2.5)可知， $f(\xi)$  还满足如下关系：

$$\frac{d}{d\xi} = (l + f^2) \frac{d}{df} \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = 2f(l + f^2) \frac{d}{df} + (l + f^2)^2 \frac{d^2}{df^2} \quad (2.12)$$

选取以上各式和(2.11)，(2.12)代入(2.3)，并借助符号计算系统，即可求得大量解

析解。

### (2) 三角函数型辅助方程

通过引入三角函数型的辅助方程<sup>[148,149]</sup>, 可用于求解在非线性光学、非线性晶格、超导物理的 Josephson 结构等领域有着广泛应用的 Sine-Gordon 型方程。三角函数型的辅助方程的构造是多种多样的, 常见的有如下几种类型:

$$\frac{d\mu(\xi)}{d\xi} = a \cos \frac{\mu(\xi)}{2} \quad (2.13)$$

$$\frac{d\mu(\xi)}{d\xi} = a \sin \frac{\mu(\xi)}{2} \quad (2.14)$$

$$\frac{d\mu(\xi)}{d\xi} = a + b \cos \frac{\mu(\xi)}{2} \quad (2.15)$$

$$\frac{d\mu(\xi)}{d\xi} = a + b \sin \frac{\mu(\xi)}{2} \quad (2.16)$$

$$\frac{d\mu(\xi)}{d\xi} = a + b \sin \frac{\mu(\xi)}{2} + c \cos \frac{\mu(\xi)}{2} \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{d\mu(\xi)}{d\xi}\right)^2 = a + b \sin^2(\mu\mu(\xi)) + c \cos^2(\mu\mu(\xi)) \quad (\mu=1 \text{ 或 } \mu=\frac{1}{2}) \quad (2.18)$$

将上述辅助方程与函数变换法或者其他方法相结合, 还可以用来构造其他非线性发展方程的行波解。

### (3) 椭圆函数方程

一般情况下, 椭圆方程的形式可表示为:

$$y'^2 = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 \quad (2.19)$$

$$y'' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 \quad (2.20)$$

当  $a_0 = a$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = b$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = c$  时, 方程(2.19)可表示为:

$$y'^2 = a + by^2 + cy^4 \quad (2.21)$$

上式被称为第一类椭圆方程, 该方程被广泛应用在构造辅助方程的过程中。第一类椭圆方程的一般表达式为:



$$(z(\xi))'^2 = a + bz^2(\xi) + cz^4(\xi) \quad (2.22)$$

通过计算,可得到方程(2.22)大量的解。

在非线性发展方程的求解过程中引入辅助方程,通过对辅助方程的求解,可获得更多的解,拓展了非线性发展方程精确解的数量和类型。寻找不同类型的辅助方程并进一步与函数变换或其他求解方法的结合成为辅助方程法的主要研究方向。

## 2.2 (2+1)维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程的行波解

(2+1)维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程可描述为

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + u_{yyy} &= 3(uv)_x + 3(uw)_y \\ v_y &= u_x \\ w_x &= u_y \end{aligned} \quad (2.23)$$

对上式进行如下形式的行波变换:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(\xi), \quad v(x, y, t) = V(\xi), \quad w(x, y, t) = W(\xi) \\ \xi &= kx + ly - \lambda t \end{aligned} \quad (2.24)$$

其中  $k$ ,  $l$  和  $\lambda$  为常数。将(2.24)代入(2.23)可得

$$\begin{aligned} -\lambda U' + (k^3 + l^3)U''' - 3kU'V - 3kUV' - 3lU'W - 3lUW' &= 0 \\ lV' - kU' &= 0 \\ kW' - lU' &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

借鉴扩展的双曲正切函数方法,可假设方程(2.25)具有如下行波解:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=0}^n a_i \phi^i(\xi) \\ V &= \sum_{i=0}^n b_i \phi^i(\xi) \\ W &= \sum_{i=0}^n c_i \phi^i(\xi) \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中  $a_i, b_i, c_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 为待定系数,平衡常量  $n$  为正整数,可以通过平衡(2.25)的最高阶导数项和非线性项得到。在这里,平衡  $U'''$  和  $U'V$  可得到  $n=2$ 。因此,将方程(2.25)的解表述出如下形式

$$\begin{aligned} U &= a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \\ V &= b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 \\ W &= c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

而  $\varphi(\xi)$  为如下辅助微分方程的解:

$$\varphi'^2 = d_1\varphi + d_2\varphi^2 + d_3\varphi^3 + d_4\varphi^4 \quad (2.28)$$

其中  $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$  和  $d_4$  为实参数。

将式(2.28)求导得

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \frac{1}{2}d_1 + d_2\varphi + \frac{3}{2}d_3\varphi^2 + 2d_4\varphi^3 \\ \varphi''' &= (d_2 + 3d_3\varphi + 6d_4\varphi^2)\varphi' \end{aligned} \quad (2.29)$$

将式(2.27)求导得

$$\begin{aligned} U' &= (a_1 + 2a_2\varphi)\varphi' \\ V' &= (b_1 + 2b_2\varphi)\varphi' \\ W' &= (c_1 + 2c_2\varphi)\varphi' \\ U''' &= [a_1d_2 + 3a_2d_1 + (8a_2d_2 + 3a_1d_3)\varphi + (15a_2d_3 + \\ &\quad 6a_1d_4)\varphi^2 + 24a_2d_4\varphi^3]\varphi' \end{aligned} \quad (2.30)$$

将式(2.30)代入式(2.25)得

$$\begin{aligned} & -\lambda(a_1 + 2a_2\varphi) + (k^3 + l^3)[a_1d_2 + 3a_2d_1 + (8a_2d_2 + 3a_1d_3)\varphi + \\ & (15a_2d_3 + 6a_1d_4)\varphi^2 + 24a_2d_4\varphi^3] - 3k(a_1 + 2a_2\varphi)(b_0 + b_1\varphi + \\ & b_2\varphi^2) - 3k(a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2)(b_1 + 2b_2\varphi) - 3l(a_1 + 2a_2\varphi)(c_0 + \\ & c_1\varphi + c_2\varphi^2) - 3l(a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2)(c_1 + 2c_2\varphi) = 0 \\ & l(b_1 + 2b_2\varphi) - k(a_1 + 2a_2\varphi) = 0 \\ & k(c_1 + 2c_2\varphi) - l(a_1 + 2a_2\varphi) = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

比较式(2.31)中  $\varphi$  的各次幂的系数, 可得到如下的代数方程组

$$\begin{aligned} & -\lambda a_1 + (k^3 + l^3)(3a_2d_1 + a_1d_2) - 3ka_1b_0 - 3ka_0b_1 - 3la_1c_0 - 3la_0c_1 = 0 \\ & -2\lambda a_2 + (k^3 + l^3)(8a_2d_2 + 3a_1d_3) - 6k(a_1b_1 + a_2b_0 + a_0b_2) - 6l(a_1c_1 + \\ & a_2c_0 + a_0c_2) = 0 \\ & (k^3 + l^3)(5a_2d_3 + 2a_1d_4) - 3k(a_1b_2 + a_2b_1) - 3l(a_1c_2 + a_2c_1) = 0 \\ & 2(k^3 + l^3)a_2d_4 - ka_2b_2 - la_2c_2 = 0 \\ & lb_0 - ka_0 = 0 \\ & lb_1 - ka_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 lb_2 - ka_2 &= 0 \\
 kc_0 - la_0 &= 0 \\
 kc_1 - la_1 &= 0 \\
 kc_2 - la_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

求解方程组(2.32)，得到

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{-4kl\lambda d_4 - 3kl(k^3 + l^3)d_3^2 + 16kl(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4}, \\
 b_0 &= \frac{-4k^2\lambda d_4 - 3k^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16k^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4}, \\
 c_0 &= \frac{-4l^2\lambda d_4 - 3l^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16l^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4}, \\
 a_1 &= kld_3, \quad b_1 = k^2d_3, \quad c_1 = l^2d_3, \\
 a_2 &= 2kld_4, \quad b_2 = 2k^2d_4, \quad c_2 = 2l^2d_4, \\
 d_1 &= \frac{d_3(4d_2d_4 - d_3^2)}{8d_4^2}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

因此，可知方程(2.25)的解为式(2.27)。

如果

$$4d_2d_4 - d_3^2 = 0 \tag{2.34}$$

由式(2.33)的最后一个公式可知

$$d_1 = 0$$

式(2.28)变为

$$\varphi'^2 = d_2\varphi^2 + d_3\varphi^3 + d_4\varphi^4 \tag{2.35}$$

辅助微分方程(2.35)是式(2.19)当  $a_0 = a$ ， $a_1 = 0$  时的结果，式(2.35)的解可表述成如下形式：

(1) 当  $d_2 > 0$  时，方程(2.35)有下述解

$$\varphi_1(\xi) = \frac{-d_2d_3 \operatorname{sech}^2(\frac{\sqrt{d_2}}{2}\xi)}{d_3^2 - d_2d_4[1 - \tanh(\frac{\sqrt{d_2}}{2}\xi)]^2} \tag{2.36}$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{-d_2d_3 \operatorname{sech}^2(-\frac{\sqrt{d_2}}{2}\xi)}{d_3^2 - d_2d_4[1 - \tanh(-\frac{\sqrt{d_2}}{2}\xi)]^2} \tag{2.37}$$

$$\varphi_3(\xi) = -\frac{d_2}{d_3}[1 + \tanh(\frac{\sqrt{d_2}}{2}\xi)] \tag{2.38}$$

$$\varphi_4(\xi) = -\frac{d_2}{d_3} [1 - \tanh(\frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi)] \quad (2.39)$$

$$\varphi_5(\xi) = -\frac{d_2}{d_3} [1 + \coth(\frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi)] \quad (2.40)$$

$$\varphi_6(\xi) = -\frac{d_2}{d_3} [1 - \coth(\frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi)] \quad (2.41)$$

(2) 当  $d_2 > 0, d_4 > 0$  时, 方程(2.35)有下述形式的解

$$\varphi_7(\xi) = \frac{d_2 \operatorname{csch}^2 \frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi}{d_3 + 2\sqrt{d_2 d_4} \coth \frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi} \quad (2.42)$$

$$\varphi_8(\xi) = \frac{4d_2 (\cosh \sqrt{d_2} \xi + \sinh \sqrt{d_2} \xi)}{4d_2 d_4 - (d_3 + \cosh \sqrt{d_2} \xi + \sinh \sqrt{d_2} \xi)^2} \quad (2.43)$$

$$\varphi_9(\xi) = \frac{2d_2 \operatorname{sech} \sqrt{d_2} \xi}{-d_2 - d_3 \operatorname{sech} \sqrt{d_2} \xi - d_2 \tanh \sqrt{d_2} \xi} \quad (2.44)$$

$$\varphi_{10}(\xi) = \frac{d_2 \operatorname{csch} \frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi}{d_3 \sinh \frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi + 2\sqrt{d_2 d_4} \cosh \frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi} \quad (2.45)$$

$$\varphi_{11}(\xi) = \frac{d_2 \operatorname{sech} \frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi}{2\sqrt{d_2 d_4} \sinh \frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi - d_3 \cosh \frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi} \quad (2.46)$$

$$\varphi_{12}(\xi) = \frac{d_2 [-1 + (\tanh \sqrt{d_2} \xi + i \operatorname{sech} \sqrt{d_2} \xi)^2]}{d_3 + 2\sqrt{d_2 d_4} (\tanh \sqrt{d_2} \xi + i \operatorname{sech} \sqrt{d_2} \xi)} \quad (2.47)$$

$$\varphi_{13}(\xi) = \frac{d_2 [-1 + (\tanh \sqrt{d_2} \xi - i \operatorname{sech} \sqrt{d_2} \xi)^2]}{d_3 + 2\sqrt{d_2 d_4} (\tanh \sqrt{d_2} \xi - i \operatorname{sech} \sqrt{d_2} \xi)} \quad (2.48)$$

$$\varphi_{14}(\xi) = \frac{-d_2 + d_2 \left( \frac{\sqrt{R^2 + P^2} - P \cosh \sqrt{d_2} \xi}{R + P \sinh \sqrt{d_2} \xi} \right)^2}{d_3 - 2\sqrt{d_2 d_4} \frac{\sqrt{R^2 + P^2} - P \cosh \sqrt{d_2} \xi}{R + P \sinh \sqrt{d_2} \xi}} \quad (2.49)$$

其中,  $R$ 、 $P$  是任意常数, 并且  $R \neq 0$ ,  $P \neq 0$ 。

$$\varphi_{15}(\xi) = \frac{-d_2 + d_2 \left( \frac{\sqrt{R^2 - P^2} + P \sinh \sqrt{d_2} \xi}{R + P \cosh \sqrt{d_2} \xi} \right)^2}{d_3 + 2\sqrt{d_2 d_4} \frac{\sqrt{R^2 - P^2} + P \sinh \sqrt{d_2} \xi}{R + P \cosh \sqrt{d_2} \xi}} \quad (2.50)$$

其中,  $R$ 、 $P$  是任意常数, 并且  $R^2 - P^2 > 0$ ,  $R \neq 0$ ,  $P \neq 0$ 。

(3) 当  $d_2 < 0$ ,  $d_4 > 0$  时, 方程(2.35)有下述解

$$\varphi_{16}(\xi) = \frac{d_2 \sec^2 \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi}{-d_3 + 2\sqrt{-d_2 d_4} \tan \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi} \quad (2.51)$$

$$\varphi_{17}(\xi) = \frac{d_2 \csc^2 \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi}{-d_3 + 2\sqrt{-d_2 d_4} \cot \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi} \quad (2.52)$$

$$\varphi_{18}(\xi) = \frac{-d_2 [1 + (\tan \sqrt{-d_2} \xi + \sec \sqrt{-d_2} \xi)^2]}{d_3 - 2\sqrt{-d_2 d_4} (\tan \sqrt{-d_2} \xi + \sec \sqrt{-d_2} \xi)} \quad (2.53)$$

$$\varphi_{19}(\xi) = \frac{-d_2 [1 + (\tan \sqrt{-d_2} \xi - \sec \sqrt{-d_2} \xi)^2]}{d_3 - 2\sqrt{-d_2 d_4} (\tan \sqrt{-d_2} \xi - \sec \sqrt{-d_2} \xi)} \quad (2.54)$$

$$\varphi_{20}(\xi) = \frac{-d_2 \csc \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi}{d_3 \sin \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi + 2\sqrt{-d_2 d_4} \cos \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi} \quad (2.55)$$

$$\varphi_{21}(\xi) = \frac{d_2 \sec \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi}{2\sqrt{-d_2 d_4} \sin \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi - d_3 \cos \frac{\sqrt{-d_2}}{2} \xi} \quad (2.56)$$

(4) 当  $d_2 > 0$ ,  $d_3 = 0$ ,  $d_4 < 0$  时, 方程(2.35)有下述解

$$\varphi_{22}(\xi) = \sqrt{-\frac{d_2}{d_4}} \operatorname{sech}(\sqrt{d_2} \xi) \quad (2.57)$$

(5) 当  $d_2 > 0$ ,  $d_4 = 0$  时, 方程(2.35)有下述解

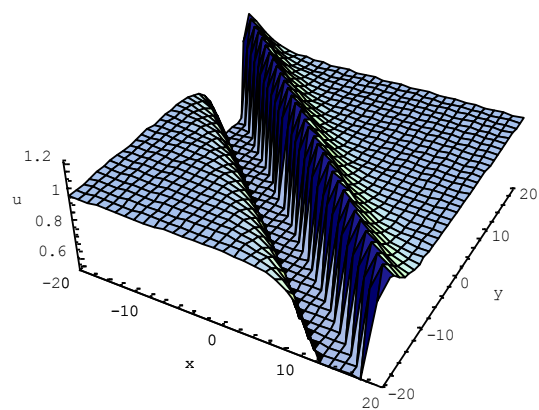
$$\varphi_{23}(\xi) = -\frac{d_2}{d_3} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{d_2}}{2} \xi\right) \quad (2.58)$$

根据式(2.27)和式(2.36)-(2.58)，即可相应的写出方程(2.23)的行波解。取前面的几组列举如下：

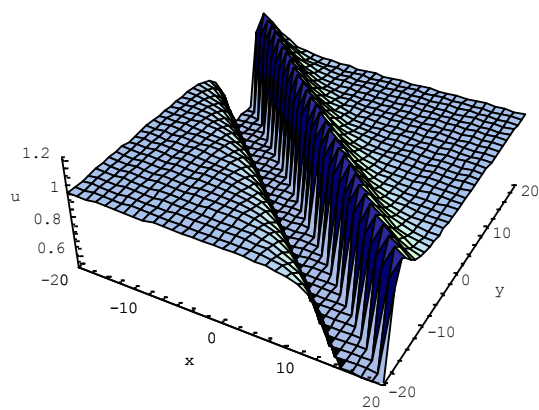
根据方程(2.36)，有

$$\begin{aligned}
 u_1 = & \frac{-4kl\lambda d_4 - 3kl(k^3 + l^3)d_3^2 + 16kl(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & kld_3 \frac{-d_2d_3 \operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3^2 - d_2d_4\{1 - \tanh[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]\}^2} + \\
 & 2kld_4 \left( \frac{-d_2d_3 \operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3^2 - d_2d_4\{1 - \tanh[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]\}^2} \right)^2 \\
 v_1 = & \frac{-4k^2\lambda d_4 - 3k^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16k^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & k^2d_3 \frac{-d_2d_3 \operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3^2 - d_2d_4\{1 - \tanh[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]\}^2} + \\
 & 2k^2d_4 \left( \frac{-d_2d_3 \operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3^2 - d_2d_4\{1 - \tanh[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]\}^2} \right)^2 \\
 w_1 = & \frac{-4l^2\lambda d_4 - 3l^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16l^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & l^2d_3 \frac{-d_2d_3 \operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3^2 - d_2d_4\{1 - \tanh[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]\}^2} + \\
 & 2l^2d_4 \left( \frac{-d_2d_3 \operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3^2 - d_2d_4\{1 - \tanh[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]\}^2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

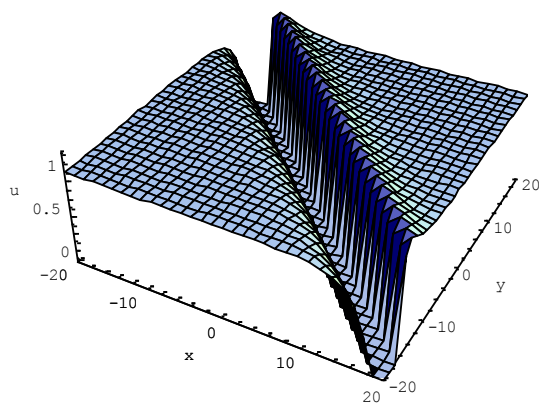
上述解  $u_1$  的结构如图 2.1 所示，这里时间分别取  $t=0$ 、5、10 秒，解  $v_1$  和  $w_1$  可以类似地画出。



(a)



(b)



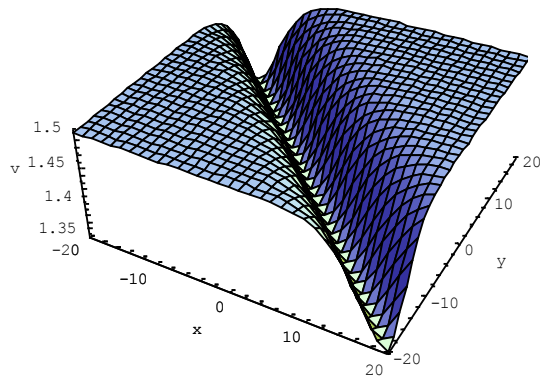
(c)

图2.1 式(2.59)解 $u_1$ 的结构图 (a)  $t=0$ , (b)  $t=5$ , (c)  $t=10$

根据方程(2.38)，有

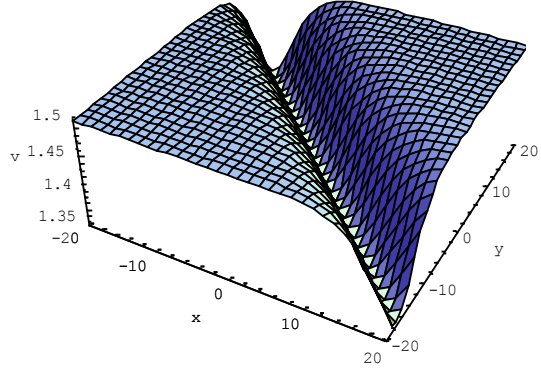
$$\begin{aligned}
 u_3 = & \frac{-4kl\lambda d_4 - 3kl(k^3 + l^3)d_3^2 + 16kl(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & kld_3\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \tanh\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\} + \\
 & 2kld_4\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \tanh\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\}^2 \\
 v_3 = & \frac{-4k^2\lambda d_4 - 3k^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16k^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & k^2d_3\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \tanh\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\} + \\
 & 2k^2d_4\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \tanh\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\}^2 \\
 w_3 = & \frac{-4l^2\lambda d_4 - 3l^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16l^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & l^2d_3\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \tanh\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\} + \\
 & 2l^2d_4\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \tanh\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\}^2
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

上述解  $v_3$  的结构如图 2.2 所示，这里时间分别取  $t=0$ 、5、10 秒，解  $u_3$  和  $w_3$  可以类似地画出。

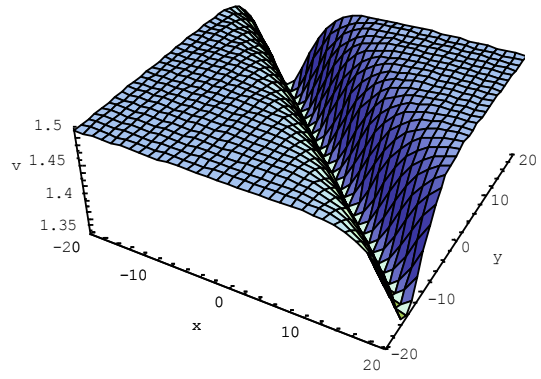


(a)





(b)



(c)

 图2.2 式(2.60)解 $v_2$ 的结构图 (a)  $t=0$ , (b)  $t=5$ , (c)  $t=10$ 

根据方程(2.40), 有

$$\begin{aligned}
 u_5 &= \frac{-4kl\lambda d_4 - 3kl(k^3 + l^3)d_3^2 + 16kl(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 &\quad kld_3\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \coth\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\} + \\
 &\quad 2kld_4\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \coth\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]^2\right\} \\
 v_5 &= \frac{-4k^2\lambda d_4 - 3k^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16k^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 &\quad k^2d_3\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \coth\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\} + \\
 &\quad 2k^2d_4\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \coth\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]^2\right\} \\
 w_5 &= \frac{-4l^2\lambda d_4 - 3l^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16l^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 &\quad l^2d_3\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \coth\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]\right\} + \\
 &\quad 2l^2d_4\left\{-\frac{d_2}{d_3}\left[1 + \coth\left[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)\right]\right]^2\right\}
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

上述解  $w_5$  的结构如图 2.3 所示，这里时间分别取  $t=0$ 、5、10 秒，解  $u_5$  和  $v_5$  可以类似地画出。

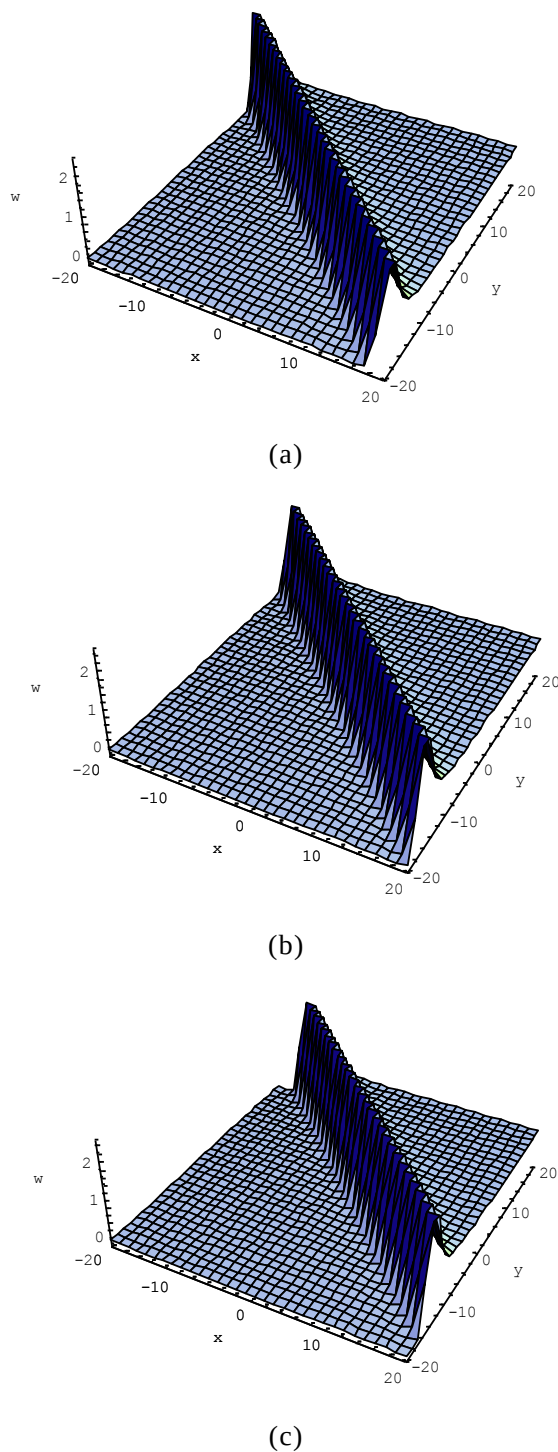
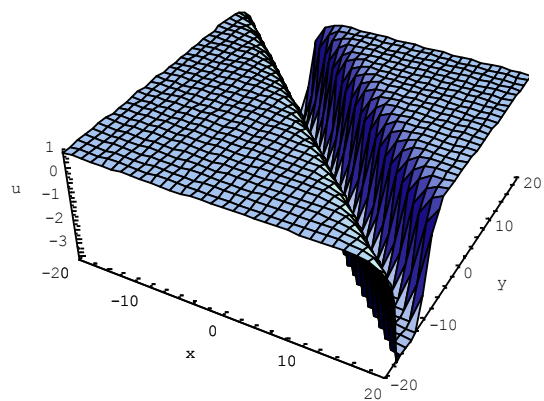


