《数学模型》作业解答

第二章(1)（2008 年 9 月 16 日）

1. 学校共 1000 名学生，235 人住在 A 宿舍，333 人住在 B 宿舍，432 人住在 C 宿舍.学生们要组织一个 10 人的委员会，试用下列办法分配各宿舍的委员数：

（1）. 按比例分配取整数的名额后,剩下的名额按惯例分给小数部分较大者；

（2）. §1 中的 Q 值方法；

（3）.d’Hondt 方法：将 A、B、C 各宿舍的人数用正整数 n=1,2,3,……相除，其商数如下表：

	1	2	3	4	5
A	<u>235</u>	<u>117.5</u>	78.3	58.75	…
B	<u>333</u>	<u>166.5</u>	<u>111</u>	83.25	…
C	<u>432</u>	<u>216</u>	<u>144</u>	<u>108</u>	<u>86.4</u>

将所得商数从大到小取前 10 个（10 为席位数），在数字下标以横线，表中 A、B、C 行有横线的数分别为 2,3,5,这就是 3 个宿舍分配的席位.你能解释这种方法的道理吗？

如果委员会从 10 个人增至 15 人，用以上 3 种方法再分配名额，将 3 种方法两次分配的结果列表比较.

解：先考虑 N=10 的分配方案，

$$p_1 = 235,\quad p_2 = 333,\quad p_3 = 432,\qquad \sum_{i=1}^{3} p_i = 1000.$$

方法一（按比例分配）

$$q_1 = \frac{p_1 N}{\sum_{i=1}^{3} p_i} = 2.35,\qquad q_2 = \frac{p_2 N}{\sum_{i=1}^{3} p_i} = 3.33,\qquad q_3 = \frac{p_3 N}{\sum_{i=1}^{3} p_i} = 4.32$$

分配结果为： $n_1 = 3,\quad n_2 = 3,\quad n_3 = 4$

方法二（Q 值方法）

9 个席位的分配结果（可用按比例分配）为：

$$n_1 = 2,\quad n_2 = 3,\quad n_3 = 4$$

第 10 个席位：计算 Q 值为

$$Q_1=\frac{235^2}{2\times3}=9204.17,\ \ Q_2=\frac{333^2}{3\times4}=9240.75,\ \ Q_3=\frac{432^2}{4\times5}=9331.2$$

Q_3 最大，第 10 个席位应给 C. 分配结果为 $n_1=2,\ n_2=3,\ n_3=5$

方法三（d’Hondt 方法）

此方法的分配结果为：$n_1=2,\ n_2=3,\ n_3=5$

此方法的道理是：记 p_i 和 n_i 为各宿舍的人数和席位（i=1,2,3 代表 A、B、C 宿舍）. $\frac{p_i}{n_i}$ 是每席位代表的人数，取 $n_i=1,2,\cdots,$ 从而得到的 $\frac{p_i}{n_i}$ 中选较大者，可使对所有的 i, $\frac{p_i}{n_i}$ 尽量接近.

再考虑 $N=15$ 的分配方案，类似地可得名额分配结果. 现将 3 种方法两次分配的结果列表如下：

宿舍	（1）	（2）	（3）	（1）	（2）	（3）
A	3	2	2	4	4	3
B	3	3	3	5	5	5
C	4	5	5	6	6	7
总计	10	10	10	15	15	15

2. 试用微积分方法，建立录像带记数器读数 n 与转过时间的数学模型.

解： 设录像带记数器读数为 n 时，录像带转过时间为 t. 其模型的假设见课本.

考虑 t 到 $t+\Delta t$ 时间内录像带缠绕在右轮盘上的长度，可得 $vdt=(r+wkn)2\pi kdn,$ 两边积分，得 $\int_0^t vdt=2\pi k\int_0^n(r+wkn)dn$

$$\therefore\ vt=2\pi k(rn+wk\frac{n^2}{2})\qquad \therefore\ t=\frac{2\pi rk}{v}n+\frac{\pi wk^2}{v}n^2.$$

第二章(2)（2008 年 10 月 9 日）

15. 速度为 v 的风吹在迎风面积为 s 的风车上，空气密度是 ρ ，用量纲分析方法确定风车

获得的功率 P 与 v 、S、 ρ 的关系.

解：设 P 、 v 、S、 ρ 的关系为 $f(P,v,s,\rho)=0$， 其量纲表达式为：

[P]= ML^2T^{-3}， [v]= LT^{-1}，[s]= L^2，[ρ]= ML^{-3}，这里 L,M,T 是基本量纲.

量纲矩阵为：

$$
A=\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{matrix} (L) \\ (M) \\ (T) \end{matrix} \\
\begin{matrix} (P) & (v) & (s) & (\rho) \end{matrix}
\end{array}
$$

齐次线性方程组为：

$$
\begin{cases}
2y_1+y_2+2y_3-3y_4=0 \\
y_1+\quad y_4\quad =0 \\
-3y_1-y_2\quad =0
\end{cases}
$$

它的基本解为 $y=(-1,3,1,1)$

由量纲 P_i 定理得 $\pi=P^{-1}v^3s^1\rho^1$， $\therefore P=\lambda v^3s^1\rho^1$ ， 其中 λ 是无量纲常数.

16．雨滴的速度 v 与空气密度 ρ 、粘滞系数 μ 和重力加速度 g 有关，其中粘滞系数的定义是：运动物体在流体中受的摩擦力与速度梯度和接触面积的乘积成正比，比例系数为粘滞系数，用量纲分析方法给出速度 v 的表达式.

解：设 v， ρ， μ， g 的关系为 $f(v,\rho,\mu,g)=0$. 其量纲表达式为[v]= LM^0T^{-1}，[ρ]= $L^{-3}MT^0$，[μ]= $MLT^{-2}(LT^{-1}L^{-1})^{-1}L^{-2}=MLL^{-2}T^{-2}T=L^{-1}MT^{-1}$，[g]= LM^0T^{-2}，其中 L，M，T 是基本量纲.

量纲矩阵为

$$
A=\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}
\begin{matrix} (L) \\ (M) \\ (T) \end{matrix} \\
\begin{matrix} (v) & (\rho) & (\mu) & (g) \end{matrix}
\end{array}
$$

齐次线性方程组 **Ay=0** ，即

$$
\begin{cases}
y_1-3y_2-y_3+y_4=0 \\
\quad y_2+y_3\quad =0 \\
-y_1\quad -y_3-2y_4=0
\end{cases}
$$

的基本解为 y=(-3 ,-1 ,1 ,1)

由量纲 P_i 定理 得 $\pi=v^{-3}\rho^{-1}\mu g$. $\therefore v=\lambda\sqrt[3]{\dfrac{\mu g}{\rho}}$，其中 λ 是无量纲常数.

16[*]．雨滴的速度 v 与空气密度 ρ 、粘滞系数 μ 、特征尺寸 γ 和重力加速度 g 有关，其中粘

滞系数的定义是：运动物体在流体中受的摩擦力与速度梯度和接触面积的乘积成正比，比例系数为粘滞系数，用量纲分析方法给出速度 v 的表达式.

解：设 v，ρ，μ，γ，g 的关系为 $f(v,\gamma,\rho,\mu,g)=0$. 其量纲表达式为

$[v]=LM^0T^{-1}$，$[\rho]=L^{-3}MT^0$，$[\mu]=MLT^{-2}(LT^{-1}L^{-1})^{-1}L^{-2}=MLL^{-2}T^{-2}T=L^{-1}MT^{-1}$，$[\gamma]=LM^0T^0$，$[g]=LM^0T^{-2}$

其中 L，M，T 是基本量纲.

量纲矩阵为

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{array}{c}(L)\\(M)\\(T)\end{array}\\ \begin{array}{ccccc}(v) & (\gamma) & (\rho) & (\mu) & (g)\end{array}\end{array}$$

齐次线性方程组 **Ay=0** 即

$$\begin{cases}y_1+y_2-3y_3-y_4+y_5=0\\ y_3+y_4=0\\ -y_1-y_4-2y_5=0\end{cases}$$

的基本解为

$$\begin{cases}y_1=(1,-\dfrac{1}{2},0,0,-\dfrac{1}{2})\\ y_2=(0,-\dfrac{3}{2},-1,1,-\dfrac{1}{2})\end{cases}$$

得到两个相互独立的无量纲量

$$\begin{cases}\pi_1=v\gamma^{-1/2}g^{-1/2}\\ \pi_2=\gamma^{-3/2}\rho^{-1}\mu g^{-1/2}\end{cases}$$

即 $v=\sqrt{\gamma g}\,\pi_1$，$\gamma^{3/2}\rho g^{1/2}\mu^{-1}=\pi_2^{-1}$. 由 $\Phi(\pi_1,\pi_2)=0$，得 $\pi_1=\varphi(\pi_2^{-1})$

$\therefore$ $v=\sqrt{\gamma g}\,\varphi(\gamma^{3/2}\rho g^{1/2}\mu^{-1})$，其中 φ 是未定函数.

20. 考察阻尼摆的周期，即在单摆运动中考虑阻力，并设阻力与摆的速度成正比. 给出周期的表达式，然后讨论物理模拟的比例模型，即怎样由模型摆的周期计算原型摆的周期.

解：设阻尼摆周期 t，摆长 l，质量 m，重力加速度 g，阻力系数 k 的关系为

$$f(t,l,m,g,k)=0$$

其量纲表达式为：

$[t]=L^0M^0T,[l]=LM^0T^0,[m]=L^0MT^0,[g]=LM^0T^{-2},[k]=[f][v]^{-1}=MLT^{-2}(LT^{-1})^{-1}$

$=L^0MT^{-1}$，其中 L，M，T 是基本量纲.

量纲矩阵为

$$
\begin{array}{cc}
\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c}(L)\\(M)\\(T)\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}(t) & (l) & (m) & (g) & (k)\end{array} &
\end{array}
$$

齐次线性方程组

$$
\begin{cases} y_2 + y_4 = 0 \\ y_3 + y_5 = 0 \\ y_1 - 2y_4 - y_5 = 0 \end{cases}
$$

的基本解为

$$
\begin{cases} Y_1 = (1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) \\ Y_2 = (0,\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},1) \end{cases}
$$

得到两个相互独立的无量纲量

$$
\begin{cases} tl^{-1/2}g^{1/2} = \pi_1 \\ l^{1/2}m^{-1}g^{-1/2}k = \pi_2 \end{cases}
$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \pi_1,\quad \pi_1 = \varphi(\pi_2),\quad \pi_2 = \frac{kl^{1/2}}{mg^{1/2}}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{l}{g}}\varphi(\frac{kl^{1/2}}{mg^{1/2}})$$ ，其中 φ 是未定函数 .

考虑物理模拟的比例模型，设 g 和 k 不变，记模型和原型摆的周期、摆长、质量分别为 t，t'；l，l'；m，m'.　　又 $t' = \sqrt{\frac{l'}{g}}\varphi(\frac{kl'^{1/2}}{m'g^{1/2}})$

当无量纲量 $\frac{m'}{m} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$ 时，　就有　$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{g}}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$.

《数学模型》作业解答

第三章 1（2008 年 10 月 14 日）

1. 在 3.1 节存贮模型的总费用中增加购买货物本身的费用，重新确定最优订货周期和订货批量．证明在不允许缺货模型中结果与原来的一样，而在允许缺货模型中最优订货周期和订货批量都比原来结果减少．

解：设购买单位重量货物的费用为k，其它假设及符号约定同课本.

1^0 对于不允许缺货模型，每天平均费用为：

$$C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2 rT}{2}+kr$$

$$\frac{dC}{dT}=-\frac{c_1}{T^2}+\frac{c_2 r}{2}$$

令 $\frac{dC}{dT}=0$ ，　解得　$T^*=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}}$

由 $Q=rT$ ，　得 $Q^*=rT^*=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$

与不考虑购货费的结果比较，T、Q的最优结果没有变.

2^0 对于允许缺货模型，每天平均费用为：

$$C(T,Q)=\frac{1}{T}\left[c_1+\frac{c_2 Q^2}{2r}+\frac{c_3}{2r}(rT-Q)^2+kQ\right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial T}=-\frac{c_1}{T^2}-\frac{c_2 Q^2}{2rT^2}+\frac{c_3 r}{2}-\frac{c_3 Q^2}{2rT^2}-\frac{kQ}{T^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial Q}=\frac{c_2 Q}{rT}-c_3+\frac{c_3 Q}{rT}+\frac{k}{T}$$

令 $\begin{cases}\frac{\partial C}{\partial T}=0\\ \frac{\partial C}{\partial Q}=0\end{cases}$ ，　得到驻点：

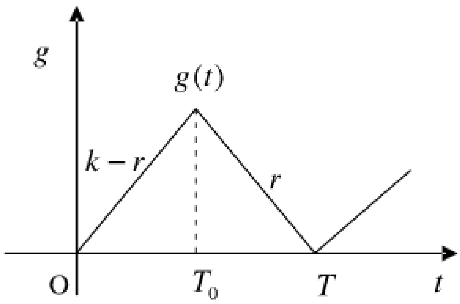
$$\begin{cases}T^*=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}-\frac{k^2}{c_2 c_3}}\\ Q^*=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}-\frac{c_3 k^2 r^2}{c_2(c_2+c_3)}}-\frac{kr}{c_2+c_3}\end{cases}$$

与不考虑购货费的结果比较，T、Q的最优结果减少.

2．建立不允许缺货的生产销售存贮模型．设生产速率为常数k，销售速率为常数r，

$k>r$. 在每个生产周期T内，开始的一段时间$\left(0<t<T_0\right)$一边生产一边销售，后来的一段时间$(T_0<t<T)$只销售不生产，画出贮存量$g(t)$的图形. 设每次生产准备费为c_1，单位时间每件产品贮存费为c_2，以总费用最小为目标确定最优生产周期，讨论$k>>r$和$k\approx r$的情况.

解：由题意可得贮存量$g(t)$的图形如下：



贮存费为 $c_2\lim\limits_{\Delta t\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta t_i=c_2\int_0^T g(t)dt=c_2\dfrac{(k-r)T_0\cdot T}{2}$

又∵ $(k-r)T_0=r(T-T_0)$

∴ $T_0=\dfrac{r}{k}T$ ， ∴ 贮存费变为 $c_2=\dfrac{r(k-r)T\cdot T}{2k}$

于是不允许缺货的情况下，生产销售的总费用（单位时间内）为

$$C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2r(k-r)T^2}{2kT}=\frac{c_1}{T}+c_2\frac{r(k-r)T}{2k}$$

$$\frac{dC}{dT}=-\frac{c_1}{T^2}+c_2\frac{r(k-r)}{2k}.$$

令$\dfrac{dC}{dT}=0$ ， 得$T^*=\sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$

易得函数$C(T)$在T^*处取得最小值，即最优周期为： $T^*=\sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$

当$k>>r$时，$T^*\approx\sqrt{\dfrac{2c_1}{c_2r}}$. 相当于不考虑生产的情况.

当$k\approx r$时，$T^*\to\infty$. 此时产量与销量相抵消，无法形成贮存量.

第三章 2（2008 年 10 月 16 日）

3．在 3.3 节森林救火模型中，如果考虑消防队员的灭火速度 λ 与开始救火时的火势 b 有关，试假设一个合理的函数关系，重新求解模型.

解：考虑灭火速度 λ 与火势 b 有关，可知火势 b 越大，灭火速度 λ 将减小，我们作如下假设： $\lambda(b)=\dfrac{k}{b+1}$，

分母 $b+1$ 中的 1 是防止 $b\to 0$ 时 $\lambda\to\infty$ 而加的.

总费用函数 $C(x)=\dfrac{c_1\beta t_1^2}{2}+\dfrac{c_1\beta^2 t_1^2(b+1)}{2(kx-\beta b-\beta)}+\dfrac{c_2\beta t_1 x(b+1)}{kx-\beta b-\beta}+c_3 x$

最优解为 $x=\sqrt{\dfrac{\left[c_1 kb^2+2c_2 b(b+1)\beta\right](b+1)}{2c_3k^2}}+\dfrac{(b+1)\beta}{k}$

5．在考虑最优价格问题时设销售期为 T，由于商品的损耗，成本 q 随时间增长，设 $q(t)=q_0+\beta t$， β 为增长率．又设单位时间的销售量为 $x=a-bp$（p 为价格）．今将销售期分为 $0<t<T/2$ 和 $T/2<t<T$ 两段，每段的价格固定，记作 p_1,p_2．求 p_1,p_2 的最优值，使销售期内的总利润最大．如果要求销售期 T 内的总售量为 Q_0，再求 p_1,p_2 的最优值.

