第3章 曲线曲面造型基础

- 3.1 B样条曲线曲面
- 3.2 NURBS曲线曲面
- 3.3 曲线曲面论基本知识
- 3.4 曲面建模中的几个关键技术

3.1 B样条曲线曲面

1、B样条曲线的发展历程

- 1963年，美国波音飞机公司，Ferguson曲线曲面
- 1964年，美国麻省理工学院，Coons曲面
- 1971年，法国雷诺汽车公司，Bezier曲线
- 1972年，de-Boor，1974年，Gordon和Riesenfeld提出了B样条方法。
- 1975年，美国Syracuse大学，Versprille提出有理B样条方法。Piegl 和 Tiller, 非均匀有理B样条(NURBS)

3.1 B样条曲线曲面

2、B样条曲线的定义

控制顶点

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(u)$$

$$\begin{cases} N_{i,1}(u)=\begin{cases}1 & 若 t_i \le u \prec t_{i+1} \\ 0 & 其它\end{cases} \\ N_{i,k}(u)=\dfrac{(u-t_i)N_{i,k-1}(u)}{t_{i+k-1}-t_i}+\dfrac{(t_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_{i+1}} \end{cases}$$

节点矢量

$$t_{k-1}\le u\le t_{n+1}$$

3.1 B样条曲线曲面

B样条曲线的性质

- 局部性
- 连续性
- 几何不变性
- 变差缩减性
- 造型的灵活性

3.1 B样条曲线曲面

3、B样条曲线的矩阵表示

① 一次B样条曲线的矩阵表示

$$\boldsymbol{C}_i(u)=\begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{i-1} \\ \boldsymbol{P}_i \end{bmatrix} \qquad i=0,1,\ldots,n-1;\ 0\le u\le 1$$

3.1 B样条曲线曲面

② 二次B样条曲线的矩阵表示

$$\boldsymbol{C}_i(u)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{i-1}\\ \boldsymbol{P}_i\\ \boldsymbol{P}_{i+1}\end{bmatrix}\quad i=0,1,\ldots,n-1;\ 0\le u\le 1$$

3.1 B样条曲线曲面

③ 三次B样条曲线的矩阵表示

$$\boldsymbol{C}_i(u)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{i-1}\\ \boldsymbol{P}_i\\ \boldsymbol{P}_{i+1}\\ \boldsymbol{P}_{i+2}\end{bmatrix}\quad i=0,1,\ldots,n-1;0\le u\le 1$$

3.1 B样条曲线曲面

端点位置矢量：

$$C_{i,4}(0)=\frac{1}{6}(P_{i-1}+4P_i+P_{i+1})\qquad C_{i,4}(1)=\frac{1}{6}(P_i+4P_{i+1}+P_{i+2})$$

端点一阶导数矢量：

$$C'_{i,4}(0)=(P_{i+1}-P_{i-1})/2\qquad C'_{i,4}(1)=(P_{i+2}-P_i)/2$$

二阶导数矢量： $C''_{i,4}(0)=P_{i-1}-2P_i+P_{i+1}$

若三个顶点位于同一条直线上，三次B样条曲线将产生拐点；若四点共线，则变成一段直线；若三点重合，则过点。

3.1 B样条曲线曲面

4、B样条曲面

① B样条曲面的定义

$$\boldsymbol{S}(u,w)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{P}_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,l}(w) \quad u,w\in[0,1]$$

$$\boldsymbol{S}_{r,s}(u,w)=\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{P}_{kl}\boldsymbol{M}_l^T\boldsymbol{W}_l^T$$

$$r\in[1,m+2-k],s\in[1,n+2-k]$$

$$u,w\in[0,1]$$

3.1 B样条曲线曲面

② 均匀双二次B样条曲面的矩阵表示

$$\boldsymbol{S}(u,w)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{M}_B\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0(w)\\\boldsymbol{P}_1(w)\\\boldsymbol{P}_2(w)\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{M}_B\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{00} & \boldsymbol{P}_{01} & \boldsymbol{P}_{02}\\\boldsymbol{P}_{10} & \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12}\\\boldsymbol{P}_{20} & \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_B^T\boldsymbol{W}^T$$

$$\boldsymbol{S}(u,w)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{M}_B\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}_B^T\boldsymbol{W}^T$$