图2.3 式(2.61)解 $w_5$ 的结构图 (a)  $t=0$ , (b)  $t=5$ , (c)  $t=10$

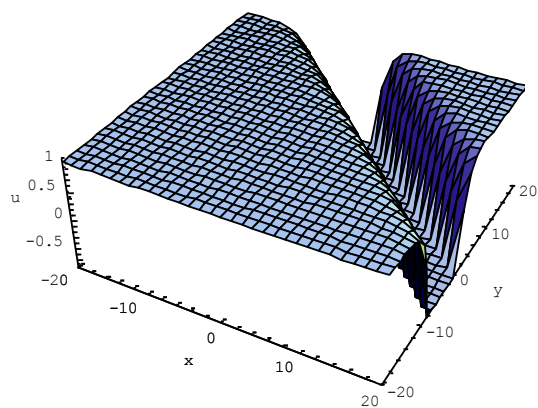
根据方程(2.42)，有

$$\begin{aligned}
 u_7 = & \frac{-4kl\lambda d_4 - 3kl(k^3 + l^3)d_3^2 + 16kl(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & kld_3 \frac{d_2 \operatorname{csch}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3 + 2\sqrt{d_2d_4} \coth[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} + \\
 & 2kld_4 (\frac{d_2 \operatorname{csch}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3 + 2\sqrt{d_2d_4} \coth[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]})^2 \\
 v_7 = & \frac{-4k^2\lambda d_4 - 3k^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16k^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & k^2d_3 \frac{d_2 \operatorname{csch}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3 + 2\sqrt{d_2d_4} \coth[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} + \\
 & 2k^2d_4 (\frac{d_2 \operatorname{csch}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3 + 2\sqrt{d_2d_4} \coth[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]})^2 \\
 w_7 = & \frac{-4l^2\lambda d_4 - 3l^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16l^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & l^2d_3 \frac{d_2 \operatorname{csch}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3 + 2\sqrt{d_2d_4} \coth[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} + \\
 & 2l^2d_4 (\frac{d_2 \operatorname{csch}^2[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{d_3 + 2\sqrt{d_2d_4} \coth[\frac{\sqrt{d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]})^2
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

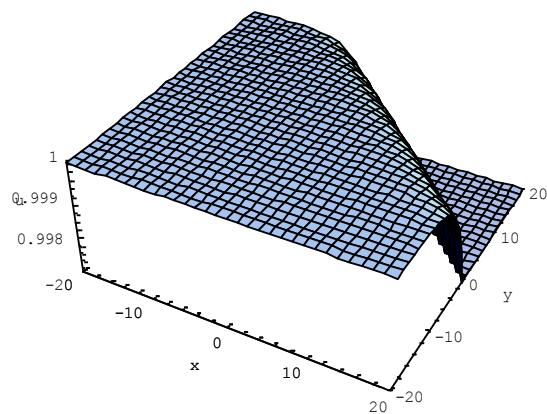
上述解  $u_7$  的结构如图 2.4 所示，这里时间分别取  $t=20$ 、 $40$ 、 $60$  秒，解  $v_7$  和  $w_7$  可以类似地画出。



(a)



(b)



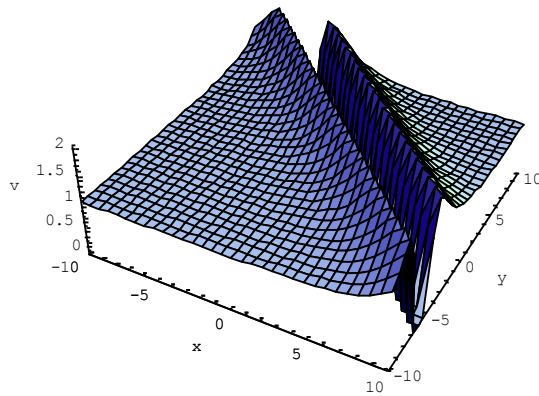
(c)

图2.4 式(2.62)解 $u_7$ 的结构图 (a)  $t=20$ , (b)  $t=40$ , (c)  $t=60$

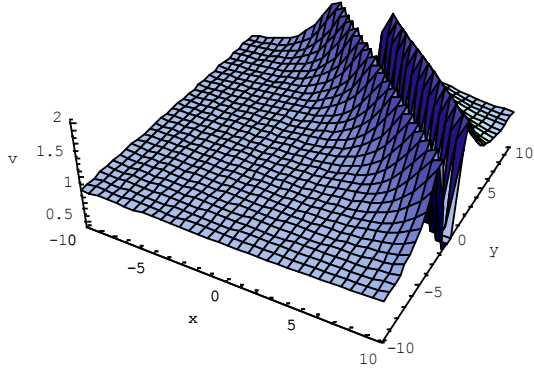
根据方程(2.44)，有

$$\begin{aligned}
 u_9 = & \frac{-4kl\lambda d_4 - 3kl(k^3 + l^3)d_3^2 + 16kl(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & kld_3 \left[ \frac{-2d_2 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)}{d_2 + d_3 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t) + d_2 \tanh \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)} \right] + \\
 & 2kld_4 \left[ \frac{-2d_2 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)}{d_2 + d_3 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t) + d_2 \tanh \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)} \right]^2 \\
 v_9 = & \frac{-4k^2\lambda d_4 - 3k^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16k^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & k^2d_3 \left[ \frac{-2d_2 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)}{d_2 + d_3 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t) + d_2 \tanh \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)} \right] + \\
 & 2k^2d_4 \left[ \frac{-2d_2 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)}{d_2 + d_3 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t) + d_2 \tanh \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)} \right]^2 \\
 w_9 = & \frac{-4l^2\lambda d_4 - 3l^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16l^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & l^2d_3 \left[ \frac{-2d_2 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)}{d_2 + d_3 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t) + d_2 \tanh \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)} \right] + \\
 & 2l^2d_4 \left[ \frac{-2d_2 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)}{d_2 + d_3 \operatorname{sech} \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t) + d_2 \tanh \sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t)} \right]^2
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

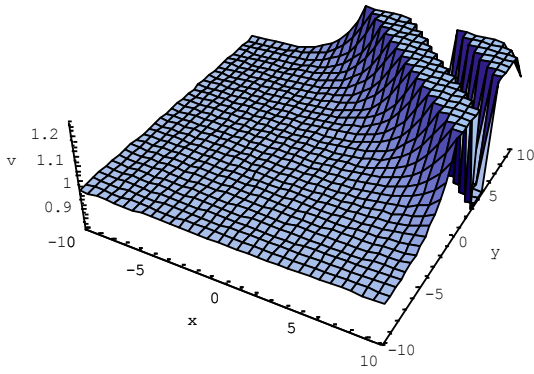
上述解  $v_9$  的结构如图 2.5 所示，这里时间分别取  $t=10$ 、 $20$ 、 $30$  秒，解  $u_9$  和  $w_9$  可以类似地画出。



(a)



(b)



(c)

图2.5 式(2.63)解 $v_9$ 的结构图 (a)  $t=10$ , (b)  $t=20$ , (c)  $t=30$

根据方程(2.51), 有

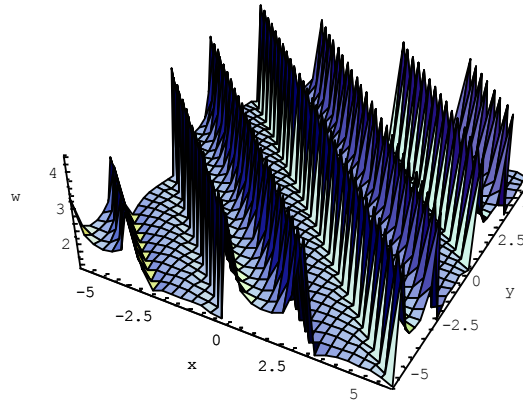
$$u_{16} = \frac{-4kl\lambda d_4 - 3kl(k^3 + l^3)d_3^2 + 16kl(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} +$$

$$kld_3 \frac{d_2 \sec^2[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{-d_3 + 2\sqrt{-d_2d_4} \tan[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} +$$

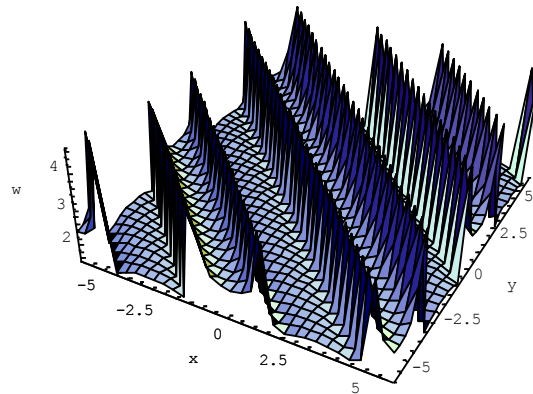
$$2kld_4 \left( \frac{d_2 \sec^2[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{-d_3 + 2\sqrt{-d_2d_4} \tan[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 v_{16} = & \frac{-4k^2\lambda d_4 - 3k^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16k^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & k^2d_3 \frac{d_2 \sec^2[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{-d_3 + 2\sqrt{-d_2d_4} \tan[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} + \\
 & 2k^2d_4 \left( \frac{d_2 \sec^2[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{-d_3 + 2\sqrt{-d_2d_4} \tan[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} \right)^2 \\
 w_{16} = & \frac{-4l^2\lambda d_4 - 3l^2(k^3 + l^3)d_3^2 + 16l^2(k^3 + l^3)d_2d_4}{24(k^3 + l^3)d_4} + \\
 & l^2d_3 \frac{d_2 \sec^2[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{-d_3 + 2\sqrt{-d_2d_4} \tan[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} + \\
 & 2l^2d_4 \left( \frac{d_2 \sec^2[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]}{-d_3 + 2\sqrt{-d_2d_4} \tan[\frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)]} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

式(2.64)是一个周期函数，解  $w_6$  的结构如图 2.6 所示，这里时间分别取  $t=0$ 、10、20 秒，解  $u_6$  和  $v_6$  可以类似地画出。



(a)



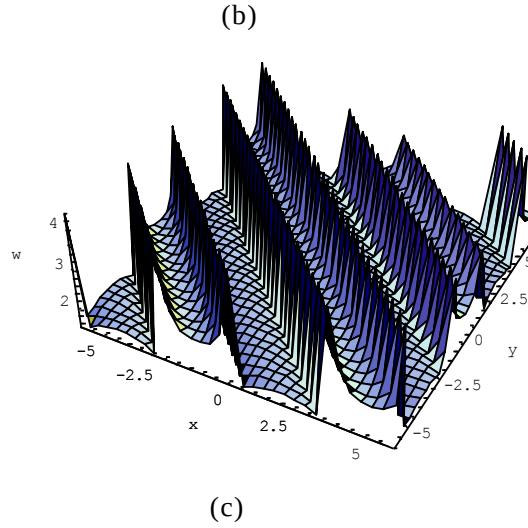


图2.6 式(2.64)解 $w_6$ 的结构图 (a)  $t=0$ , (b)  $t=10$ , (c)  $t=20$

### 2.3 广义的(2+1)维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程的行波解

广义(2+1)维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程是(2+1)维 KdV 方程的一种对称推广，其可用如下方程描述

$$\begin{aligned} u_t + \alpha u_{xxx} + \beta u_{yyy} + \gamma u_x + \eta u_y - 3\alpha v_x u - 3\alpha v u_x - 3\beta w_y u - 3\beta w u_y &= 0 \\ u_x &= v_y \\ u_y &= w_x \end{aligned} \quad (2.65)$$

利用式(2.24)对式(2.65)进行行波变换可得

$$\begin{aligned} (-\lambda + k\gamma + l\eta)U' + (\alpha k^3 + \beta l^3)U''' - 3k\alpha U'V - 3k\alpha UV' - 3l\beta U'W - 3l\beta UW' &= 0 \\ kU' - lV' &= 0 \\ lU' - kW' &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

式(2.66)与方程(2.25)类似，因此同样可以将上述方程的解设为

$$\begin{aligned} U &= a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \\ V &= b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 \\ W &= c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 \end{aligned} \quad (2.67)$$

将式(2.30)代入式(2.66)得



$$\begin{aligned}
 &(-\lambda + k\gamma + l\eta)(a_1 + 2a_2\varphi) + (\alpha k^3 + \beta l^3)[a_1d_2 + 3a_2d_1 + (8a_2d_2 + \\
 &3a_1d_3)\varphi + (15a_2d_3 + 6a_1d_4)\varphi^2 + 24a_2d_4\varphi^3] - 3k\alpha(a_1 + 2a_2\varphi)(b_0 + \\
 &b_1\varphi + b_2\varphi^2) - 3k\alpha(a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2)(b_1 + 2b_2\varphi) - 3l\beta(a_1 + 2a_2\varphi)(c_0 + \\
 &c_1\varphi + c_2\varphi^2) - 3l\beta(a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2)(c_1 + 2c_2\varphi) = 0 \\
 &l(b_1 + 2b_2\varphi) - k(a_1 + 2a_2\varphi) = 0 \\
 &k(c_1 + 2c_2\varphi) - l(a_1 + 2a_2\varphi) = 0
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

比较式(2.68)中  $\varphi$  的各次幂的系数, 可得到如下的代数方程组

$$\begin{aligned}
 &(-\lambda + k\gamma + l\eta)a_1 + (\alpha k^3 + \beta l^3)(3a_2d_1 + a_1d_2) - 3k\alpha a_1b_0 - 3k\alpha a_0b_1 - \\
 &3l\beta a_1c_0 - 3l\beta a_0c_1 = 0 \\
 &2(-\lambda + k\gamma + l\eta)a_2 + (\alpha k^3 + \beta l^3)(8a_2d_2 + 3a_1d_3) - 6k\alpha(a_1b_1 + a_2b_0 + \\
 &a_0b_2) - 6l\beta(a_1c_1 + a_2c_0 + a_0c_2) = 0 \\
 &(\alpha k^3 + \beta l^3)(5a_2d_3 + 2a_1d_4) - 3k\alpha(a_1b_2 + a_2b_1) - 3l\beta(a_1c_2 + a_2c_1) = 0 \\
 &2(\alpha k^3 + \beta l^3)a_2d_4 - k\alpha a_2b_2 - l\beta a_2c_2 = 0 \\
 &lb_0 - ka_0 = 0 \\
 &lb_1 - ka_1 = 0 \\
 &lb_2 - ka_2 = 0 \\
 &kc_0 - la_0 = 0 \\
 &kc_1 - la_1 = 0 \\
 &kc_2 - la_2 = 0
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

求解方程组(2.69), 得到

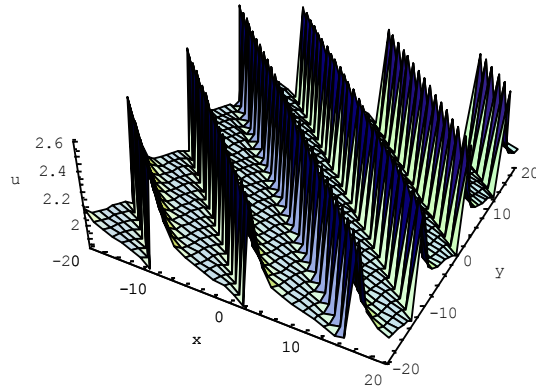
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{-4kl(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3kl(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16kl(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4}, \\
 b_0 &= \frac{-4k^2(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3k^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16k^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4}, \\
 c_0 &= \frac{-4l^2(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3l^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16l^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4}, \\
 a_1 &= kld_3, \quad b_1 = k^2d_3, \quad c_1 = l^2d_3, \\
 a_2 &= 2kld_4, \quad b_2 = 2k^2d_4, \quad c_2 = 2l^2d_4, \\
 d_1 &= \frac{d_3(4d_2d_4 - d_3^2)}{8d_4^2}
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

其中  $\varphi$  由式(2.36)-(2.58)给出。广义 (2+1) 维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程与 (2+1) 维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程有相似的结构, 后者由式(2.36)-(2.58)的前面几个公式给出了部分解, 下面由式(2.36)-(2.58)的后面几个公式给出广义 (2+1) 维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程的部分解的表达式。

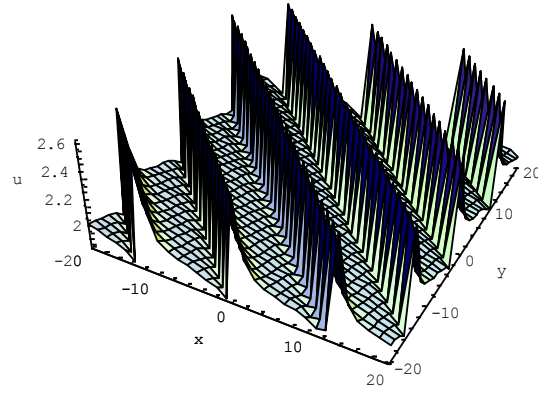
(1) 根据方程(2.53), 有

$$\begin{aligned}
 u_{18} = & \frac{-4kl(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3kl(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16kl(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 & kld_3 \frac{-d_2[1 + (\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t))^2]}{d_3 - 2\sqrt{-d_2}d_4[\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t)]} + \\
 & 2kld_4 \left( \frac{-d_2[1 + (\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t))^2]}{d_3 - 2\sqrt{-d_2}d_4[\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t)]} \right)^2 \\
 v_{18} = & \frac{-4k^2(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3k^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16k^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 & k^2d_3 \frac{-d_2[1 + (\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t))^2]}{d_3 - 2\sqrt{-d_2}d_4[\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t)]} + \\
 & 2k^2d_4 \left( \frac{-d_2[1 + (\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t))^2]}{d_3 - 2\sqrt{-d_2}d_4[\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t)]} \right)^2 \\
 w_{18} = & \frac{-4l^2(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3l^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16l^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 & l^2d_3 \frac{-d_2[1 + (\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t))^2]}{d_3 - 2\sqrt{-d_2}d_4[\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t)]} + \\
 & 2l^2d_4 \left( \frac{-d_2[1 + (\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t))^2]}{d_3 - 2\sqrt{-d_2}d_4[\tan \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t) + \sec \sqrt{-d_2}(kx + ly - \lambda t)]} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

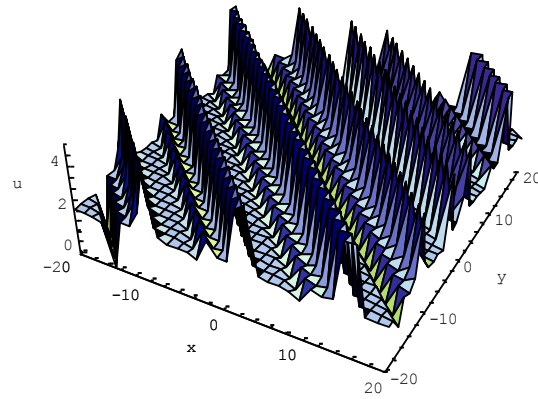
式(2.71)是一个周期函数, 解  $u_{18}$  的结构如图 2.7 所示, 这里时间分别取  $t=20$ 、40、60 秒, 解  $v_{18}$  和  $w_{18}$  可以类似地画出。



(a)



(b)



(c)

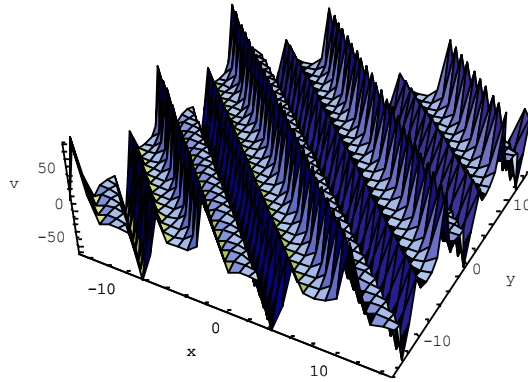
图2.7 式(2.71)解 $u_{10}$ 的结构图 (a)  $t=20$ , (b)  $t=40$ , (c)  $t=60$

(2) 根据式(2.55), 可得

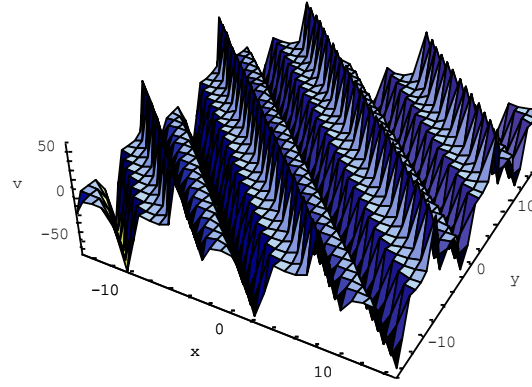
$$\begin{aligned}
 u_{20} = & \frac{-4kl(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3kl(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16kl(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 & kld_3 \frac{-d_2 \csc \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)}{d_3 \sin \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t) + 2\sqrt{-d_2d_4} \cos \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)} + \\
 & 2kld_4 \left( \frac{-d_2 \csc \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)}{d_3 \sin \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t) + 2\sqrt{-d_2d_4} \cos \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{20} = & \frac{-4k^2(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3k^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16k^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 & \frac{k^2d_3 \frac{-d_2 \csc \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)}{d_3 \sin \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t) + 2\sqrt{-d_2d_4} \cos \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)}}{2} + \\
 & \frac{2k^2d_4 \left( \frac{-d_2 \csc \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)}{d_3 \sin \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t) + 2\sqrt{-d_2d_4} \cos \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)} \right)^2}{2} \\
 w_{20} = & \frac{-4l^2(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3l^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16l^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 & \frac{l^2d_3 \frac{-d_2 \csc \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)}{d_3 \sin \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t) + 2\sqrt{-d_2d_4} \cos \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)}}{2} + \\
 & \frac{2l^2d_4 \left( \frac{-d_2 \csc \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)}{d_3 \sin \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t) + 2\sqrt{-d_2d_4} \cos \frac{\sqrt{-d_2}}{2}(kx + ly - \lambda t)} \right)^2}{2} \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

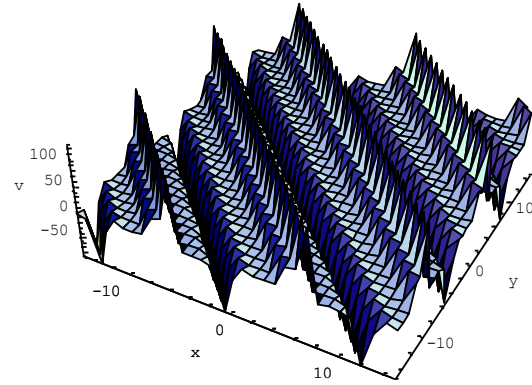
式(2.72)是一个周期函数, 解  $v_{20}$  的结构如图 2.8 所示, 这里时间分别取  $t=20$ 、40、60 秒, 解  $u_{20}$  和  $w_{20}$  可以类似地画出。



(a)



(b)



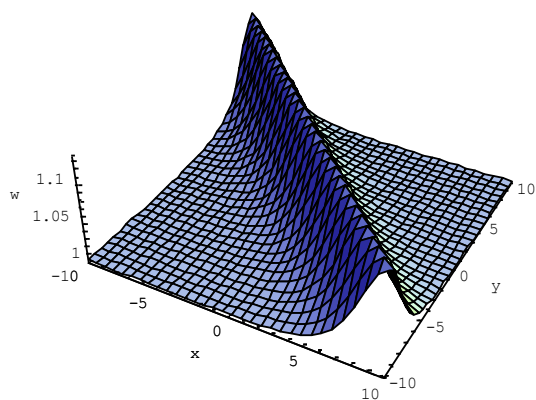
(c)

 图2.8 式(2.72)解 $v_{14}$ 的结构图 (a)  $t=20$ , (b)  $t=40$ , (c)  $t=60$ 

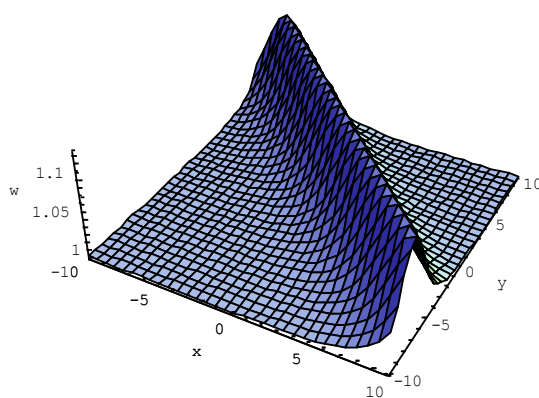
(3) 根据(2.57), 可得

$$\begin{aligned}
 u_{22} &= \frac{-4kl(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3kl(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16kl(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 &\quad kld_3\sqrt{-\frac{d_2}{d_4}}\operatorname{sech}\sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t\xi) + 2kld_4\left[\sqrt{-\frac{d_2}{d_4}}\operatorname{sech}\sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t\xi)\right]^2 \\
 v_{22} &= \frac{-4k^2(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3k^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16k^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 &\quad k^2d_3\sqrt{-\frac{d_2}{d_4}}\operatorname{sech}\sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t\xi) + 2k^2d_4\left[\sqrt{-\frac{d_2}{d_4}}\operatorname{sech}\sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t\xi)\right]^2 \quad (2.73) \\
 w_{22} &= \frac{-4l^2(-\lambda + k\gamma + l\eta)d_4 - 3l^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_3^2 + 16l^2(\alpha k^3 + \beta l^3)d_2d_4}{24(\alpha k^3 + \beta l^3)d_4} + \\
 &\quad l^2d_3\sqrt{-\frac{d_2}{d_4}}\operatorname{sech}\sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t\xi) + 2l^2d_4\left[\sqrt{-\frac{d_2}{d_4}}\operatorname{sech}\sqrt{d_2}(kx + ly - \lambda t\xi)\right]^2
 \end{aligned}$$

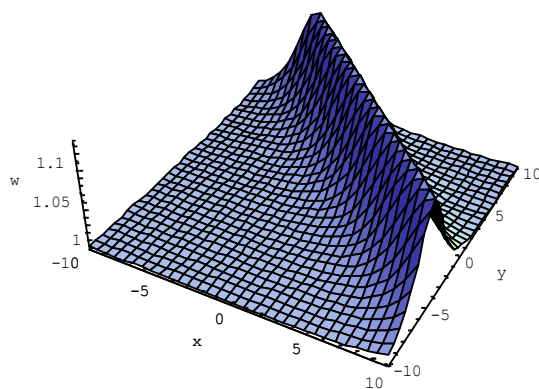
上述解  $w_{22}$  的结构如图 2.9 所示, 这里时间分别取  $t=0$ 、5、10 秒, 解  $u_{22}$  和  $v_{22}$  可以类似地画出。



(a)



(b)



(c)

图2.9 式(2.73)解  $w_{22}$  的结构图 (a)  $t=0$ , (b)  $t=5$ , (c)  $t=10$

按照类似的方法，还可以写出很多的解，不一一赘述。

## 2.4 小结

本章的主要工作是基于一种辅助常微分方程方法来研究非线性发展方程的行

波解。首先，简单的介绍了一下辅助方程方法的一般步骤以及现有的几种常见的辅助方程，并对这些辅助方程进行了简单的分析。接下来，通过对一个辅助微分方程的解的讨论，并借助扩展双曲正切函数法的一些思想，求得了(2+1)维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程和广义(2+1)维 Nizhnik–Novikov–Veselov 方程的一些精确的行波解。