解：按分段价格，单位时间内的销售量为

$$x=\begin{cases}a-bp_1, 0<t<T/2\\ a-bp_2, T/2<t<T\end{cases}$$

又∵ $q(t)=q_0+\beta t$．于是总利润为

$$\bigcup(p_1,p_2)=\int_0^{T/2}[p_1-q(t)](a-bp_1)dt+\int_{T/2}^{T}[p_2-q(t)](a-bp_2)dt$$

$$=(a-bp_1)\left[p_1t-q_0t-\frac{\beta}{2}t^2\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}+(a-bp_2)\left[p_2t-q_0t-\frac{\beta}{2}t^2\right]\Bigg|_{\frac{T}{2}}^{T}$$

$$=(a-bp_1)\left(\frac{p_1T}{2}-\frac{q_0T}{2}-\frac{\beta T^2}{8}\right)+(a-bp_2)\left(\frac{p_2T}{2}-\frac{q_0t}{2}-\frac{3\beta T^2}{8}\right)$$

$$\frac{\partial\bigcup}{\partial p_1}=-b\left(\frac{p_1T}{2}-\frac{q_0T}{2}-\frac{\beta T^2}{8}\right)+\frac{T}{2}(a-bp_1)$$

$$\frac{\partial \bigcup}{\partial p_2} = -b(\frac{p_2 T}{2} - \frac{q_0 t}{2} - \frac{3\beta T^2}{8}) + \frac{T}{2}(a - bp_2)$$

令 $\frac{\partial \bigcup}{\partial p_1} = 0, \frac{\partial \bigcup}{\partial p_2} = 0$，　得到最优价格为：

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2b}\left[a + b(q_0 + \frac{\beta T}{4})\right] \\ p_2 = \frac{1}{2b}\left[a + b(q_0 + \frac{3\beta T}{4})\right] \end{cases}$$

在销售期 T 内的总销量为

$$Q_0 = \int_0^{\frac{T}{2}}(a - bp_1)dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T}(a - bp_2)dt = aT - \frac{bT}{2}(p_1 + p_2)$$

于是得到如下极值问题：

$$\max \bigcup(p_1, p_2) = (a - bp_1)(\frac{p_1 T}{2} - \frac{q_0 T}{2} - \frac{\beta T^2}{8}) + (a - bp_2)(\frac{p_2 T}{2} - \frac{q_0 t}{2} - \frac{3\beta T^2}{8})$$

$$s.t \quad aT - \frac{bT}{2}(p_1 + p_2) = Q_0$$

利用拉格朗日乘数法，解得：

$$\begin{cases} \overline{p}_1 = \frac{a}{b} - \frac{Q_0}{bT} - \frac{\beta T}{8} \\ \overline{p}_2 = \frac{a}{b} - \frac{Q_0}{bT} + \frac{\beta T}{8} \end{cases}$$

即为 p_1, p_2 的最优值.

第三章 3（2008 年 10 月 21 日）

6. 某厂每天需要角钢 100 吨，不允许缺货. 目前每 30 天定购一次，每次定购的费用为 2500 元. 每天每吨角钢的贮存费为 0.18 元. 假设当贮存量降到零时订货立即到达. 问是否应改变订货策略？改变后能节约多少费用？

解：已知：每天角钢的需要量 r=100(吨);每次订货费 c_1＝2500（元）；

每天每吨角钢的贮存费 c_2＝0.18（元）.又现在的订货周期 T_0＝30（天）

根据不允许缺货的贮存模型：$C(T)=\dfrac{c_1}{T}+\dfrac{1}{2}c_2 rT+kr$

得：$C(T)=\dfrac{2500}{T}+9T+100k$

$$\frac{dC}{dT}=-\frac{2500}{T^2}+9$$

令 $\dfrac{dC}{dT}=0$ ， 解得：$T^*=\sqrt{\dfrac{2500}{9}}=\dfrac{50}{3}$

由实际意义知：当$T^*=\dfrac{50}{3}$（即订货周期为$\dfrac{50}{3}$）时，总费用将最小.

又$C(T^*)=\dfrac{3\times 2500}{50}+9\times\dfrac{50}{3}+100k$ ＝300＋100k

$C(T_0)=\dfrac{2500}{30}+9\times 30+100k$ =353．33＋100k

$C(T_0)-C(T^*)$＝（353.33＋100k）－（300＋100k）$\dfrac{2}{3}$＝53．33.

故应改变订货策略.改变后的订货策略（周期）为 $T^*=\dfrac{50}{3}$，能节约费用约 53．33 元.

《数学模型》作业解答

第四章（2008 年 10 月 28 日）

1. 某厂生产甲、乙两种产品,一件甲产品用 A 原料 1 千克， B 原料 5 千克；一件乙产品用 A 原料 2 千克， B 原料 4 千克. 现有 A 原料 20 千克， B 原料 70 千克. 甲、乙产品每件售价分别为 20 元和 30 元. 问如何安排生产使收入最大？

解：设安排生产甲产品 x 件,乙产品 y 件，相应的利润为 S

则此问题的数学模型为：

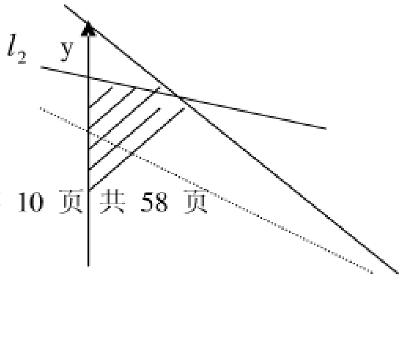
max S=20x+30y

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x+2y\le 20 \\ 5x+4y\le 70 \\ x,y\ge 0, x,y\in Z \end{cases}$$

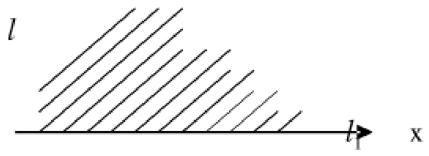
这是一个整线性规划问题，现用图解法进行求解

可行域为：由直线l_1：x+2y=20， l_2:5x+4y＝70

以及 x=0,y=0 组成的凸四边形区域.



直线l：20x+30y=c 在可行域内平行移动.



易知：当l过l_1与l_2的交点时，

S 取最大值.

由$\begin{cases} x+2y=20 \\ 5x+4y=70 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=10 \\ y=5 \end{cases}$

此时 $S_{\max}=20\times10+30\times5=350$（元）

2. 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量以及可获利润如下表：

货物	体积（立方米/箱）	重量（百斤/箱）	利润（百元/箱）
甲	5	2	20
乙	4	5	10

已知这两种货物托运所受限制是体积不超过 24 立方米，重量不超过 13 百斤.试问这两种货物各托运多少箱，使得所获利润最大，并求出最大利润.

解:设甲货物、乙货物的托运箱数分别为x_1，x_2，所获利润为z.则问题的数学模型可表示为

$$\max\ z=20x_1+10x_2$$

$$st\begin{cases} 5x_1+4x_2\le 24 \\ 2x_1+5x_2\le 13 \\ x_1,x_2\ge 0, x,y\in Z \end{cases}$$

这是一个整线性规划问题.

用图解法求解.

可行域为：由直线

$l_1: 5x_1+4x_2=24$

$l_2: 2x_1+5x_2=13$ 及 $x_1=0, x_2=0$ 组成直线 $l: 20x_1+10x_2=c$ 在此凸四边形区域内平行移动.

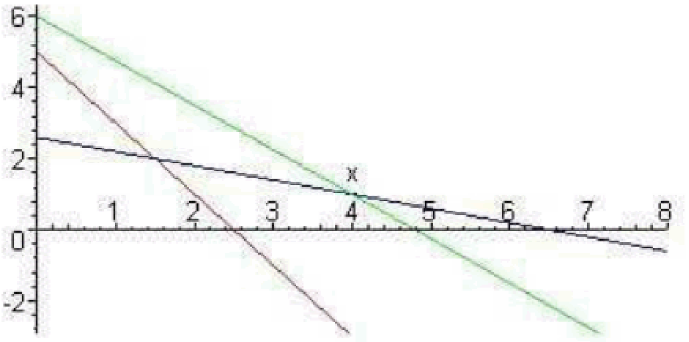
x_2

l_1

l_2

x_1

l



易知：当l过l_1与l_2的交点时，z取最大值

由$\begin{cases}5x_1 + 4x_2 = 24 \\ 2x_1 + 5x_2 = 13\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1 = 4 \\ x_2 = 1\end{cases}$

$z_{\max} = 20\times 4 + 10\times 1 = 90$.

3．某微波炉生产企业计划在下季度生产甲、乙两种型号的微波炉. 已知每台甲型、乙型微波炉的销售利润分别为 3 和 2 个单位. 而生产一台甲型、乙型微波炉所耗原料分别为 2 和 3 个单位, 所需工时分别为 4 和 2 个单位. 若允许使用原料为 100 个单位, 工时为 120 个单位, 且甲型、乙型微波炉产量分别不低于 6 台和 12 台. 试建立一个数学模型, 确定生产甲型、乙型微波炉的台数, 使获利润最大．并求出最大利润.

解：设安排生产甲型微波炉x件,乙型微波炉y件,相应的利润为 S.

则此问题的数学模型为：

max S=3x +2y

$$\text{s.t.} \begin{cases}2x+3y \le 100 \\ 4x+2y \le 120 \\ x \ge 6, y \ge 12, x, y \in Z\end{cases}$$

这是一个整线性规划问题

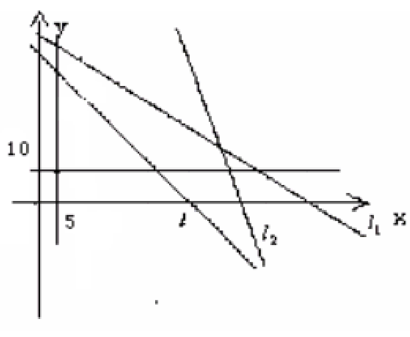
用图解法进行求解

可行域为：由直线l_1：2x+3y=100, l_2:4x+2y＝120

及 x=6,y=12 组成的凸四边形区域.

直线l：3x+2y=c 在此凸四边形区域内平行移动. 易知：当l过l_1与l_2的交点时, S 取最大值.

由$\begin{cases}2x+3y=100 \\ 4x+2y=120\end{cases}$ 解得



$$\begin{cases} x=20 \\ y=20 \end{cases}.$$

$S_{\max}=3\times 20+2\times 20=100.$

《数学模型》作业解答

第五章 1（2008 年 11 月 12 日）

1. 对于 5. 1 节传染病的 *SIR* 模型，证明：

（1）若 $s_0 \succ \dfrac{1}{\sigma}$, 则 $i(t)$ 先增加，在 $s=\dfrac{1}{\sigma}$ 处最大，然后减少并趋于零；$s(t)$ 单调减少至 s_∞.

（2）若 $s_0 \prec \dfrac{1}{\sigma}$, 则 $i(t)$ 单调减少并趋于零，$s(t)$ 单调减少至 s_∞.

解：传染病的 *SIR* 模型（14）可写成

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\mu i(\sigma s-1) \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \end{cases}$$

由 $\dfrac{ds}{dt}=-\lambda si$, 知 $\dfrac{ds}{dt}\prec 0$. $s(t)$ 单调减少. 而 $s(\mathrm{t})\geq 0$. $\therefore \lim\limits_{t\to\infty}s(t)=s_\infty$ 存在.

故 $s(t)$ 单调减少至 s_∞.

（1）若 $s_0 \succ \dfrac{1}{\sigma}$. 由 $\mathrm{s(t)}$ 单调减少. $\therefore \mathrm{s(t)}\leq \mathrm{s}_0$.

当 $\dfrac{1}{\sigma}\prec s\prec s_0$ 时, $\sigma s-1\succ 0$. $\therefore \dfrac{di}{dt}\succ 0, i(t)$ 单调增加;

当 $s\prec \dfrac{1}{\sigma}$ 时, $\sigma s-1\prec 0$. $\therefore \dfrac{di}{dt}\prec 0, i(t)$ 单调减少.

又由书上(18)式知 $i_\infty=0$. 即 $\lim\limits_{t\to\infty}i(t)=0$.

当$s=\frac{1}{\sigma}$时, $\frac{di}{dt}=0$. $\therefore i(t)$达到最大值i_m.

（2）若$s_0 \prec \frac{1}{\sigma}$, 则$s(t) \prec \frac{1}{\sigma}$, 从而$\sigma s-1 \prec 0$. $\frac{di}{dt} \prec 0$.

$\therefore i(t)$单调减少且$\lim\limits_{t\to\infty} i(t)=0$即$i_\infty=0$.

4．在 5.3 节正规战争模型（3）中，设乙方与甲方战斗有效系数之比为$\frac{a}{b}=4$.

初始兵力x_0与y_0相同.

(1) 问乙方取胜时的剩余兵力是多少, 乙方取胜的时间如何确定.

(2) 若甲方在战斗开始后有后备部队以不变的速率r增援, 重新建立模型, 讨论如何判断双方的胜负.

解:用$x(t)$, $y(t)$表示甲、乙交战双方时刻 t 的士兵人数, 则正规战争模型可近似表示为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-ay \\ \frac{dy}{dt}=-bx, \\ x(0)=x_0, y(0)=y_0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1)$$

现求(1)的解: (1)的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & a \\ b & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-ab=0. \qquad \therefore \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{ab}$$

λ_1, λ_2对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore (1)的通解为\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{\sqrt{ab}t}+C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-\sqrt{ab}t}.$$

再由初始条件，得

$$x(t)=\left(\frac{x_0}{2}-y_0\right)e^{\sqrt{ab}\,t}+\left(\frac{x_0}{2}+y_0\right)e^{-\sqrt{ab}\,t} \qquad \cdots\cdots(2)$$

又由(1)可得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{bx}{ay}$.

其解为　$ay^2-bx^2=k$,　而$k=ay_0^2-bx_0^2$　　$\cdots\cdots(3)$

(1) 当$x(t_1)=0$时，$y(t_1)=\sqrt{\dfrac{k}{a}}=\sqrt{\dfrac{ay_0^2-bx_0^2}{a}}=y_0\sqrt{1-\dfrac{b}{a}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_0$.

即乙方取胜时的剩余兵力数为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_0$.

又令$x(t_1)=0$,由（2）得　$\left(\dfrac{x_0}{2}-y_0\right)e^{\sqrt{ab}t_1}+\left(\dfrac{x_0}{2}+y_0\right)e^{-\sqrt{ab}t_1}=0$.

注意到$x_0=y_0$,得$e^{2\sqrt{ab}t_1}=\dfrac{x_0+2y_0}{2y_0-x_0}$.　$\therefore e^{2\sqrt{ab}t_1}=3$,　　$\therefore t_1=\dfrac{\ln 3}{4b}$.

(2) 若甲方在战斗开始后有后备部队以不变的速率r增援. 则

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-ay+r\\ \dfrac{dy}{dt}=-bx\\ x(0)=x_0,y(0)=y_0\end{cases} \qquad \cdots\cdots(4)$$

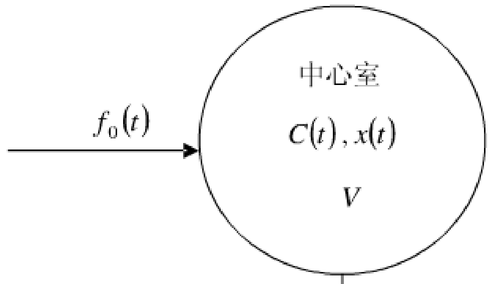
由(4)得$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-ay+r}{-bx}$,即$bxdx=aydy-rdy$. 相轨线为$ay^2-2ry-bx^2=k$,

$k=ay_0^2-2ry_0-bx_0^2$或$a\left(y-\dfrac{r}{a}\right)^2-bx^2-\dfrac{r^2}{a}=k$. 此相轨线比书图 11 中的轨线上移了

$\frac{r}{a}$. 乙方取胜的条件为 $k \succ 0$, 亦即 $\left(y_0 - \frac{r}{a}\right)^2 \succ \frac{b}{a}x_0^2 + \frac{r^2}{a^2}$.

第五章 2（2008 年 11 月 14 日）

6. 模仿 5.4 节建立的二室模型来建立一室模型（只有中心室），在快速静脉注射、恒速静脉滴注（持续时间为 τ ）和口服或肌肉注射 3 种给药方式下求解血药浓度，并画出血药浓度曲线的图形.



解：设给药速率为 $f_0(t)$, 中心室药量为 $x(t)$, 血药浓度为 $C(t)$, 容积为 V,

排除速率为常数 k, 则 $x'(t) + kx(t) = f_0(t), x(t) = VC(t)$.

(1) 快速静脉注射：设给药量为 D_0，则 $f_0(t) = 0, C(0) = \frac{D_0}{V}$, 解得 $C(t) = \frac{D_0}{V}e^{-kt}$.