3.1 B样条曲线曲面

③ 均匀双三次B样条曲面的矩阵表示

$$S(u,w)=UM_B\begin{bmatrix}P_0(w)\\P_1(w)\\P_2(w)\\P_3(w)\end{bmatrix}=UM_BPM_B^TW^T$$

$$P=\begin{bmatrix}P_{00}&P_{01}&P_{02}&P_{03}\\P_{10}&P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{20}&P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{30}&P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{bmatrix}\qquad M_B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&3&-3&1\\3&-6&3&0\\-3&0&3&0\\1&4&1&0\end{bmatrix}$$

第3章 曲线曲面造型基础

- 3.1 B样条曲线曲面
- 3.2 NURBS曲线曲面
- 3.3 曲线曲面论基本知识
- 3.4 曲面建模中的几个关键技术

3.2 NURBS曲线曲面

1、NURBS曲线的定义

权因子

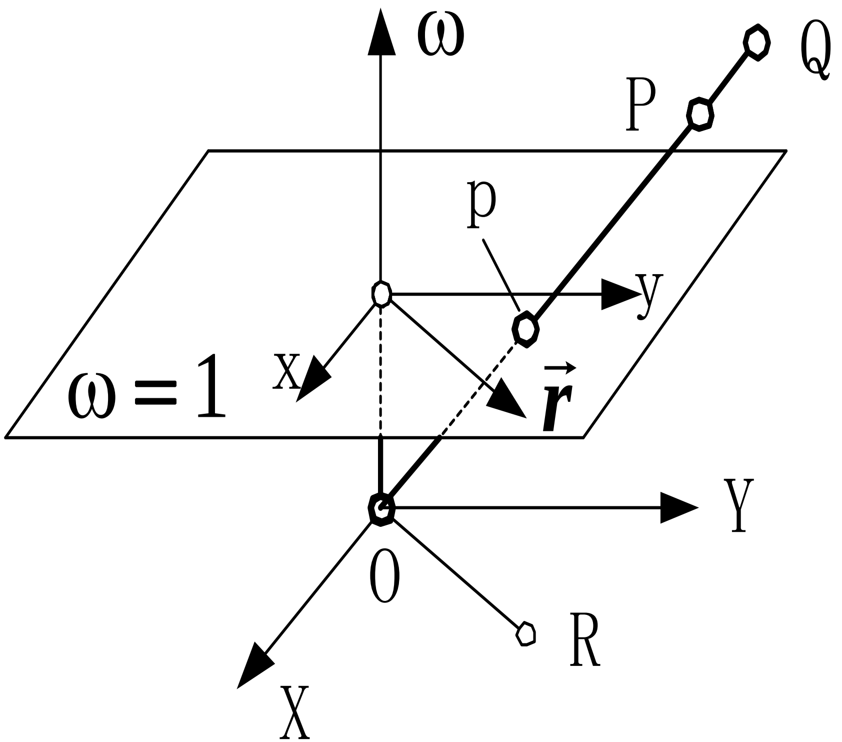
控制顶点

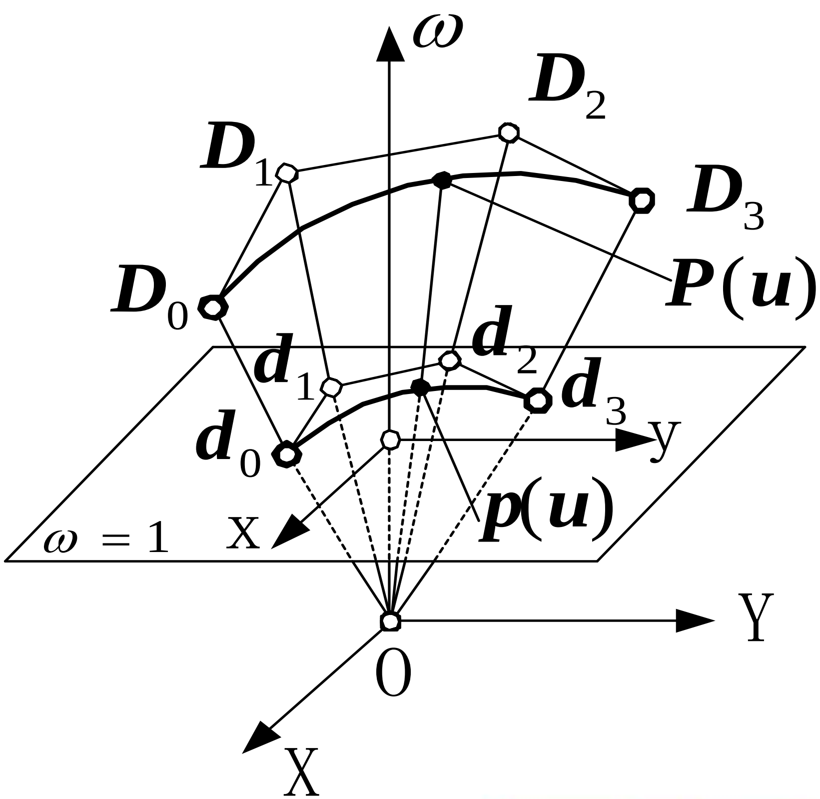
节点矢量

$$p(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i d_i \mathbf{N}_{\mathbf{i,k}}(\mathbf{u})}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i \mathbf{N}_{\mathbf{i,k}}(\mathbf{u})}$$

3.2 NURBS曲线曲面

2、在齐次坐标下NURBS的几何意义





3.2 NURBS曲线曲面

3、权因子对NURBS曲线形状的影响

①若固定所有控制顶点及除外wi的所有其它权因子不变，当wi变化时，P点随之移动，它在空间扫描出一条过控制顶点di的一条直线。当wi趋于无穷大时，P趋近与控制顶点di重合。

②若wi增加，则曲线被拉向控制顶点di；若wi减小，则曲线被推离控制顶点di。

❖ 若wi增加，则一般地曲线在受影响的范围内被推离除顶点di外的其它相应控制顶点； 若wi减小，则相反。

3.2 NURBS曲线曲面

4、NURBS曲面的定义

$$p(\mathbf{u},\mathbf{v})=\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{i,j}d_{i,j}\,\mathbf{N}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}(\mathbf{u})\mathbf{N}_{\mathbf{j},\mathbf{l}}(\mathbf{v})}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{i,j}\,\mathbf{N}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}(\mathbf{u})\mathbf{N}_{\mathbf{j},\mathbf{l}}(\mathbf{v})}$$