具体做法是通过行波变换将含自变量  $x$ 、 $y$ 、 $t$  的非线性偏微分方程变为只含自变量  $\xi$  的非线性常微分方程。设非线性常微分方程的解为  $\varphi(\xi)$  的幂级数，其中待定系数的数目通过平衡最高阶导数项和非线性项得到。这些常微分方程的精确解  $\varphi(\xi)$  由式(2.32)-(2.58)给出，则可以求得非线性发展方程的多组行波解。

该方法可以推广至其他具有孤子解、三角周期解和椭圆函数解的非线性偏微分方程的求解，例如(2+1)维 Broer-Kaup 方程和(2+1)维长水波色散方程等等，前提是行波变换以后的非线性常微分方程要有精确解，如果不可解，则不能用辅助常微分方程方法求解。基于这些精确解，可以直接研究非线性偏微分方程的分岔行为。

## 第 3 章 Burgers 方程的行波解和跨临界分岔

Burgers 方程是一个著名的非线性方程，是描述流体力学、声学及冲击波等物理现象的重要数学模型，很多学者都对其进行了研究<sup>[150,151]</sup>。文献<sup>[152]</sup>提出了一种求解带有移动边界条件的 Burgers 方程的广义方法；文献<sup>[153]</sup>得到了一种描述远声场弱非线性波的广义 Burgers 方程，并通过数值计算得到了其强非线性的波解；文献<sup>[154]</sup>通过自相似约化得到了一种有阻尼的广义 Burgers 方程。郭建刚<sup>[155]</sup>等人用该方程讨论了细杆中非线性波的传播，考虑了有限变形所引起的几何非线性和粘性耗散效应共同作用，得到了有限变形粘弹性杆的稳定的行波解，当粘性效应趋于零时出现激波解，这些结果可为工程的安全设计提供参考。Burgers 方程是一个简单但是十分重要的物理方程。然而该方程的分岔却很少有人研究。Jordan<sup>[156]</sup>分析了 Kuznetsov's 方程的精确行波解并确定了分岔值的马赫数；在文献<sup>[157]</sup>中，以无量纲的传输速度作为分岔参数，并以此为基础画出了具有内部阻尼的 Kelvin-Voigt versus Burgers 系统的分岔图；Dang-Vu and Delcare<sup>[158]</sup>应用数值方法得到了 Burgers 方程的解并讨论了其存在 Hopf 分岔；总而言之，对于 Burgers 方程分岔的研究才刚刚起步。

通过相应的参数变换，Burgers 方程可以被简化成一个具有行波解的一阶常微分方程。在这种情况下，Burgers 方程变成了一个具有跨临界分岔的一维系统。基于这一理论，很多偏微分方程亦可化成具有典型分岔行为的一维系统<sup>[159-161]</sup>。跨临界分岔是一种在非线性系统中常见的典型分岔行为。本章将主要讨论 Burgers 方程和 (2+1) 维 Burgers 方程的精确行波解及其跨临界分岔行为。

### 3.1 Burgers 方程的行波解

行波变换是一种精确的变换方法，通过行波变换将非线性偏微分方程变为常微分方程，进而可以求得 Burgers 方程的精确解。文献<sup>[162]</sup>引入一个变换，而无需引入试探函数，把二阶非线性偏微分方程变为一阶非线性常微分方程，用一种不同的方法直接求解了 Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0$$

获得了该方程的扭状孤波解(图 3.1)

$$u_1(x, t) = -\nu k [1 + \tanh \frac{1}{2}(kx - \omega t)]$$



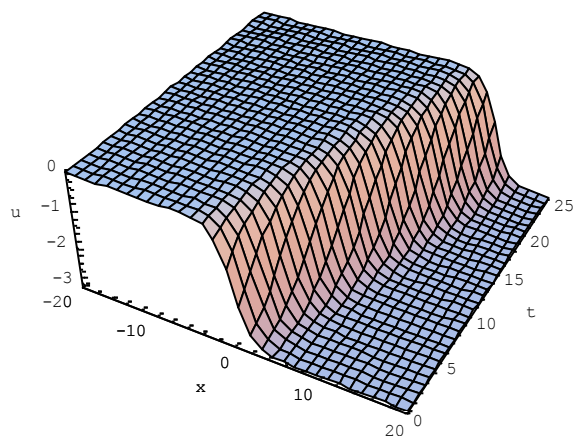


图 3.1 Burgers 方程的扭状孤波解

和奇异行波解(图 3.2)

$$u_2(x, t) = -vk[1 + \coth \frac{1}{2}(kx - \omega t)]$$

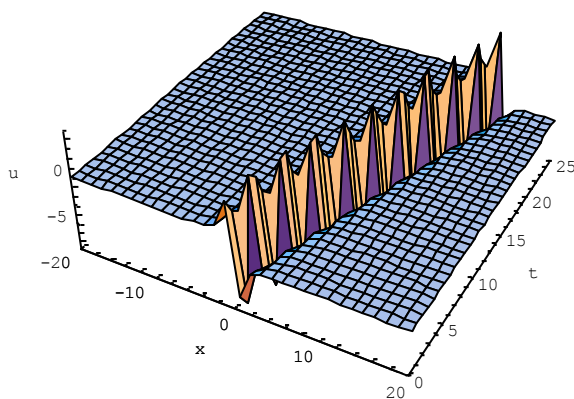


图 3.2 Burgers 方程的奇异行波解

下面用直接积分的方法来求 Burgers 方程的精确解。

### 3.1.1 Burgers 方程的行波变换

Burgers 方程可由如下模型描述

$$u_t + \gamma uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (3.1)$$

引入行波变换

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U(\xi) \\ \xi &= -kx + \lambda t \end{aligned} \quad (3.2)$$

利用上式可将方程(3.1)变换成如下常微分方程

$$\lambda \frac{dU}{d\xi} - \gamma k U \frac{dU}{d\xi} - \nu k^2 \frac{d^2U}{d\xi^2} = 0 \quad (3.3)$$

对上式积分得

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{\lambda}{\nu k^2} U - \frac{\gamma}{2\nu k} U^2 + c \quad (3.4)$$

令  $c=0$ ，方程(3.4)简化为

$$U' = \mu U - U^2 \quad (3.5)$$

其中

$$U' = \frac{dU}{d\varsigma}, \quad \varsigma = \frac{\gamma}{2\nu k} \xi, \quad \mu = \frac{2\lambda}{\gamma k} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Burgers 方程的解

研究方程(3.5)

$$\frac{dU}{d\varsigma} = \mu U - U^2$$

分离变量，有

$$\frac{dU}{\mu U - U^2} = d\varsigma$$

两边分别积分，易知上式具有如下形式的解：

(1) 当  $\mu > 0$  时，方程(3.5)的精确解为

$$U = \frac{C\mu e^{\mu\varsigma}}{Ce^{\mu\varsigma} - 1} \quad (3.7)$$

因此方程(3.1)的解为

$$u(x,t) = \frac{C \frac{2\lambda}{\gamma k} e^{\frac{\lambda}{\nu k^2}(-kx+\lambda t)}}{C e^{\frac{\lambda}{\nu k^2}(-kx+\lambda t)} - 1} \quad (3.8)$$

由式(3.8)表示的解  $u(x,t)$  的结构如图 3.3 所示。

绘图时不妨取

$$\gamma = 0.4, \nu = 2, k = 1, \lambda = 0.5$$

由式(3.6)计算得

$$\varsigma = \frac{\gamma}{2\nu k} \xi = 0.1\xi$$

$$\mu = \frac{2\lambda}{\gamma k} = 2.5$$

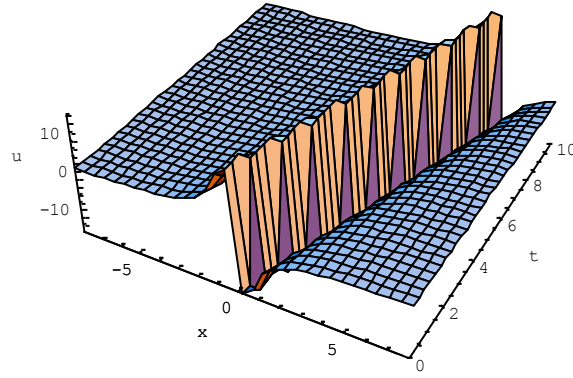


图3.3 式(3.8)表示的解  $u(x,t)$  的结构图

(2) 当  $\mu < 0$  时，方程(3.5)的精确解为

$$U = \frac{\mu}{1 - C e^{-\mu \varsigma}} \quad (3.9)$$

因此方程(3.1)的解为

$$u(x,t) = \frac{\frac{2\lambda}{\gamma k}}{1 - C e^{\frac{\lambda}{\nu k^2}(-kx+\lambda t)}} \quad (3.10)$$

绘图时取

$$\gamma = -0.4, \nu = 2, k = 1, \lambda = 0.5$$

由式(3.6)计算得

$$\varsigma = \frac{\gamma}{2\nu k} \xi = -0.1\xi$$

$$\mu = \frac{2\lambda}{\gamma k} = -2.5$$

由式(3.10)表示的解  $u(x,t)$  的结构如图 3.4 所示。

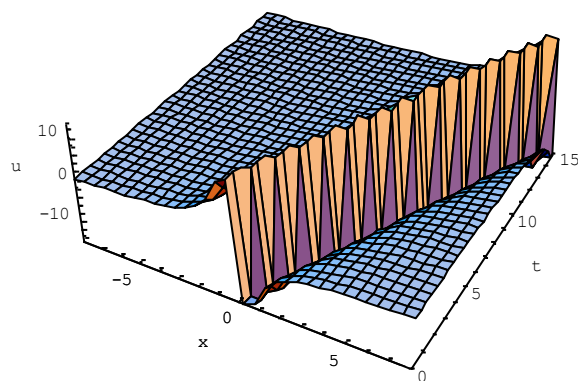


图3.4 式(3.10)表示的解  $u(x,t)$  的结构图

(3) 当  $\mu=0$  时，方程(3.5)的精确解为

$$U = \frac{1}{\varsigma + C} \quad (3.11)$$

因此方程(3.1)的解可描述为

$$u(x,t) = \frac{1}{\frac{\gamma}{2\nu k}(-kx + \lambda t) + C} \quad (3.12)$$

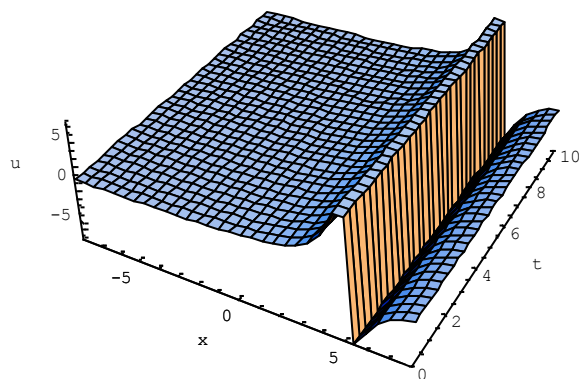


图3.5 式(3.12)表示的解  $u(x,t)$  的结构图

由式(3.6)可知这种情况只在  $\lambda=0$  时才会满足  $\mu=0$ ，因此，时间变化不会影响解的值，由式(3.12)表示的解  $u(x,t)$  的结构如图 3.5 所示。

### 3.2 (2+1) 维 Burgers 方程的行波解

(2+1) 维 Burgers 方程可由如下模型描述

$$\begin{aligned} u_t &= uu_y + avu_x + bu_{yy} + abu_{xx} \\ v_y &= u_x \end{aligned} \quad (3.13)$$

引入行波变换

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(\xi), \quad v(x, y, t) = V(\xi) \\ \xi &= kx + ly + \lambda t \end{aligned} \quad (3.14)$$

利用上式可将方程(3.13)变换为如下形式的常微分方程

$$\begin{aligned} \lambda \frac{dU}{d\xi} &= lU \frac{dU}{d\xi} + akV \frac{dU}{d\xi} + (bl^2 + abk^2) \frac{d^2U}{d\xi^2} \\ l \frac{dV}{d\xi} &= k \frac{dU}{d\xi} \end{aligned} \quad (3.15)$$

对上式积分一次，可得

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{\lambda}{bl^2 + abk^2} U - \frac{l^2 + ak^2}{2l(bl^2 + abk^2)} U^2 + C \quad (3.16)$$

令  $C=0$ ，上式简化为

$$U' = \mu U - U^2 \quad (3.17)$$

其中

$$U' = \frac{dU}{d\varsigma}, \quad \varsigma = \frac{l^2 + ak^2}{2l(bl^2 + abk^2)} \xi, \quad \mu = \frac{2\lambda l}{l^2 + ak^2} \quad (3.18)$$

由于方程(3.17)与方程(3.5)具有相同的形式，因此方程(3.13)的解可用上述类似的方法求得。

(1) 当  $\frac{2\lambda l}{l^2 + ak^2} > 0$  时，方程(3.13)的解为

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{C \frac{2\lambda l}{l^2 + ak^2} e^{\frac{\lambda}{bl^2 + abk^2}(kx + ly + \lambda t)}}{Ce^{\frac{\lambda}{bl^2 + abk^2}(kx + ly + \lambda t)} - 1} \\
 v(x,t) &= \frac{C \frac{2\lambda k}{l^2 + ak^2} e^{\frac{\lambda}{bl^2 + abk^2}(kx + ly + \lambda t)}}{Ce^{\frac{\lambda}{bl^2 + abk^2}(kx + ly + \lambda t)} - 1}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

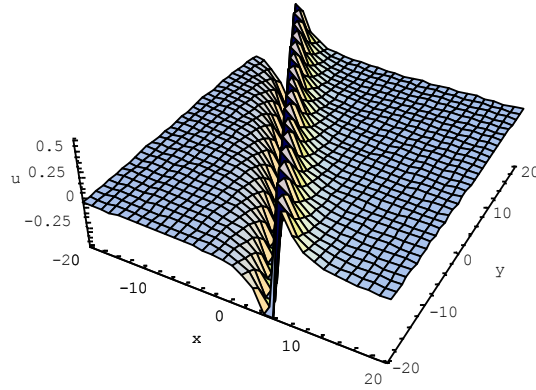
绘图时不妨取

$$a=1, b=0.8, k=1, l=0.5, \lambda=0.2$$

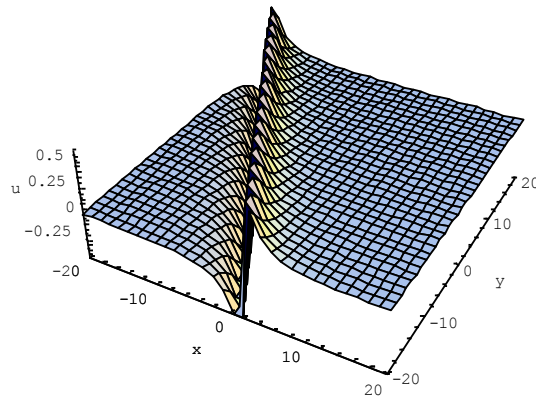
由式(3.18)计算得

$$\begin{aligned}
 \varsigma &= \frac{l^2 + ak^2}{2l(bl^2 + abk^2)} \xi = 1.25\xi \\
 \mu &= \frac{2\lambda l}{l^2 + ak^2} = 0.16
 \end{aligned}$$

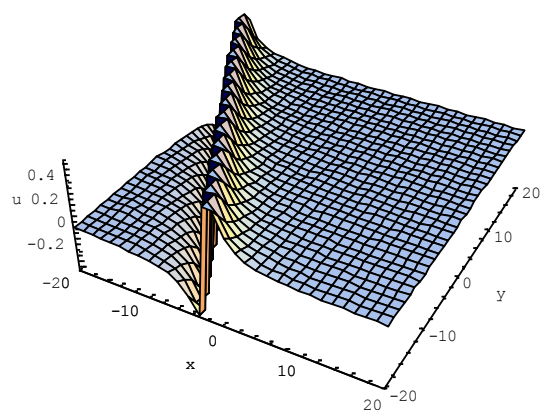
时间分别取  $t=20, 40, 60$  秒, 式(3.19)表示的解  $u(x,y,t)$  如图 3.6 所示, 解  $v(x,y,t)$  与解  $u(x,y,t)$  类似。



(a)



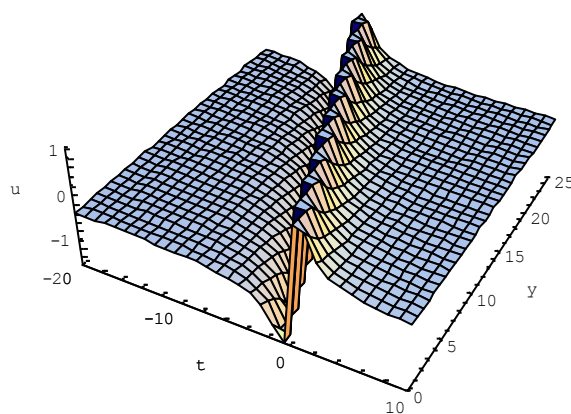
(b)



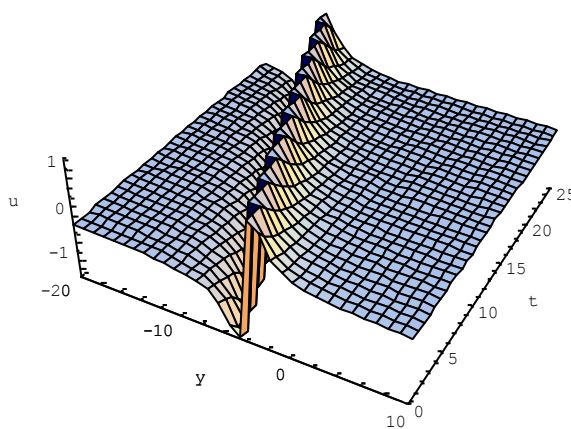
(c)

图3.6 式(3.19)表示的解 $u(x,y,t)$ 的结构图 (a)  $t=20$ , (b)  $t=40$ , (c)  $t=60$

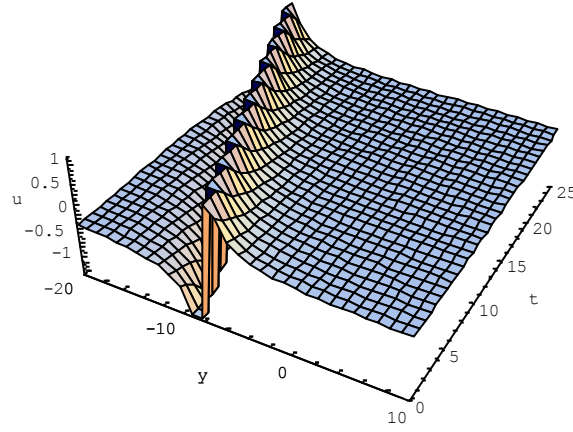
也可以在固定位置画出时间历程图,分别取  $x=0, 2, 4$ , 式(3.19)表示的解  $u(x,y,t)$  如图 3.7 所示, 解  $v(x,y,t)$ 与解  $u(x,y,t)$ 类似。



(a)



(b)



(c)

 图3.7 式(3.19)表示的解 $u(x, y, t)$ 的结构图 (a)  $x=0$ , (b)  $x=2$ , (c)  $x=4$ 

(2) 当  $\frac{2\lambda l}{l^2 + ak^2} < 0$  时, 方程(3.13)的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\frac{2\lambda l}{l^2 + ak^2}}{1 - Ce^{-\frac{\lambda}{bl^2 + abk^2}(kx + ly + \lambda t)}} \\ v(x, t) &= \frac{\frac{2\lambda k}{l^2 + ak^2}}{1 - Ce^{-\frac{\lambda}{bl^2 + abk^2}(kx + ly + \lambda t)}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

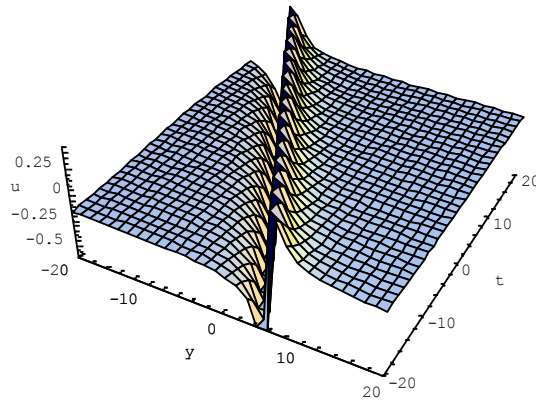
仍然取

$$a=1, \quad b=0.8, \quad k=1, \quad l=0.5, \quad \lambda = -0.2$$

由式(3.18)计算得

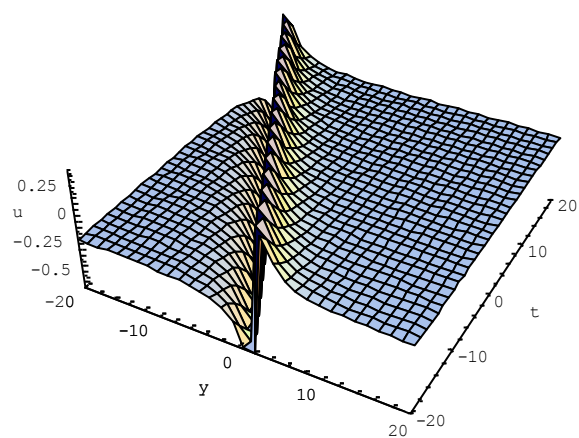
$$\zeta = 1.25\zeta$$

$$\mu = -0.16$$

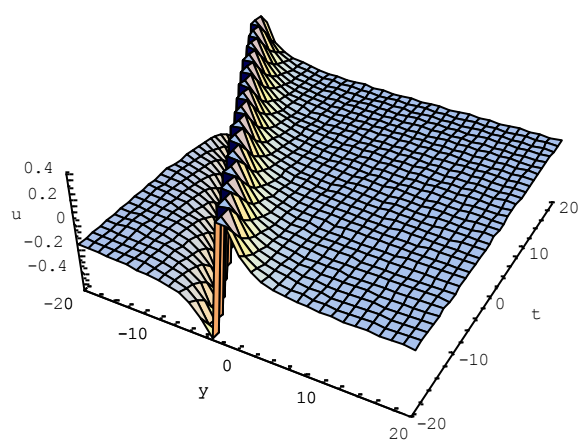


(a)





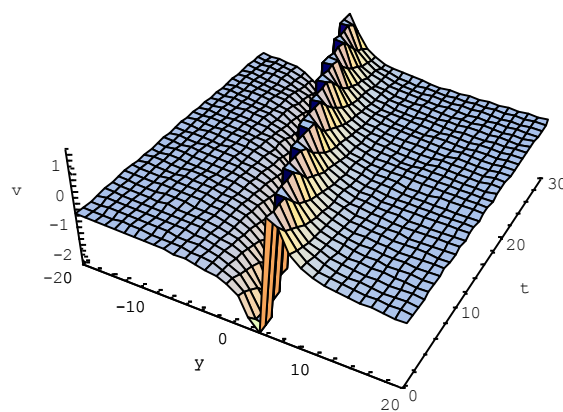
(b)



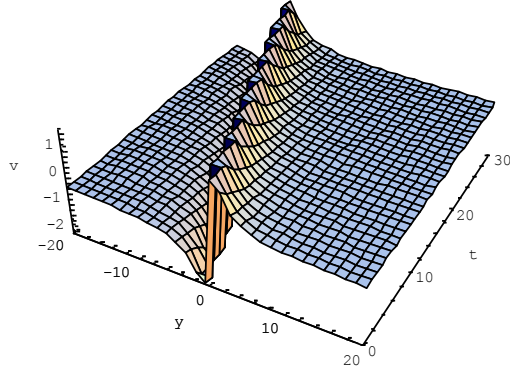
(c)

图3.8 式(3.20)表示的解 $u(x,y,t)$ 的结构图 (a)  $t=20$ , (b)  $t=40$ , (c)  $t=60$

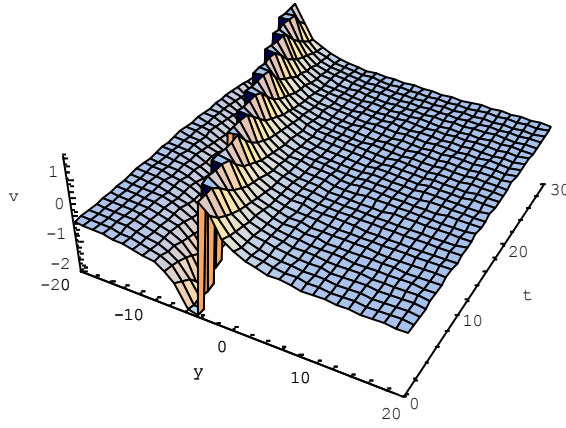
时间分别取  $t=20$ 、 $40$ 、 $60$  秒，式(3.20)表示的解  $u(x,y,t)$  如图 3.8 所示，解  $v(x,y,t)$  与解  $u(x,y,t)$  类似。



(a)



(b)



(c)

 图3.9 式(3.20)表示的解 $v(x,y,t)$ 的结构图 (a)  $x=-2$ , (b)  $x=0$ , (c)  $x=2$ 

也可以在固定位置画出时间历程图, 分别取  $x=-2$ 、 $0$ 、 $2$ , 式(3.20)表示的解  $v(x,y,t)$  如图 3.9 所示, 解  $u(x,y,t)$ 与解  $v(x,y,t)$ 类似。

(3) 当  $\frac{2\lambda l}{l^2 + ak^2} = 0$  时, 方程(3.13)的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\frac{l^2 + ak^2}{2l(bl^2 + abk^2)}(kx + ly + \lambda t) + C} \\ v(x,t) &= \frac{k}{\frac{l^2 + ak^2}{2(bl^2 + abk^2)}(kx + ly + \lambda t) + C} \end{aligned} \quad (3.21)$$

绘图时取

$$a=1, \quad b=0.8, \quad k=1, \quad l=0.5, \quad \lambda=0$$

由式(3.18)计算得

$$\begin{aligned} \zeta &= 1.25\xi \\ \mu &= 0 \end{aligned}$$

因  $\lambda=0$ ，时间变化不会影响解的值，式(3.21)表示的解  $u(x,y,t)$  如图 3.10 所示，解  $v(x,y,t)$  与解  $u(x,y,t)$  类似。

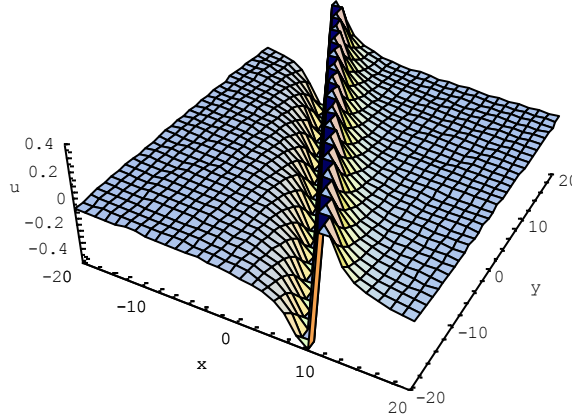


图3.10 式(3.21)表示的解  $u(x,y,t)$  的结构图

### 3.3 Burgers 方程的跨临界分岔

将方程(3.5)写成如下形式

$$\dot{u} = f(u; \mu) = \mu u - u^2 \quad (3.22)$$

由上式描述的一维系统具有跨临界分岔行为。

跨临界分岔是一种典型的静态分岔。静态分岔就是研究方程  $f(u, \mu) = 0$  的多重解的问题，是研究  $\dot{u} = f(u, \mu)$  的平衡点分岔的一个重要内容。