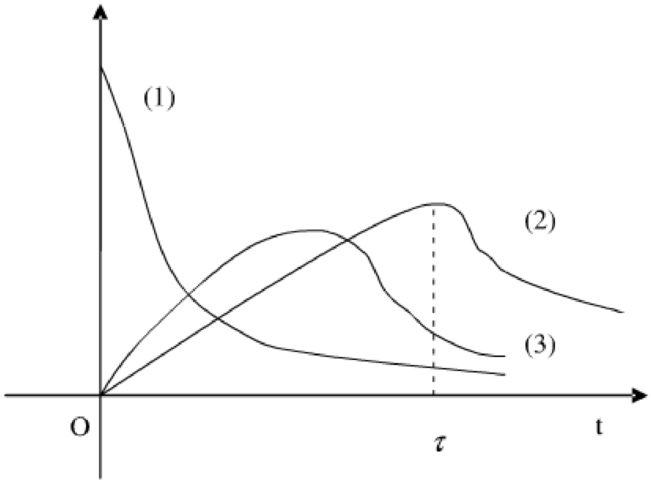
(2) 恒速静脉滴注（持续时间为 τ）：设滴注速率为 k_0，则 $f_0(t) = k_0, C(0) = 0$, 解得

$$C(t) = \begin{cases} \frac{k_0}{Vk}\left(1 - e^{-kt}\right), & 0 \le t \le \tau \\ \frac{k_0}{Vk}\left(1 - e^{-kt}\right)e^{-k(t-\tau)}, & t \succ \tau \end{cases}$$

(3) 口服或肌肉注射：$f_0(t) = k_{01}D_0e^{-k_{01}t}$（见5.4节（13）式），解得

$$C(t) = \begin{cases} \frac{k_{01}D_0}{V(k_{01} - k)}\left(e^{-kt} - e^{-k_{01}t}\right), & k \ne k_{01} \\ \frac{kD}{V}te^{-kt}, & k = k_{01} \end{cases}$$

3 种情况下的血药浓度曲线如下：



第五章 3（2008 年 11 月 18 日）

8. 在 5.5 节香烟过滤嘴模型中,

（1）设 $M = 800mg, l_1 = 80mm, l_2 = 20mm, b = 0.02, \beta = 0.08, \nu = 50mm/s, a = 0.3$

求 Q 和 Q_1/Q_2.

（2）若有一支不带过滤嘴的香烟, 参数同上, 比较全部吸完和只吸到 l_1 处的情况下，进入人体毒物量的区别.

解

$$Q = \frac{aw_0 v}{a' b} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a' b l_1}{v}}\right) = \frac{0.3 \times 10 \times 50}{0.7 \times 0.02} e^{-\frac{0.08 \times 20}{50}} \left(1 - e^{-\frac{0.7 \times 0.02 \times 80}{50}}\right) \approx 229.857563(\text{毫克})$$

$\left(\text{其中} w_0 = M / l_1 = 10\right)$,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = e^{-\frac{(\beta - b) l_2}{v}} = e^{-\frac{(0.08 - 0.02) \times 20}{50}} = 0.97628571$$

(2) 对于一支不带过滤嘴的香烟,全部吸完的毒物量为 $Q_3=\dfrac{aw_0v}{a'b}\left(1-e^{-\frac{a'bl}{v}}\right)$

只吸到 l_1 处就扔掉的情况下的毒物量为 $Q_4=\dfrac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{bl_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)$

$$\frac{Q_3}{Q_4}=\frac{e^{\frac{bl}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl}{v}}\right)}{e^{\frac{bl_1}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)}=\frac{e^{\frac{bl}{v}}-e^{\frac{abl}{v}}}{e^{\frac{bl_1}{v}}-e^{\frac{abl_1}{v}}}=\frac{e^{\frac{0.02\times100}{50}}-e^{\frac{0.3\times0.02\times100}{50}}}{e^{\frac{0.02\times80}{50}}-e^{\frac{0.3\times0.02\times80}{50}}}=\frac{e^{0.04}-e^{0.012}}{e^{0.032}-e^{0.0096}}\approx1.256531719.$$

$Q_3\approx295.84,\quad Q_4\approx235.44$

4．在 5.3 节正规战争模型（3）中，设乙方与甲方战斗有效系数之比为 $\dfrac{a}{b}=4.$ 初始兵力 x_0与y_0 相同.

(1) 问乙方取胜时的剩余兵力是多少,乙方取胜的时间如何确定.

(2) 若甲方在战斗开始后有后备部队以不变的速率 r 增援,重新建立模型,讨论如何判断双方的胜负.

解:用 $x(t),y(t)$ 表示甲、乙交战双方时刻 t 的士兵人数,则正规战争模型可近似表示为:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-ay\\\dfrac{dy}{dt}=-bx,\\x(0)=x_0,y(0)=y_0\end{cases}\qquad\cdots\cdots(1)$$

现求(1)的解:　　(1)的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&-a\\-b&0\end{bmatrix}$

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda&a\\b&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-ab=0.\qquad\therefore\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{ab}$$

λ_1, λ_2对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore (1)$的通解为$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{ab}t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{ab}t}$.

再由初始条件，得

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{2} - y_0\right) e^{\sqrt{ab}\,t} + \left(\frac{x_0}{2} + y_0\right) e^{-\sqrt{ab}\,t} \qquad \cdots\cdots(2)$$

又由(1)可得$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{bx}{ay}$.

其解为 $ay^2 - bx^2 = k$, 而$k = ay_0^2 - bx_0^2$ $\cdots\cdots(3)$

(1) 当$x(t_1) = 0$时，$y(t_1) = \sqrt{\dfrac{k}{a}} = \sqrt{\dfrac{ay_0^2 - bx_0^2}{a}} = y_0\sqrt{1 - \dfrac{b}{a}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} y_0$.

即乙方取胜时的剩余兵力数为$\dfrac{\sqrt{3}}{2} y_0$.

又令$x(t_1) = 0$,由（2）得 $\left(\dfrac{x_0}{2} - y_0\right) e^{\sqrt{ab}t_1} + \left(\dfrac{x_0}{2} + y_0\right) e^{-\sqrt{ab}t_1} = 0$.

注意到$x_0 = y_0$,得$e^{2\sqrt{ab}t_1} = \dfrac{x_0 + 2y_0}{2y_0 - x_0}$. $\therefore e^{2\sqrt{ab}t_1} = 3$, $\therefore t_1 = \dfrac{\ln 3}{4b}$.

(2) 若甲方在战斗开始后有后备部队以不变的速率 r 增援. 则

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay + r \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4)$$

由(4)得$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-ay+r}{-bx}$,即$bxdx=aydy-rdy$. 相轨线为$ay^2-2ry-bx^2=k$,

$k=ay_0^2-2ry_0-bx_{,0}^2$或$a\left(y-\dfrac{r}{a}\right)^2-bx^2-\dfrac{r^2}{a}=k$. 此相轨线比书图 11 中的轨线上移了

$\dfrac{r}{a}$.乙方取胜的条件为$k\succ 0$,亦即$\left(y_0-\dfrac{r}{a}\right)^2\succ\dfrac{b}{a}x_0^2+\dfrac{r^2}{a^2}$.

《数学模型》作业解答

第六章（2008 年 11 月 20 日）

1.在 6.1 节捕鱼模型中，如果渔场鱼量的自然增长仍服从 Logistic 规律，而单位时间捕捞量为常数 h.

(1)分别就$h>rN/4$，$h<rN/4$，$h=rN/4$这 3 种情况讨论渔场鱼量方程的平衡点及其稳定状况.

(2)如何获得最大持续产量，其结果与 6.1 节的产量模型有何不同.

解：设时刻 t 的渔场中鱼的数量为$x(t)$，则由题设条件知：$x(t)$变化规律的数学模型为

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx(1-\frac{x}{N})-h$$

$$记\ F(x)=rx(1-\frac{x}{N})-h$$

(1).讨论渔场鱼量的平衡点及其稳定性：

由$F(x)=0$，得$rx(1-\dfrac{x}{N})-h=0$.

$$即\ \frac{r}{N}x^2-rx+h=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\Delta=r^2-\frac{4rh}{N}=r(r-\frac{4h}{N}) \quad ,$$

(1)的解为：$x_{1,2}=\dfrac{N\pm\sqrt{1-\dfrac{4h}{rN}}N}{2}$

①当$h>rN/4$，$\Delta<0$，(1)无实根，此时无平衡点；

②当$h = rN/4$，$\Delta = 0$，(1)有两个相等的实根，平衡点为$x_0 = \dfrac{N}{2}$.

$$F'(x) = r(1-\frac{x}{N}) - \frac{rx}{N} = r - \frac{2rx}{N},\quad F'(x_0) = 0 \qquad \text{不能断定其稳定性.}$$

但$\forall\, x \succ x_0$ 及$x \prec x_0$ 均有$F(x) = rx(1-\dfrac{x}{N}) - \dfrac{rN}{4} \prec 0$，即$\dfrac{dx}{dt} \prec 0$．$\therefore x_0$不稳定；

③当$h < rN/4$，$\Delta > 0$时，得到两个平衡点：

$$x_1 = \frac{N - \sqrt{1-\dfrac{4h}{rN}}N}{2},\quad x_2 = \frac{N + \sqrt{1-\dfrac{4h}{rN}}N}{2}$$

易知：$x_1 < \dfrac{N}{2}$，$x_2 > \dfrac{N}{2}$，$F'(x_1) > 0$，$F'(x_2) < 0$

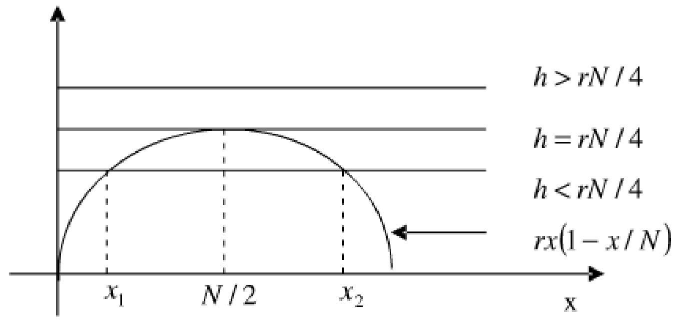
$\therefore$平衡点x_1不稳定，平衡点x_2稳定.

(2)最大持续产量的数学模型为

$$\begin{cases} \max h \\ s.t.\, F(x) = 0 \end{cases}$$

即 $\max h = rx(1-\dfrac{x}{N})$，

易得 $x_0^* = \dfrac{N}{2}$ 此时 $h = \dfrac{rN}{4}$，



但$x_0^* = \dfrac{N}{2}$这个平衡点不稳定．这是与6.1节的产量模型不同之处.

要获得最大持续产量，应使渔场鱼量$x > \dfrac{N}{2}$，且尽量接近$\dfrac{N}{2}$，但不能等于$\dfrac{N}{2}$.

2.与Logistic模型不同的另一种描述种群增长规律的是Gompertz模型：$x'(t) = rx\ln\dfrac{N}{x}$.其中r和N的意义与Logistic模型相同.

设渔场鱼量的自然增长服从这个模型，且单位时间捕捞量为$h = Ex$．讨论渔场鱼量的平衡点及其稳定性，求最大持续产量h_m及获得最大产量的捕捞强度E_m和渔场鱼量水平x_0^*.

解： $x(t)$变化规律的数学模型为

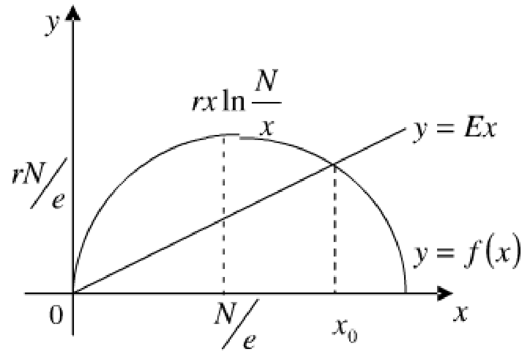
$$\frac{dx(t)}{dt} = rx\ln\frac{N}{x} - Ex$$

记 $$F(x) = rx\ln\frac{N}{x} - Ex$$

① 令$F(x) = 0$，得$rx\ln\dfrac{N}{x} - Ex = 0$ $\quad\therefore x_0 = Ne^{-\frac{E}{r}}$，$x_1 = 0$.

$\therefore$ 平衡点为 $x_{0,}\ x_1$. 又$\because$ $F'(x)=r\ln\dfrac{N}{x}-r-E$， $F'(x_0)=-r<0, F'(x_1)=\infty$.

$\therefore$ 平衡点 x_o 是稳定的，而平衡点 x_1 不稳定.



②最大持续产量的数学模型为：

$$\begin{cases}\max h = Ex \\ s.t. \qquad rx\ln\dfrac{N}{x}-Ex=0, x\neq 0.\end{cases}$$

由前面的结果可得 $h = ENe^{-\frac{E}{r}}$

$$\frac{dh}{dE}=Ne^{-\frac{E}{r}}-\frac{EN}{r}e^{-\frac{E}{r}}，\ 令\ \frac{dh}{dE}=0.$$

得最大产量的捕捞强度 $E_m = r$. 从而得到最大持续产量 $h_m = rN/e$ ，此时渔场鱼量水平 $x_0^* = \dfrac{N}{e}$.

3．设某渔场鱼量 $x(t)$ (时刻 t 渔场中鱼的数量)的自然增长规律为： $\dfrac{dx(t)}{dt}=rx(1-\dfrac{x}{N})$

其中 r 为固有增长率, N` 为环境容许的最大鱼量. 而单位时间捕捞量为常数 h .

1^0．求渔场鱼量的平衡点,并讨论其稳定性;

2^0．试确定捕捞强度 E_m ,使渔场单位时间内具有最大持续产量 Q_m ,求此时渔场鱼量水平 x_0^*.

解：1^0． $x(t)$ 变化规律的数学模型为 $\dfrac{dx(t)}{dt}=rx(1-\dfrac{x}{N})-h$

记 $f(x)=rx(1-\dfrac{x}{N})-h$,令 $rx(1-\dfrac{x}{N})-h=0$ ，即 $\dfrac{r}{N}x^2-rx+h=0$ ----（1）

$\Delta = r^2-\dfrac{4rh}{N}=r(r-\dfrac{4h}{N})$ ，（1）的解为： $x_{1,2}=\dfrac{N\pm\sqrt{1-\dfrac{4h}{rN}}N}{2}$

① 当 $\Delta \prec 0$ 时，（1）无实根，此时无平衡点;

② 当$\Delta = 0$时，(1) 有两个相等的实根，平衡点为$x_0 = \dfrac{N}{2}$.

$f^{'}(x) = r(1-\dfrac{x}{N}) - \dfrac{rx}{N} = r - \dfrac{2rx}{N}$ ，$f^{'}(x_0) = 0$ 不能断定其稳定性.

但$\forall x \succ x_0$ 及$x \prec x_0$ 均有$f(x) = rx(1-\dfrac{x}{N}) - \dfrac{rN}{4} \prec 0$ ，即$\dfrac{dx}{dt} \prec 0 \therefore x_0$不稳定；

③ 当$\Delta \succ 0$时，得到两个平衡点：

$$x_1 = \frac{N - N\sqrt{1-\frac{4h}{rN}}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{N + N\sqrt{1-\frac{4h}{rN}}}{2}$$

易知 $x_1 \prec \dfrac{N}{2}$ ， $x_2 \succ \dfrac{N}{2}$ $\therefore f'(x_1) \succ 0$， $f'(x_2) \prec 0$

$\therefore$平衡点x_1不稳定 ，平衡点x_2稳定.

2^0．最大持续产量的数学模型为：
$$\begin{cases} \max h \\ s.t. f(x) = 0 \end{cases}$$

即 $\max h = rx(1-\dfrac{x}{N})$， 易得 $x_0^* = \dfrac{N}{2}$ 此时 $h = \dfrac{rN}{4}$，但$x_0^* = \dfrac{N}{2}$这个平衡点不稳定.
要获得最大持续产量，应使渔场鱼量$x \succ \dfrac{N}{2}$,且尽量接近$\dfrac{N}{2}$,但不能等于$\dfrac{N}{2}$.

《数学模型》第七章作业

（2008 年 12 月 4 日）

1．对于 7.1 节蛛网模型讨论下列问题：

（1）因为一个时段上市的商品不能立即售完，其数量也会影响到下一时段的价格，所以第$k+1$时段的价格y_{k+1}由第$k+1$和第k时段的数量x_{k+1}和x_k决定，如果仍设x_{k+1}仍只取决于y_k，给出稳定平衡的条件，并与 7.1 节的结果进行比较.

2．已知某商品在k时段的数量和价格分别为x_k和y_k，其中 1 个时段相当于商品的一个生产周期. 设该商品的需求函数和供应函数分别为$y_k = f(x_k)$和

$x_{k+1}=g(\frac{y_k+y_{k-1}}{2})$. 试建立关于商品数量的差分方程模型，并讨论稳定平衡条件.