3.2 NURBS曲线曲面

5、NURBS方法的提出及优缺点

①不仅可以表示自由曲线曲面，还可以精确地表示圆锥曲线和规则曲线，为计算机辅助几何设计提供了统一的数学描述方法。

②具有影响曲线、曲面形状的权因子，故可以设计相当复杂的曲线曲面形状。若运用恰当，将更便于设计者实现自己的设计意图。

③是非有理B样条方法在四维空间的直接推广，多数非有理B样条曲线曲面的性质及其相应的计算方法可直接推广到NURBS曲线曲面。

3.2 NURBS曲线曲面

NURBS也存在一些缺点：

①需要额外的存储以定义传统的曲线和曲面。

②权因子的不合适应用可能导致很坏的参数化，甚至毁掉随后的曲面结构。

第3章 曲线曲面造型基础

- 3.1 B样条曲线曲面
- 3.2 NURBS曲线曲面
- 3.3 曲线曲面论基本知识
- 3.4 曲面建模中的几个关键技术

3.3 曲线曲面论基础

1、曲线数学基础

- 曲线的参数方程和矢量方程

空间曲线的参数方程

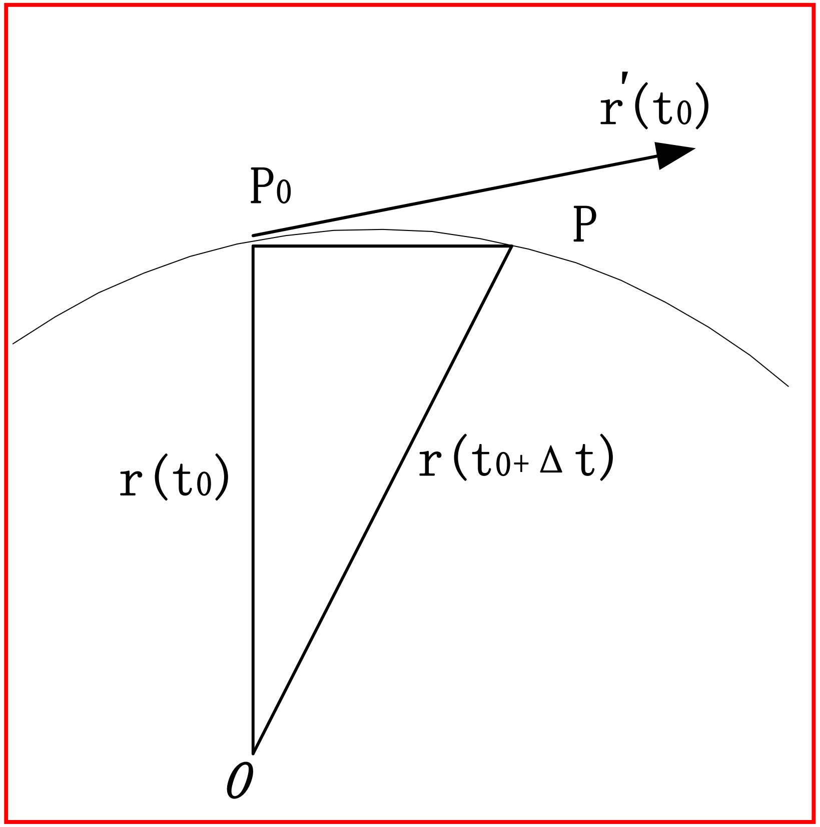
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