考虑静态方程，其中向量场  $f: U \times J \subseteq R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 。设  $(u_0, \mu_0) \in U \times J$  是静态方程的解，即  $f(u_0, \mu_0) = 0$ 。研究局部静态分岔问题，只关心在点  $(u_0, \mu_0)$  附近方程的解(即  $f$  的零点)的数目随参数  $\mu$  变化的情况。取点  $(u_0, \mu_0)$  的某个足够小的邻域  $\Omega \subset U \times J$ ，记  $n(\mu)$  为当  $\mu$  固定时静态方程在  $\Omega$  内的解数目。如果当  $\mu$  经过  $\mu_0$  时， $n(\mu)$  发生突然变化，则称  $(u_0, \mu_0)$  为一个静态分岔点， $\mu_0$  为一个静态分岔图(或零点集)。总之，静态分岔就是研究方程的多重解的问题。在下面假设  $f$  对  $u$  和  $\mu$  都是足够光滑的。

#### 3.3.1 跨临界分岔的必要条件

下面的定理给出了  $(u_0, \mu_0)$  为静态分岔点的一个必要条件。

**定理：** 设点  $(u_0, \mu_0) \in U \times J$  使得  $f(u_0, \mu_0) = 0$ ，在点  $(u_0, \mu_0)$  附近， $f$  对  $u$  可微，且  $f(u, \mu)$  和  $D_u f(u, \mu)$  对  $u, \mu$  是连续的。若  $(u_0, \mu_0)$  是  $f$  的静态分岔点，则  $D_u f(u_0, \mu_0)$  是不可逆(即奇异)的。

奇异点的定义是：如果在点  $(u_0, \mu_0) \in U \times J$  处有  $f(u_0, \mu_0) = 0$ ，且  $D_u f(u_0, \mu_0)$  是不可逆（即奇异）的，则称  $(u_0, \mu_0)$  为  $f(u, \mu)$  的奇异点。

点  $(u_0, \mu_0)$  为  $f$  的静态分岔点的几个等价的必要条件：

- (1)  $(u_0, \mu_0)$  是  $f$  的奇异点；
- (2)  $f(u_0, \mu_0) = 0$ ，且  $D_u f(u_0, \mu_0)$  至少有一个特征值等于零；
- (3)  $f(u_0, \mu_0) = 0$ ，且  $\det \partial f_i / \partial u_j|_{(u_0, \mu_0)} = 0$ ；
- (4)  $f(u_0, \mu_0) = 0$ ，且  $D_u f(u_0, \mu_0)$  的零空间（即核）的维数  $\dim N(D_u f(u_0, \mu_0)) \geq 1$ 。

考虑单参数静态方程

$$f(u, \mu) = 0, \quad u \in U \subseteq R^n, \quad \mu \in J \subseteq R.$$

如果  $f$  还满足下面的条件：(1)  $f(0, \mu) \equiv 0, \forall \mu \in J$ ；(2)  $b = \Psi[D_u^2 f(0, 0)(\varphi, \varphi)] \neq 0$ ， $c = \Psi D_\mu D_u f(0, 0) \varphi \neq 0$ 。则在  $(u, \mu)$  空间中点  $(0, 0)$  的某个邻域内除了平凡解  $(0, \mu)$  之外，还有方程的一条非平凡解曲线经过  $(0, 0)$ ，用参数方程

$$\begin{cases} u = u(\varepsilon) = \varepsilon \varphi + O(\varepsilon^2) \\ \mu = \mu(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon b}{2c} + O(\varepsilon^2) \end{cases}$$

表示，其中参数  $\varepsilon \in R$ ，且  $|\varepsilon|$  是小量。由上式知方程对  $\mu \neq 0$  有两个解，而对  $\mu = 0$  只有平凡解。这种分岔称为跨临界分岔。

### 3.3.2 Burgers 方程的跨临界分岔

静态方程  $f(u, \mu) = \mu u - u^2 = 0$  有奇异点  $(u_0, \mu_0)$ ，还满足下面的条件：

$$D_x^2 f(0, 0) = -2 \neq 0, \quad D_\mu D_x f(0, 0) = 1 \neq 0, \quad \|\varphi\| = \|\psi\| = 1.$$

因此它具有跨临界分岔。当  $\mu$  由负变正时，对应的动态方程出现稳定性交换现象。

方程(3.5)有两个平衡点， $u_1^* = 0$  和  $u_2^* = \mu$ ，雅克比矩阵为

$$J = \frac{\partial f(u; \mu)}{\partial u} \Big|_{u=0} = \mu \quad (3.23)$$

当  $\mu < \mu_0 = 0$  时，平衡点  $u_1^* = 0$  是稳定的；当  $\mu > \mu_0 = 0$  时，其是不稳定的。因此，平衡点  $(u_1^*, \mu_0) = (0, 0)$  即为分岔点（见图 3.11）。按照类似的讨论可知， $(u_2^*, \mu_0)$  为另一个平衡点。

如图 3.11 所示，直线  $u = 0$  和  $u = \mu$  将平面  $\mu - u$  分成四个部分，A, B, C 和 D。在区域 A, B, C 中， $u$  的曲线如图 3.12 所示；方程(3.22)的解在区域 B 里面是稳定的；而在区域 D 中，方程(3.22)的解是不稳定的。

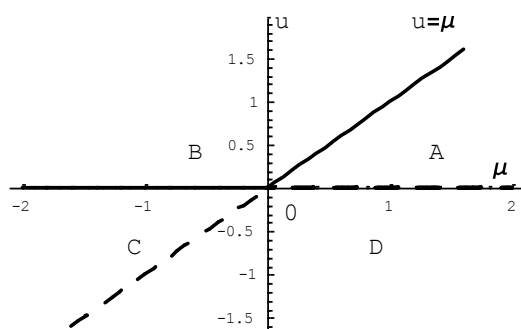


图 3.11 跨临界分岔图

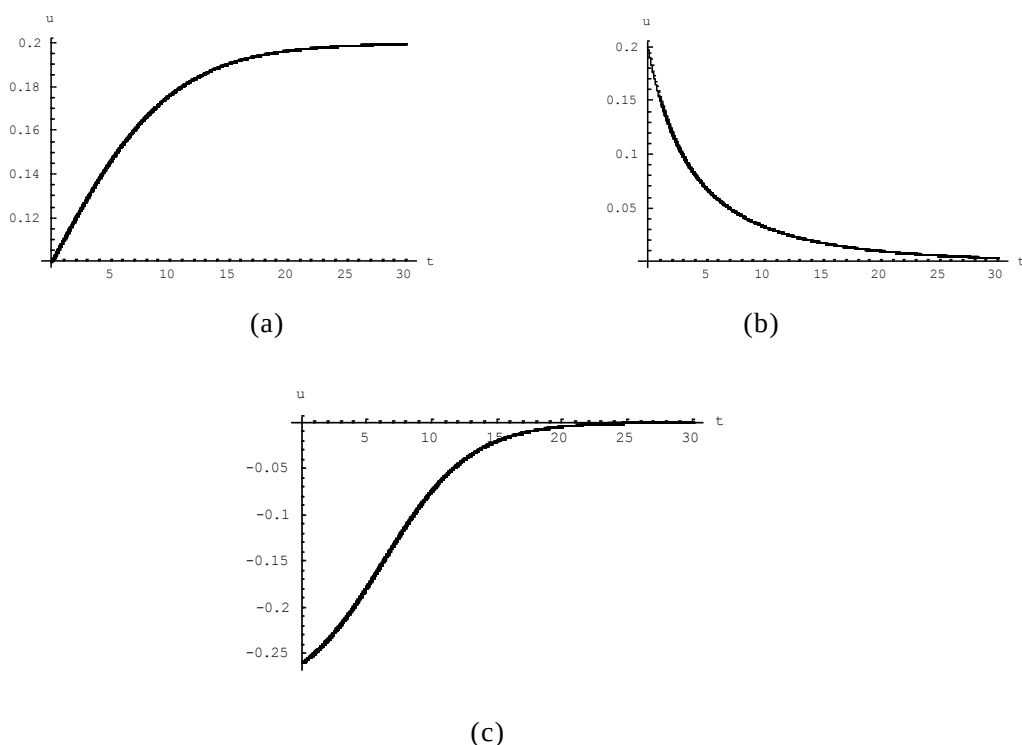


图 3.12 各个区域中的解  $u$  的曲线图 (a)A 区域, (b)B 区域, (c)C 区域

### 3.4 小结

用行波变换和直接积分方法获得了 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程的精确解。利用试探函数法或  $\tanh$  函数展开法等方法也能得到 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程的孤波解，本章的方法更简单。对上述方程的静态分岔行为进行了分析，发现 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程均具有典型的跨临界分岔行为。对于由非线性偏微分方程控制的无限维系统，分岔控制的研究成果还很少。跨临界分岔行为是针对一维系统，本章将 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程直接化成为一维系统，对于高维系统要用中心流形等方法对非线性偏微分方程或行波变换后的非线性常微分方程进行约化。该方法还可以对偏微分方程的其他类型的静态分岔，如叉形分岔和鞍结分岔等进行分析。

## 第 4 章 无限维系统的三类静态分岔

分岔是非线性科学研究的重要领域之一，它是指在动力系统中，当改变可控制参量时，系统中的定性性质和流的结构也可能会随之改变。无限维动力系统要比有限维系统具有更丰富的非线性动态特征。无限维系统在空间上可能存在分岔行为，而有限维仅在时间上进行分析。由于涉及时空理论，近年来无限维系统的分岔研究成为了物理、力学和化学等学科的研究工作者的热门探讨课题。

无限维非线性动力学系统常常包含一个或多个控制参数，当系统可控制参数值发生变化时，具有新性质的解会被分岔出来，动力系统全局或局部结构发生变化。例如，Kuramoto-Sivashinsky 方程是作为时空增长不稳定性的振幅方程出现在许多不同的物理现象中，其分岔等动力学行为已经在理论与数值上得到了验证。非平衡相变和波动理论中经典的 Ginzburg-Landau 方程具有分岔行为；文献[163]利用中心流形约化方法和吸引子分歧理论，分析了在外部周期激励下，复 Ginzburg-Landau 系统在一个均值约束空间中从一个极限环附近分岔出一个新的吸引子，得到了分岔解的显式近似表达式。文献[161]利用摄动法获得了修改的 Burgers-KdV 方程的分岔方程，讨论了它的鞍结分岔。文献[162]利用行波变换将 (2+1) 维 Burgers 方程化为常微分方程，揭示了它的跨临界分岔现象。但是，在迄今为止发现的非线性偏微分方程中，具有分岔行为的无限维非线性系统并不多，远远不如有限维非线性系统研究得彻底。

讨论一类无限维非线性系统的分岔行为，用行波变换将 (2+1) 维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程化为常微分方程，用中心流形方法降维，讨论它的鞍结分岔现象。具有鞍结分岔的非线性偏微分方程还有 (2+1) 维 Konopelchenko-Dubrovsky 方程等等。

鞍结分岔、叉形分岔和跨临界分岔是非线性常微分方程具有的三类典型的静态分岔。在已有的非线性偏微分方程中，已经发现具有鞍结分岔、跨临界分岔行为的无限维非线性系统。但是，目前还没有发现具有叉形分岔行为的无限维非线性系统。本章构造一个具有叉形分岔的非线性偏微分方程，对它进行分析。

### 4.1 无限维系统的鞍结分岔

鞍结分岔现象在一些非线性偏微分方程中可能出现，下面对一些具体的问题进行研究。

#### 4.1.1 Kadomtsev-Petviashvili 方程的鞍结分岔

Kadomtsev-Petviashvili 方程在流体力学、等离子体物理、气体动力学等领域有重要的应用，该方程和它的推广方程有着广泛的物理背景。考虑(2+1)维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程

$$(u_t + 3\alpha u^2 u_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0 \quad (4.1)$$

利用行波变换

$$\xi = kx + ly - \lambda t \quad (4.2)$$

将式(4.2)代入式(4.1)得

$$k \frac{d}{d\xi} \left( -\lambda \frac{dU}{d\xi} + 3k\alpha U^2 \frac{dU}{d\xi} + k^3 \frac{d^3 U}{d\xi^3} \right) + l^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} = 0 \quad (4.3)$$

其中  $U = U(\xi)$ 。积分两次，式(4.3)变为

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} - pU + qU^3 = 0 \quad (4.4)$$

其中

$$p = \frac{k\lambda - l^2}{k^4}, \quad q = \frac{\alpha}{k^2} \quad (4.5)$$

有很多方法可以求方程(4.1)的精确解<sup>[149]</sup>，例如

当  $\frac{k\lambda - l^2}{k^4} > 0$ ,  $\frac{\alpha}{k^2} < 0$  时，有

$$u_1(x, y, t) = \frac{\frac{k\lambda - l^2}{k^4} \csc \frac{\sqrt{\frac{k\lambda - l^2}{k^4}}}{2} (kx + ly - \lambda t)}{2\sqrt{-\frac{\alpha}{2k^2} \cdot \frac{k\lambda - l^2}{k^4}} \cos \frac{\sqrt{\frac{k\lambda - l^2}{k^4}}}{2} (kx + ly - \lambda t)} \quad (4.6)$$

当  $\frac{k\lambda - l^2}{k^4} < 0$ ,  $\frac{\alpha}{k^2} < 0$  时，有

$$u_2(x, y, t) = \frac{-4 \frac{k\lambda - l^2}{k^4} [\cosh \sqrt{-\frac{k\lambda - l^2}{k^4}} (kx + ly - \lambda t) + \sinh \sqrt{-\frac{k\lambda - l^2}{k^4}} (kx + ly - \lambda t)]}{\frac{2\alpha}{k^2} \cdot \frac{k\lambda - l^2}{k^4} - [\cosh \sqrt{-\frac{k\lambda - l^2}{k^4}} (kx + ly - \lambda t) + \sinh \sqrt{-\frac{k\lambda - l^2}{k^4}} (kx + ly - \lambda t)]^2} \quad (4.7)$$

其它形式的解可参见文献[149]。

下面通过研究方程(4.4)来讨论(2+1)维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程的分岔问题。用中心流形方法降维，令

$$u_1 = U, \quad u_2 = \frac{dU}{d\xi}$$

式(4.4)变为

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = pu_1 - qu_1^3 \end{cases} \quad (4.8)$$

将式(4.8)变为扩张系统

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{\mu} = 0 \\ \dot{u}_2 = pu_1 - qu_1^3 \end{cases} \quad (4.9)$$

其中  $\mu = \frac{p}{q}$ 。式(4.9)有中心流形

$$u_2 = h(\mu, u_1) \quad (4.10)$$

利用求导的链式法则，有

$$\dot{u}_2 = \frac{\partial h}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \frac{\partial h}{\partial u_1} \cdot h = pu_1 - qu_1^3 \quad (4.11)$$

设

$$h = a + bu_1 + c\mu - du_1^2 + eu_1^3 + f\mu u_1 + g\mu^2 + \dots \quad (4.12)$$

将式(4.12)代入式(4.11)



$$(b - 2du_1 + 3eu_1^2 + f\mu + \cdots)(a + bu_1 + c\mu - du_1^2 + eu_1^3 + f\mu u_1 + g\mu^2 + \cdots) = pu_1 - qu_1^3 \quad (4.13)$$

比较上式两边的系数,有

$$\begin{aligned} u_1^0: & ab = 0 \\ u_1^1: & -2ad + b^2 = p \\ u_1^2: & -3bd + 3ae = 0 \\ u_1^3: & 4be + 2d^2 = -q \\ \mu^1: & af + bc = 0 \\ \mu^2: & cf + bg = 0 \\ \mu u_1: & -2cd + 2bf = 0 \end{aligned}$$

可求得

$$a = \pm \frac{p}{\sqrt{-2q}}, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = \mp \sqrt{-\frac{q}{2}}, \quad e = 0, \quad f = 0, \quad g = 0 \quad (4.14)$$

式(4.8)的约化系统是

$$\dot{u}_1 = a - du_1^2 \quad (4.15)$$

式(4.15)写成标准形式

$$\dot{u} = f(u; \mu) = \mu - u^2 \quad (4.16)$$

一维系统(4.16)有典型的静态分岔,称为鞍结分岔。在  $\mu_0 = 0$ , 它有平衡点  $u_1^* = 0$ ; 在  $\mu \geq 0$ , 有  $(u^*)^2 = \mu$ 。对于  $\mu > \mu_0 = 0$ ,  $u_2^* = \sqrt{\mu}$  是稳定的, 而  $u_3^* = -\sqrt{\mu}$  是不稳定的(图 4.1)。

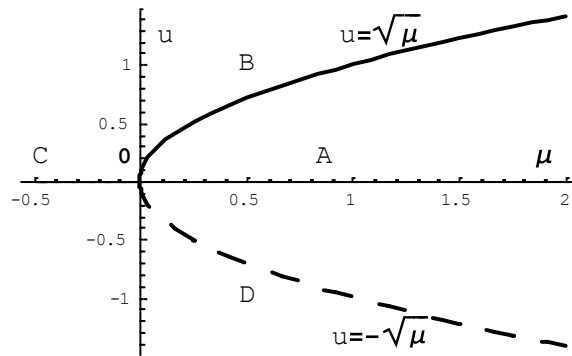


图 4.1 鞍结分岔

曲线  $\mu=0$  和  $u^2=\mu$  将  $\mu-u$  参数平面分成 A、B、C 和 D 四个部分。在区域 A 和 B 中,  $u-\zeta$  曲线如图 4.2 所示, 式(4.16)的解是稳定的; 在区域 C 和 D, 式(4.16)的解是不稳定的。

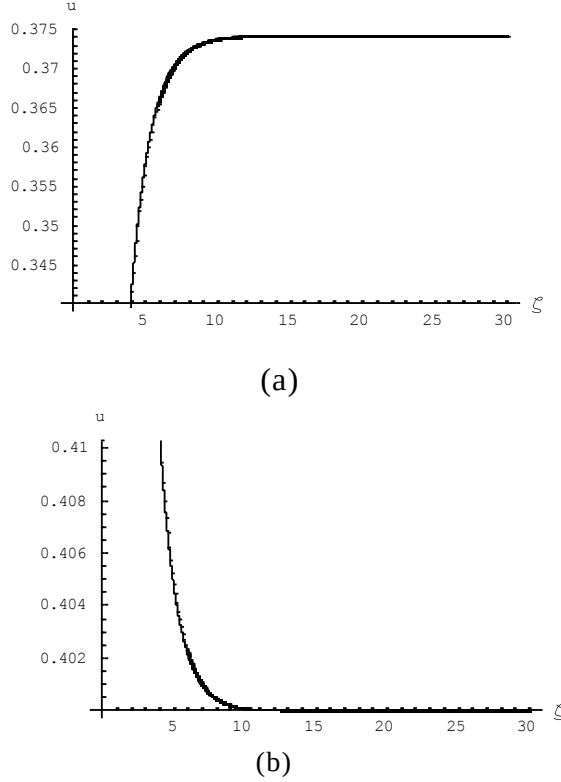


图 4.2  $u-\zeta$  曲线 (a) A 区域 (b) B 区域

考虑单参数静态方程  $f(u, \mu)=0$ ,  $u \in U \subseteq R^n$ ,  $\mu \in J \subseteq R$ 。定理 3.1 给出了  $(u_0, \mu_0)$  为静态分岔点的一个必要条件。

鞍结分岔的充分条件: 如果  $a = \psi D_\mu f(0,0) \neq 0$ ,  $b = \psi[D_u^2 f(0,0)(\varphi, \varphi)] \neq 0$  (表示  $f(u, \mu)$  在  $(u_0, \mu_0)$  处的 1 阶微分), 则在  $(u, \mu)$  空间中点  $(0,0)$  的某个邻域内, 有一条解曲线经过  $(0,0)$ , 可用参数方程

$$\begin{cases} u = u(\varepsilon) = \varepsilon \varphi + O(\varepsilon^2) \\ \mu = \mu(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2 b}{2a} + O(\varepsilon^3) \end{cases} \quad (4.17)$$

表示, 其中参数  $\varepsilon \in R$ , 且  $|\varepsilon|$  是小量。由上式知当  $a$  与  $b$  异号(或同号)时, 方程对  $\mu < 0$  (或  $> 0$ ) 无解, 而对  $\mu > 0$  (或  $< 0$ ) 有两个解, 它们分别对应  $\varepsilon > 0$  和  $\varepsilon < 0$ , 且当  $\varepsilon = 0$  时在  $(0,0)$  处汇合。图 4.1 表示的鞍结分岔中, 对应动态方程的平衡解实线表示稳定, 虚线表示不稳定。点  $(0,0)$  称为解的转向点(或极限点)。

静态方程  $f(u, \mu) = \mu - u^2 = 0$  具有鞍结分岔。易知

$$D_\mu f(0,0) = 1 \neq 0,$$

$$D_u^2 f(0,0) = -2 \neq 0$$

记  $L = D_u f(0,0)$ , 设  $L$  有一个(代数上)单重特征值等于零, 其余特征值的实部皆不为零。  $L$  的零特征值对应右单位特征(列)向量  $\varphi \in R^n$  和左单位特征(行)向量  $\psi \in R^n$ , 即  $L\varphi = 0$ ,  $\psi L = 0$ ,  $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ 。

#### 4.1.2 非线性 Klein-Gordon 方程的鞍结分岔

非线性 Klein-Gordon 方程具有鞍结分岔行为。置于弹性基础上的张紧索的横向振动可以用著名的非线性 Klein-Gordon 方程来描述。考虑一根均匀、柔软、弹性的理想索, 其质量密度为  $\rho_0$ , 置于弹性基础上, 索张紧。对索的横向振动有两点假设: (1) 索上各点的运动都在同一平面内; (2) 索的变形是微小的。

研究索受到外界扰动后的振动, 如图 4.3 所示。设在平衡位置为坐标原点, 横坐标为  $x$  的点在时刻  $t$  的横向位移为  $u$ ,  $u = u(x, t)$ , 即  $u$  是  $x$  和  $t$  的函数。取索上微元段  $dx$ , 其运动后变形为  $ds$ 。设微元段  $dx$  在  $x$  处的张力为  $T(x)$ , 在  $x+dx$  处的张力为  $T(x+dx)$ 。由于索是放在弹性基础上的, 如果假设弹性基础所产生的力是非线性的, 与一次项和三次项有关, 则相当于索在单位长度上受到一个力

$$F(x, t) = -k_1 u(x, t) - k_3 u^3(x, t) \quad (4.18)$$

作用。

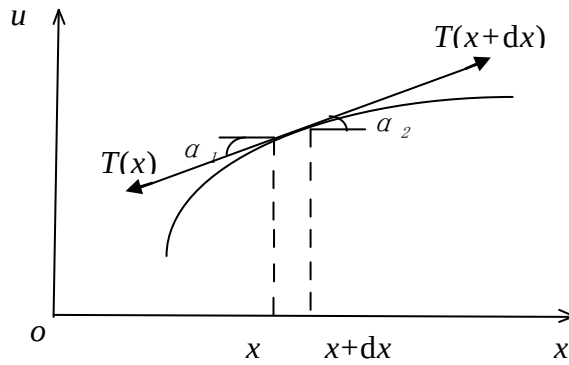


图 4.3 索的横向振动

由于假设索的变形是微小的, 故有以下的几何关系

$$ds = \int_x^{x+dx} \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2} dx \approx dx$$

$$\cos \alpha_1 = \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2} \approx 1$$

$$\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} \right]^2} \approx 1$$

$$\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x}$$

分析  $x$  方向微元段的平衡, 有

$$T(x + dx) \cos \alpha_2 - T(x) \cos \alpha_1 = 0$$

考虑  $\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx 1$ , 则

$$T(x + dx) \approx T(x) \approx T_0 \quad (4.19)$$

其中  $T_0$  是索中的初始张力。

微元段  $dx$  在  $u$  方向所受合力为

$$T(x + dx) \sin \alpha_2 - T(x) \sin \alpha_1 + F(x + dx, t) - F(x, t) - \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \rho_0 dx = 0$$

即

$$T_0 \left[ \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - [k_1 u(\bar{x}, t) + k_3 u^3(\bar{x}, t)] dx - \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \rho_0 dx = 0 \quad (4.20)$$

其中  $\bar{x}$  是区间  $[x, x + dx]$  中的某一个值, 对式 (4.20) 应用微分中值定理, 有

$$T_0 \frac{\partial^2 u(x + \theta dx, t)}{\partial x^2} dx - [k_1 u(\bar{x}, t) + k_3 u^3(\bar{x}, t)] dx - \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \rho_0 dx = 0 \quad (4.21)$$

上式消去  $dx$ , 并令  $dx \rightarrow 0$ , 则有  $x + \theta dx \rightarrow x$ ,  $\bar{x} \rightarrow x$ , 因此得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^3 = 0 \quad (4.22)$$

其中  $c^2 = T_0 / \rho_0$ ,  $\alpha = K_1 / \rho_0$ ,  $\beta = -K_3 / \rho_0$ 。索的横向振动方程(4.22)就是非线性 Klein-Gordon 方程。

用试探函数法、辅助微分方程等方法求非线性 Klein-Gordon 方程的精确解的文献比较多, 这些解包括孤波解(钟型孤波解、扭结型孤波解)和三角函数周期

解等等。下面进行分岔分析。

对式(4.22)作行波变换

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = kx + \lambda t, \quad (4.23)$$

其中  $k, \lambda$  是常数。则方程(4.22)变为

$$U''(\xi) = \frac{\alpha}{k^2 c^2 - \lambda^2} U(\xi) - \frac{\beta}{k^2 c^2 - \lambda^2} U^3(\xi). \quad (4.24)$$

该方程即式(4.4), 可表示为

$$U''(\xi) = pU(\xi) - qU^3(\xi) \quad (4.25)$$

其中

$$p = \frac{\alpha}{k^2 c^2 - \lambda^2}, \quad q = \frac{\beta}{k^2 c^2 - \lambda^2} \quad (4.26)$$

用中心流形定理降维, 约化式(4.25)为一维系统

$$\dot{u} = \mu - u^2$$

与前面的分析一样, 该方程具有鞍结分岔, 即非线性 Klein-Gordon 方程(4.22)有鞍结分岔行为。

#### 4.1.3 (2+1) 维 KD 方程的鞍结分岔

某些非线性无限维系统在满足一定的条件下具有分岔行为, 像非线性(2+1)维 Konopelchenko-Dubrovsky 方程(KD 方程)就在系统参数满足一定的关系时具有鞍结分岔行为。