3． 已知某商品在k时段的数量和价格分别为x_k和y_k，其中 1 个时段相当于商品的一个生产周期. 设该商品的需求函数和供应函数分别为$y_{k+1}=f(\frac{x_{k+1}+x_k}{2})$和$x_{k+1}=g(y_k)$. 试建立关于商品数量的差分方程模型，并讨论稳定平衡条件.

《数学模型》作业解答

第七章（2008 年 12 月 4 日）

2． 对于 7.1 节蛛网模型讨论下列问题：

（1）因为一个时段上市的商品不能立即售完，其数量也会影响到下一时段的价格，所以第$k+1$时段的价格y_{k+1}由第$k+1$和第k时段的数量x_{k+1}和x_k决定，如果仍设x_{k+1}仍只取决于y_k，给出稳定平衡的条件，并与 7.1 节的结果进行比较.

（2）若除了y_{k+1}由x_{k+1}和x_k决定之外，x_{k+1}也由前两个时段的价格y_k和y_{k-1}确定. 试分析稳定平衡的条件是否还会放宽.

解：（1）由题设条件可得需求函数、供应函数分别为：

$$\begin{cases} y_{k+1}=f(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}) \\ x_{k+1}=h(y_k) \end{cases}$$

在$P_0(x_0,y_0)$点附近用直线来近似曲线f,h，得到

$$\begin{cases} y_{k+1}-y_0=-\alpha(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}-x_0),\ \alpha>0 & \cdots(1) \\ x_{k+1}-x_0=\beta(y_k-y_0), \qquad \beta>0 & \cdots(2) \end{cases}$$

由（2）得 $x_{k+2}-x_0=\beta(y_{k+1}-y_0) \qquad \cdots(3)$

（1）代入（3）得 $x_{k+2}-x_0=-\alpha\beta(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}-x_0)$

$\therefore \quad 2x_{k+2}+\alpha\beta\, x_{k+1}+\alpha\beta\, x_k=2x_0+2\alpha\beta\, x_0$

对应齐次方程的特征方程为 $\quad 2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$

特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}$

当 $\alpha\beta\geq 8$ 时，则有特征根在单位圆外，设 $\alpha\beta<8$，则

$$\left|\lambda_{1,2}\right|=\sqrt{(\frac{\alpha\beta}{4})^2+\frac{-(\alpha\beta)^2+8\alpha\beta}{4^2}}=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}$$

$$\therefore \left|\lambda_{1,2}\right|<1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\beta<2$$

即平衡稳定的条件为 $\alpha\beta<2$ 与 P_{207} 的结果一致.

（2）此时需求函数、供应函数在 $P_0(x_0,y_0)$ 处附近的直线近似表达式分别为：

$$\begin{cases} y_{k+1}-y_0=-\alpha(\dfrac{x_{k+1}+x_k}{2}-x_0),\ \alpha>0 & \cdots(4) \\ x_{k+1}-x_0=\beta(\dfrac{y_k+y_{k-1}}{2}-y_0), \quad \beta>0 & \cdots(5) \end{cases}$$

由（5）得，$2(x_{k+3}-x_0)=\beta(y_{k+2}-y_0+y_{k+1}-y_0)$ $\qquad\cdots(6)$

将（4）代入（6），得

$$2(x_{k+3}-x_0)=\beta\left[-\alpha(\frac{x_{k+2}+x_{k+1}}{2}-x_0)-\alpha(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}-x_0)\right]$$

$\therefore \quad 4x_{k+3}+\alpha\beta x_{k+2}+2\alpha\beta x_{k+1}+\alpha\beta x_k=4x_0+4\alpha\beta x_0$

对应齐次方程的特征方程为 $\quad 4\lambda^3+\alpha\beta\lambda^2+2\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0 \qquad \cdots(7)$

代数方程（7）无正实根，且 $-\alpha\beta,-\dfrac{\alpha\beta}{2}$, $-\dfrac{\alpha\beta}{4}$ 不是（7）的根. 设（7）的三个非零根分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-\dfrac{\alpha\beta}{4} \\ \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=\dfrac{\alpha\beta}{2} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=-\dfrac{\alpha\beta}{4} \end{cases}$$

对（7）作变换：$\lambda=\mu-\dfrac{\alpha\beta}{12}$，则

$$\mu^3+p\mu+q=0,$$

其中 $p=\dfrac{1}{4}(2\alpha\beta-\dfrac{\alpha^2\beta^2}{12})$，$q=\dfrac{1}{4}(\dfrac{8\alpha^3\beta^3}{12^3}-\dfrac{\alpha^2\beta^2}{6}+\alpha\beta)$

用卡丹公式：$\begin{cases} \mu_1=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{(\dfrac{q}{2})^2+(\dfrac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{(\dfrac{q}{2})^2+(\dfrac{p}{3})^3}} \\ \mu_2=w\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{(\dfrac{q}{2})^2+(\dfrac{p}{3})^3}}+w^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{(\dfrac{q}{2})^2+(\dfrac{p}{3})^3}} \\ \mu_3=w^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{(\dfrac{q}{2})^2+(\dfrac{p}{3})^3}}+w\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{(\dfrac{q}{2})^2+(\dfrac{p}{3})^3}} \end{cases}$

其中 $w=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$,

求出 μ_1,μ_2,μ_3，从而得到 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，于是得到所有特征根 $|\lambda|<1$ 的条件.

2．已知某商品在 k 时段的数量和价格分别为 x_k 和 y_k，其中 1 个时段相当于商品的一个生产周期.设该商品的需求函数和供应函数分别为 $y_k=f(x_k)$ 和 $x_{k+1}=g(\dfrac{y_k+y_{k-1}}{2})$.试建立关于商品数量的差分方程模型，并讨论稳定平衡条件.

解：已知商品的需求函数和供应函数分别为 $y_k=f(x_k)$ 和 $x_{k+1}=g(\dfrac{y_k+y_{k-1}}{2})$.

设曲线 f 和 g 相交于点 $P_0(x_0,y_0)$，在点 P_0 附近可以用直线来近似表示曲线 f 和 g：

$$y_k-y_0=-\alpha(x_k-x_0),\alpha\succ 0 \quad \text{----------------------（1）}$$

$$x_{k+1}-x_0=\beta(\frac{y_k+y_{k-1}}{2}-y_0),\beta\succ 0 \quad \text{--------------------（2）}$$

从上述两式中消去 y_k 可得

$$2x_{k+2}+\alpha\beta\, x_{k+1}+\alpha\beta\, x_k=2(1+\alpha\beta)x_0,\ k=1,2,\cdots, \quad \text{-----------}（3）$$

上述（3）式是我们所建立的差分方程模型，且为二阶常系数线性非齐次差分方程.

为了寻求 P_0 点稳定平衡条件，我们考虑（3）对应的齐次差分方程的特征方程：

$$2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$$

容易算出其特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4} \qquad \text{----------------}（4）$$

当 $\alpha\beta\succ 8$ 时，显然有

$$\lambda_2=\frac{-\alpha\beta-\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}\prec-\frac{\alpha\beta}{4} \qquad \text{-----------}（5）$$

从而 $|\lambda_2|\ \succ 2$，λ_2 在单位圆外．下面设 $\alpha\beta\prec 8$，由(5)式可以算出 $|\lambda_{1,2}|=\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2}}$

要使特征根均在单位圆内，即 $|\lambda_{1,2}|\prec 1$，必须 $\alpha\beta\prec 2$.

故 P_0 点稳定平衡条件为 $\alpha\beta\prec 2$.

3. 已知某商品在 k 时段的数量和价格分别为 x_k 和 y_k，其中 1 个时段相当于商品的一个生产周期.设该商品的需求函数和供应函数分别为 $y_{k+1}=f(\dfrac{x_{k+1}+x_k}{2})$ 和 $x_{k+1}=g(y_k)$.试建立关于商品数量的差分方程模型，并讨论稳定平衡条件.

解：已知商品的需求函数和供应函数分别为 $y_{k+1}=f(\dfrac{x_{k+1}+x_k}{2})$ 和 $x_{k+1}=g(y_k)$.

设曲线 f 和 g 相交于点 $P_0(x_0,y_0)$，在点 P_0 附近可以用直线来近似表示曲线 f 和 g：

$$y_{k+1}-y_0=-\alpha(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}-x_0),\alpha\succ 0 \qquad \text{--------------------}（1）$$

$$x_{k+1}-x_0=\beta(y_k-y_0), \qquad \beta\succ 0 \qquad \text{--- ----------------}（2）$$

由（2）得 $x_{k+2}-x_0=\beta(y_{k+1}-y_0)$ --------------------（3）

（1）代入（3），可得 $x_{k+2}-x_0=-\alpha\beta(\dfrac{x_{k+1}+x_k}{2}-x_0)$

$\therefore \quad 2x_{k+2}+\alpha\beta\, x_{k+1}+\alpha\beta\, x_k=2x_0+2\alpha\beta x_0,\, k=1,2,\cdots,$ --------------（4）

上述（4）式是我们所建立的差分方程模型，且为二阶常系数线性非齐次差分方程.

为了寻求 P_0 点稳定平衡条件，我们考虑（4）对应的齐次差分方程的特征方程：

$$2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$$

容易算出其特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4} \qquad \text{----------------（4）}$$

当 $\alpha\beta\geq 8$ 时，显然有

$$\lambda_2=\frac{-\alpha\beta-\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}\leq-\frac{\alpha\beta}{4} \qquad \text{------------（5）}$$

从而 $|\lambda_2| \succ 2$，λ_2 在单位圆外．下面设 $\alpha\beta\prec 8$，由(5)式可以算出 $|\lambda_{1,2}|=\sqrt{\dfrac{\alpha\beta}{2}}$

要使特征根均在单位圆内，即 $|\lambda_{1,2}|\prec 1$，必须 $\alpha\beta\prec 2$.

故 P_0 点稳定平衡条件为 $\alpha\beta\prec 2$.

《数学模型》作业解答

第八章（2008 年 12 月 9 日）

1．证明 8.1 节层次分析模型中定义的 n 阶一致阵 A 有下列性质：

（1） A 的秩为 1，唯一非零特征根为 n；

（2） A 的任一列向量都是对应于 n 的特征向量.

证明： （1）由一致阵的定义知：A 满足

$$a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik},\ \ i,j,k=1,2,\cdots,n$$

于是对于任意两列 i,j，有 $\dfrac{a_{ik}}{a_{jk}}=a_{ij}$，$(k=1,2,\cdots,n)$. 即 i 列与 j 列对应分量成比例.

从而对 A 作初等行变换可得：

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \triangleq \mathrm{B}$$

这里 $B \neq 0$. $\therefore$ 秩$(B)=1$ ，从而秩$(A)=1$

再根据初等行变换与初等矩阵的关系知：存在一个可逆阵 P，使 $PA=B$，于是

$$PAP^{-1} = BP^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \triangleq \mathrm{C}$$

易知 C 的特征根为 $c_{11},0,\cdots,0$（只有一个非零特征根）.

又$\because A \sim C$，$\therefore A$ 与 C 有相同的特征根，从而 A 的非零特征根为 c_{11}，又$\because$ 对于任意矩阵有 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = Tr(A) = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = 1+1+\cdots+1 = n$. 故 A 的唯一非零特征根为 n .

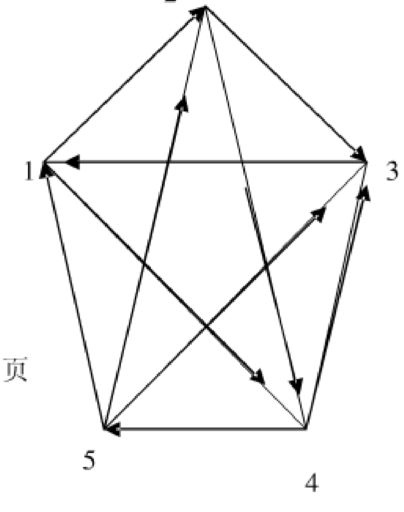
（2）对于 A 的任一列向量 $(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk})^T$，$(k=1,2,\cdots,n)$

有

$$A(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk})^T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a_{jk} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}a_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}a_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1k} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2k} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} na_{1k} \\ na_{2k} \\ \vdots \\ na_{nk} \end{bmatrix} = n(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk})^T$$

$\therefore A$ 的任一列向量 $(a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk})^T$ 都是对应于 n 的特征向量.

7. 右下图是 5 位网球选手循环赛的结果，作为竞赛图，它是双向连通的吗？找出几条完全路径，用适当方法排出 5 位选手的名次.



解：这个 5 阶竞赛图是一个 5 阶有向 Hamilton 图. 其一个有向 Hamilton 圈为 $3 \to 1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 3$. 所以此竞赛图是双向连通的.

$4 \to 5 \to 1 \to 2 \to 3$　　　$2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 1$　　　$5 \to 3 \to 1 \to 2 \to 4$

$3 \to 1 \to 4 \to 5 \to 2$

等都是完全路径.

此竞赛图的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $e = (1,1,1,1,1)^T$，各级得分向量为

$S^{(1)} = Ae = (2,2,1,2,3)^T$，　　　$S^{(2)} = AS^{(1)} = (4,3,2,4,5)^T$，

$S^{(3)} = AS^{(2)} = (7,6,4,7,9)^T$，　　　$S^{(4)} = AS^{(3)} = (13,11,7,13,17)^T$

由此得名次为 5，1（4），2，3　（选手 1 和 4 名次相同）.

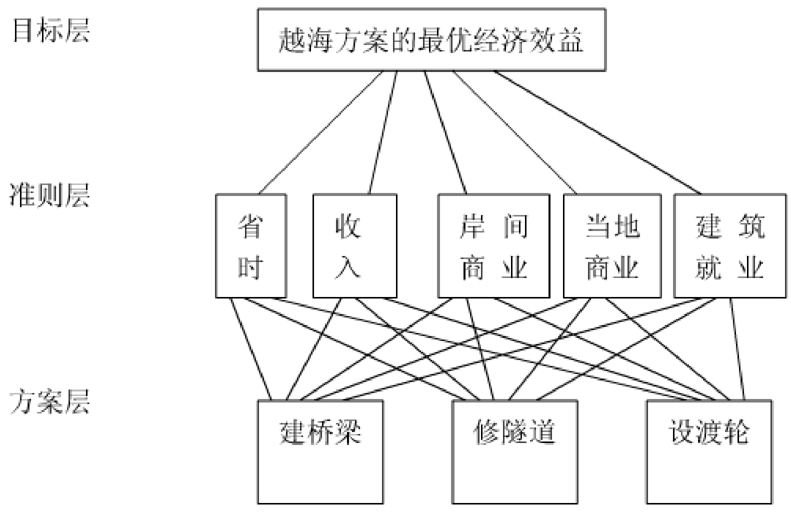
注：给 5 位网球选手排名次也可由计算 A 的最大特征根 λ 和对应特征向量 S 得到：

$\lambda = 1.8393$，$S = (0.2137,0.1794,0.1162,0.2137,0.2769)^T$

数学模型作业（12 月 16 日）解答

1.基于省时、收入、岸间商业、当地商业、建筑就业等五项因素，拟用层次分析法在建桥梁、修隧道、设渡轮这三个方案中选一个，画出目标为“越海方案的最优经济效益”的层次结构图.

解：



2.简述层次分析法的基本步骤. 问对于一个即将毕业的大学生选择工作岗位的决策问题要分成哪 3 个层次？具体内容分别是什么？

答：层次分析法的基本步骤为：(1). 建立层次结构模型；(2). 构造成对比较阵；(3). 计算权向量并做一致性检验；(4). 计算组合权向量并做组合一致性检验. 对于一个即将毕业的大学生选择工作岗位的决策问题，用层次分析法一般可分解为目标层、准则层和方案层这 3 个层次. 目标层是选择工作岗位，方案层是工作岗位 1、工作岗位 2、工作岗位 3 等，准则层一般为贡献、收入、发展、声誉、关系、位置等.

3. 用层次分析法时，一般可将决策问题分解成哪 3 个层次？试给出一致性指标的定义以及 n 阶正负反阵 **A** 为一致阵的充要条件.

答：用层次分析法时，一般可将决策问题分解为目标层、准则层和方案层这 3 个层次； 一致性指标的定义为：$CI=\dfrac{\lambda-n}{n-1}$. n 阶正互反阵 A 是一致阵的充要条件为：A 的最大特征根 λ=n.

第九章（2008 年 12 月 18 日）

1. 在9.1节传送带效率模型中,设工人数n固定不变.若想提高传送带效率 D,一种简单的方法是增加一个周期内通过工作台的钩子数m，比如增加一倍，其它条件不变. 另一种方法是在原来放置一只钩子的地方放置两只钩子，其它条件不变，于是每个工人在任何时刻可以同时触到两只钩子，只要其中一只是空的，他就可以挂上产品，这种办法用的钩子数量与第一种办法一样. 试推导这种情况下传送带效率的公式，从数量关系上说明这种办法比第一种办法好.