空间曲线的矢量方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

3.3 曲线曲面论基础

- 矢函数



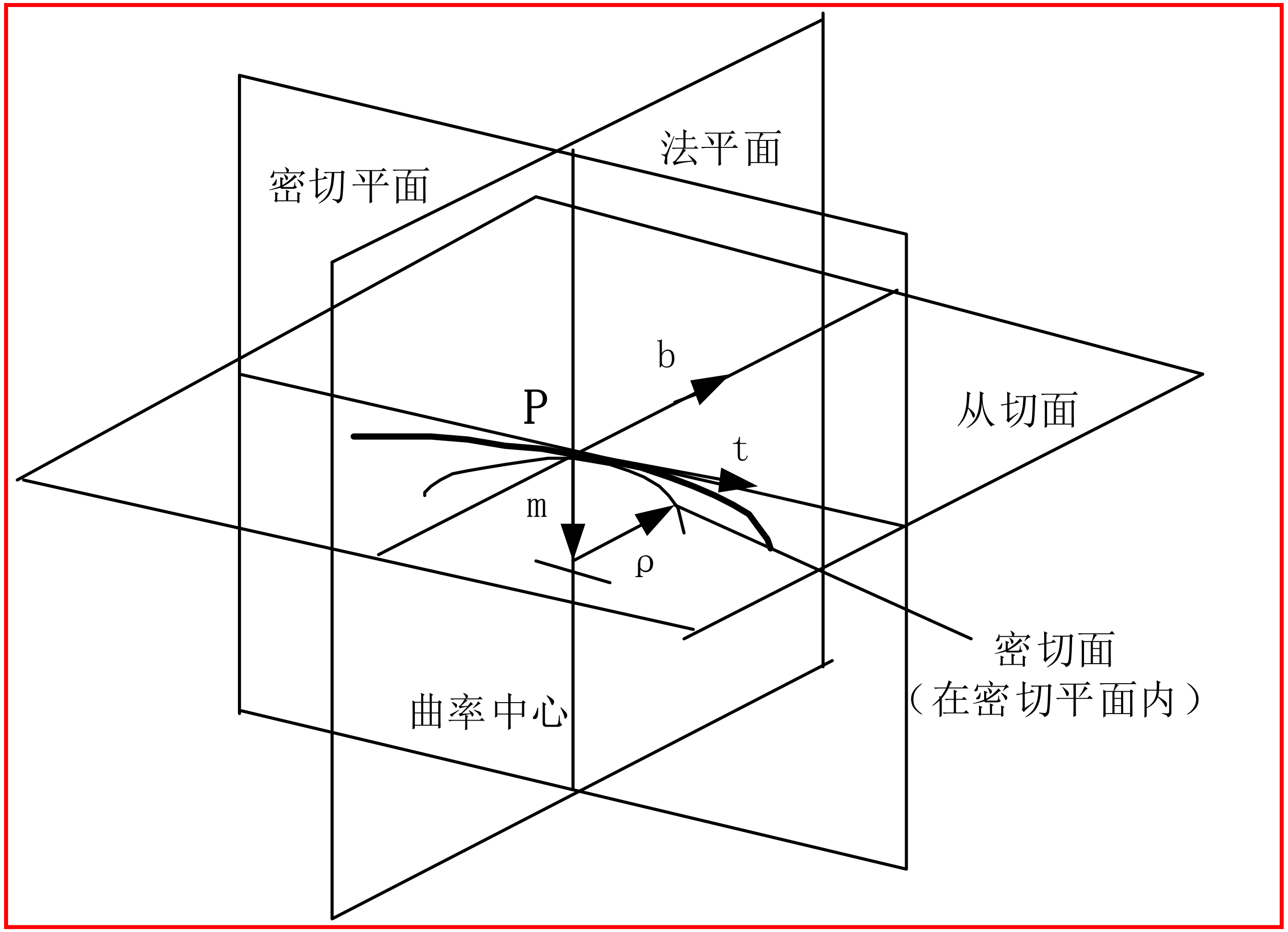
切矢的几何意义

$$r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$t = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

3.3 曲线曲面论基础

✓ 1）活动标架



$$
\begin{cases}
\mathbf{t} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \\[2ex]
\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|} \\[2ex]
\mathbf{m} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}
\end{cases}
$$

3.3 曲线曲面论基础

✓ 2）曲线论的基本公式

曲率

挠率

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{m}' \\ \boldsymbol{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