KD 方程的一般形式为

$$\begin{aligned} u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_xv &= 0 \\ u_y &= v_x \end{aligned} \quad (4.27)$$

该系统具有一个弱的色散项的非线性波。当  $v_y = 0$  时, 方程(4.27)为 Gardner 方程; 当  $a = 0$  时, 方程(4.27)为 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程; 当  $b = 0$  时, 方程(4.27)为修正的 KP 方程。接下来对(2+1)维 KD 方程进行分岔分析。先进行行波变换

$$U(\xi) = u(x, y, t), \quad V(\xi) = v(x, y, t), \quad \xi = kx + ly + \lambda t \quad (4.28)$$

则式(4.27)为

$$\begin{aligned} \lambda U' - k^3 U''' - 6bkUU' + \frac{3}{2}a^2 k U^2 U' - 3lV' - 3akU'V &= 0 \\ lU' &= kV' \end{aligned} \quad (4.29)$$

将式(4.29)的第 2 式及其积分代入第 1 式得

$$(\lambda - \frac{3l^2}{k})U' - k^3 U''' - 3(2bk - al)UU' + \frac{3}{2}a^2 k U^2 U' = 0 \quad (4.30)$$

积分式(4.30)得

$$U'' + \frac{\lambda k - 3l^2}{k^4}U + \frac{3}{2k^3}(2bk - al)U^2 - \frac{a^2}{2k^2}U^3 = 0 \quad (4.31)$$

当系统参数满足下面的条件

$$2bk - al = 0 \quad (4.32)$$

式(4.31)变为

$$U'' + pU - qU^3 = 0 \quad (4.33)$$

其中

$$p = \frac{\lambda k - 3l^2}{k^4}, \quad q = \frac{a^2}{2k^2} \quad (4.34)$$

式(4.33)与式(4.4)、式(4.25)一样, 用中心流形定理降维, 可约化该式为一维系统

$$\dot{u} = \mu - u^2$$

与前面的分析一样, 该方程具有鞍结分岔, 即非线性(2+1)维 KD 方程(4.27)有鞍结分岔行为。

## 4.2 无限维系统的跨临界分岔

第 3 章讨论了一维 Burgers 方程

$$u_t + \gamma uu_x - \nu u_{xx} = 0$$

和(2+1)维 Burgers 方程

$$\begin{aligned} u_t &= uu_y + avu_x + bu_{yy} + abu_{xx} \\ v_y &= u_x. \end{aligned}$$

具有跨临界分岔。具有跨临界分岔行为的非线性偏微分方程还有(2+1)维 Burgers-KP 方程

$$(u_t + uu_x + vu_{xx})_x + \mu u_{yy} = 0 \quad (4.35)$$

Kadomtsev and Petviashvili 在 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.36)$$

的基础上提出了 KP 方程

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \mu u_{yy} = 0 \quad (4.37)$$

文献<sup>[164]</sup>在 Burgers 方程和 KP 方程的基础上提出了 Burgers-Kadomtsev-Petviashvili (Burgers-KP)方程。

引进波变换

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(\xi) \\ \xi &= kx + ly + \lambda t \end{aligned} \quad (4.38)$$

因此方程(4.35)可变换为

$$k \frac{d}{d\xi} \left( \lambda \frac{dU}{d\xi} + kU \frac{dU}{d\xi} + k^2 \nu \frac{d^2 U}{d\xi^2} \right) + l^2 \mu \frac{d^2 U}{d\xi^2} = 0 \quad (4.39)$$

积分一次，式(4.39)变为

$$k\lambda \frac{dU}{d\xi} + k^2 U \frac{dU}{d\xi} + k^3 \nu \frac{d^2 U}{d\xi^2} + l^2 \mu \frac{dU}{d\xi} = 0$$

这里积分常数取为零。再积分一次，上式变为

$$\frac{dU}{d\xi} = -\frac{k\lambda + l^2 \mu}{k^3 \nu} U - \frac{1}{2k\nu} U^2 \quad (4.40)$$

这里积分常数取为零。式(4.40)简化为

$$U' = \mu U - U^2 \quad (4.41)$$

上式与(3.17)式一致，其中

$$U' = \frac{dU}{d\zeta}, \quad \zeta = \frac{1}{2k\nu} \xi, \quad \mu = -\frac{2(k\lambda + l^2\mu)}{k^2} \quad (4.42)$$

因此可用第三章的方法求得(2+1)维 Burgers-KP 方程的精确行波解。

当  $-\frac{2(k\lambda + l^2\mu)}{k^2} > 0$  时, (2+1)维 Burgers-KP 方程(4.35)的跨临界分岔图如图 4.4(a)

所示; 当  $-\frac{2(k\lambda + l^2\mu)}{k^2} < 0$  时, (2+1)维 Burgers-KP 方程(4.35)的跨临界分岔图如图 4.4(b)所示。

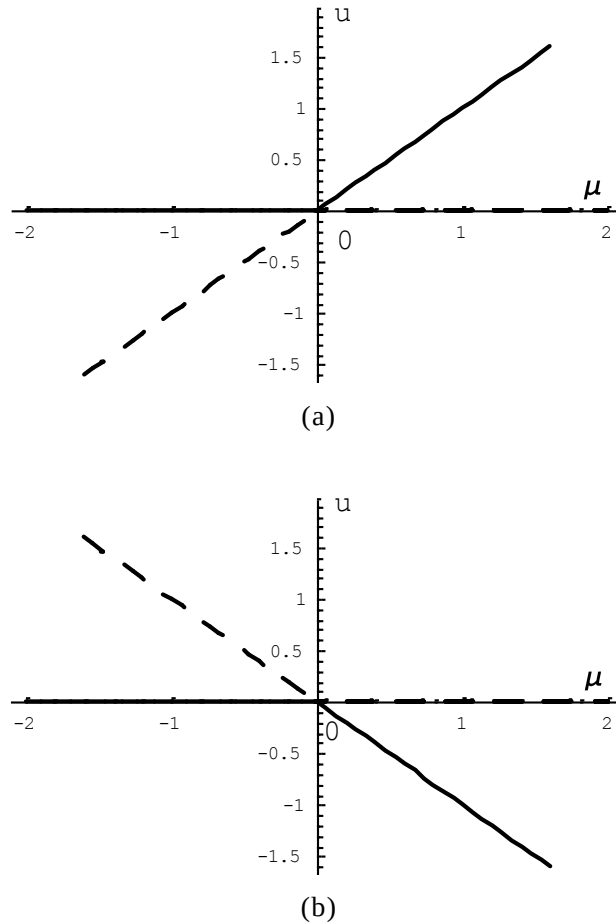


图 4.4 跨临界分岔



### 4.3 无限维系统的叉形分岔

非线性常微分方程有三类典型的静态分岔，即鞍结分岔、叉形分岔和跨临界分岔。非线性偏微分方程也有鞍结分岔<sup>[160]</sup>和跨临界分岔<sup>[161]</sup>行为，但是，在已有的非线性偏微分方程中目前还没有发现叉形分岔行为。我们不妨构造一个方程，虽然目前还不能说明它的物理意义，但是，这个非线性偏微分方程具有叉形分岔行为。

考虑非线性偏微分方程

$$u_t + \gamma u^2 u_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (4.43)$$

利用行波变换  $\xi = -kx + ct$ ，有

$$c \frac{dU}{d\xi} - \gamma k U^2 \frac{dU}{d\xi} - \nu k^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} = 0 \quad (4.44)$$

其中  $U = U(\xi)$ 。积分一次，式(4.44) 变为

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{c}{\nu k^2} U - \frac{\gamma}{3\nu k} U^3 + C \quad (4.45)$$

令积分常数  $C=0$ ，上式变为

$$\dot{u} = \mu u - u^3 \quad (4.46)$$

其中  $\dot{u} = \frac{du}{d\zeta}$ ， $\zeta = \frac{\gamma}{3\nu k} \xi$ ， $\mu = \frac{3c}{\gamma k}$ ， $\mu$  是分岔参数。式(4.27)即

$$\dot{u} = f(u; \mu) = \mu u - u^3 \quad (4.47)$$

一维系统(4.47)具有典型的静态分岔，称为叉形分岔。在  $\mu_0 = 0$ ，它有平衡点  $u_1^* = 0$ ；在  $\mu \geq 0$ ，有  $(u^*)^2 = \mu$ 。易知

$$J = \left. \frac{\partial f(u; \mu)}{\partial u} \right|_{u=u^*} = \mu - 3(u^*)^2 \quad (4.48)$$

因此，当  $\mu < \mu_0 = 0$ ， $u_1^* = 0$  是稳定的；当  $\mu > \mu_0 = 0$ ，它是不稳定的。平衡点  $(u_1^*, \mu_0) = (0, 0)$  是一个分岔点(图 4.5)。同样地，当  $\mu > 0$ ， $(u^*)^2 = \mu$  是稳定的。曲线  $u = 0$  和  $u^2 = \mu$  将平面  $\mu - u$  分成 A、B、C 和 D 四个区域， $u - \zeta$  曲线如图 4.6 所示。

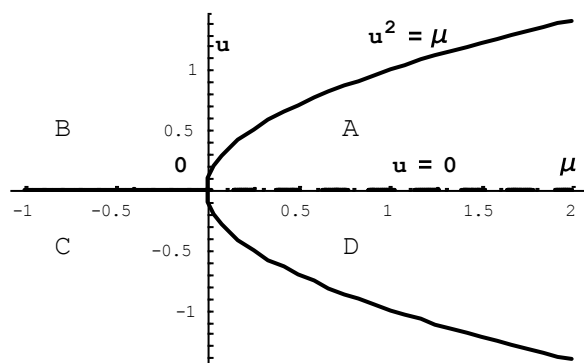
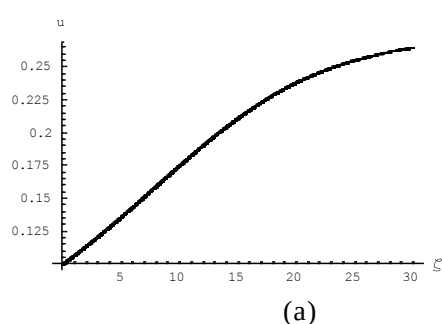
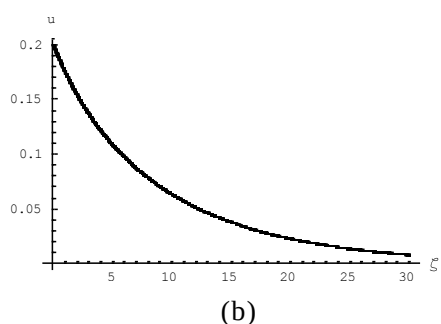


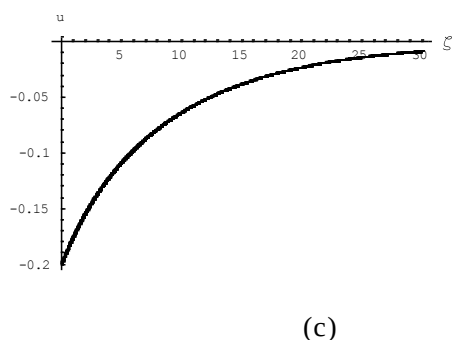
图 4.5 叉形分岔



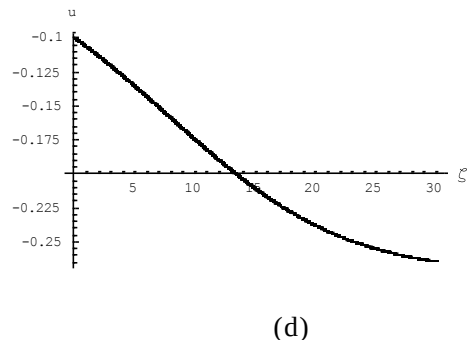
(a)



(b)



(c)



(d)

 图 4.6  $u-z$  曲线 (a) A 区域 (b) B 区域 (c) C 区域 (d) D 区域

考虑单参数静态方程  $f(u, \mu) = 0$ ,  $u \in U \subseteq R^n$ ,  $\mu \in J \subseteq R$ 。定理 3.1 给出了  $(u_0, \mu_0)$  为静态分岔点的一个必要条件。

叉形分岔的充分条件：

(1) 对  $R^n$  中使得  $s\varphi = -\varphi$  的线性变换  $s$  有

$$f(sx, \mu) = sf(x, \mu), \forall \mu \in J \quad (4.49)$$

上式称为对称性条件。特别是当  $u \in R$  时, 有  $s = -I$  ( $I$  为恒等变换), 则上式也可写成

$$f(-u, \mu) = -f(u, \mu) \quad (4.50)$$

即  $f$  是关于  $u$  的奇函数, 方程  $f(u, \mu) = 0$  对一切  $\mu \in J$  有平凡解  $(0, \mu)$ 。

(2)  $c = \Psi D_\mu D_u f(0, 0) \varphi \neq 0$ ,  $e = \Psi[D_u^3 f(0, 0)(\varphi, \varphi, \varphi)] \neq 0$ , 则在  $(u, \mu)$  空间中点  $(0, 0)$  的某个邻域内除了平凡解  $(0, \mu)$  之外, 还有方程的一条非平凡解曲线经过  $(0, 0)$ , 它可用参数方程

$$\begin{cases} u = u(\varepsilon) = \varepsilon \varphi + O(\varepsilon^2) \\ \mu = \mu(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2 e}{6c} + O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (4.51)$$

表示, 这种分岔称为叉形分岔 (图 4.5)。如果非平凡解在  $\mu$  大于分岔值的范围出现, 则称分岔是超临界的, 否则称为亚临界的。

静态方程  $f(u, \mu) = \mu u - u^3 = 0$  具有叉形分岔。易知

$$f(-u, \mu) = -f(u, \mu), \quad D_\mu D_u f(0, 0) = 1 \neq 0,$$

$$D_u^3 f(0, 0) = -6 \neq 0.$$

在各种单参数分岔中, 鞍结分岔是唯一的通有分岔, 其它都是退化分岔。也就是说, 只要对  $f(u, \mu)$  加上适当的小扰动, 就可以使非鞍结分岔的定性性态发生变化。在实际应用中, 只有对系统加上某些限制条件, 即对扰动加以限制, 才能使非鞍结分岔具有保持性。除鞍结分岔外, 其它的单参数静态分岔都要通过引进附加参数的方法才能扩展成通有分岔。

## 4.4 结论

非线性偏微分方程和非线性常微分方程一样也具有鞍结分岔、叉形分岔和跨临界分岔行为。将三类非线性偏微分方程通过行波变换, 化为一阶常微分方程, 本章对其进行了静态分岔分析。满足是鞍结分岔点、叉形分岔点或跨临界分岔点的必要条件是该点必须是奇异点, 这是它们共同的必要条件。另外, 各自还有不同的充分条件必须满足, 才能判断该点是否是这三类分岔点之一。

Burgers 方程、(2+1)维 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers-KP 方程具有跨临界分岔, (2+1)维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程具有鞍结分岔。在非线性偏微分方程中还可以找到具有鞍结分岔、跨临界分岔的其它例子。但是, 目前在非线性偏微分方程中还没有找到具有叉形分岔的实际例子, 本章构造了一个偏微分方程, 分析了其叉形分岔行为。

## 第 5 章 无限维系统的静态分岔控制

非线性系统的分岔行为非常复杂，但是，它并不象混沌现象那样难于预测。因此，分岔控制也就没有混沌控制那样难于掌握。然而，它又不象镇定混沌那样直接，有时混沌控制的目的仅仅是把混沌消除掉。对于微分动力系统，应用常规技术研究分岔控制通常就是简单地把整个分岔现象清除掉，因此，达不到镇定或改变其动力性态的目的。控制分岔行为可以归纳为下面几个方面<sup>[102]</sup>：设计参数值，使系统产生新的分岔；将系统原有的分岔行为提前或者延迟；设计参数值，改变平衡点的位置；改变系统的拓扑结构，改变分岔类型；改变原系统极限环的幅值、频率和数目等等。分岔控制就是设计一个控制器来改变非线性系统的特性，从而获得所需要的动力学行为。人们已经在电网控制与稳定、航空发动机控制、轴向风流压缩器、心脏病节律控制等等方面取得了分岔控制的一些成果。随着常规技术的改进和新技术的发展，分岔可以用一些方法来控制，这些方法在工程等领域得到了应用。

在机械、电力、航空航天、建筑、化工等工程领域普遍存在分岔现象<sup>[133-136]</sup>。分岔控制研究正在形成非线性科学研究的一个新的热点，引起了越来越多科技工作者的兴趣。例如，在一些工程问题中，由于鞍结分岔的存在，会产生跳跃、滞后等具有一定破坏性的动力学行为。在非线性系统中加入适当的线性或非线性控制器，完全可以控制鞍结分岔，使非线性系统的跳跃、滞后现象得到抑制；也可使系统的振动幅值大大减小。Hopf 分岔在工程上客观存在，根据工作需要可以利用它也可以抑制它，因此，提出了通过 Hopf 分岔控制来设计极限环与指定振荡行为。环面分岔控制研究不变环面的产生、消失和变化相关的分岔现象。环面分岔是导致非线性系统出现混沌现象的一种重要途径，具有环面特性的混沌系统具有许多奇特的现象。环面分岔因环面破裂会导致电压失稳，严重时会使电网崩溃。总之，对非线性系统的分岔控制进行研究是非常紧迫的，具有重要的理论意义和工程应用价值。

非线性系统的分岔控制在国际上正在形成一个专门的、新的研究方向。目前，分岔控制的主要手段有反馈控制、自适应控制、washout-filter 方法、规范型方法、频域分析方法、逼近方法等等。在分岔控制中，状态反馈控制是常用的方法，控制器有线性的、非线性的和两者组合的状态反馈控制器。自适应控制根据系统的变量和参考模型的变量之间的偏差来控制系统参数的变化，将控制增益调节到期望目标值，通过系统的全局动态来辨识参数值的变化情况。因此，可以使分岔系统在参数受到扰动后能很快恢复到渐近稳定状态。应用 washout-filter 方法，分岔控制对象可以是低维非线性系统也可以是高维非线性系统，可以对多种分岔行为进行状态反馈控制。规范形方法根据系统的范式不同来进行系统的分类，具有同

一范式的非线性系统都具有相同的分岔特性。具有同一种范式的非线性系统的分岔控制可以采用同一种控制器，即可以采用同一标准来设计系统的分岔控制器。规范形理论是分岔分析和分岔控制的非常有效的工具，因此，规范形方法在分岔控制领域得到了广泛的应用。频域分析和逼近方法使极限环的数目、幅值、频率等得到控制，对 Hopf 分岔控制十分有效。极限环常用数值方法进行求解，解析解一般得不到，只能借助于逼近方法。

## 5.1 自动控制原理

自动控制是指在没有人参与的情况下利用控制装置使生产设备或生产过程自动地按预定的规律运行。自动控制理论<sup>[65-70]</sup>已广泛地应用于人们日常生活、国民经济以及国防建设中，从简单的家用电器到复杂的机器人，从船舶操纵到航空航天都离不开自动控制。随着计算机技术的发展，自动控制从经典控制到智能控制在应用上出现了飞跃。以智能控制为标志的现代控制理论正逐步在新型的控制系统中得到应用。经典控制理论中最重要的部分是以反馈理论为基础的自动控制原理。

### 5.1.1 自动控制形式

由控制器和控制对象组成一个系统，在这个系统对控制对象的工作状态进行自动控制，称其为自动控制系统。自动控制的基本形式有：开环控制、闭环控制和复合控制。

#### (1) 开环控制

系统的输出量只受控于控制作用，而对控制作用不能反过来施加任何影响，这种控制方式称为开环控制。

在开环控制系统中(图 5.1)，由于开环控制器只按照给定的输入信号对被控制量进行单向控制，而不能对控制量进行测量并反向对控制施加影响，因此，开环控制不具有修正由于扰动而出现的被控制量与希望值之间偏差的能力，即不可能产生具有纠正被控制量偏离预定的规律的任何动作，抗干扰能力差。

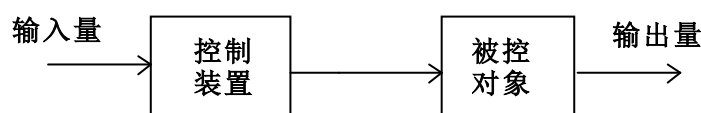


图 5.1 开环控制系统

#### (2) 闭环控制

系统的输出量与控制作用之间存在着负反馈的控制方式，这种控制方式称为闭环控制。其中信息的传送途径是一个自身闭合的环，称为闭环。具有闭环控制的系统称为闭环控制系统(图 5.2)或反馈控制系统。

闭环控制先从被控对象获取信息，反过来又把调节被控量的作用反馈给被控对象。按被控量偏离预定值的相反方向改变控制量的反馈称为负反馈。

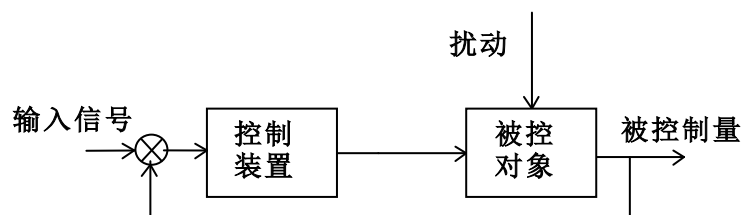


图 5.2 闭环控制系统

### (3) 复合控制

复合控制系统由主反馈回路、前置滤波或扰动补偿装置组合而成(图 5.3)。是开环控制与闭环控制相互配合的控制系统，按开环进行粗调，用闭环进行校正。复合控制系统具有开环控制动作迅速和闭环控制精度高的优点。

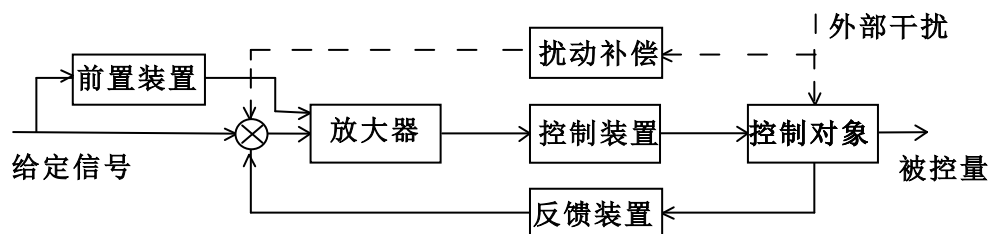


图 5.3 复合控制系统

## 5.1.2 反馈控制

反馈控制是自动控制的主要形式，自动控制系统大多数是反馈控制系统。反馈控制原理就是根据系统输出变化的信息来进行控制，即通过比较系统输出与期望行为之间的偏差，并消除偏差以获得系统预期的运行规律。在图 5.4 所示的反馈控制系统中，既存在由输入信号到输出信号的前向通路，也包含从输出端到输入端的信号反馈通路，系统形成一个闭合的回路。

在反馈控制系统中，不管是外部扰动或系统内部变化的原因使控制量偏离规定值，系统会产生相应的控制作用去消除偏差。因此，它具有修正偏差、抑制干扰的能力，控制系统对元件特性变化不敏感，并能改善系统的响应特性。但是，

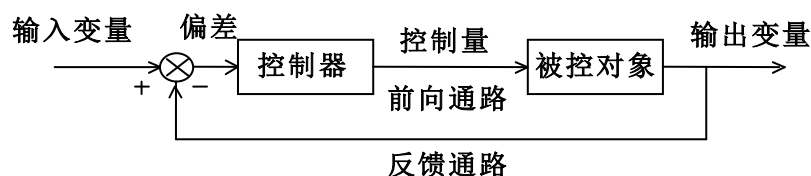


图 5.4 反馈控制系统

由于引入了反馈回路，就增加了系统的复杂性，而且由于选择增益不恰当，也会引起系统的不稳定。

反馈控制系统由控制器、受控对象和反馈通路组成。图 5.4 中带叉号的圆圈与控制器一起称为调节器，起一个比较的作用，用来将输入与输出相减，给出与预定规律偏差的信号。

反馈控制系统有被控对象和控制器两个主要部分，其基本部件有：测量元件、执行元件、比较元件、校正元件、放大元件、整定元件、能源元件等。

反馈控制的方式有负反馈和正反馈。使系统的输出量与目标值的偏差愈来愈小，反馈信息与控制信息的作用方向相反，因而可以纠正控制信息的反馈称为负反馈。使系统的输出量与目标值的偏差愈来愈大，反馈信息不是制约控制部分的活动，而是促进与加强控制部分的活动的反馈称为正反馈。有的系统需要正反馈的作用，正反馈并不都是不好的。

自动控制系统必须是稳定的才能够正常工作。一个实际的控制系统受到外来作用的影响时，经过一个过渡过程仍然能够回到原来的平衡状态，这个系统是稳定的；如果一个实际的控制系统受到外来干扰时，不能够回到原来的平衡状态，这个系统是不稳定的。

稳定的控制过程才是正常的控制过程。稳定的系统受到输入信号时，其被控量的过渡过程是随时间增长而衰减并趋向一个稳定值，输出量最终能与希望值一致。不稳定的控制过程是不正常的控制过程。不稳定的系统其输出量的过渡过程表现为持续振荡，或随着时间的增长不衰减。因此，一个控制系统必须是稳定的，才能够实现所要求的控制功能。本章则主要利用图 5.4 所示的反馈控制系统，来研究对一维系统的静态分岔控制问题。考虑如下形式的单参数方程描述的一维系统

$$\dot{u} = f(u, \mu) \quad (5.1)$$

系统(5.1)的静态方程可描述为

$$f(u, \mu) = 0, \quad u \in U \subseteq R, \quad \mu \in J \subseteq R \quad (5.2)$$

利用反馈控制器  $v(u)$  对上式进行分岔控制，可将式(5.2)变为如下的受控系统

$$f(u, \mu) + v(u) = 0 \quad (5.3)$$

然后，分别设计不同的反馈控制器  $v(u)$ ，实现一维静态系统(5.2)的跨临界分岔、鞍结分岔和叉形分岔控制。

## 5.2 跨临界分岔控制

讨论 Burgers 方程的跨临界分岔控制。在方程(4.22)中引入线性反馈控制器  $v(u, \dot{u})$  后，则系统变为如下受控系统

$$\dot{u} = \mu u - u^2 + v(u, \dot{u}) \quad (5.4)$$

设计反馈控制器为

$$v = e(\mu - u) \quad (5.5)$$

其中  $e$  为控制增益。方程(5.4)可写为

$$\dot{u} = \mu u - u^2 + e(\mu - u) = (u + e)(\mu - u) \quad (5.6)$$

系统(5.6)的静态方程为

$$\mu u - u^2 + e(\mu - u) = 0$$

很明显,  $u_0 = -e, \mu_0 = -e$ , 且

$$f(u_0, \mu_0) = 0$$

$$D_u f(u_0, \mu_0) = 0$$

点  $(-e, -e)$  是一个奇异点。且满足跨临界分岔的充分条件

$$D_x^2 f(-e, -e) = -2 \neq 0$$

$$D_\mu D_x f(-e, -e) = 1 \neq 0$$

系统(5.6)具有跨临界分岔, 点  $(-e, -e)$  是分岔点。

图 5.5 是未控系统的跨临界分岔图, 图 5.6 是受控系统的跨临界分岔图。从图 5.6 看出, 随着控制增益的改变, 方程的解的稳定区域也随之改变。线性反馈控制器不会改变原始系统的分岔特性, 但是改变了分岔点的位置, 并改变了稳定解的区域。