解：两种情况的钩子数均为$2m$. 第一种办法是$2m$个位置，单钩放置$2m$个钩子；第二种办法是m个位置，成对放置$2m$个钩子.

① 由9.1节的传送带效率公式，第一种办法的效率公式为

$$D=\frac{2m}{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{2m}\right)^{n}\right]$$

当$\dfrac{n}{2m}$较小，$n \succ\succ 1$时，有

$$D \approx \frac{2m}{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{2m}+\frac{n(n-1)}{8m^2}\right)\right]=1-\frac{n-1}{4m}$$

$$D=1-E \quad , \quad E \approx \frac{n}{4m}$$

② 下面推导第二种办法的传送带效率公式：

对于 m 个位置，每个位置放置的两只钩子称为一个钩对，考虑一个周期内通过的 m 个钩对.

任一只钩对被一名工人接触到的概率是 $\frac{1}{m}$；

任一只钩对不被一名工人接触到的概率是 $1-\frac{1}{m}$；

记 $p=\frac{1}{m}, q=1-\frac{1}{m}$. 由工人生产的独立性及事件的互不相容性. 得，任一钩对为空的概率为 q^n，其空钩的数为 $2m$；任一钩对上只挂上 1 件产品的概率为 npq^{n-1}，其空钩数为 m. 所以一个周期内通过的 $2m$ 个钩子中，空钩的平均数为

$$2m \cdot q^n + m \cdot npq^{n-1} = m\left(2q^n + npq^{n-1}\right)$$

于是带走产品的平均数是 $2m - m\left(2q^n + npq^{n-1}\right)$,

未带走产品的平均数是 $n-\left(2m-m\left(2q^n+npq^{n-1}\right)\right)$)

∴此时传送带效率公式为

$$D'=\frac{2m-m\left(2q^n+npq^{n-1}\right)}{n}=\frac{m}{n}\left[2-2\left(1-\frac{1}{m}\right)^n-\frac{n}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-1}\right]$$

③ 近似效率公式：

由于 $$\left(1-\frac{1}{m}\right)^n \approx 1-\frac{n}{m}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{m^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\frac{1}{m^3}$$

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-1} \approx 1-\frac{n-1}{m}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{1}{m^2}$$

$$\therefore \quad D' \approx 1-\frac{(n-1)(n-2)}{6m^2}$$

当 $n \succ\succ 1$ 时，并令 $E'=1-D'$，则 $E' \approx \frac{n^2}{6m^2}$

④ 两种办法的比较：

由上知：$E \approx \dfrac{n}{4m}$，$E' \approx \dfrac{n^2}{6m^2}$

$\therefore \quad E'/E = \dfrac{2n}{3m}$，当 $m \succ n$ 时，$\dfrac{2n}{3m} \prec 1$，$\quad \therefore \quad E' \prec E$.

所以第二种办法比第一种办法好.

《数学模型》作业解答

第九章（2008 年 12 月 23 日）

一报童每天从邮局订购一种报纸，沿街叫卖.已知每 100 份报纸报童全部卖出可获利 7 元.如果当天卖不掉，第二天削价可以全部卖出，但报童每 100 份报纸要赔 4 元.报童每天售出的报纸数 r 是一随机变量，其概率分布如下表：

售出报纸数 r（百份）	0	1	2	3	4	5
概率 $P(r)$	0．05	0.1	0.25	0.35	0.15	0.1

试问报童每天订购多少份报纸最佳(订购量必须是 100 的倍数)?

解：设每天订购 n 百份纸，则收益函数为

$$f(r)=\begin{cases}7r+(-4)(n-r) & r \le n \\ 7n & r \succ n\end{cases}$$

收益的期望值为 G(n) = $\sum_{r=0}^{n}(11r-4n)P(r)+7n\sum_{r=n+1}^{\infty}P(r)$

现分别求出 $n=0,1,2,3,4,5$ 时的收益期望值.

G(0)=0；G(1)=－4 ×0.05+7×0.1+7×（0.25+0.35+0.15+0.1）=6.45;

G(2)= $(-8\times0.05+3\times0.1+14\times0.25)+14\times(0.35+0.15+0.1)=11.8$；

G(3)=$(-12\times0.05-1\times0.1+10\times0.25+21\times0.35)+21\times(0.15+0.1)=14.4$

G(4)=$(-16\times0.05-5\times0.1+6\times0.25+17\times0.35+28\times0.15)+28\times0.1=13.15$

G(5)=$-20\times0.05-9\times0.1+2\times0.25+13\times0.35+24\times0.15+35\times0.1=10.25$

当报童每天订 300 份时，收益的期望值最大.

数模复习资料

第一章

1. 原型与模型

原型就是实际对象. **模型**就是原型的替代物. 所谓**模型**，按北京师范大学刘来福教授的观点：模型就是人们为一定的目的对原型进行的一个抽象.如航空模型、城市交通模型等.

- 模型
  - 形象模型
    - 直观模型　如玩具、照片等
    - 物理模型　如某一试验装置
  - 抽象模型
    - 思维模型　如某一操作
    - 符号模型　如地图、电路图
    - 数学模型

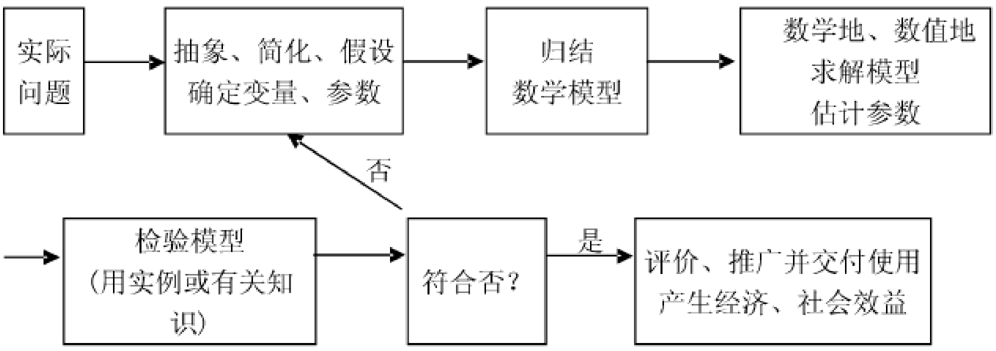
2. 数学模型

对某一实际问题应用数学语言和方法, 通过抽象、简化、假设等对这一实际问题近似刻划所得的数学结构, 称为此实际问题的一个**数学模型**. 例如力学中著名的牛顿第二定律使用公式 $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 来描述受力物体的运动规律就是一个成功的数学模型. 或又如描述人口 $N(t)$ 随时间 t 自由增长过程的微分方程 $\dfrac{dN(t)}{dt} = rN(t)$.

3. 数学建模

所谓**数学建模**是指根据需要针对实际问题组建数学模型的过程. 更具体地说, **数学建模**是指对于现实世界的某一特定系统或特定问题, 为了一个特定的目的, 运用数学的语言和方法, 通过抽象和简化, 建立一个近似描述这个系统或问题的数学结构(数学模型), 运用适当的数学工具以及计算机技术来解模型, 最后将其结果接受实际的检验, 并反复修改和完善.

数学建模过程流程图为：



4. 数学建模的步骤

依次为：模型准备、模型假设、模型构成、模型求解、模型分析、模型检验、模型应用

5. 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类, 常见的有：

a. 按模型的应用领域分类

$$\text{数学模型}\begin{cases}\text{人口模型}\\\text{交通模型}\\\text{环境模型（污染模型）}\\\text{生态模型}\\\text{城镇规划模型}\\\text{水资源模型}\\\text{再生资源利用模型}\end{cases}$$

b. 按建模的数学方法分类

$$\text{数学模型}\begin{cases}\text{初等数学模型}\\\text{几何模型}\\\text{微分方程模型}\\\text{图论模型}\\\text{组合数学模型}\\\text{概率模型}\\\text{规划论模型}\end{cases}$$

c. 按建模目的来分类

$$\text{数学模型}\begin{cases}\text{描述模型}\\\text{分析模型}\\\text{预报模型}\\\text{优化模型}\\\text{决策模型}\\\text{控制模型}\end{cases}$$

d. 层次分析法的基本步骤：1. 建立层次结构模型 2. 构造成对比较阵 3. 计算权向量并作一致性检验 4. 计算组合权向量并作组合一致性检验

e. n 阶正互反正 A 是一致阵的充要条件为 A 的最大特征值为 n

f. 正互反阵最大特征根和特征向量的实用算法：幂法、和法、根法

4．在“椅子摆放问题”的假设条件中，将四脚的连线呈正方形改为呈长方形，其余条件不变.试构造模型并求解.

解：设椅子四脚连线呈长方形 ABCD. AB 与 CD 的对称轴为 x 轴，用中心点的转角 θ 表示椅子的位置.将相邻两脚 A、B 与地面距离之和记为 $f(\theta)$;C、D 与地面距离之和记为 $g(\theta)$.并旋转180^0.于是，设 $f(0)\succ 0, g(0)=0,$ 就得到 $g(\pi)\succ 0, f(\pi)=0$.

数学模型：设 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 是 $[0,2\pi]$ 上 θ 的非负连续函数. 若 $\forall\theta\in[0,2\pi]$，有

$f(\theta)g(\theta)=0$ ，且 $g(0)=0, f(0)\succ 0, g(\pi)\succ 0, f(\pi)=0$ ，则 $\exists\theta_0\in[0,2\pi]$ ，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

模型求解:令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$.就有 $h(0)\succ 0,\ \ h(\pi)=f(\pi)-g(\pi)=0-g(\pi)\prec 0$. 再由 $f(\theta), g(\theta)$ 的连续性, 得到 $h(\theta)$ 是一个连续函数. 从而 $h(\theta)$ 是 $[0,\pi]$ 上的连续函数. 由连续函数的介值定理： $\exists\theta_0\in(0,\pi)$ ，使 $h(\theta_0)=0$. 即 $\exists\theta_0\in(0,\pi)$ ，使 $f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$.

又因为 $\forall\theta\in[0,2\pi]$, 有 $f(\theta)g(\theta)=0$. 故 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

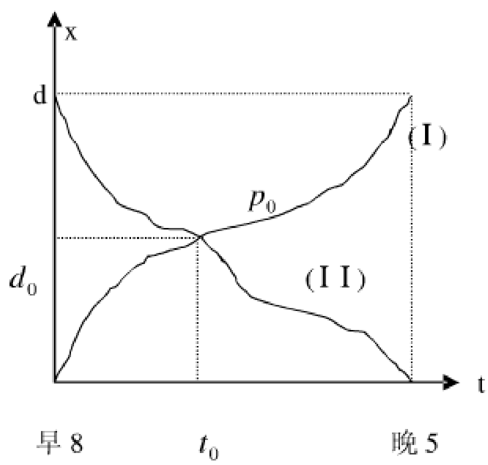
9. （1）某甲早 8：00 从山下旅店出发，沿一条路径上山，下午 5：00 到达山顶并留宿. 次日早 8：00 沿同一路径下山，下午 5：00 回到旅店.某乙说，甲必在两天中的同一时刻经过路径中的同一地点. 为什么？

（2）37 支球队进行冠军争夺赛，每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进入下一轮，直至比赛结束. 问共需进行多少场比赛，共需进行多少轮比赛. 如果是 n 支球队比赛呢？

解:（1）方法一：以时间 t 为横坐标，以沿上山路径从山下旅店到山顶的行程 x 为纵坐标，第一天的行程 $x(t)$ 可用曲线（I）表示 ，第二天的行程 $x(t)$ 可用曲线（I I）表示，（I）（I I）是连续曲线必有交点 $p_0(t_0,d_0)$ ，

两天都在 t_0 时刻经过 d_0 地点.

方法二：设想有两个人，一人上山，一人下山，同一天同时出发，沿同一路径, 必定相遇.



方法三：我们以山下旅店为始点记路程, 设从山下旅店到山顶的路程函数为 $f(t)$ (即 t 时刻走的路程为 $f(t)$), 同样设从山顶到山下旅店的路函数为 $g(t)$, 并设山下旅店到山顶的距离

为a（a>0）. 由题意知：$f(8)=0,\ f(17)=a$，$g(8)=a$，$g(17)=0$. 令$h(t)=f(t)-g(t)$，则有$h(8)=f(8)-g(8)=-a<0$，$h(17)=f(17)-g(17)=a>0$，由于$f(t)$，$g(t)$都是时间 t 的连续函数, 因此$h(t)$也是时间 t 的连续函数, 由连续函数的介值定理, $\exists t_0\in[8,17]$，使$h(t_0)=0$，即$f(t_0)=g(t_0)$.

（2）36 场比赛，因为除冠军队外，每队都负一场；6 轮比赛，因为 2 队赛 1 轮，4 队赛 2 轮，32 队赛 5 轮. n队需赛$n-1$场，若$2^{k-1}\prec n\le 2^k$，则需赛k轮.

2．已知某商品在k时段的数量和价格分别为x_k和y_k，其中 1 个时段相当于商品的一个生产周期.设该商品的需求函数和供应函数分别为$y_{k+1}=f(\frac{x_{k+1}+x_k}{2})$和$x_{k+1}=g(y_k)$.试建立关于商品数量的差分方程模型，并讨论稳定平衡条件.

解：已知商品的需求函数和供应函数分别为$y_{k+1}=f(\frac{x_{k+1}+x_k}{2})$和$x_{k+1}=g(y_k)$.

设曲线f和g相交于点$P_0(x_0,y_0)$，在点P_0附近可以用直线来近似表示曲线f和g：

$$y_{k+1}-y_0=-\alpha(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}-x_0),\alpha\succ 0 \quad \text{--------------------（1）}$$

$$x_{k+1}-x_0=\beta(y_k-y_0),\qquad \beta\succ 0 \quad \text{--- ----------------（2）}$$

由（2）得 $x_{k+2}-x_0=\beta(y_{k+1}-y_0)$ --------------------（3）

（1）代入（3），可得$x_{k+2}-x_0=-\alpha\beta(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}-x_0)$

$$\therefore\quad 2x_{k+2}+\alpha\beta\, x_{k+1}+\alpha\beta\, x_k=2x_0+2\alpha\beta x_0,\ k=1,2,\cdots, \quad \text{--------------（4）}$$

上述（4）式是我们所建立的差分方程模型，且为二阶常系数线性非齐次差分方程.

为了寻求P_0点稳定平衡条件，我们考虑（4）对应的齐次差分方程的特征方程：

$$2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$$

容易算出其特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4} \quad \text{----------------（5）}$$

当$\alpha\beta \geq 8$时，显然有

$$\lambda_2 = \frac{-\alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 8\alpha\beta}}{4} \leq -\frac{\alpha\beta}{4} \qquad \text{-----------} (6)$$

从而$|\lambda_2| \succ 2$，λ_2在单位圆外. 下面设$\alpha\beta \prec 8$，由(5)式可以算出 $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}$

要使特征根均在单位圆内，即 $|\lambda_{1,2}| \prec 1$，必须 $\alpha\beta \prec 2$.

故P_0点稳定平衡条件为 $\alpha\beta \prec 2$.

3. 设某渔场鱼量$x(t)$(时刻t渔场中鱼的数量)的自然增长规律为：$\frac{dx(t)}{dt} = rx(1-\frac{x}{N})$

其中r为固有增长率,N`为环境容许的最大鱼量. 而单位时间捕捞量为常数h.

（1）. 求渔场鱼量的平衡点,并讨论其稳定性;

（2）. 试确定捕捞强度E_m,使渔场单位时间内具有最大持续产量Q_m,并求此时渔场鱼量水平x_0^*.

解：（1）. $x(t)$变化规律的数学模型为 $\frac{dx(t)}{dt} = rx(1-\frac{x}{N}) - h$

记 $f(x) = rx(1-\frac{x}{N}) - h$,令 $rx(1-\frac{x}{N}) - h = 0$ ，即 $\frac{r}{N}x^2 - rx + h = 0$ ----（1）

$\Delta = r^2 - \frac{4rh}{N} = r(r - \frac{4h}{N})$ ，（1）的解为：$x_{1,2} = \frac{N \pm \sqrt{1-\frac{4h}{rN}}N}{2}$

① 当$\Delta \prec 0$时，（1）无实根，此时无平衡点；

②当$\Delta = 0$时，（1）有两个相等的实根，平衡点为$x_0 = \frac{N}{2}$.

$f'(x) = r(1-\frac{x}{N}) - \frac{rx}{N} = r - \frac{2rx}{N}$ ，$f'(x_0) = 0$ 不能断定其稳定性.

但$\forall\, x \succ x_0$ 及$x \prec x_0$ 均有$f(x) = rx(1-\frac{x}{N}) - \frac{rN}{4} \prec 0$ ，即$\frac{dx}{dt} \prec 0$ $\therefore$ x_0不稳定；

③ 当$\Delta \succ 0$时，得到两个平衡点：

$$x_1 = \frac{N - N\sqrt{1-\frac{4h}{rN}}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{N + N\sqrt{1-\frac{4h}{rN}}}{2}$$

易知 $x_1 \prec \frac{N}{2}$ ，$x_2 \succ \frac{N}{2}$ $\therefore$ $f'(x_1) \succ 0$，$f'(x_2) \prec 0$

$\therefore$平衡点x_1不稳定 ，平衡点x_2稳定.

（2）．最大持续产量的数学模型为： $\begin{cases} \max h \\ s.t. f(x)=0 \end{cases}$

即 $\max h = rx(1-\dfrac{x}{N})$， 易得 $x_0^* = \dfrac{N}{2}$ 此时 $h = \dfrac{rN}{4}$，但 $x_0^* = \dfrac{N}{2}$ 这个平衡点不稳定.

要获得最大持续产量，应使渔场鱼量 $x \succ \dfrac{N}{2}$，且尽量接近 $\dfrac{N}{2}$，但不能等于 $\dfrac{N}{2}$.

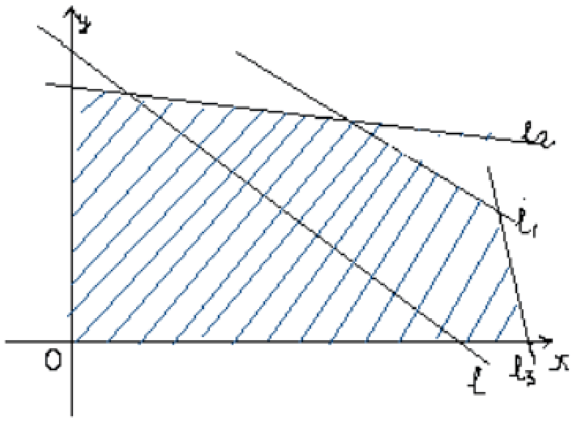
5．某工厂生产甲、乙两种产品,生产每件产品需要原材料、能源消耗、劳动力及所获利润如下表所示：

品种	原材料	能源消耗(百元)	劳动力(人)	利润(千元)
甲	2	1	4	4
乙	3	6	2	5

现有库存原材料 1400 千克；能源消耗总额不超过 2400 百元；全厂劳动力满员为 2000 人.试安排生产任务(生产甲、乙产品各多少件),使利润最大,并求出最大利润.

解：设安排生产甲产品 x 件，乙产品 y 件，相应的利润为 S. 则此问题的数学模型为

$$\max S = 4x + 5y$$
$$s.t. 2x + 3y \le 1400$$
$$x + 6y \le 2400$$
$$4x + 2y \le 2000$$
$$x \ge 0, y \ge 0, x, y \in Z$$



模型的求解：

用图解法. 可行域为：由直线

$l_1: 2x + 3y = 1400$

$l_2: x + 6y = 2400$

$l_3: 4x + 2y = 2000$

及 $x = 0, y = 0$

组成的凸五边形区域.

直线 $l: 4x + 5y = C$ 在此凸五边形区域内平行移动. 易知：当 l 过 l_1 与 l_3 的交点时，S 取最大值. 由 $\begin{cases} 2x + 3y = 1400 \\ 4x + 2y = 2000 \end{cases}$ 解得：$x = 400, y = 200$

$S_{\max} = 4 \times 400 + 5 \times 200 = 2600$（千元）.

故安排生产甲产品 400 件、乙产品 200 件,可使利润最大,其最大利润为 2600 千元.

6. 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量以及可获利润如下表：

货物	体积（立方米/箱）	重量（百斤/箱）	利润（百元/箱）
甲	5	2	20
乙	4	5	10

已知这两种货物托运所受限制是体积不超过 24 立方米，重量不超过 13 百斤.试问这两种

货物各托运多少箱，使得所获利润最大，并求出最大利润.

解: 设甲货物、乙货物的托运箱数分别为 x_1, x_2，所获利润为 z .则问题的数学模型可表示为

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2$$

$$st\begin{cases}5x_1 + 4x_2 \le 24\\ 2x_1 + 5x_2 \le 13\\ x_1, x_2 \ge 0, x, y \in Z\end{cases}$$

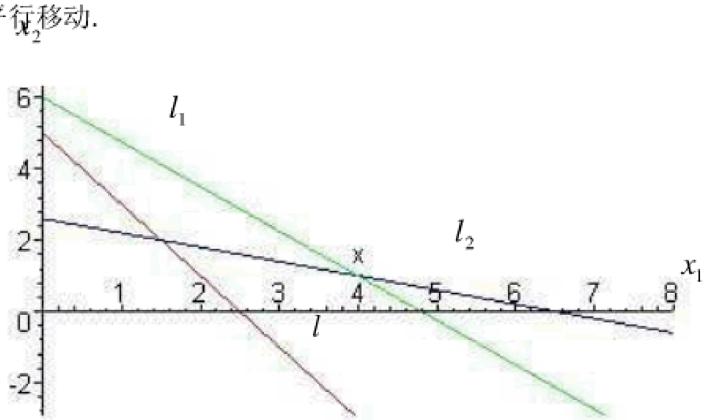
这是一个整线性规划问题.

用图解法求解.

可行域为：由直线

$l_1 : 5x_1 + 4x_2 = 24$

$l_2 : 2x_1 + 5x_2 = 13$ 　及 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 组成直线 $l : 20x_1 + 10x_2 = c$ 在此凸四边形区域内平行移动.



易知：当 l 过 l_1 与 l_2 的交点时，z 取最大值

由 $\begin{cases}5x_1 & +4x_2 = 24\\ 2x_1 & +5x_2 = 13\end{cases}$ 　解得 $\begin{cases}x_1 & = 4\\ x_2 & = 1\end{cases}$

$$z_{\max} = 20\times 4 + 10\times 1 = 90.$$

7. 深水中的波速 v 与波长 λ 、水深 d 、水的密度 ρ 和重力加速度 g 有关，试用量纲分析方法给出波速 v 的表达式.

解: 设 v，λ, d , ρ，g 的关系为 $f(v,\lambda,d,\rho,g)$=0. 其量纲表达式为[v]=LM^0T^{-1}，[λ]=LM^0T^0，[d]=LM^0T^0，[ρ]=$L^{-3}MT^0$，[g]=LM^0T^{-2}, 其中 L，M，T 是基本量纲. ---------4 分

量纲矩阵为

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{matrix}(L)\\(M)\\(T)\end{matrix} \\
\quad (v)\quad (\lambda)\quad (d)\quad (\rho)\ (g)
\end{array}
$$

齐次线性方程组 **Ay=0** ，即

$$
\begin{cases} y_1+y_2+y_3-3y_4+y_5=0 \\ \qquad\qquad\quad y_4 \qquad\quad =0 \\ -y_1 \qquad\qquad\qquad -2y_5=0 \end{cases}
$$

的基本解为 $\vec{y}_1=(1,-\dfrac{1}{2},0,0,-\dfrac{1}{2})$, $\vec{y}_2=(0,-1,1,0,0)$

由量纲 P_i 定理 得 $\begin{cases} v\lambda^{-\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}=\pi_1 \\ \lambda^{-1}d=\pi_2 \end{cases}$

$\therefore v=\sqrt{\lambda g}\ \pi_1$, $\pi_1=\varphi(\pi_2)$, $\pi_2=d/\lambda$

$\therefore v=\sqrt{\lambda g}\,\varphi(d/\lambda)$，其中 φ 是未定函数 .

第二章(2)（2008 年 10 月 9 日

15．速度为 v 的风吹在迎风面积为 s 的风车上，空气密度是 ρ ，用量纲分析方法确定风车获得的功率 P 与 v 、S、 ρ 的关系.

解：设 P 、 v 、S、 ρ 的关系为 $f(P,v,s,\rho)=0$， 其量纲表达式为:

$[P]=ML^2T^{-3}$, $[v]=LT^{-1}$, $[s]=L^2$, $[\rho]=ML^{-3}$, 这里 L,M,T 是基本量纲.

量纲矩阵为:

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}(L)\\(M)\\(T)\end{matrix} \\
\quad (P)\quad (v)\quad (s)\quad (\rho)
\end{array}
$$

齐次线性方程组为:

$$
\begin{cases} 2y_1+y_2+2y_3-3y_4=0 \\ y_1+\quad y_4\quad =0 \\ -3y_1-y_2\quad =0 \end{cases}
$$

它的基本解为 $y=(-1,3,1,1)$

由量纲 P_i 定理得 $\pi=P^{-1}v^3s^1\rho^1$， $\therefore P=\lambda v^3s^1\rho^1$ ， 其中 λ 是无量纲常数.

16．雨滴的速度 v 与空气密度 ρ 、粘滞系数 μ 和重力加速度 g 有关，其中粘滞系数的定义

是：运动物体在流体中受的摩擦力与速度梯度和接触面积的乘积成正比，比例系数为粘滞系数，用量纲分析方法给出速度v的表达式.

解：设v，ρ，μ，g 的关系为$f(v,\rho,\mu,g)=0$. 其量纲表达式为$[v]=LM^0T^{-1}$，$[\rho]=L^{-3}MT^0$，$[\mu]=MLT^{-2}(LT^{-1}L^{-1})^{-1}L^{-2}=MLL^{-2}T^{-2}T=L^{-1}MT^{-1}$，$[g]=LM^0T^{-2}$，其中 L，M，T 是基本量纲.

量纲矩阵为

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & -3 & -1 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\-1 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{array}{c}(L)\\(M)\\(T)\end{array}\\ \begin{array}{cccc}(v) & (\rho) & (\mu) & (g)\end{array}\end{array}$$

齐次线性方程组 **Ay=0** ，即

$$\begin{cases}y_1-3y_2-y_3+y_4=0\\ y_2+y_3=0\\ -y_1-y_3-2y_4=0\end{cases}$$

的基本解为 y=(-3 ,-1 ,1 ,1)

由量纲P_i定理 得 $\pi=v^{-3}\rho^{-1}\mu g$.　　$\therefore v=\lambda\sqrt[3]{\dfrac{\mu g}{\rho}}$，其中$\lambda$是无量纲常数.

16*. 雨滴的速度v与空气密度ρ、粘滞系数μ、特征尺寸γ和重力加速度g有关，其中粘滞系数的定义是：运动物体在流体中受的摩擦力与速度梯度和接触面积的乘积成正比，比例系数为粘滞系数，用量纲分析方法给出速度v的表达式.

解：设v，ρ，μ，γ， g 的关系为$f(v,\gamma,\rho,\mu,g)=0$. 其量纲表达式为

$[v]=LM^0T^{-1}$，$[\rho]=L^{-3}MT^0$，$[\mu]=MLT^{-2}(LT^{-1}L^{-1})^{-1}L^{-2}=MLL^{-2}T^{-2}T=L^{-1}MT^{-1}$，$[\gamma]=LM^0T^0$，$[g]=LM^0T^{-2}$

其中 L，M，T 是基本量纲.

量纲矩阵为

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{array}{c}(L)\\(M)\\(T)\end{array}\\ \begin{array}{ccccc}(v) & (\gamma) & (\rho) & (\mu) & (g)\end{array}\end{array}$$

齐次线性方程组 **Ay=0** 即

$$\begin{cases}y_1+y_2-3y_3-y_4+y_5=0\\ y_3+y_4=0\\ -y_1-y_4-2y_5=0\end{cases}$$

的基本解为

$$\begin{cases} y_1 = (1, -\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}) \\ y_2 = (0, -\frac{3}{2}, -1, 1, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

得到两个相互独立的无量纲量

$$\begin{cases} \pi_1 = v\gamma^{-1/2} g^{-1/2} \\ \pi_2 = \gamma^{-3/2} \rho^{-1} \mu g^{-1/2} \end{cases}$$

即 $v = \sqrt{\gamma g}\,\pi_1$， $\gamma^{3/2}\rho g^{1/2}\mu^{-1} = \pi_2^{-1}$. 由 $\Phi(\pi_1, \pi_2) = 0$ ，得 $\pi_1 = \varphi(\pi_2^{-1})$

$\therefore\ v = \sqrt{\gamma g}\,\varphi(\gamma^{3/2}\rho g^{1/2}\mu^{-1})$ ，其中 φ 是未定函数.

20. 考察阻尼摆的周期，即在单摆运动中考虑阻力，并设阻力与摆的速度成正比. 给出周期的表达式，然后讨论物理模拟的比例模型，即怎样由模型摆的周期计算原型摆的周期.

解：设阻尼摆周期 t，摆长 l，质量 m，重力加速度 g，阻力系数 k 的关系为

$f(t, l, m, g, k) = 0$ 其量纲表达式为：

$[t] = L^0 M^0 T, [l] = LM^0 T^0, [m] = L^0 MT^0, [g] = LM^0 T^{-2}, [k] = [f][v]^{-1} = MLT^{-2}(LT^{-1})^{-1}$

$= L^0 MT^{-1}$， 其中 L，M，T 是基本量纲.

量纲矩阵为

$$\begin{array}{cc} \text{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (L) \\ (M) \\ (T) \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} (t) & (l) & (m) & (g) & (k) \end{array} & \end{array}$$

齐次线性方程组

$$\begin{cases} y_2 + y_4 = 0 \\ y_3 + y_5 = 0 \\ y_1 - 2y_4 - y_5 = 0 \end{cases}$$

的基本解为

$$\begin{cases} Y_1 = (1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0) \\ Y_2 = (0, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

得到两个相互独立的无量纲量

$$\begin{cases} tl^{-1/2} g^{1/2} = \pi_1 \\ l^{1/2} m^{-1} g^{-1/2} k = \pi_2 \end{cases}$$

$$\therefore t=\sqrt{\frac{l}{g}}\ \pi_1,\quad \pi_1=\varphi(\pi_2),\quad \pi_2=\frac{kl^{1/2}}{mg^{1/2}}$$

$$\therefore t=\sqrt{\frac{l}{g}}\varphi(\frac{kl^{1/2}}{mg^{1/2}})$$ ，其中 φ 是未定函数 .

考虑物理模拟的比例模型，设 g 和 k 不变，记模型和原型摆的周期、摆长、质量分别为

t,t'；l,l'；m,m'.　　又 $t'=\sqrt{\frac{l'}{g}}\varphi(\frac{kl'^{1/2}}{m'g^{1/2}})$

当无量纲量 $\frac{m'}{m}=\sqrt{\frac{l'}{l}}$ 时，　就有　$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{l'}{g}}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}=\sqrt{\frac{l'}{l}}$.

第三章 1（2008 年 10 月 14 日）

2. 在 3.1 节存贮模型的总费用中增加购买货物本身的费用，重新确定最优订货周期和订货批量. 证明在不允许缺货模型中结果与原来的一样，而在允许缺货模型中最优订货周期和订货批量都比原来结果减少.

解：设购买单位重量货物的费用为 k，其它假设及符号约定同课本.

1^0 对于不允许缺货模型，每天平均费用为：

$$C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2rT}{2}+kr$$

$$\frac{dC}{dT}=-\frac{c_1}{T^2}+\frac{c_2r}{2}$$

令 $\frac{dC}{dT}=0$ ，　解得　$T^*=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2r}}$

由 $Q=rT$ ，　得 $Q^*=rT^*=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$

与不考虑购货费的结果比较，T、Q 的最优结果没有变.

2^0 对于允许缺货模型，每天平均费用为：

$$C(T,Q)=\frac{1}{T}\left[c_1+\frac{c_2Q^2}{2r}+\frac{c_3}{2r}(rT-Q)^2+kQ\right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial T}=-\frac{c_1}{T^2}-\frac{c_2Q^2}{2rT^2}+\frac{c_3r}{2}-\frac{c_3Q^2}{2rT^2}-\frac{kQ}{T^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial Q}=\frac{c_2 Q}{rT}-c_3+\frac{c_3 Q}{rT}+\frac{k}{T}$$

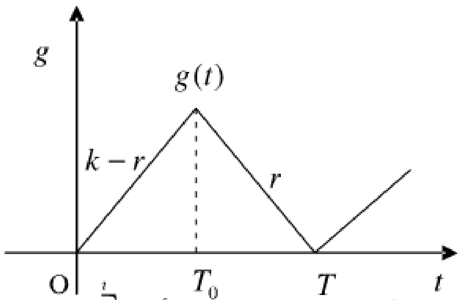
令$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial T}=0\\ \dfrac{\partial C}{\partial Q}=0\end{cases}$，　得到驻点：

$$\begin{cases}T^*=\sqrt{\dfrac{2c_1}{rc_2}\dfrac{c_2+c_3}{c_3}-\dfrac{k^2}{c_2c_3}}\\ Q^*=\sqrt{\dfrac{2c_1 r}{c_2}\dfrac{c_3}{c_2+c_3}-\dfrac{c_3k^2r^2}{c_2(c_2+c_3)}}-\dfrac{kr}{c_2+c_3}\end{cases}$$

与不考虑购货费的结果比较，T、Q的最优结果减少.