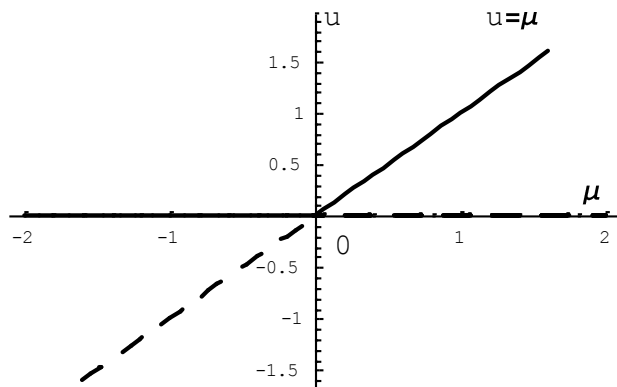


图 5.5 跨临界分岔



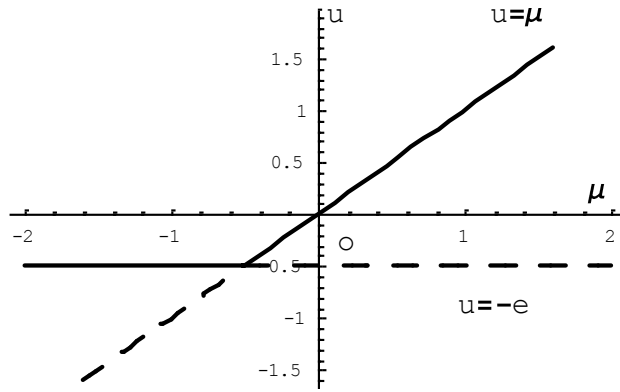


图 5.6 受控系统的跨临界分岔

### 5.3 鞍结分岔控制

考虑(2+1)维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程的鞍结分岔控制, 经过行波变换, 用中心流形方法降维后, 系统化为一阶常微分方程

$$\dot{u} = \mu - u^2 \quad (5.7)$$

利用控制器  $v(u, \dot{u})$  进行分岔控制, 式(5.7)变为受控系统

$$\dot{u} = \mu - u^2 + v(u, \dot{u}) \quad (5.8)$$

设控制器  $v(u, \dot{u})$  为线性的

$$v(u, \dot{u}) = k_1 u \quad (5.9)$$

则式(5.8)变为

$$\dot{u} = \mu - u^2 + k_1 u \quad (5.10)$$

系统(5.10)的静态方程为

$$\mu - u^2 + k_1 u = 0$$

解静态方程得

$$u = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 4\mu}}{2}$$

令

$$u_0 = \frac{k_1}{2}, \quad \mu_0 = -\frac{k_1^2}{4}$$

显然  $u_0, \mu_0$  满足

$$f(u_0, \mu_0) = 0$$

$$D_u f(u_0, \mu_0) = 0$$

点  $(\frac{k_1}{2}, -\frac{k_1^2}{4})$  是一个奇异点。且满足鞍结分岔的充分条件

$$D_\mu f(\frac{k_1}{2}, -\frac{k_1^2}{4}) \neq 0$$

$$D_u^2 f(\frac{k_1}{2}, -\frac{k_1^2}{4}) \neq 0$$

系统(5.10)具有鞍结分岔，点  $(\frac{k_1}{2}, -\frac{k_1^2}{4})$  是分岔点。

未控系统的鞍结分岔如图 5.7 所示，受控系统的鞍结分岔如图 5.8 所示。取  $k_1 = 0.4$ ，系统(5.7)受控后，分岔点的位置发生了改变，方程的解的稳定区域也随之发生了变化。控制器(5.9)是一个线性反馈控制器，它没有改变原系统具有鞍结分岔的特性。

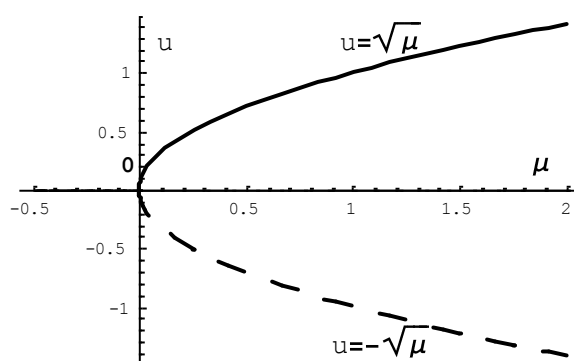


图 5.7 未控系统(5.7)的鞍结分岔

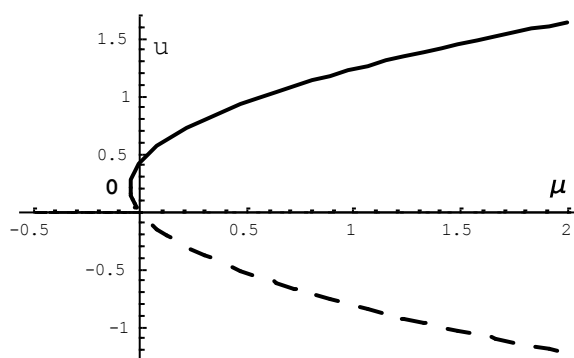


图 5.8 受控系统(5.10)的鞍结分岔

设控制器  $v(u, \dot{u})$  为非线性的

$$v(u, \dot{u}) = k_1 u + k_2 u^2 \quad (5.11)$$

则式(5.8)变为

$$\dot{u} = \mu - u^2 + k_1 u + k_2 u^2 \quad (5.12)$$

系统(5.12)的静态方程为

$$\mu - u^2 + k_1 u + k_2 u^2 = 0$$

解静态方程得

$$u = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 4(1-k_2)\mu}}{2(1-k_2)}$$

令

$$u_0 = \frac{k_1}{2(1-k_2)}, \quad \mu_0 = -\frac{k_1^2}{4(1-k_2)}$$

显然  $u_0, \mu_0$  满足

$$f(u_0, \mu_0) = 0$$

$$D_u f(u_0, \mu_0) = 0$$

点  $(\frac{k_1}{2(1-k_2)}, -\frac{k_1^2}{4(1-k_2)})$  是一个奇异点。且满足鞍结分岔的充分条件

$$D_\mu f(\frac{k_1}{2(1-k_2)}, -\frac{k_1^2}{4(1-k_2)}) \neq 0$$

$$D_u^2 f(\frac{k_1}{2(1-k_2)}, -\frac{k_1^2}{4(1-k_2)}) \neq 0$$

系统(5.10)具有鞍结分岔，点  $(\frac{k_1}{2(1-k_2)}, -\frac{k_1^2}{4(1-k_2)})$  是分岔点。

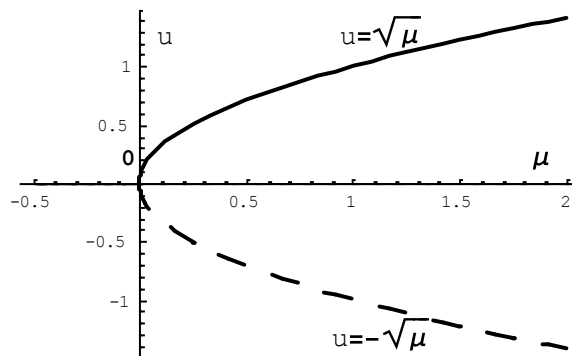


图 5.9 未控系统的鞍结分岔

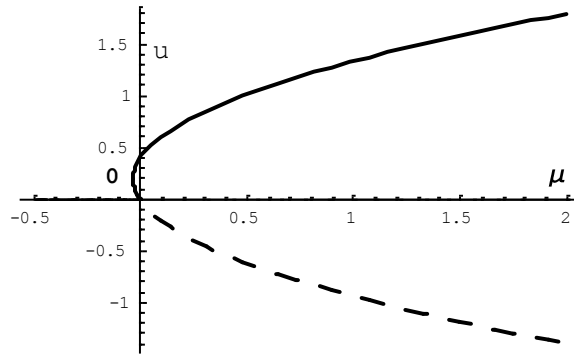


图 5.10 受控系统(5.12)的鞍结分岔

未控系统的鞍结分岔如图 5.9 所示, 受控系统的鞍结分岔如图 5.10 所示。取  $k_1 = 0.3$  和  $k_2 = 0.2$ , 系统(5.7)受控后, 分岔点的位置发生了改变, 方程的解的稳定区域也随之发生了变化。控制器(5.11)是一个非线性反馈控制器, 它也不会改变原系统具有鞍结分岔的特性。

#### 5.4 叉形分岔控制

考虑如下具有叉形分岔的一维系统

$$\dot{u} = f(u; \mu) = \mu u - u^3 \quad (5.13)$$

利用控制器  $v(u, \dot{u})$  进行分岔控制, 式(5.13)变为受控系统

$$\dot{u} = \mu u - u^3 + v(u, \dot{u}) \quad (5.14)$$

设控制器  $v(u, \dot{u})$  为

$$v(u, \dot{u}) = -ku^2 \quad (5.15)$$

则式(5.14)变为

$$\dot{u} = \mu u - u^3 - ku^2 \quad (5.16)$$

讨论静态分岔

$$\mu u - u^3 - ku^2 = 0 \quad (5.17)$$

式(5.17)的解为

$$u = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2} \quad (5.18)$$

$$u = 0$$

令

$$u_0 = -\frac{k}{2}, \quad \mu_0 = -\frac{k^2}{4}$$

显然  $u_0, \mu_0$  满足

$$f(u_0, \mu_0) = 0$$

$$D_u f(u_0, \mu_0) = 0$$

点  $(-\frac{k_1}{2}, -\frac{k_1^2}{4})$  是一个奇异点。且满足鞍结分岔的充分条件

$$D_\mu f(-\frac{k_1}{2}, -\frac{k_1^2}{4}) \neq 0$$

$$D_u^2 f(-\frac{k_1}{2}, -\frac{k_1^2}{4}) \neq 0$$

系统(5.16)具有鞍结分岔，点  $(-\frac{k_1}{2}, -\frac{k_1^2}{4})$  是分岔点。

从式(5.18)可知：

当  $\mu < -\frac{k^2}{4}$  时，式(5.17)只有一个解  $u_1 = 0$ ；

当  $\mu = -\frac{k^2}{4}$  时，式(5.17)有二个解， $u_1 = -\frac{k}{2}$ ， $u_2 = 0$ ；

当  $\mu > -\frac{k^2}{4}$  时，式(5.17)有三个解， $u_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2}$ ， $u_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2}$ ，

$u_3 = 0$ 。

取控制参数  $k = -0.4$ ，未控系统的叉形分岔如图 5.11 所示，受控系统(5.17)的叉形分岔如图 5.12 所示。

系统受控后，分岔点发生了改变，系统(5.16)的稳定区域发生了改变：当  $\mu \leq 0$  时，系统(5.16)的解是稳定的；当  $\mu > 0$  时，解  $u_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2}$ ， $u_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 + 4\mu}}{2}$  是稳定的，解  $u_3 = 0$  是不稳定的。

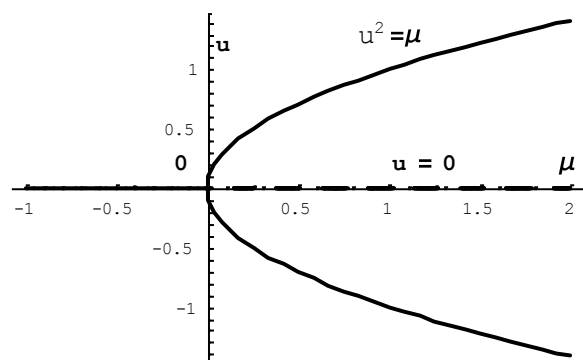


图 5.11 未控系统的叉形分岔

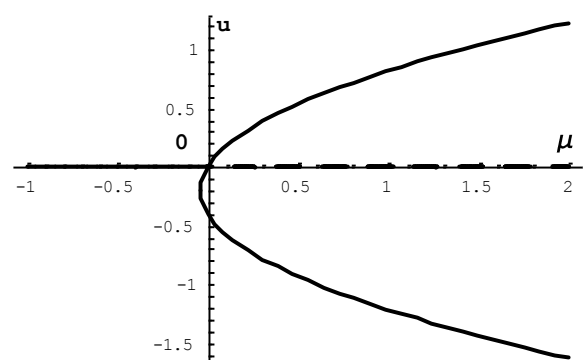


图 5.12 受控系统的叉形分岔

## 5.5 小结

采用变换方法研究无限维非线性系统的分岔有两种方式，一种是采用精确变换，用行波变换等方法将非线性偏微分方程变换为常微分方程，通过研究变换后的常微分方程来研究无限维系统的分岔；另外一种是采用近似变换，将非线性偏微分方程按本征模展开，得到模式振幅的微分方程组，在较高阶模处截断该微分方程组，化为常微分方程组，再应用分岔理论进行研究。近似处理方式需要分析这种截断对无限维非线性系统的动力学行为不会产生定性性质和结构性影响。本文采用的是精确处理方式，用行波变换将非线性偏微分方程变换为常微分方程，用中心流形方法降维，分析了某些无限维非线性系统的鞍结分岔、跨临界分岔、叉形分岔行为，在参数平面了解非线性偏微分方程的解的稳定性。用反馈控制方法对无限维非线性系统的三类静态分岔进行了控制，分别设计了线性、非线性的反馈控制器，对无限维系统的鞍结分岔、跨临界分岔、叉形分岔行为进行了有效控制。反馈控制器不会改变原系统的分岔特性，而使非线性系统的分岔点发生了改变，系统解的稳定区域发生了改变。

## 第 6 章 Burgers-KdV 方程的鞍结分岔及其控制

分岔是现象普遍存在于分线性动力系统中，某些系统的主共振中存在鞍结分岔现象<sup>[161,165]</sup>。例如，文献[166]研究了安全阀的的鞍结分岔及其极限环的跳跃和时滞现象；文献[167]构造了一个同时含有平方和立方非线性项的模型来研究刚性悬臂梁的定常角速度转动问题；文献[168]分析了一种非接触式原子力显微镜的悬臂在压电层激励下的频率与响应函数。很多经典的变换方法的和分解方法被相继提出并用来寻找非线性发展方程的解析孤立波解<sup>[169-172]</sup>；文献[173]和[174]研究了受迫 Burgers 方程和变系数的 KdV 方程；通过变量变换，一些受迫偏微分方程可以转化成为受迫常微分方程，分析变换后的常微分方程的频率与响应函数，可以研究受迫偏微分方程的分岔特性，并通过各种分馈控制方法得到动力系统的较满意的动力学行为<sup>[175-178]</sup>。

Burgers-Korteweg-de-Vries 方程（Burgers-KdV 方程）是一个用途广泛的物理模型，在尘埃等离子体的尘埃粒子冲击波、粘性流体在弹性管中的传输、液体流中的汽包和湍流等方面扮演重要的角色<sup>[169]</sup>。

在本章中我们首次发现在某些特定情况下 Burgers-KdV 方程会出现鞍结分岔。为了控制分岔的发生，设计了相应的控制器来去除或者延迟系统极限环跳跃和时滞现象的发生。通过利用线性和非线性反馈控制器，原方程的不稳定区域能够被移动，并且鞍结分岔现象的也发生了改变。利用数值计算，将未受控的系统与受控系统进行了比较，证明了所设计的控制器能有效的实现 Burgers-KdV 方程的鞍结分岔控制。

具有鞍结分岔行为的还有 mKdV 方程等非线性系统。本章求出了 mKdV 方程的一阶近似和二阶近似频率响应方程，即分岔方程，根据该非线性系统的频率响应方程绘制了鞍结分岔图。

### 6.1 Burgers-KdV 方程的行波变换

考虑如下形式的非线性偏微分方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (6.1)$$

引入行波变换

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = kx + ct \quad (6.2)$$

将(6.2)代入(6.1)并积分一次即可得到

$$O(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (6.3)$$

上式即为只含一个变量  $\xi$  的常微分方程。

类似的，考虑如下形式的非齐次偏微分方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = f(x, t) \quad (6.4)$$

同样利用(6.2)所示的行波变换并设

$$f(x, t) = f(\xi) \quad (6.5)$$

则方程(6.4)可变为如下形式的常微分方程

$$O(u, u', u'', \dots) = F(\xi) \quad (6.6)$$

现在考虑带有驱动力的改进的 Burgers-KdV 方程

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \mu u_{xx} + \gamma u_{xxx} = f(x, t) \quad (6.7)$$

利用(6.2)所示的行波变换和(6.5)，可以得到

$$cu' + k\alpha u^2 u' + k^2 \mu u'' + k^3 \gamma u''' = f(\xi) \quad (6.8)$$

令

$$f(\xi) = f_0 \cos(\Omega \xi) \quad (6.9)$$

将(6.8)式积分可得

$$u'' + 2\nu u' + \omega^2 u + \beta u^3 = F_0 \sin(\Omega \xi) \quad (6.10)$$

其中

$$\omega^2 = \frac{c}{\gamma k^3}, \quad 2\nu = \frac{\mu}{\gamma k}, \quad \beta = \frac{\alpha}{3\gamma k^2}, \quad F_0 = \frac{f_0}{\gamma k^3 \Omega} \quad (6.11)$$

通过行波变换，将非线性偏微分方程变成了非线性常微分方程。式(6.10)是一个二阶常微分方程，含有立方非线性项。



## 6.2 求 Burgers-KdV 方程的分岔方程

Burgers-KdV 方程的分岔行为可以通过研究一个描述振幅(或相位)与激励频率之间的关系的函数——频率响应函数来分析得到。为了得到分岔方程, 假设该系统是弱非线性的, 因此, 将系统(6.10)写成如下形式

$$u'' + \omega^2 u = \varepsilon[-2\nu u' - \beta u^3 + F_0 \sin(\Omega\xi)] \quad (6.12)$$

其中  $\varepsilon$  为小参数。下面利用摄动理论中的多尺度方法来求系统(6.12)主振动的近似解。

将系统(6.12)的解进行摄动展开, 设

$$u(\xi, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \cdots \quad (6.13)$$

其中  $T_i = \varepsilon^i \xi$  ( $i = 0, 1$ ), 且有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \cdots = D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \cdots \end{aligned} \quad (6.14)$$

其中

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}, \quad D_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2}, \quad \cdots$$

将式(6.13)和(6.14)代入方程(6.12)得

$$\begin{aligned} [D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \cdots](u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots) + \\ \omega^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots) = \varepsilon[-2\nu(D_0 + \varepsilon D_1 + \cdots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots) - \\ \beta(u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots)^3 + F_0 \sin(\Omega T_0)] \end{aligned} \quad (6.15)$$

令方程式(6.15)两边  $\varepsilon$  的同次幂的系数相等, 可得到下列摄动方程

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (6.16)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\nu D_0 u_0 - \beta u_0^3 + F_0 \sin(\Omega T_0) \quad (6.17)$$

方程(6.16)的解为

$$u_0 = a \cos(\omega T_0 - \varphi) \quad (6.18)$$

其中  $a$ 、 $\varphi$  为  $T_1$  的函数。考虑主共振, 有

$$\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$$

其中,  $\sigma$  为调谐参数。

将式(6.18)代入(6.17)得

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = D_1[2\omega a \sin(\omega T_0 - \varphi)] + 2\nu\omega a \sin(\omega T_0 - \varphi) - \\ \beta a^3 \cos^3(\omega T_0 - \varphi) + F_0 \sin(\omega T_0 + \sigma T_1) = 2\omega \dot{a} \sin(\omega T_0 - \varphi) - \\ 2\omega a \dot{\varphi} \cos(\omega T_0 - \varphi) + 2\nu\omega a \sin(\omega T_0 - \varphi) - \frac{1}{4}\beta a^3 [3\cos(\omega T_0 - \\ \varphi) + \cos 3(\omega T_0 - \varphi)] + F_0 \sin(\omega T_0 - \varphi + \sigma T_1 + \varphi) \end{aligned} \quad (6.19)$$

其中  $\dot{a} = \frac{da}{dT_1}$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dT_1}$ 。要消除永年项, 必须令式(6.19)中的  $\sin(\omega T_0 - \varphi)$  和  $\cos(\omega T_0 - \varphi)$  的系数等于零, 即

$$\begin{aligned} 2\omega \dot{a} + 2\nu\omega a + F_0 \cos(\sigma T_1 + \varphi) = 0 \\ -2\omega a \dot{\varphi} - \frac{3}{4}\beta a^3 + F_0 \sin(\sigma T_1 + \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

设  $\gamma = \sigma T_1 + \varphi$ , 则  $\dot{\gamma} = \sigma + \dot{\varphi}$ 。考虑稳态响应, 有  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\gamma} = 0$ , 因此有

$$\begin{aligned} \nu a + \frac{F_0}{2\omega} \cos \gamma = 0 \\ \sigma a - \frac{3\beta}{8\omega} a^3 + \frac{F_0}{2\omega} \sin \gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

消去  $\gamma$ , 有

$$(\nu a)^2 + (\sigma a - \frac{3\beta}{8\omega} a^3)^2 - \frac{F_0^2}{4\omega^2} = 0 \quad (6.22)$$

上述方程即为所要求的频率响应方程, 亦即分岔方程。

### 6.3 鞍结分岔行为

Burgers-KdV 方程(6.7)变换为非线性常微分方程(6.12)是一种精确变换。非线性常微分方程(6.12)具有丰富的动力学行为, 因此 Burgers-KdV 方程(6.7)也具有丰富的动力学行为, 最重要的一种动力学特性是系统会出现鞍结分岔。

在数值模拟中, 设系统的参数为  $\omega = 1.0$ ,  $\nu = 0.05$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $F_0 = 0.3$ 。从图 6.1 可看出系统的幅频响应曲线展现出了系统典型的鞍结分岔行为。该图有以下

特点：

(1) 非线性系统(6.12)有二个分岔点，系统的跳跃现象分别发生在  $\sigma = \sigma_1^*$  和  $\sigma = \sigma_2^*$  处。

(2) 频率由小到大改变与频率由大到小改变，响应的曲线是不相同的。当频率增加(减小)到分岔点值时发生跳跃，而频率减小(增加)到分岔点值时跳跃的发生总落后于前一跳跃的分岔点值，即频率要超过这个值，才发生方向相反的跳跃，系统的响应产生了滞后现象。

(3) 当  $\sigma < \sigma_1^*$  时，系统只有一个解；当  $\sigma = \sigma_1^*$  时，系统有二个解；在频率  $\sigma_1^*$  和  $\sigma_2^*$  之间系统有三个解，有二个解是稳定的，有一个解是不稳定的，图中的实线表示稳定响应，虚线表示不稳定响应；当  $\sigma = \sigma_2^*$ ，系统有二个解；当  $\sigma > \sigma_2^*$  时，系统只有一个解。

(4) 不稳定区域为  $\Delta$ ， $\Delta = \sigma_2^* - \sigma_1^*$ 。在实验时，虚线表示的不稳定响应实际上是不存在的。

(5) 响应的峰值发生了偏移，偏移的程度与非线性项的系数有关，即与非线性的强弱相关。

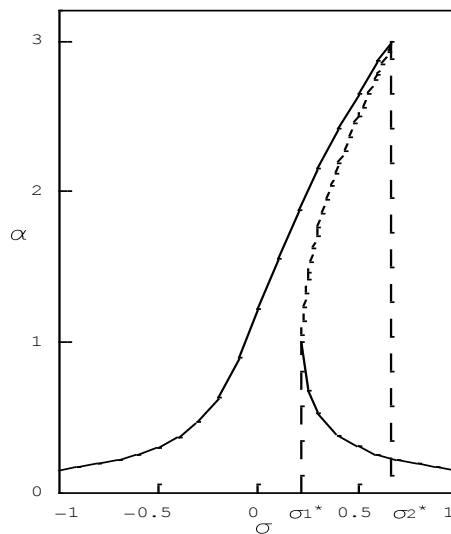


图 6.1 具有鞍结分岔的幅频响应曲线

## 6.4 鞍结分岔控制

如果非线性系统的稳态响应中存在鞍结分岔，则意味着我们不希望看到的跳跃和迟滞现象也将伴随而生。因此，我们设计了相应控制器来消除或者延迟这种分岔现象的发生。对于一个给定的非线性系统，分岔控制就是利用反馈控制技术来改变系统的分岔特性。

### 6.4.1 分岔控制方程

引入如下的一般反馈控制器，并将其代入方程(6.4)，可得到一个受控的非线性系统

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = f(x, t) + \varepsilon q(u, u_x, u_t, \dots, x, t) \quad (6.23)$$

将控制器设计为如下形式

$$q(u, u_x, u_t, \dots, x, t) = h_1 u_x + h_2 u_x^2 u_{xx} \quad (6.24)$$

其中  $h_1$  是线性控制增益， $h_2$  是非线性控制增益。受控方程(6.7)变成了下述的受控方程

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \mu u_{xx} + \gamma u_{xxx} = f(x, t) + \varepsilon(h_1 u_x + h_2 u_x^2 u_{xx}) \quad (6.25)$$

设  $u(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = kx + ct$ ，对式(6.25)进行行波变换

$$cu' + k\alpha u^2 u' + k^2 \mu u'' + k^3 \gamma u''' = f(\xi) + \varepsilon[h_1 k u' + h_2 k^4 (u')^2 u'']$$

积分一次，得

$$u'' + \omega^2 u = \varepsilon[-2\nu u' - \beta u^3 + F_0 \sin(\Omega \xi) + \hat{h}_1 u + \hat{h}_2 u'^3] \quad (6.26)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{c}{\gamma k^3}, \quad \nu = \frac{\mu}{2\gamma k}, \quad \beta = \frac{\alpha}{3\gamma k^2}, \quad F_0 = \frac{f_0}{\gamma k^3 \Omega} \\ \hat{h}_1 &= \frac{h_1}{\gamma k^2}, \quad \hat{h}_2 = \frac{h_2 k}{3\gamma} \end{aligned} \quad (6.27)$$

用多尺度法求解，设式(6.26)的解为

$$u(\xi, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (6.28)$$

其中  $T_i = \varepsilon^i \xi$  ( $i = 0, 1$ )。将式(6.28)以及式(6.14)表示的导数关系一起代入式(6.26)，有

$$\begin{aligned} [D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots](u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \\ \omega^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = \varepsilon[-2\nu(D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) - \\ \beta(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^3 + \hat{h}_1(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \hat{h}_2[(D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)(u_0 + \\ \varepsilon u_1 + \dots)]^3 + F_0 \sin(\Omega T_0)] \end{aligned} \quad (6.29)$$