2．建立不允许缺货的生产销售存贮模型．设生产速率为常数k，销售速率为常数r，$k>r$．在每个生产周期T内，开始的一段时间$\left(0<t<T_0\right)$一边生产一边销售，后来的一段时间$(T_0<t<T)$只销售不生产，画出贮存量$g(t)$的图形. 设每次生产准备费为c_1，单位时间每件产品贮存费为c_2，以总费用最小为目标确定最优生产周期，讨论$k>>r$和$k\approx r$的情况.

解：由题意可得贮存量$g(t)$的图形如下：



贮存费为　$c_2\lim\limits_{\Delta t\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta t=c_2\int_0^T g(t)dt=c_2\dfrac{(k-r)T_0\cdot T}{2}$

又∵　$(k-r)T_0=r(T-T_0)$

∴　$T_0=\dfrac{r}{k}T$　，　∴　贮存费变为　$c_2=\dfrac{r(k-r)T\cdot T}{2k}$

于是不允许缺货的情况下，生产销售的总费用（单位时间内）为

$$C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2 r(k-r)T^2}{2kT}=\frac{c_1}{T}+c_2\frac{r(k-r)T}{2k}$$

$$\frac{dC}{dT}=-\frac{c_1}{T^2}+c_2\frac{r(k-r)}{2k}.$$

令 $\dfrac{dC}{dT}=0$ ，　得 $T^*=\sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$

易得函数 $C(T)$ 在 T^* 处取得最小值，即最优周期为： $T^*=\sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$

当 $k>>r$ 时，$T^*\approx\sqrt{\dfrac{2c_1}{c_2r}}$ ．相当于不考虑生产的情况.

当 $k\approx r$ 时，$T^*\to\infty$ ．此时产量与销量相抵消，无法形成贮存量.

第四章（2008 年 10 月 28 日）

2. 某厂生产甲、乙两种产品,一件甲产品用 A 原料 1 千克，B 原料 5 千克；一件乙产品用 A 原料 2 千克，B 原料 4 千克. 现有 A 原料 20 千克，B 原料 70 千克. 甲、乙产品每件售价分别为 20 元和 30 元. 问如何安排生产使收入最大?

解：设安排生产甲产品 x 件,乙产品 y 件，相应的利润为 S

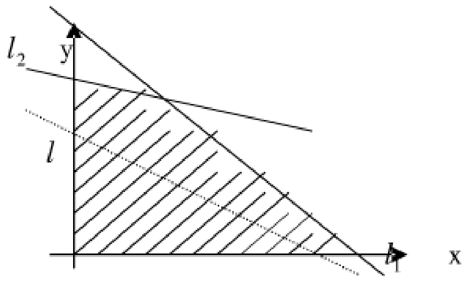
则此问题的数学模型为：

max S=20x+30y

$$\text{s.t.}\begin{cases}x+2y\le 20\\5x+4y\le 70\\x,y\ge 0,x,y\in Z\end{cases}$$

这是一个整线性规划问题，现用图解法进行求解

可行域为：由直线 l_1：x+2y=20，l_2:5x+4y＝70



以及 x=0,y=0 组成的凸四边形区域.
直线 l：20x+30y=c 在可行域内平行移动.

易知：当 l 过 l_1 与 l_2 的交点时，

S 取最大值.

由 $\begin{cases}x+2y=20\\5x+4y=70\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10\\y=5\end{cases}$

此时 $S_{\max}=20\times 10+30\times 5=350$（元）

2. 某厂拟用集装箱托运甲乙两种货物，每箱的体积、重量以及可获利润如下表：

货物	体积 （立方米/箱）	重量 （百斤/箱）	利润 （百元/箱）
甲	5	2	20
乙	4	5	10

已知这两种货物托运所受限制是体积不超过 24 立方米，重量不超过 13 百斤.试问这两种货物各托运多少箱，使得所获利润最大，并求出最大利润.

解:设甲货物、乙货物的托运箱数分别为 x_1, x_2, 所获利润为 z .则问题的数学模型可表示为

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2$$

$$st\begin{cases}5x_1 + 4x_2 \le 24\\ 2x_1 + 5x_2 \le 13\\ x_1, x_2 \ge 0, x, y \in Z\end{cases}$$

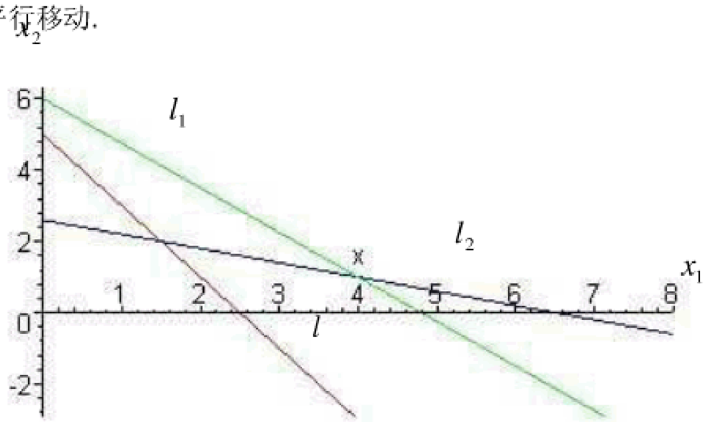
这是一个整线性规划问题.

用图解法求解.

可行域为：由直线

$l_1 : 5x_1 + 4x_2 = 24$

$l_2 : 2x_1 + 5x_2 = 13$ 及 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 组成直线 $l : 20x_1 + 10x_2 = c$ 在此凸四边形区域内平行移动.



易知：当l过l_1与l_2的交点时，z取最大值

由$\begin{cases}5x_1 \quad + 4x_2 = 24\\ 2x_1 \quad + 5x_2 = 13\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1 \quad = 4\\ x_2 \quad = 1\end{cases}$

$$z_{\max} = 20 \times 4 + 10 \times 1 = 90.$$

3. 某微波炉生产企业计划在下季度生产甲、乙两种型号的微波炉. 已知每台甲型、乙型微波炉的销售利润分别为 3 和 2 个单位. 而生产一台甲型、乙型微波炉所耗原料分别为 2 和 3 个单位, 所需工时分别为 4 和 2 个单位. 若允许使用原料为 100 个单位, 工时为 120 个单位, 且甲型、乙型微波炉产量分别不低于 6 台和 12

台. 试建立一个数学模型, 确定生产甲型、乙型微波炉的台数, 使获利润最大. 并求出最大利润.

解：设安排生产甲型微波炉 x 件,乙型微波炉 y 件,相应的利润为 S.

则此问题的数学模型为： max S=3x +2y

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x+3y\le 100 \\ 4x+2y\le 120 \\ x\ge 6, y\ge 12, x, y\in Z \end{cases}$$

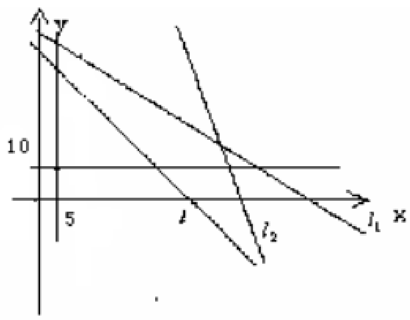
这是一个整线性规划问题

用图解法进行求解

可行域为：由直线 l_1：2x+3y=100, l_2:4x+2y＝120

及 x=6,y=12 组成的凸四边形区域.

直线 l：3x+2y=c 在此凸四边形区域内平行移动. 易知：当 l 过 l_1 与 l_2 的交点时, S 取最大值.



$$\text{由}\begin{cases} 2x+3y=100 \\ 4x+2y=120 \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} x=20 \\ y=20 \end{cases}.$$

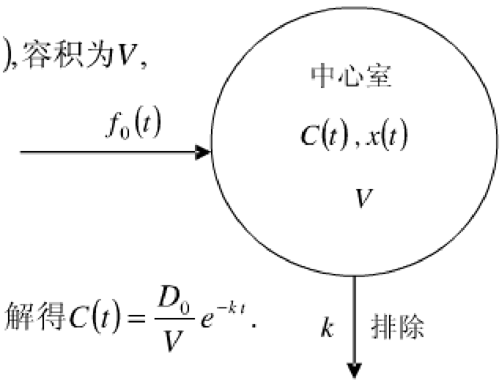
$S_{\max}$＝3×20＋2×20＝100.

第五章 2（2008 年 11 月 14 日）

6. 模仿 5.4 节建立的二室模型来建立一室模型（只有中心室），在快速静脉注射、恒速静脉滴注（持续时间为 τ ）和口服或肌肉注射 3 种给药方式下求解血药浓度，并画出血药浓度曲线的图形.

解：设给药速率为 $f_0(t)$,中心室药量为$x(t)$,血药浓度为$C(t)$,容积为V,

排除速率为常数k,则$x'(t)+kx(t)=f_0(t), x(t)=VC(t)$.



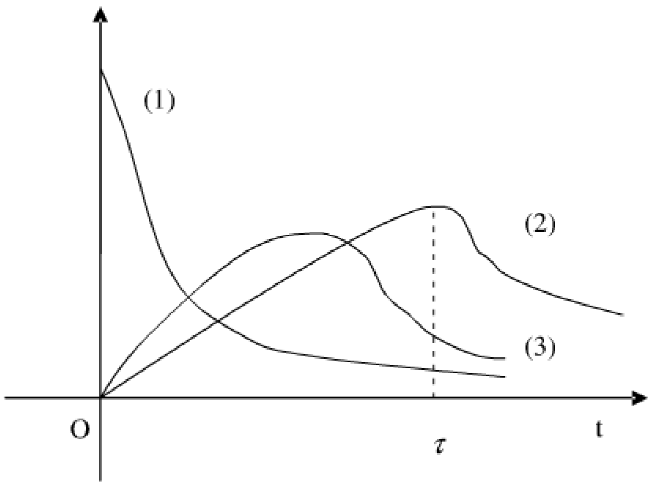
(1) 快速静脉注射：设给药量为 D_0，则 $f_0(t)=0, C(0)=\dfrac{D_0}{V}$,解得$C(t)=\dfrac{D_0}{V}e^{-kt}$.

(2) 恒速静脉滴注(持续时间为 τ)：设滴注速率为 k_0，则$f_0(t)=k_0, C(0)=0$, 解得

$$C(t)=\begin{cases}\dfrac{k_0}{Vk}\left(1-e^{-kt}\right), & 0\le t\le\tau\\ \dfrac{k_0}{Vk}\left(1-e^{-kt}\right)e^{-k(t-\tau)}, & t\succ\tau\end{cases}$$

(3) 口服或肌肉注射：$f_0(t)=k_{01}D_0e^{-k_{01}t}$（见5.4节（13）式），解得

$$C(t)=\begin{cases}\dfrac{k_{01}D_0}{V(k_{01}-k)}\left(e^{-kt}-e^{-k_{01}t}\right), & k\ne k_{01}\\ \dfrac{kD}{V}te^{-kt}, & k=k_{01}\end{cases}$$ 3 种情况下的血药浓度曲线如下：



4．在 5.3 节正规战争模型（3）中，设乙方与甲方战斗有效系数之比为 $\dfrac{a}{b}=4$. 初始兵力 x_0与y_0相同.

（1）问乙方取胜时的剩余兵力是多少，乙方取胜的时间如何确定.

（2）若甲方在战斗开始后有后备部队以不变的速率 r 增援，重新建立模型，讨论如何判断双方的胜负.

解:用 $x(t), y(t)$表示甲、乙交战双方时刻 t 的士兵人数，则正规战争模型可近似表示为:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx, \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(1)$$

现求(1)的解：　(1)的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & a \\ b & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - ab = 0. \qquad \therefore \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ab}$$

λ_1, λ_2对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore (1)$的通解为$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{ab}t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{ab}t}$.

再由初始条件，得

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{2} - y_0\right) e^{\sqrt{ab}\,t} + \left(\frac{x_0}{2} + y_0\right) e^{-\sqrt{ab}\,t} \qquad \cdots\cdots(2)$$

又由(1)可得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{bx}{ay}$.

其解为　$ay^2 - bx^2 = k$，　而$k = ay_0^2 - bx_0^2$　　$\cdots\cdots(3)$

(1)　当$x(t_1) = 0$时，$y(t_1) = \sqrt{\dfrac{k}{a}} = \sqrt{\dfrac{ay_0^2 - bx_0^2}{a}} = y_0\sqrt{1 - \dfrac{b}{a}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} y_0$.

即乙方取胜时的剩余兵力数为$\dfrac{\sqrt{3}}{2} y_0$.

又令 $x(t_1)=0$,由（2）得 $\left(\frac{x_0}{2}-y_0\right)e^{\sqrt{ab}t_1}+\left(\frac{x_0}{2}+y_0\right)e^{-\sqrt{ab}t_1}=0.$

注意到 $x_0=y_0$,得$e^{2\sqrt{ab}t_1}=\frac{x_0+2y_0}{2y_0-x_0}$. $\therefore e^{2\sqrt{ab}t_1}=3,\qquad \therefore t_1=\frac{\ln 3}{4b}.$

(2) 若甲方在战斗开始后有后备部队以不变的速率 r 增援. 则

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-ay+r\\ \frac{dy}{dt}=-bx\\ x(0)=x_0,y(0)=y_0\end{cases}\qquad\cdots\cdots(4)$$

由(4)得$\frac{dx}{dy}=\frac{-ay+r}{-bx}$,即$bxdx=aydy-rdy$. 相轨线为$ay^2-2ry-bx^2=k$,

$k=ay_0^2-2ry_0-bx_0^2$或$a\left(y-\frac{r}{a}\right)^2-bx^2-\frac{r^2}{a}=k$. 此相轨线比书图 11 中的轨线上移了

$\frac{r}{a}$.乙方取胜的条件为$k\succ 0$,亦即$\left(y_0-\frac{r}{a}\right)^2\succ\frac{b}{a}x_0^2+\frac{r^2}{a^2}$.

第六章（2008 年 11 月 20 日）

1. 在 6.1 节捕鱼模型中，如果渔场鱼量的自然增长仍服从 Logistic 规律，而单位时间捕捞量为常数 h.

(1) 分别就 $h>rN/4$，$h<rN/4$，$h=rN/4$ 这 3 种情况讨论渔场鱼量方程的平衡点及其稳定状况.

(2) 如何获得最大持续产量，其结果与 6.1 节的产量模型有何不同.

解：设时刻 t 的渔场中鱼的数量为 $x(t)$，则由题设条件知：$x(t)$变化规律的数学模型为

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx(1-\frac{x}{N})-h$$

$$\text{记 } F(x)=rx(1-\frac{x}{N})-h$$

(1). 讨论渔场鱼量的平衡点及其稳定性：

由 $F(x)=0$，得 $rx(1-\frac{x}{N})-h=0$.

$$\text{即}\quad \frac{r}{N}x^2-rx+h=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\Delta=r^2-\frac{4rh}{N}=r(r-\frac{4h}{N})\quad ,$$

(1)的解为：$x_{1,2}=\dfrac{N\pm\sqrt{1-\frac{4h}{rN}}N}{2}$

①当 $h>rN/4$，$\Delta<0$，(1)无实根，此时无平衡点；

②当 $h=rN/4$，$\Delta=0$，(1)有两个相等的实根，平衡点为 $x_0=\dfrac{N}{2}$.

$$F'(x)=r(1-\frac{x}{N})-\frac{rx}{N}=r-\frac{2rx}{N}，\ F'(x_0)=0\qquad \text{不能断定其稳定性.}$$

但 $\forall x\succ x_0$ 及 $x\prec x_0$ 均有 $F(x)=rx(1-\dfrac{x}{N})-\dfrac{rN}{4}\prec 0$，即 $\dfrac{dx}{dt}\prec 0$. $\therefore x_0$ 不稳定；

③当 $h<rN/4$，$\Delta>0$ 时，得到两个平衡点：

$$x_1=\frac{N-\sqrt{1-\frac{4h}{rN}}N}{2}，\quad x_2=\frac{N+\sqrt{1-\frac{4h}{rN}}N}{2}$$

易知：$x_1<\dfrac{N}{2}$ ，$x_2>\dfrac{N}{2}$ ，$F'(x_1)>0$ ，$F'(x_2)<0$

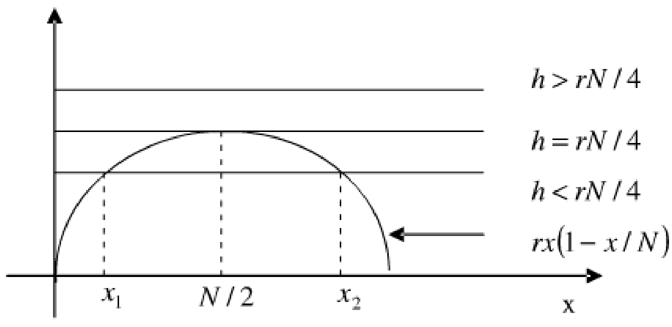
$\therefore$ 平衡点 x_1 不稳定，平衡点 x_2 稳定.