令方程(6.29)两边  $\varepsilon$  的同次幂的系数相等, 可得到下列摄动方程

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad (6.30)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\nu D_0 u_0 - \beta u_0^3 + \hat{h}_1 u_0 + \hat{h}_2 (D_0 u_0)^3 + F_0 \sin(\Omega T_0) \quad (6.31)$$

其中

$$D_n = \partial / \partial T_n \quad (n = 0, 1)$$

方程(6.30)的解为

$$u_0 = a \cos(\omega \xi - \varphi) \quad (6.32)$$

将式(6.32)代入(6.31)得

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = & D_1 [2\omega a \sin(\omega T_0 - \varphi)] + 2\nu \omega a \sin(\omega T_0 - \varphi) - \\ & \beta a^3 \cos^3(\omega T_0 - \varphi) + \hat{h}_1 a \cos(\omega T_0 - \varphi) - \hat{h}_2 \omega^3 a^3 \sin^3(\omega T_0 - \varphi) + \\ & F_0 \sin(\omega T_0 + \sigma T_1) = 2\omega \dot{a} \sin(\omega T_0 - \varphi) - 2\omega a \dot{\varphi} \cos(\omega T_0 - \varphi) + \\ & 2\nu \omega a \sin(\omega T_0 - \varphi) - \frac{1}{4} \beta a^3 [3\cos(\omega T_0 - \varphi) + \cos 3(\omega T_0 - \varphi)] + \\ & \hat{h}_1 a \cos(\omega T_0 - \varphi) - \frac{1}{4} \hat{h}_2 a^3 \omega^3 [3\sin(\omega T_0 - \varphi) - \sin 3(\omega T_0 - \varphi)] + \\ & F_0 [\sin(\omega T_0 - \varphi) \cos(\sigma T_1 + \varphi) + \cos(\omega T_0 - \varphi) \sin(\sigma T_1 + \varphi)] \end{aligned} \quad (6.33)$$

要消除永年项, 必须令上式  $\sin(\omega T_0 - \varphi)$  和  $\cos(\omega T_0 - \varphi)$  的系数等于零, 即

$$\begin{aligned} 2\omega \dot{a} + 2\nu \omega a - \frac{3}{4} \hat{h}_2 \omega^3 a^3 + F_0 \cos(\sigma T_1 + \varphi) &= 0 \\ -2\omega a \dot{\varphi} - \frac{3}{4} \beta a^3 + \hat{h}_1 a + F_0 \sin(\sigma T_1 + \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

设  $\gamma = \sigma T_1 + \varphi$ , 考虑稳态响应, 有  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\gamma} = 0$ , 因此有

$$\begin{aligned} \nu a - \frac{3}{8} \hat{h}_2 \omega^2 a^3 + \frac{F_0}{2\omega} \cos \gamma &= 0 \\ \sigma a - \frac{3}{8\omega} \beta a^3 + \frac{1}{2\omega} \hat{h}_1 a + \frac{F_0}{2\omega} \sin \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

则受控系统(6.26)的分岔方程为

$$(\nu a - \frac{3}{8}\hat{h}_2\omega^2 a^3)^2 + (\sigma a - \frac{3}{8\omega}\beta a^3 + \frac{1}{2\omega}\hat{h}_1 a)^2 - \frac{F_0^2}{4\omega^2} = 0 \quad (6.36)$$

通过给定不同的控制增益的值，式(6.36)所示的分岔曲线将展现系统(6.25)一些有趣的结果。

## 6.4.2 线性和非线性控制

### (1) 线性控制

若令线性反馈系数 $\hat{h}_1$ 为非零，而非线性反馈系数 $\hat{h}_2$ 等于零，此时，反馈控制器为线性控制器。令系统(6.26)中的系数为： $\omega=1$ ， $\nu=0.05$ ， $\beta=0.2$ ， $F_0=0.3$ ， $\hat{h}_1=0.26$  (0.48)， $\hat{h}_2=0$ 。则受控系统(6.26)为

$$u'' + u = \varepsilon(-0.1u' - 0.2u^3 + 0.3\sin\xi + \hat{h}_1 u) \quad (6.37)$$

数值模拟的结果见图 6.2。浅色的曲线表示未控系统的频率响应曲线。黑色的曲线表示受控系统的频率响应曲线， $\hat{h}_1=0.48$ 时，为左边的曲线； $\hat{h}_1=0.26$ 时，为中间的曲线。线性反馈控制可以使频率响应曲线平行移动，因此，可以改变系统出现鞍结分岔的时机。然而线性控制不能改变曲线的形状，意味着不能消除跳跃和迟滞现象。线性控制不能使区域为 $\Delta(\Delta=\sigma_2^*-\sigma_1^*)$ 发生变化，即不能改变系统的频率响应曲线的稳定区域。同时，在线性控制器下，频率响应曲线中的最大振幅也没有改变。

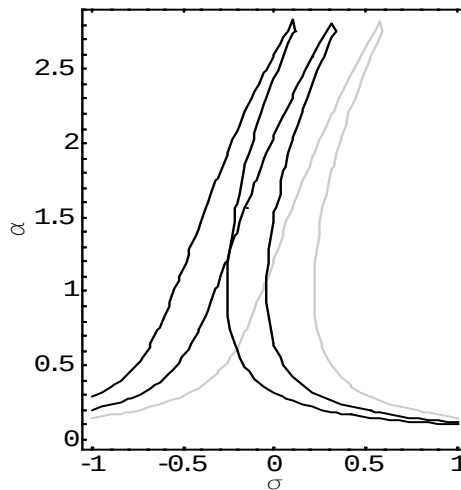


图 6.2 线性控制

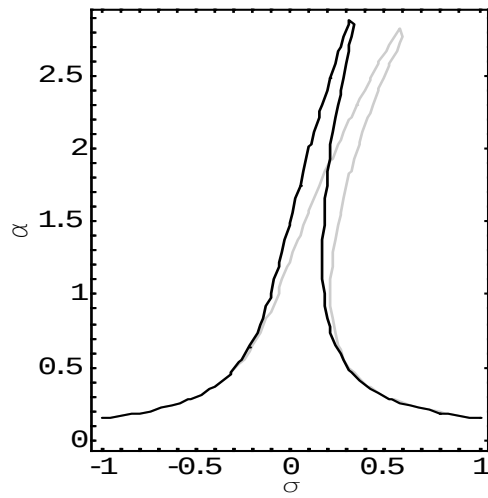
### (2) 非线性控制

若令线性反馈系数 $\hat{h}_1$ 为零，而非线性反馈系数 $\hat{h}_2$ 非零，此时，反馈控制器为非线性控制器。令系统(6.26)中的系数为： $\omega=1$ ， $\nu=0.05$ ， $\beta=0.2$ ， $F_0=0.3$ ， $\hat{h}_1=0$ ，

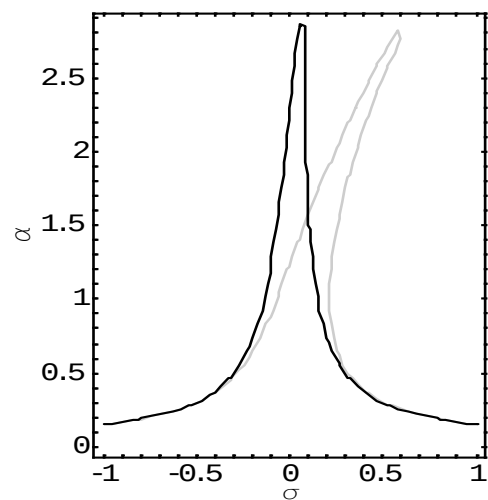
$\hat{h}_2 = 0.26$  (0.4)。则受控系统(6.26)为

$$u'' + u = \varepsilon[-0.1u' - 0.2u^3 + 0.5\sin\xi + \hat{h}_2 u'^3] \quad (6.38)$$

系统在该组参数下的数值模拟如图 6.3 所示, 浅色的曲线表示未控系统的频率响应曲线, 黑色的曲线表示受控系统的频率响应曲线。由图 6.3(a)可见, 非线性控制可以改变解在  $\sigma_1^*$  和  $\sigma_2^*$  之间的稳定区域。随着非线性反馈系数  $\hat{h}_2$  的增大, 不稳定区域  $\Delta$  ( $\Delta = \sigma_2^* - \sigma_1^*$ ) 越来越小。鞍结分岔的跳跃、延迟现象均被改变或者消除, 如图 6.3(b)所示。控制增益  $\hat{h}_2$  和稳定区域  $\Delta$  的关系图如图 6.4 所示。显然,  $\hat{h}_2$  和  $\Delta$  之间的关系是非线性的。在非线性控制器下, 幅频响应曲线中的最大振幅的值没有明显的改变。

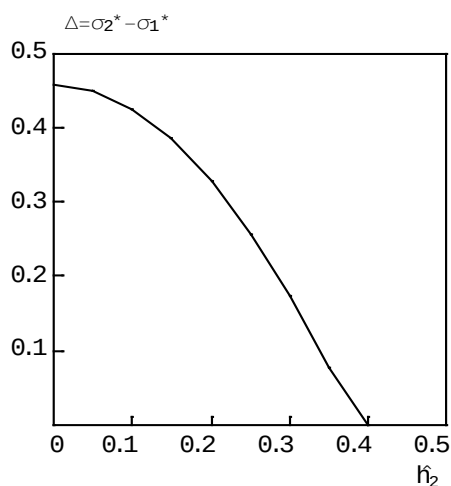


(a)  $\hat{h}_2 = 0.26$



(b)  $\hat{h}_2 = 0.4$

图 6.3 非线性控制


 图 6.4  $\hat{h}_2 - \Delta$  关系曲线

### (3) 线性和非线性组合控制

当线性反馈系数和非线性反馈系数都不等于零时，幅频响应曲线可以平行移动，同时能够完全的消除鞍结分岔。令  $\omega=1$ ,  $\nu=0.05$ ,  $\beta=0.2$ ,  $F_0=0.3$ ,  $\hat{h}_1=0.26$ ,  $\hat{h}_2=0.4$ 。则受控系统(6.26)为

$$u'' + u = \varepsilon[-0.1u' - 0.2u^3 + 0.5\sin \xi + \hat{h}_1 u + \hat{h}_2 u'^3] \quad (6.39)$$

该组参数下的系统的数值模拟结果如图 6.5 所示。通过对比受控系统与未受控系统，不难发现，反馈控制对于 Burgers-KdV 方程的鞍结分岔控制具有较好的效果。

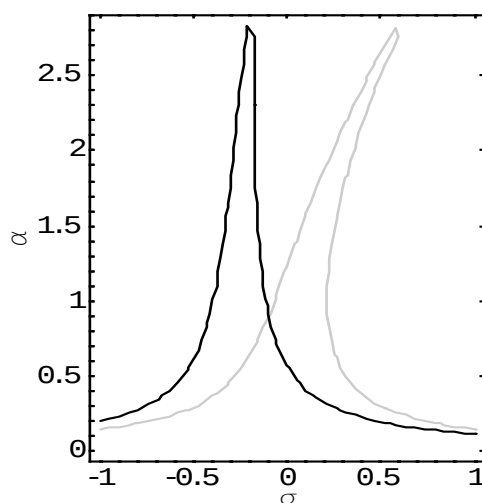


图 6.5 线性和非线性组合控制



## 6.5 mKdV 方程的鞍结分岔

具有鞍结分岔行为的无限维非线性系统还可以列举一些,例如,考虑横向惯性效应的非线性弹性杆的纵向振动,它的控制方程为 mKdV 方程。

研究一等截面的非线性弹性直杆,考虑其无限长、均质、形状任意,承受轴向拉、压载荷,杆的单位长度的质量为  $\rho_0$ 。取柱坐标系  $(r, \theta, x)$ , 直杆的轴向为  $x$  轴。作如下的假设:

(1) 受拉压过程中无限长杆处于单轴应力状态, 即  $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ , 其中  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  分别为径向和环向应力;

(2) 变形考虑横向惯性的影响, 即  $e_r = -\nu e_x$ , 利用无限小应变的几何方程易得到  $u_r = re_r = -\nu r \frac{\partial u}{\partial x}$ ; 其中  $\nu$  为泊松比,  $e_r$ ,  $e_x$  分别为径向和轴向应变,  $u_r$ 、 $u$  分别为径向和轴向位移;

(3) 材料服从非线性弹性的本构方程  $\sigma_x = Ee_x + Ea_n e_x^n$ , 其中  $E$  为材料的弹性模量,  $a_n$ 、 $n$  均为材料常数。在考虑横向惯性引起的几何弥散效应以后, 任意截面的非线性弹性杆的纵向振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3c_0^2 a_3 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu^2 J}{s} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (6.40)$$

其中  $S$  为杆的横截面积,  $J$  为杆横截面的极惯性矩,  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$  是线弹性波的波速,

取  $n=3$ 。

用摄动法求解方程(6.40), 可将该方程变为 mKdV 方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \alpha u^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = f(x,t) \quad (6.41)$$

对 mKdV 方程进行行波变换

$$U(\xi) = u(x,t), \quad V(\xi) = v(x,t), \quad \xi = kx + \lambda t$$

式(6.41)变为

$$\lambda \frac{\partial U}{\partial \xi} + \alpha k U^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta k^3 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = f(\xi) \quad (6.42)$$

设

$$f(\xi) = f_0 \sin(\omega\xi) \quad (6.43)$$

积分一次得

$$U'' + \frac{\lambda}{\beta k^3} U + \frac{\alpha}{3\beta k^2} U^3 = -\frac{f_0}{\beta k^3 \Omega} \cos(\omega\xi)$$

即

$$U'' + \omega_0^2 U + \gamma U^3 = F_0 \cos(\omega\xi) \quad (6.44)$$

其中

$$\omega_0^2 = \frac{\lambda}{\beta k^3} U, \quad \gamma = \frac{\alpha}{3\beta k^2}, \quad F_0 = -\frac{f_0}{\beta k^3 \omega} \quad (6.45)$$

将式(6.44)改写为

$$U'' + \omega^2 U = (\omega^2 - \omega_0^2) U - \gamma U^3 + F_0 \cos(\omega\xi) \quad (6.46)$$

设式(6.46)的零阶近似解为

$$U_0 = a \cos(\omega\xi) \quad (6.47)$$

把  $U_0$  代入式(6.46)的右边，并利用三角公式

$$\cos^3(\omega\xi) = \frac{3}{4} \cos(\omega\xi) + \frac{1}{4} \cos 3(\omega\xi)$$

获得一阶近似方程为

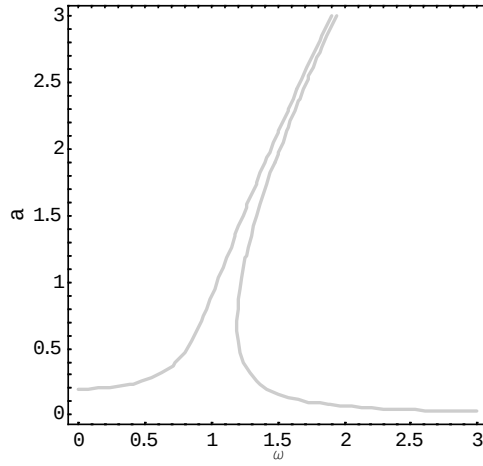
$$U_1'' + \omega^2 U_1 = (\omega^2 - \omega_0^2) a \cos(\omega\xi) - \frac{3}{4} \gamma a^3 \cos(\omega\xi) + F_0 \cos(\omega\xi) - \frac{1}{4} \gamma a^3 \cos(3\omega\xi) \quad (6.48)$$

式(6.48)的右边含  $\cos(\omega\xi)$ ，会使解  $U_1$  产生永年项，令其系数等于零

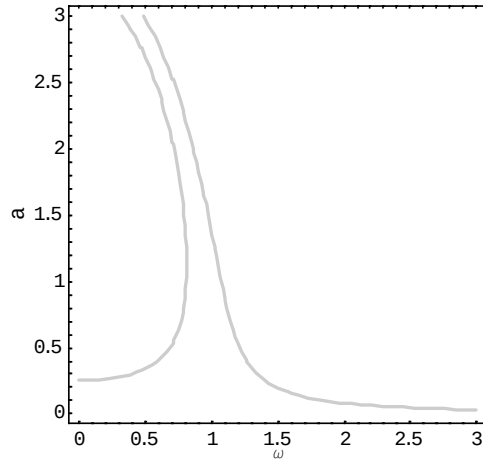
$$(\omega^2 - \omega_0^2) a - \frac{3}{4} \gamma a^3 + F_0 = 0 \quad (6.49)$$

式(6.49)为方程(6.44)的频率响应方程，即分岔方程。作  $a-\omega$  曲线如图 6.6 所示，

可见，考虑横向惯性效应的非线性弹性杆的纵向振动的 mKdV 方程 (6.41) 具有鞍结分岔行为。



(a)



(b)

图 6.6 mKdV 方程的鞍结分岔曲线(6.49) (a)  $\gamma > 0$  (b)  $\gamma < 0$

也可以求方程(6.44)的一阶近似解。消除永年项后，式(6.48)变为

$$U_1'' + \omega^2 U_1 = -\frac{1}{4} \gamma a^3 \cos(3\omega\xi) \quad (6.50)$$

方程(6.50)的解为

$$U_1 = a \cos(\omega\xi) + \frac{\gamma}{32\omega^2} a^3 \cos(3\omega\xi) \quad (6.51)$$

将式(6.51)代入式(6.46)，得到二阶近似解的微分方程，通过消除方程中的永年项，

可得到更精确的分岔方程如下

$$(\omega^2 - \omega_0^2)a - \frac{3}{4}\gamma a^3 - \frac{3\gamma^2}{128\omega^2}a^5 - \frac{3\gamma^3}{2048\omega^4}a^7 + F_0 = 0 \quad (6.52)$$

式(6.49)表示的  $a-\omega$  曲线如图 6.7 所示, 该曲线只是在  $\omega=0$  附近有一点变化, 其余部分与图 6.6 是相同的。说明式(6.49)表示的一阶近似分岔方程有足够的精度。

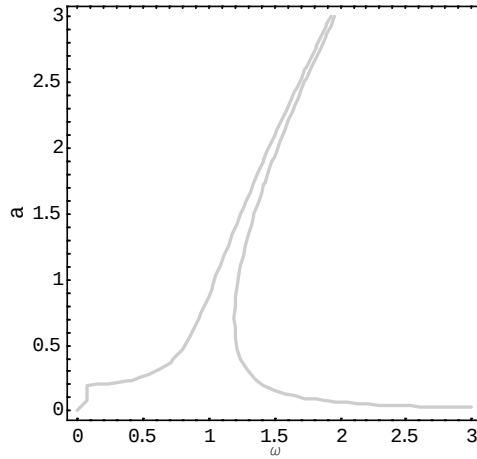


图 6.7 mKdV 方程的鞍结分岔曲线(6.52)

## 6.6 小结

由非线性偏微分方程描述的物理系统具有复杂的动力学行为。带有激励项的 Burgers-KdV 方程的稳态响应有鞍结分岔行为, 在系统的频率响应中存在跳跃和延迟现象。利用摄动方法, 可以得到非线性系统的幅频响应曲线, 并由此绘制出系统的分岔图。揭示常微分方程描述的离散系统的跳跃、滞后现象的文献比较多, 但是, 揭示偏微分方程描述的无限维系统的跳跃、滞后现象的文献很少。这项工作有助于深入了解无限维非线性系统的丰富的动力学行为。

为了实现该系统的分岔控制, 设计了一种反馈控制器, 并根据反馈系数的不同而分别进行了线性控制、非线性控制和线性与非线性联合控制。利用上述控制方法, 可以改变系统的不稳定区域以及系统的非线性特性。通过对 Burgers-KdV 方程分岔特性及其控制的理论分析和数值模拟, 为研究非线性发展方程的分岔控制提供了有效的思路。

一些无限维非线性系统具有鞍结分岔行为。mKdV 方程可以描述考虑横向惯性效应的非线性弹性杆的纵向振动, 用逐次逼近法分别求出了其一阶近似和二阶近似分岔方程, 绘制了频率响应的鞍结分岔图。

## 总结与展望

有限维动力系统的分岔研究已经取得了较丰富的成果，然而无限维动力系统的分岔及其控制研究目前成果还不多。本文以行波变换为基础，通过中心流形方法降维，利用摄动方法求分岔方程，研究了几类经典无限维动力系统的静态分岔问题，并对其控制进行了探讨。主要内容可总结如下：

(1) 基于一种辅助常微分方程方法研究非线性发展方程的行波解。介绍了辅助方程方法的一般步骤以及现有的几种常见的辅助方程，并对这些辅助方程进行了简单的分析。通过对一个辅助微分方程的解的讨论，并借助扩展双曲正切函数法的一些思想，求得了(2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程和广义(2+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的一些精确的行波解。基于这些精确解，可以直接研究非线性偏微分方程的分岔行为。

(2) 利用行波变换和直接积分方法获得了 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程的精确解。并对上述方程的静态分岔行为进行了分析，发现 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers 方程均具有典型的跨临界分岔行为。该方法还可以对偏微分方程的其他类型的静态分岔，如叉形分岔和鞍结分岔等进行分析。

(3) 讨论了非线性偏微分方程和非线性常微分方程一样也具有鞍结分岔、叉形分岔和跨临界分岔行为。将三类非线性偏微分方程通过行波变换，化为一阶常微分方程，并对其进行了静态分岔分析。其中 Burgers 方程、(2+1)维 Burgers 方程和(2+1)维 Burgers-KP 方程具有跨临界分岔，(2+1)维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程具有鞍结分岔。并通过构造一个偏微分方程，分析了该方程的叉形分岔行为。

(4) 采用精确处理方式，用行波变换将非线性偏微分方程变换为常微分方程，用中心流形方法降维，分析了某些无限维非线性系统的鞍结分岔、跨临界分岔、叉形分岔行为，在参数平面了解非线性偏微分方程的解的稳定性。用反馈控制方法对无限维非线性系统的三类静态分岔进行了控制。反馈控制器不会改变原系统的分岔特性，而使非线性系统的分岔点发生了改变，系统解的稳定区域发生了改变。

(5) 研究了带有激励项的 Burgers-KdV 方程的稳态响应具有鞍结分岔行为。利用摄动方法，可以得到非线性系统的幅频响应曲线，并由此绘制出系统的分岔图。为了实现该系统的分岔控制，设计了一种反馈控制器，并根据反馈系数的不同而分别进行了线性控制、非线性控制和线性与非线性联合控制。利用上述控制方法，可以改变系统的不稳定区域以及系统的非线性特性。通过对 Burgers-KdV

方程分岔特性及其控制的理论分析和数值模拟，为研究非线性发展方程的分岔控制提供了有效的思路。

虽然通过上述的研究，本文得到了一些有意义的结果，然而仍有许多地方需要在今后的工作中继续改进。

(1) 基于一种辅助常微分方程方法研究了非线性发展方程的行波解，基于这些行波解，可研究无限维动力系统的行波分岔，但是若无限维系统行波变换以后的非线性常微分方程没有精确解，则不能用辅助常微分方程方法求解，这是该方法存在的局限与不足。

(2) 利用行波变换和直接积分方法获得了一类无限维动力系统的行波解，并分析了上述方程的静态分岔行为，然而该方法是否具有更广的适用范围仍需进行后续的研究。

(3) 分析了无限维动力系统的三类静态分岔，Burgers 方程、(2+1)维 Burgers 方程和 (2+1) 维 Burgers-KP 方程具有跨临界分岔，(2+1) 维修改的 Kadomtsev-Petviashvili 方程具有鞍结分岔。然而，在非线性偏微分方程中还没有找到叉形分岔的实际例子，我们只能通过构造一个例子来研究，因而使得该研究的物理意义打了折扣，希望在以后的研究中能有符合叉形分岔条件的实际系统。

(4) 通过设计了一种反馈控制器研究了 Burgers-KdV 和 mKdV 方程的鞍结分岔控制，为研究非线性发展方程的分岔控制提供了有效的思路。然而该方法是否能够直接运用到其他更复杂的系统，仍需进行后续的进一步研究

## 参考文献

- [1] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1988
- [2] 郭柏灵. 非线性演化方程. 上海科技教育出版社, 1995
- [3] 郭柏灵, 井竹君. 无穷维动力系统. 数学的实践与认识, 1996, 2:90-96
- [4] 晏汀. 固体力学中的非线性问题与分岔: [武汉理工大学博士学位论文]. 武汉: 武汉理工大学, 2007, 2-13
- [5] Evans L. Partial differential equations. Providence: American Math Society, 1998,53-92
- [6] 库比切克, 马雷克. 分岔理论和耗散结构的计算方法. 北京: 科学出版社, 1990
- [7] 范小明. 非自治无穷维动力系统和随机动力系统渐近行为研究: [四川大学博士学位论文]. 成都: 四川大学, 2004, 1-15
- [8] Li Y. Persistent homoclinic orbits for nonlinear schrodinger equation under singular perturbations. Dynamics of PDE, 2004, 1(1):87-123
- [9] Li Y. Chaos in Miles' equations. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22(4): 965-974
- [10] Li Y. Homoclinic tubes and chaos in perturbed Sine-Gordon equation. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 20(4):791-798
- [11] Li Y. Chaos in partial differential equations. Somerville: International Press, 2004
- [12] Huang J, Dai Z D. Homoclinic solutions for Davey-Stewartson equation. Chaos, Solitons and Fractal, 2008, 35(5):996-1002
- [13] 郭柏灵. 无穷维动力系统. 国防工业出版社, 2002
- [14] Dai Z D, Huang J, Jiang M. Explicit homoclinic tube solutions and chaos for Zakharov system with periodic boundary. Physics Letters A, 2005, 352: 411-415
- [15] 郭柏灵. 广义 Kuramoto-Sivashinsky 型方程惯性流形的存在性. 数学研究, 1998, 29(3):38-51
- [16] 曹庆杰, 陈予恕. 受扰 MKdV-Burgers 方程的分岔特性研究. 非线性动力学学报, 1998, 5(2):154-159
- [17] 郭柏灵, 刘正荣. CH-r 方程的尖波解. 中国科学 A 辑, 2003,33(4): 325-337

- [18] 张建生, 赵登峰. 动力学中的复杂现象分岔、混沌及在冲击消振系统中的应用. 现代机械, 2006, 1:60-65
- [19] Yari M. Attractor bifurcation and final patterns of the  $n$ -dimensional and generalized Swift-Hohenberg equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems B, 2007, 7(2):441-456
- [20] Han J, Yari M. Dynamic bifurcation of the complex Swift-Hohenberg equation. Discrete and Continuous Dynamical Systems B, 2009, 11(4):875-891
- [21] Kaper G, Wang S, Yari M. Dynamical transitions of Turing patterns. Nonlinearity, 2009, 22(3):601-626
- [22] Ma T, Wang S. Stability and bifurcation of the Taylor problem for rational. Mechanics and Analysis, 2006, 181(1):149-176
- [23] Ma T, Wang S. Dynamic bifurcation of nonlinear evolution equation. Chinese Annals of Mathematics, 2005, 26(2):185-206
- [24] Ma T, Wang S. Dynamic transition and pattern formation in Taylor problem. Chinese Annals of Mathematics-Series B, 2010, 31(6):953-974
- [25] Ma T, Wang S. Dynamic transition theory for thermohaline circulation, preprint
- [26] Ma T, Park J, Wang S. Dynamic bifurcation of the Ginzburg-Landau equation, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2004, 3:620-635
- [27] Park J. Bifurcation and stability of the generalized complex ginzburg-landau equation. Communications on Pure and Applied Analysis, 2008, 7:1237-1253
- [28] Ma T, Wang S. Bifurcation theory and applications. Singapore: World Scientific, 2005, 91-132
- [29] Blömker D, Jentzen A. Galerkin approximations for the stochastic Burgers equation. Preprint, 2009
- [30] Blömker D, Hairer M, Pavliotis G. Stochastic swift-hohenberg equation near a change of stability. Proceedings of Equadiff-11, 2005, 27-37
- [31] Blömker D, Mohammed W. Amplitude equation for SPDEs with quadratic nonlinearities. Electron. J. Probab., 2009, 14(88):2527-2550
- [32] Yi F, Wei J, Shi J. Diffusion-driven instability and bifurcation in the Lengyel-Epstein system. Nonlinear Analysis, 2008, 9(8):1038-1051
- [33] 张丽敬, 李艳玲. 一类具有功能反应的捕食-食饵模型的全局分歧. 河北师范大学学报, 2010, 34(6):625-630
- [34] 冯孝周, 李艳玲. 一类带 B-D 反应项的捕食模型平衡解的局部分歧及稳定性. 西北师范大学学报, 2007, 43(1):8-12
- [35] 李津, 李艳玲. 一类反应扩散方程组平衡解的局部分歧及稳定性. 陕西师范



- 大学学报, 2008, 36(2):15-18
- [36] 李艳玲. 应用偏微分方程. 西安交通大学出版社, 2009
- [37] 丁虎, 陈立群. 轴向运动黏弹性梁横向非线性受迫振动. 振动与冲击, 2009, 28 (12):128-131
- [38] 丁虎, 陈立群. 轴向运动梁横向受迫振动多尺度分析及 DQM 验证. 振动工程学报, 2009, 22(3):298-304
- [39] 丁虎. 轴向运动梁横向非线性振动建模、分析和仿真: [上海大学博士学位论文]. 上海: 上海大学, 2008
- [40] Marion M, Teman R. Nonlinear galerkin methods. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1989, 26:1139-1157
- [41] 孔祥言, 吴建兵. 多孔介质中的非达西自然对流的分岔研究. 力学学报, 2002, 34(2):177-186
- [42] Kielhofer H. Bifurcation theory: An introduction with applications to PDEs. New York: Springer-Verlag, 2004
- [43] 罗祖军, 徐健学. 一类生物流体力学连续系统的分岔研究. 力学季刊, 2000, 21(3):288-293
- [44] Golubitsky M, Schaeffer G, Stewart I. Singularities and groups in bifurcation theory II. New York: Springer-Verlag, 1988
- [45] 马天, 汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧. 北京: 科学出版社, 2007
- [46] 陆启韶. 分岔与奇异性. 上海: 上海科技教育出版社, 1995
- [47] 楼森岳, 唐晓艳. 非线性数学物理方法. 北京: 科学出版社, 2006
- [48] 黄令. 耦合 Burgers 方程的对称性及对称约化. 物理学报. 2006, 55(8):3864-3869
- [49] 杨忠华, 李业忠. 求解非线性椭圆型方程边值问题的分歧方法. 上海师范大学学报, 2005, 34(2):17-20
- [50] 徐世英, 冯长根, 刘赵淼. 多孔介质中热对流二次分岔的数值分析. 北京理工大学学报, 1999, 19(1):102-107
- [51] 吴微. 解非线性分枝问题的扩展方程方法. 北京: 科学出版社, 1993
- [52] 王晋麟, 曹登庆. 非线性 Galerkin 方法在非线性能动力系统中的应用. 第八届全国动力学与控制学术会议论文集, 2008
- [53] 宋敕淘, 曹登庆. 应用非线性 Galerkin 方法求解微梁的动态响应率. 动力学与控制学报, 2009, 7(3):205-212
- [54] 殷朝阳. 非自治无穷维动力系统的逼近惯性流形和非线性 Galerkin 方法. 广州: 中山大学, 1998
- [55] 刘曾荣, 凌国平, 王冠香. Sine-Gordon 方程的动力学行为讨论. 非线性动力

- 学学报, 1995, 2(1):13-29
- [56] 黄庆怀. 无穷维动力系统的近似惯性流形方法和多级有限元逼近. 工程数学学报, 1994, 03:35-38
- [57] 田立新. 带耗散项的广义 KdV 方程的惯性流形. 江苏大学学报自然科学版, 1992, 03:16-19
- [58] 郭柏灵. 广义 Kuramoto-Sivashinsky 型方程惯性流形的存在性. 数学研究, 1996, 01:1-14
- [59] 徐振源, 刘曾荣. Sine-Gordon 方程的渐近惯性流形. 科学通报, 1992, 24:671
- [60] 张建文. 非线性弹性无穷维动力系统的惯性流形与整体吸引子研究: [太原理工大学博士学位论文]. 太原: 太原理工大学理学院, 2000
- [61] 戴正德, 郭柏灵. 惯性流形与近似惯性流形. 北京, 科学出版社, 2000
- [62] 刘曾荣, 徐振源, 谢惠民. 无穷维动力系统中惯性流形和吸引子. 力学进展, 1991, 04:37-41
- [63] 刘曾荣, 徐振源. 从具体例子看惯性流形概念的推广. 力学学报, 1992, 24:438-445
- [64] 赵维加, 陈立群, 祖武争. 微分本构粘弹性轴向运动弦线横向振动分析的差分法. 应用数学和力学, 2006, 27(1):21-28
- [65] 高为炳. 非线性控制系统的发展. 自动化学报. 1991, 17(5):513-523
- [66] Rugh D. Nonlinear System Theory, The John Hopkins University Press, Beltime, 1980
- [67] 曹建福, 韩崇昭. 非线性控制系统的频谱理论及应用, 控制与决策, 1998, 3: 193-199
- [68] 谢惠民. 绝对稳定性理论及应用. 北京: 科学出版社. 1987.
- [69] Brockett R W. Volterra series and geometric control theory, Automatic, 1976, 12: 167-176
- [70] 方洋旺. 非线性控制系统的综合理论研究: [西安交通大学博士论文]. 西安: 西安交通大学系统工程研究所, 1997
- [71] Abed E H, Fu J H. Local feedback stabilization and bifurcation control : Part I . Hopf bifurcation, Syst. Contr. Lett., 1986, 7:11-17
- [72] Abed E H, Fu J H. Local feedback stabilization and bifurcation: II . Stationary bifurcation, Syst. Contr. Lett., 1987, 8:467-473
- [73] Abed E H, Wang H O, Chen R C. Stabilization of period doubling bifurcations and implications for control of chaos, Physica D. 1994, 70:154-164
- [74] Chen G, Fang J Q, Hong Y, et al. Controlling hopf bifurcations: The continuous case. ACTA Physica China. 1999, 8:416-422

- [75] Chen G, Fang J Q, Hong Y, et al. Controlling hopf bifurcations: The discrete case, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2000
- [76] Chen G, Liu J, Yap K C. Controlling Hopf bifurcations, *Proc. Int. Symp. Circ. Syst.*, 1997, III639-642
- [77] Chen G, Chaos, Bifurcation, and their control, in *The Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, ed, Webster J, 1999 3: 194-218
- [78] Chen G. Controlling chaos and bifurcations in engineering systems. Boca Raton: CRC Press, 1999
- [79] Chen X, Gu G, Martin P, et al. Bifurcation control with output feedback and its applications to rotating stall control. *Automatic*, 1998, 34:437-443
- [80] Gu G, Sparks A G, Banda S S, et al. Bifurcation based nonlinear feedback control for rotating stall in axial flow compressors. *International journal of control*, 1997, 6:1241-1257
- [81] Yabuno H. Bifurcation control of parametrically excited Duffing system by a combined linear-plus-nonlinear feedback control. *Nonlinear Dynamics*, 1997, 12:263-274
- [82] Kang W, Gu G, Sparks A, et al. Bifurcation test functions and surge control for axial flow compressors. *Automatic*, 1999, 35:229-239
- [83] Gu G, Chen X, Sparks A G, et al. Bifurcation stabilization with local output feedback. *SIAM. Journal on control and optimization*, 1999, 37:934-956
- [84] Wang H O, Abed E H. Bifurcation control of a chaotic system, *Automatic*. 1995, 31: 1213-1226
- [85] Abed. E H, Wang H O. "Feedback control of bifurcation and chaos in dynamical systems". in *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics*, eds, Kliemann W & Sri Namachchivaya, 1995, 153-173
- [86] Abed E H, Wang H O, Tesi A. "Control of bifurcation and chaos", in the *Control Handbook*. Eds, Levine W S, 1995, 951-966
- [87] Chen D, Wang H O, Chen G. Anti-control of Hopf bifurcation through washout filters. *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, , 1998, 16-18: 3040-3045
- [88] Wang H O, Chen D, Bushnell L G. Control of bifurcations and chaos in heart rhythms. *Proc. 36th IEEE Conf. Decision Control*. San Diego, 1997, 395-400
- [89] Wang H O, Chen D, Chen G. Bifurcation control of pathological heart rhythms, *Proc. IEEE Conference on control and application*, Italy, 1998, 858-862
- [90] Moiola J L, Chen G. Hopf bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach. Singapore: Wold Scientific, 1996
- [91] Berns D W, Moiola J L, Chen G. Feedback control of limit cycle amplitudes from a frequency domain approach, *Automatica*, 1998, 34:1567-1573

- [92] Berns D W, Moiola J L, Chen G. Predicting period-doubling bifurcations and multiple oscillations in nonlinear time-delayed feedback systems." IEEE Trans. Circuits Syst. I , 1998, 45:759-763
- [93] Moiola J L, Berns D W, Chen G. Feedback control of limit cycle amplitudes. Proc. IEEE Conf. Decision and Contr. San Diego, 1997:1479-1485
- [94] Moiola J L, Chen G. Controlling the multiplicity of limit cycles. Proc. IEEE Conf. Decision and Control, 1998:3052-3057
- [95] Basso M, Evangelisti A, Genesio R, et al. On bifurcation control in time delay feedback systems. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1998, 8: 713-721
- [96] Moiola J L, Desages A C, Romagnoli J A. Degenerate Hopf bifurcations via feedback system theory-higher-order harmonic balance. Chemical Engineering Science. 1991, 46:1475-1490
- [97] Genesio R, Tesi A, Wang H O, et al. Control of period doubling bifurcations using harmonic balance. Proc. Conf. Decis. Contr., San Antonio, 1993, TX: 492-497
- [98] Mees A I, Chua L O. The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems, IEEE Trans. Circuits System, 1979, 26: 235-254
- [99] Moiola J L, Colantonio M C, Donate P D. Analysis of static and dynamic bifurcation from a feedback systems perspective. Dynamics and Stability of System, 1997, 12:293-317
- [100] Moiola J L, Berns D W, Chen G. Controlling degenerate Hopf bifurcations. Latin American Applied Research, 1999, 29:213-220
- [101] Kang W. Bifurcation and normal form of nonlinear control systems. Parts I and II . SIAM Journal of Control and Optimization, 1998, 36:193-232
- [102] Chen G, Moiola J L, Wang H O. Bifurcation control: theories, methods, and applications. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10:511-548
- [103] Chen G, Dong X. From Chaos to Order: Perspectives, Methodologies, and Application. Singapore: World Scientific Series on Nonlinear Science, 1998, Series A, 24
- [104] Chen G, Moiola J L. An overview of bifurcation, chaos and nonlinear dynamics in control systems. Journal Franklin Institute, 1994, 331B:819-858
- [105] Chen G. Chaos: Control and anti-control. IEEE Circuits and Systems Society Newsletter, March 1998:1-5
- [106] Tesi A, Abed E H, Genesio R, et al. Harmonic balance analysis of period-doubling bifurcation with implications for control of nonlinear

- dynamics. *Automatica*, 1996, 32:1255-1271
- [107] Kang W, Krener A J. Extended quadratic controller normal form and dynamic feedback linearization of nonlinear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1992, 30:1319-1337
- [108] Kang W. Bifurcation control via state feedback for systems with a single uncontrollable model. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2000, 38: 234-256
- [109] Alvarez J, Curiel L E. Bifurcations and chaos in a linear control system with saturated input. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, 7:1811-1822
- [110] Brandt M E, Chen G. Feedback control of a quadratic map model of cardiac chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1996, 6: 715-723
- [111] Cui F, Chew C H, Xu J, et al. Bifurcation and chaos in the Duffing Oscillator with a PID controller. *Nonlinear Dynamics*, 1997, 12: 251-262
- [112] Lowenberg M H, Richardson T S. Derivation of non-linear control strategies via numerical continuation. *Proc AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, 1999, AIAA-99-4111:359-369
- [113] Moore F K, Greitzer E M. A theory of post-stall transients in axial compressors: Part I development of the equations. *ASME J. Engr. Gas Turbines and Power*, 1986, 108: 68-76
- [114] Streit D A, Krousgrill C M, Bajaj A K. Combination parametric resonance leading to periodic and chaotic response in two-degree-of-freedom systems with quadratic nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 124: 470-480
- [115] Wang X F, Chen G. Chaotification via arbitrarily small feedback controls: theory, method, and application. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 549-570
- [116] Calandrinini G, Paolini E, Moiola J L, et al. Controlling limit cycles and bifurcation, in controlling chaos and bifurcations in engineering systems. Boca Raton: CRC Press, 1999, 200-227
- [117] Bleich M E, Socolar J E S. Stability of periodic orbits controlled by time-delayed feedback. *Physics Letters A*, 1996, 210:87-94
- [118] Ji J C, Leung A Y T. Bifurcation control of a parametrically excited Duffing system. *Nonlinear Dynamics* 2002, 27:411-417
- [119] Wang X F, Chen G, Yu X H. Anti-control of continuous-time systems by time-delay feedback. *Chaos*, 2000, 10:771-779
- [120] Vieira M de S, Lichtenberg A J. Controlling chaos using nonlinear feedback

- p>with delay.
- Physical Review E*
- , 1996, 54:1200-1207
- [121] Pyragas K. Control of chaos via extended delay feedback. *Physics Letters A*, 1995, 206:323-330
  - [122] Kittel A, Parisi J, Pyragas K. Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time. *Physics Letters A*, 1995, 198:433-436
  - [123] Chen G, Liu J, Nicholas B, et al. Bifurcation dynamics in discrete-time delayed/feedback control systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9:287-293
  - [124] Konishi K, Ishii M, Kokame H. Stabilizing unstable periodic points of one-dimensional nonlinear systems using delayed-feedback signals. *Physics Review E*, 1996, 54:3455-3460
  - [125] Mareels I M Y, Bitmead R R. Nonlinear dynamics in adaptive control: Chaotic and periodic stabilization. *Automatic*, 1986, 22:641-665
  - [126] Mareels I M Y, Bitmead R R. Nonlinear dynamics in adaptive control: Chaotic and periodic stabilization II —analysis. *Automatic*, 1988, 24:485-497
  - [127] Praly L, Pomet J B. Periodic solutions in adaptive systems: The regular case. *Proc. IFAC 10<sup>th</sup> Triennial World Congress*, 1987, 10:40-44
  - [128] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 1992, 170:421-428
  - [129] Pyragas K, Tamasevicius A. Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 1993, 180:99-102
  - [130] Ydstie B E, Golden G C. Bifurcation and complex dynamics in adaptive control systems. *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, Athens, 1986, 2232-2236
  - [131] Ydstie B E, Golden M P. Chaos and strange attractors in adaptive control systems. *Proc. IFAC World Congress*, 1987, 10:127-132
  - [132] Ydstie B E, Golden M P. Chaotic dynamics in adaptive systems. *Proc. IFAC Workshop on Robust Adaptive Control*, Newcastle, 1998, 14-19
  - [133] Dibbernardo M. An adaptive approach to the control and synchronization of continuous- time chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1996, 6: 557-568
  - [134] Wang H O &, Abed E H. Robust control of period doubling bifurcations and implications for control of chaos. *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control*, Orlando, 1994, 3287-3292
  - [135] 乔宇, 王洪礼, 竺致文等. 电力系统的分岔控制研究. *力学学报*. 2002, 34: 195-198
  - [136] Senjyu T & Uzeato K. Stability analysis and suppression control of rotor oscillation for stepping motors by Lyapunov direct method. *IEEE Trans. Power*

- Electron., 1995, 10:333-339
- [137] Littleboy D M, Smith P R. Using bifurcation methods to aid nonlinear dynamic inversion control law design. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1998, 21:632-638
- [138] Iida S K, Ogawara K, Furusawa S. A study on bifurcation control using pattern recognition of thermal convection. *JSME. International Journal Series B-Fluid and Thermal Engineering*, 1996, 39:762-767
- [139] Hill D J, Hiskens I A, Yang Y. Robust. Adaptive or nonlinear control for modern power systems. *Proc. 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. San Antonio, 1993
- [140] Abed E H. Bifurcation-theoretic issues in the control of voltage collapse. in *Proc. IMA Workshop on Systems and Control Theory for Power Systems*, eds. Chow J H, Kokotovic P V & Thommas R J, Springer, 1995:1-21
- [141] C. S. Kumar, R. Radha, M. Lakshmanan. Trilinearization and localized coherent structures and periodic solutions for the  $(2 + 1)$  dimensional K-dV and NNV equations, *Chaos, Solitons and Fractals* 2009, 39:942-955
- [142] Y Peng. A class of doubly periodic wave solutions for the generalized Nizhnik–Novikov–Veselov equation, *Physics Letters A* 2005, 337:55-60
- [143] G.F. Yu, H. W. Tam. A vector asymmetrical NNV equation: Soliton solutions, bilinear Bäcklund transformation and Lax pair, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 2008, 344:593-600.
- [144] H. P. Zhu, C. L. Zheng, J. P. Fang. Fractal and chaotic patterns of Nizhnik–Novikov–Veselov system derived from a periodic wave solution, *Physics Letters A* 2006, 355:39-46
- [145] P. G. Estevez, S. Leble. A wave equation in 2+1: Painlevé analysis and solutions, *Inverse Problems* 1995, 11:925-937.
- [146] Chen Huaitang, Zhang hongqing. New multiple soliton-like solutionsto  $(3+1)$ -dimesional Burgers equation with variable coefficients. *Communication of Theory Physics*, 2004, 42(4):497-500
- [147] Xie Fuding, Chen Jing, Lu Zhuosheng. Using symbolic computation to exactly solve the integrable Broer-KauPequationsin $(2+1)$ -dimensionals paces. *Communication of Theory Physics*, 2005, 43:585-590.
- [148] Sirendaoreji, Sun Jiong. A direct method for solving Sine-Gordon type equations. *Physics letters A* 2002, 298:133-139
- [149] X. L. Yang, J. S. Tang. New travelling wave solutions for combined KdV-mKdV equation and  $(2+1)$  dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt system, *Chinese Physics* 2007, 16:310-317

- [150] Calogero F and Lillo S D. The Burgers equation on the semiline with general boundary conditions at the origin *Journal of Mathematical Physics*, 1991, 32 99-106
- [151] Joseph K T and Sachdev P L. Exact analysis of Burgers equation on semiline with flux condition at the origin. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1993, 28:627-639
- [152] Biondini G and Lillo S D. On the Burgers equation with moving boundary *Physics Letters A* 2001, 279:194-206
- [153] Yoshinori Inoue, Noriko Kubo and Daisuke Mutou. Nonlinear wave propagation in a gas with algebraic density distribution *Fluid Dynamics Research* 2004, 34:99-115
- [154] Srinivasa R C, Sachdev P L and Ramaswamy M. Self-similar solutions of a generalized Burgers equation with nonlinear damping. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2003, 4:723-741
- [155] 郭建刚, 周丽军, 张善元. 有限变形粘弹性杆的波动行为研究. *太原理工大学学报(自然科学版)*, 2002, 33(9):558-560
- [156] Marynowski K and Kapitaniak T. Kelvin-Voigt versus Brgers internal damping in modeling of axially moving viscoelastic web *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, 37:1147-1161
- [157] Jordan P M. An analytical study of Kuznetsov's equation: diffusive solitons, shock formation, and solution bifurcation. *Physics Letters A*, 2004, 326:77-84
- [158] Dang-Vu H and Delcarte C. Hopf bifurcation and strange attractors in Chebyshev spectral solutions of the Burgers equation. *Applied Mathematics and Computation*, 1995, 73:99-113
- [159] Chen G, Moiola J L and Wang H O. Bifurcation control: Theories, methods, and applications. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 511-548
- [160] Tang J S, Zhao M H, Han F and Fu W B. Saddle-Node bifurcation and its control of Burgers KdV equation. *Modern Physics Letters B*, 2010, 24:567-574
- [161] Tang J S, Han F, Xiao H and Wu X. Amplitude control of a limit cycle in a coupled van der Pol system. *Nonlinear Analysis*, 2009, 71:2491-2496
- [162] 杨先林. Burgers方程的精确解. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4):308-311
- [163] Huang Q W, Tang J S. Bifurcation of a limit cycle in the ac-driven complex Ginzburg-Landau equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2010, 14:129-141
- [164] Abdul-Majid Wazwaz. Multiple-front solutions for the Burgers-Kadomtsev-Petviashvili equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 200:



437-443

- [165] R. Breban, H. E. Nusse and E. Ott. Lack of predictability in dynamical systems with drift: scaling of indeterminate saddle-node bifurcations. *Physics Letters A*, 2003, 319:79-84
- [166] A. Maccari. Saddle-Node bifurcations of cycles in a relief valve. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 22:225-247
- [167] K. D. Murphy and C. L. Lee. The 1:1 Internally resonant response of a cantilever beam attached to a rotating body. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 211:179-194
- [168] K. Wolf and O. Gottlieb. Nonlinear dynamics of a noncontacting atomic force microscope cantilever actuated by a piezoelectric layer *Journal of Applied Physics*, 2002, 91:4701-4709
- [169] Z. S. Feng. On explicit exact solutions to the compound Burgers–KdV equation. *Physics Letters A*, 2002, 293:57-66
- [170] B. F. Feng and T. Kawahara. Stationary travelling-wave solutions of an unstable KdV–Burgers equation. *Physica D*, 2000, 137:228-236
- [171] E. J. Parkes and B. R. Duffy. Travelling solitary wave solutions to a compound KdV-Burgers equation. *Physics Letters A*, 1997, 229:217-220
- [172] D. Kaya. Solitary-wave solutions for compound KdV-type and compound KdV–Burgers-type equations with nonlinear terms of any order. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 152:709-720
- [173] S. S. Girimaji and Y. Zhou. Spectrum and energy transfer in steady Burgers turbulence. *Physics Letters A*, 1995, 202:279-287
- [174] W. P. Hong. On Bäcklund transformation for a generalized Burgers equation and solitonic solutions. *Physics Letters A*, 2000, 268:81-84
- [175] H. Yabuno. Bifurcation control of parametrically excited duffing system by a combined linear-plus-nonlinear feedback control. *Nonlinear Dynamics*, 1997, 12:263-274
- [176] J. C. Li and A. Y. T. Leung. Bifurcation control of a parametrically excited duffing system. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 27:411-417
- [177] Gesztesy F, Holden H, Saab E, Simon B. Explicit construction of solutions of the modified Kadomtsev-Petviashvili equation. *Journal of Functional Analysis*, 1991, 98:211-228
- [178] Xie F D, Yan Z Y. Exactly fractional solutions of the (2+1)-dimensional modified KP equation via some fractional transformations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 36:1108-1112

## 附录 A 攻读学位期间发表论文目录

- [1] Jiashi Tang, Feng Han, Han Xiao, Xiao Wu. Amplitude control of a limit cycle in a coupled van der Pol system. *Nonlinear Analysis-Theory, Methods & Applications*, 2009, 71(7-8):2491- 2496  
(2010年 大类分区 2 影响因子 1.279)
- [2] Jiashi Tang, Feng Han, Minghua Zhao, Wenbin Fu. Travelling wave solutions for the (2+1) dimensional Nizhnik–Novikov–Veselov equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(22): 11083-11088  
(2010年 大类分区 2 影响因子 1.536)
- [3] 韩峰, 唐驾时. 一个五维受控混沌系统的动力学行为. *动力学与控制学报*, 2010, 8(3): 250-253
- [4] Liang Cui-Xiang, Tang Jia-Shi, Liu Su-Hua and Han Feng. Hopf bifurcation control of a hyperchaotic circuit system. *Communications in Theoretical Physics*, 2009, 52(3):457-462
- [5] Jiashi Tang, Minghu Zhao, Feng Han, Wenbin Fu. Saddle-node bifurcation and its control of Burgers-KdV equation. *Modern Physics Letters B*, 2010, 24(6):567-574
- [6] Tang Jiashi, Zhao Minghua, Han Feng, Zhang Liang. Solution and transcritical bifurcation of Burgers equation. *Chinese Physics B*, 2011, 20(2):020504
- [7] Feng Han, Jiashi Tang. Three types of bifurcation in infinite-dimensional nonlinear systems. (已投稿)

## 致 谢

2013 年 12 月 5 日下午，我顺利完成了博士论文答辩，心情很激动，终于又实现了人生中的一大目标。

衷心感谢恩师唐驾时教授，从 1998 年考入湖南大学工程力学系到留校工作至今，15 个年头里唐老师和师母龙老师一直待我视如己出，对我的学习、工作和生活都是十分的关心，一直呵护着我个人的成长。

衷心感谢于德介教授长期以来对我的支持与帮助；衷心感谢兄弟般的李震波师弟在论文写作过程中的大力协助；衷心感谢龙述尧教授、罗松南教授、侯鹏飞教授、唐国金教授、周伯昭教授、蒋丽忠教授、康厚军副教授等老师对我完成博士论文的指导与帮助，各位老师严谨的治学精神、认真的工作态度，使我深受感动并不断鼓舞着我。

感谢答辩过程中各位评委所提的中肯意见；感谢湖南大学校团委各位可爱的同事对我一如既往的支持与帮助；感谢我亲爱的妻子和家人一直在背后默默地支持着我前行。未来的路还很长，我会继续好好走下去。