(2)最大持续产量的数学模型为

$$\begin{cases}\max h\\ s.t.\,F(x)=0\end{cases}$$

即 $\max h=rx(1-\dfrac{x}{N})$，

易得 $x_0^*=\dfrac{N}{2}$　此时 $h=\dfrac{rN}{4}$，



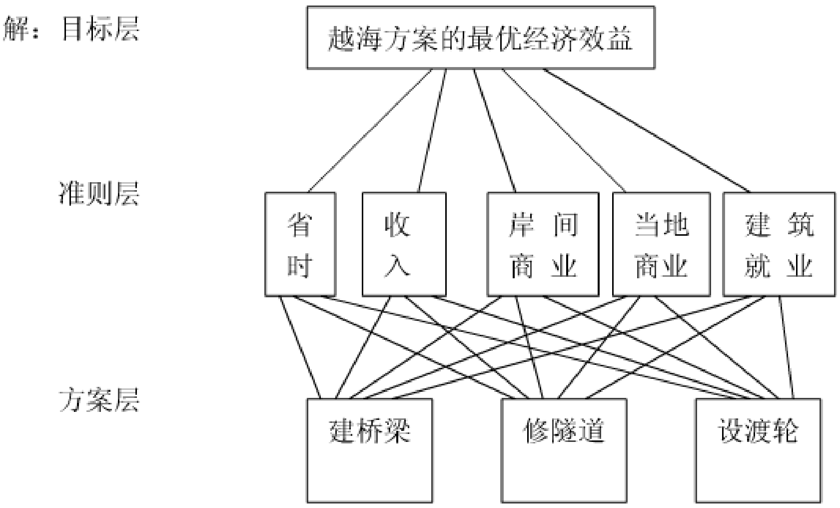
但 $x_0^*=\dfrac{N}{2}$ 这个平衡点不稳定．这是与 6.1 节的产量模型不同之处.

要获得最大持续产量，应使渔场鱼量 $x>\dfrac{N}{2}$，且尽量接近 $\dfrac{N}{2}$，但不能等于 $\dfrac{N}{2}$.

第八章（2008 年 12 月 9 日）

1.基于省时、收入、岸间商业、当地商业、建筑就业等五项因素，拟用层次分析法在建桥梁、修隧道、设渡轮这三个方案中选一个，画出目标为“越海方案的最优经济效益”的层次结构

图.



2.简述层次分析法的基本步骤. 问对于一个即将毕业的大学生选择工作岗位的决策问题要分成哪 3 个层次？具体内容分别是什么？

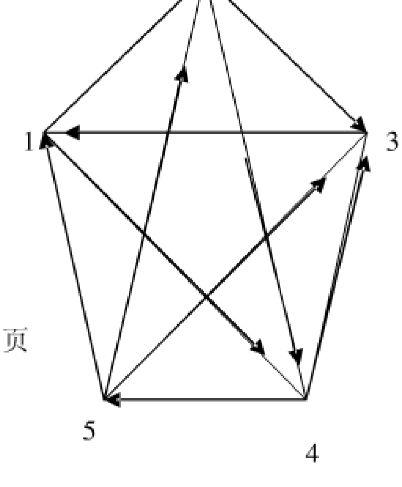
答：层次分析法的基本步骤为：(1). 建立层次结构模型；(2). 构造成对比较阵；(3). 计算权向量并做一致性检验；(4). 计算组合权向量并做组合一致性检验. 对于一个即将毕业的大学生选择工作岗位的决策问题，用层次分析法一般可分解为目标层、准则层和方案层这 3 个层次. 目标层是选择工作岗位，方案层是工作岗位 1、工作岗位 2、工作岗位 3 等，准则层一般为贡献、收入、发展、声誉、关系、位置等.

3. 用层次分析法时，一般可将决策问题分解成哪 3 个层次？试给出一致性指标的定义以及 n 阶正负反阵 **A** 为一致阵的充要条件.

答：用层次分析法时，一般可将决策问题分解为目标层、准则层和方案层这 3 个层次； 一致性指标的定义为：$CI=\dfrac{\lambda-n}{n-1}$. n 阶正互反阵 A 是一致阵的充要条件为：A 的最大特征根 λ=n.

7. 右下图是 5 位网球选手循环赛的结果，作为竞赛图，它是双向连通的吗？找出几条完全路径，用适当方法排出 5 位选手的名次.

解：这个 5 阶竞赛图是一个 5 阶有向 Hamilton 图. 其一个有向 Hamilton 圈为 $3\to1\to4\to5\to2\to3$. 所以此竞赛图是双向连通的.



$4\to5\to1\to2\to3$　　　　$2\to4\to5\to3\to1$

$5\to3\to1\to2\to4$　　　　$3\to1\to4\to5\to2$

等都是完全路径.

此竞赛图的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\1&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

令 $e=(1,1,1,1,1)^T$，各级得分向量为

$S^{(1)}=Ae=(2,2,1,2,3)^T$，　　　$S^{(2)}=AS^{(1)}=(4,3,2,4,5)^T$，

$S^{(3)}=AS^{(2)}=(7,6,4,7,9)^T$　，　　　$S^{(4)}=AS^{(3)}=(13,11,7,13,17)^T$

由此得名次为 5，1（4），2，3　（选手 1 和 4 名次相同）.

第九章（2008 年 12 月 23 日）

一报童每天从邮局订购一种报纸，沿街叫卖.已知每 100 份报纸报童全部卖出可获利 7 元.如果当天卖不掉，第二天削价可以全部卖出，但报童每 100 份报纸要赔 4 元.报童每天售出的报纸数 r 是一随机变量，其概率分布如下表：

售出报纸数 r（百份）	0	1	2	3	4	5
概率 $P(r)$	0．05	0.1	0.25	0.35	0.15	0.1

试问报童每天订购多少份报纸最佳(订购量必须是 100 的倍数)?

解：设每天订购 n 百份纸，则收益函数为：$f(r)=\begin{cases}7r+(-4)(n-r) & r\le n\\ 7n & r\succ n\end{cases}$

收益的期望值为 G(n) = $\sum_{r=0}^{n}(11r-4n)P(r)+7n\sum_{r=n+1}^{\infty}P(r)$

现分别求出 $n=0,1,2,3,4,5$ 时的收益期望值.

G(0)=0；G(1)=$-4\times0.05+7\times0.1+7\times$（0.25+0.35+0.15+0.1）=6.45；

G(2)= $(-8\times0.05+3\times0.1+14\times0.25)+14\times(0.35+0.15+0.1)=11.8$；

G(3)=$(-12\times0.05-1\times0.1+10\times0.25+21\times0.35)+21\times(0.15+0.1)=14.4$

G(4)=$(-16\times0.05-5\times0.1+6\times0.25+17\times0.35+28\times0.15)+28\times0.1=13.15$

G(5)=$-20\times0.05-9\times0.1+2\times0.25+13\times0.35+24\times0.15+35\times0.1=10.25$

当报童每天订 300 份时，收益的期望值最大.

《数学模型》作业解答

第一章（2008 年 9 月 9 日）

4. 在"椅子摆放问题"的假设条件中，将四脚的连线呈正方形改为呈长方形，其余条件不变.试构造模型并求解.

解：设椅子四脚连线呈长方形 ABCD. AB 与 CD 的对称轴为 x 轴，用中心点的转角 θ 表示椅子的位置.将相邻两脚 A、B 与地面距离之和记为 $f(\theta)$;C、D 与地面距离之和记为 $g(\theta)$.并旋转180^0.于是，设 $f(0)\succ 0, g(0)=0,$ 就得到 $g(\pi)\succ 0, f(\pi)=0$.

数学模型：设 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 是 $[0,2\pi]$ 上 θ 的非负连续函数. 若 $\forall\theta\in[0,2\pi]$，有 $f(\theta)g(\theta)=0$ ，且 $g(0)=0, f(0)\succ 0, g(\pi)\succ 0, f(\pi)=0$ ，则 $\exists\theta_0\in[0,2\pi]$ ，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

模型求解:令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$.就有 $h(0)\succ 0,\quad h(\pi)=f(\pi)-g(\pi)=0-g(\pi)\prec 0$.

再由 $f(\theta), g(\theta)$ 的连续性, 得到 $h(\theta)$ 是一个连续函数.　　从而 $h(\theta)$ 是 $[0,\pi]$ 上的连续函数. 由连续函数的介值定理：$\exists\theta_0\in(0,\pi)$，使 $h(\theta_0)=0$. 即 $\exists\theta_0\in(0,\pi)$，使 $f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$.

又因为 $\forall\theta\in[0,2\pi]$, 有 $f(\theta)g(\theta)=0$. 故 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

8. 假定人口的增长服从这样的规律：时刻 t 的人口为 $x(t)$,单位时间内人口的增量与 $x_m-x(t)$ 成正比（其中 x_m 为最大容量）.试建立模型并求解.作出解的图形并与指数增长模型、阻滞增长模型的结果比较.

解：现考察某地区的人口数，记时刻 t 的人口数为 $x(t)$（一般 $x(t)$ 是很大的整数），且设 $x(t)$ 为连续可微函数. 又设 $x(t)\mid_{t=0}=x_0$. 任给时刻 t 及时间增量 Δt, 因为单位时间内人口增长量与 $x_m-x(t)$ 成正比，假设其比例系数为常数 r. 则 t 到 $t+\Delta t$ 内人口的增量为：

$$x(t+\Delta t)-x(t)=r(x_m-x(t))\Delta t.$$

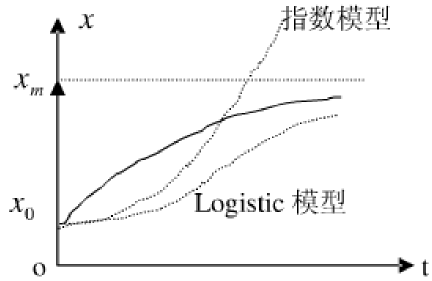
两边除以 Δt, 并令 $\Delta t\to 0$, 得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r(x_m-x)\\ x(0)=x_0\end{cases}\qquad \text{解为 } x(t)=x_m-(x_m-x_0)e^{-rt}$$

如图实线所示，

当t充分大时

它与 Logistic 模型相近.



9. 为了培养想象力、洞察力和判断力，考察对象时除了从正面分析外，还常常需要从侧面或反面思考.试尽可能迅速回答下面问题：

（1） 某甲早 8：00 从山下旅店出发，沿一条路径上山，下午 5：00 到达山顶并留宿.次日早 8：00 沿同一路径下山，下午 5：00 回到旅店.某乙说，甲必在两天中的同一时刻经过路径中的同一地点. 为什么？

（2） 37 支球队进行冠军争夺赛，每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进入下一轮，直至比赛结束. 问共需进行多少场比赛，共需进行多少轮比赛. 如果是n支球队比赛呢？

（3） 甲乙两站之间有电车相通，每隔 10 分钟甲乙两站相互发一趟车，但发车时刻不一定相同.甲乙之间有一中间站丙，某人每天在随机的时刻到达丙站，并搭乘最先经过丙站的那趟车，结果发现 100 天中约有 90 天到达甲站，仅约 10 天到达乙站.问开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的？

（4） 某人家住 T 市在他乡工作，每天下班后乘火车于 6：00 抵达 T 市车站，他的妻子驾车准时到车站接他回家，一日他提前下班搭早一班火车于 5：30 抵 T 市车站，随即步行回家，他的妻子象往常一样驾车前来，在半路上遇到他，即接他回家，此时发现比往常提前了 10 分钟.问他步行了多长时间？

（5） 一男孩和一女孩分别在离家 2 km 和 1 km 且方向相反的两所学校上学，每天同时放学后分别以 4 km/h 和 2 km/h 的速度步行回家.一小狗以 6 km/h 的速度由男孩处奔向女孩，又从女孩处奔向男孩，如此往返直至回到家中，问小狗奔波了多少路程？

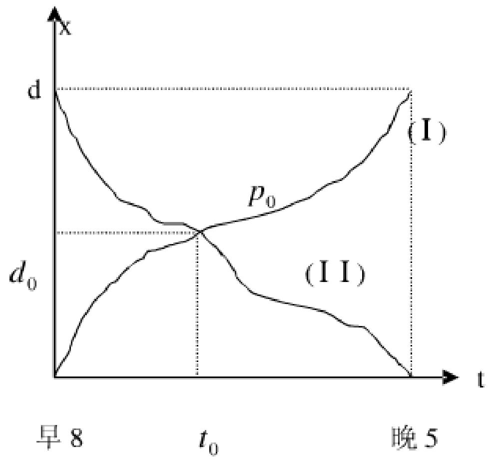
如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔波在他们之间，问当他们到达学校时小狗在何

处？

解：（1）方法一：以时间t为横坐标，以沿上山路径从山下旅店到山顶的行程x为纵坐标，

第一天的行程$x(t)$可用曲线（Ⅰ）表示，第二天的行程$x(t)$可用曲线（ⅠⅠ）表示，（Ⅰ）（ⅠⅠ）是连续曲线必有交点$p_0(t_0,d_0)$，

两天都在t_0时刻经过d_0地点.



方法二：设想有两个人，一人上山，一人下山，同一天同时出发，沿同一路径, 必定相遇.

方法三：我们以山下旅店为始点记路程, 设从山下旅店到山顶的路程函数为$f(t)$(即 t 时刻走的路程为$f(t)$), 同样设从山顶到山下旅店的路函数为$g(t)$, 并设山下旅店到山顶的距离为a（a>0）. 由题意知：$f(8)=0$, $f(17)=a$, $g(8)=a$, $g(17)=0$. 令$h(t)=f(t)-g(t)$, 则有$h(8)=f(8)-g(8)=-a<0$，$h(17)=f(17)-g(17)=a>0$，由于$f(t)$，$g(t)$都是时间 t 的连续函数, 因此$h(t)$也是时间 t 的连续函数, 由连续函数的介值定理, $\exists t_0\in[8,17]$, 使$h(t_0)=0$, 即$f(t_0)=g(t_0)$.

（2）36 场比赛，因为除冠军队外，每队都负一场；6 轮比赛，因为 2 队赛 1 轮，4 队赛 2 轮，32 队赛 5 轮. n队需赛$n-1$场，若$2^{k-1}\prec n\le 2^k$，则需赛k轮.

（3）不妨设从甲到乙经过丙站的时刻表是 8：00，8：10，8：20，……

那么从乙到甲经过丙站的时刻表应该是 8：09，8：19，8：29……

（4）步行了 25 分钟.设想他的妻子驾车遇到他后，先带他前往车站，再回家，汽车多行驶了 10 分钟，于是带他去车站这段路程汽车多跑了 5 分钟，而到车站的时间是 6：00，所以妻子驾车遇到他的时刻应该是 5：55.

（5）放学时小狗奔跑了 3 km. 孩子上学到学校时小狗的位置不定（可在任何位置），因为设想放学时小狗在任何位置开始跑，都会与孩子同时到家. 之所以出现位置不定的结果，是

由于上学时小狗初始跑动的那一瞬间，方向无法确定.

10*．某人第一天上午 9：00 从甲地出发，于下午 6：00 到达乙地. 第二天上午 9：00 他又从乙地出发按原路返回，下午 6：00 回到甲地. 试说明途中存在一点，此人在两天中同一时间到达该处. 若第二天此人是下午 4：00 回到甲地，结论将如何？

答:（方法一）我们以甲地为始点记路程, 设从甲地到乙地的路程函数为 $f(t)$（即 t 时刻走的路程为 $f(t)$）, 同样设从乙地到甲地的路函数为 $g(t)$, 并设甲地到乙地的距离为 a（$a>0$）. 由题意知： $f(9)=0,\ f(18)=a$，$g(9)=a$，$g(18)=0$． 令

$h(t)=f(t)-g(t)$, 则有 $h(9)=f(9)-g(9)=-a<0$，

$h(18)=f(18)-g(18)=a>0$ 由于 $f(t)$，$g(t)$ 都是时间 t 的连续函数, 因此 $h(t)$ 也是时间 t 的连续函数, 由连续函数的介值定理, $\exists t_0\in[9,18]$, 使 $h(t_0)=0$, 即 $f(t_0)=g(t_0)$． 若第二天此人是下午 4：00 回到甲地, 则结论仍然正确, 这是因为 $h(9)=f(9)-g(9)=-a<0$，

$h(16)=f(16)-g(16)=f(16)>0$.

（方法二）此题可以不用建模的方法, 而变换角度考虑：设想有两个人，一人从甲地到乙地, 另一人从乙地到甲地, 同一天同时出发, 沿同一路径, 必定相遇. 若第二天此人是下午 4：00 回到甲地, 则结论仍然正确.