3.3 曲线曲面论基础

✓ 3）曲率的几何意义及其计算

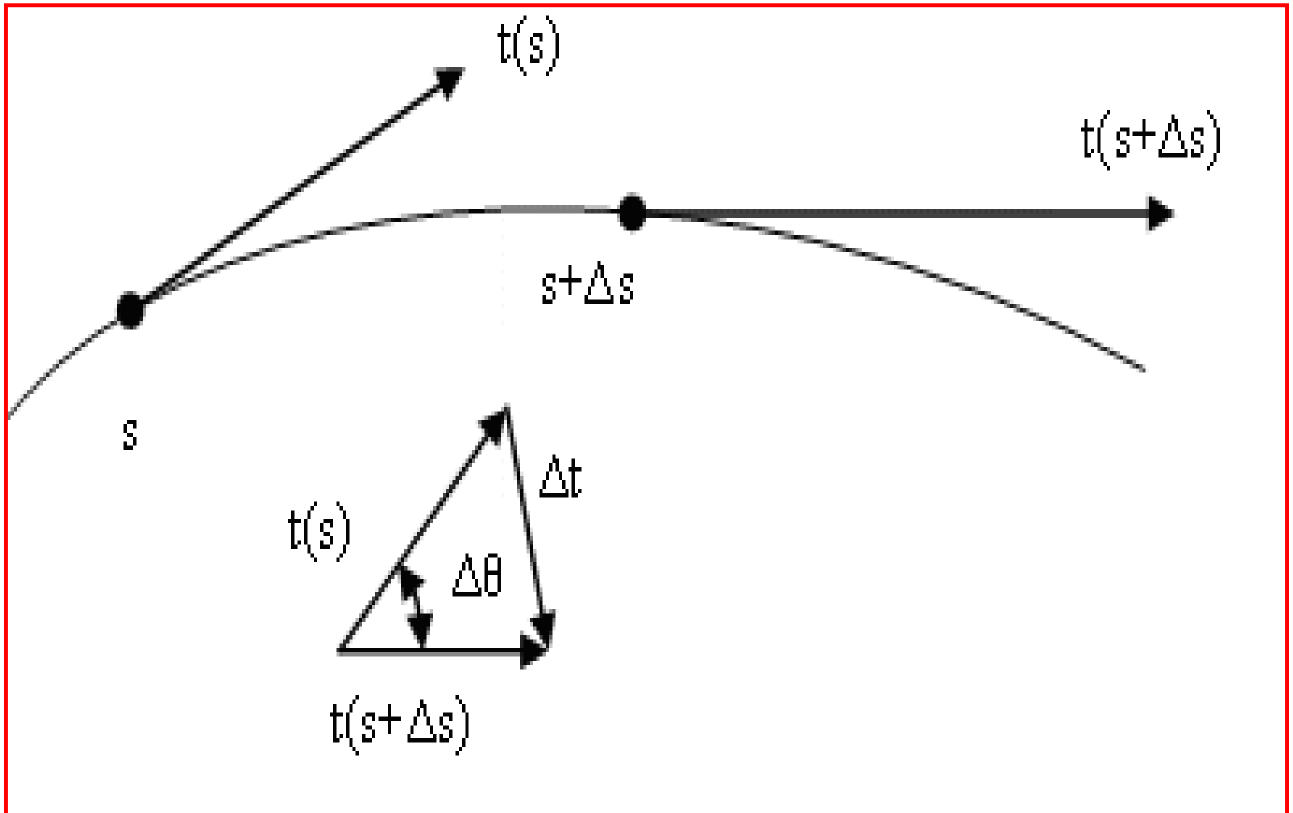


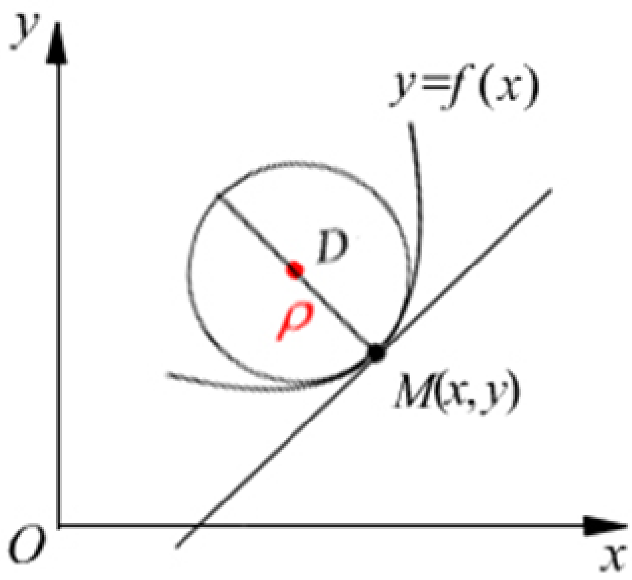
图 2-4 曲线 t(s)的切矢

- 曲线在一点的曲率定义为切线方向对于弧长的导数；
- 曲率反映了切矢转动的快慢，刻画了曲线的弯曲程度。

3.3 曲线曲面论基础

✓ 3）曲率的几何意义及其计算

$$k = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}$$

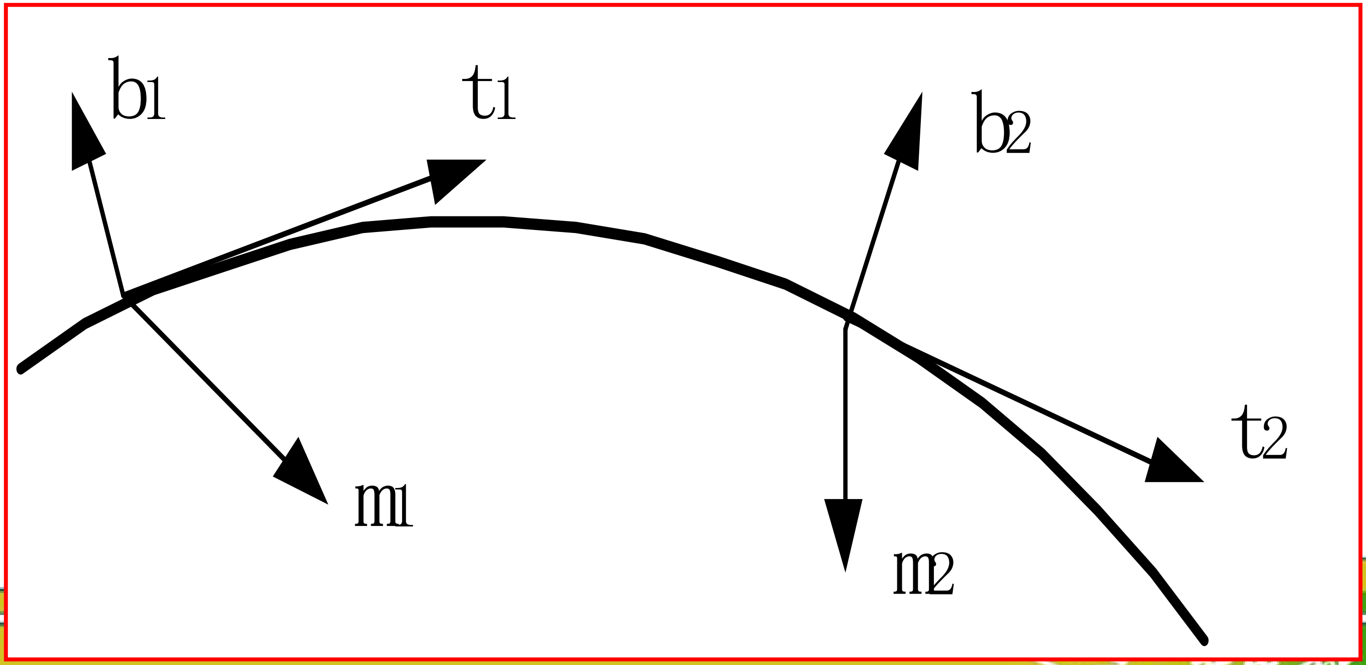


- 这个圆叫做曲线在点M 处的曲率圆；
- 曲率圆的圆心D 叫做曲线在点M 处的曲率中心；
- 曲率圆的半径ρ 叫做曲线在点M 处的曲率半径。

3.3 曲线曲面论基础

✓ 4）挠率的几何意义及其计算

- 对于空间曲线，曲线不仅弯曲而且还要扭转；
- 挠率就是这样一个反映曲线偏离平面曲线的程度的量，刻画曲线扭转的程度。



3.3 曲线曲面论基础

✓ 4）挠率的几何意义及其计算

$$\tau = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2}$$

- 曲线在一点的挠率等于副法矢对弧长的转动率
- 对于平面曲线，密切面与曲线所在平面一致，因而副法矢是固定不变的，故挠率等于0。

3.3 曲线曲面论基础

2、曲面数学基础

✓ 1）曲面的参数方程和矢量方程

平面 $\begin{cases} x = x_0 + ua_x + wb_x \\ y = y_0 + ua_y + wb_y \\ z = z_0 + ua_z + wb_z \end{cases}$

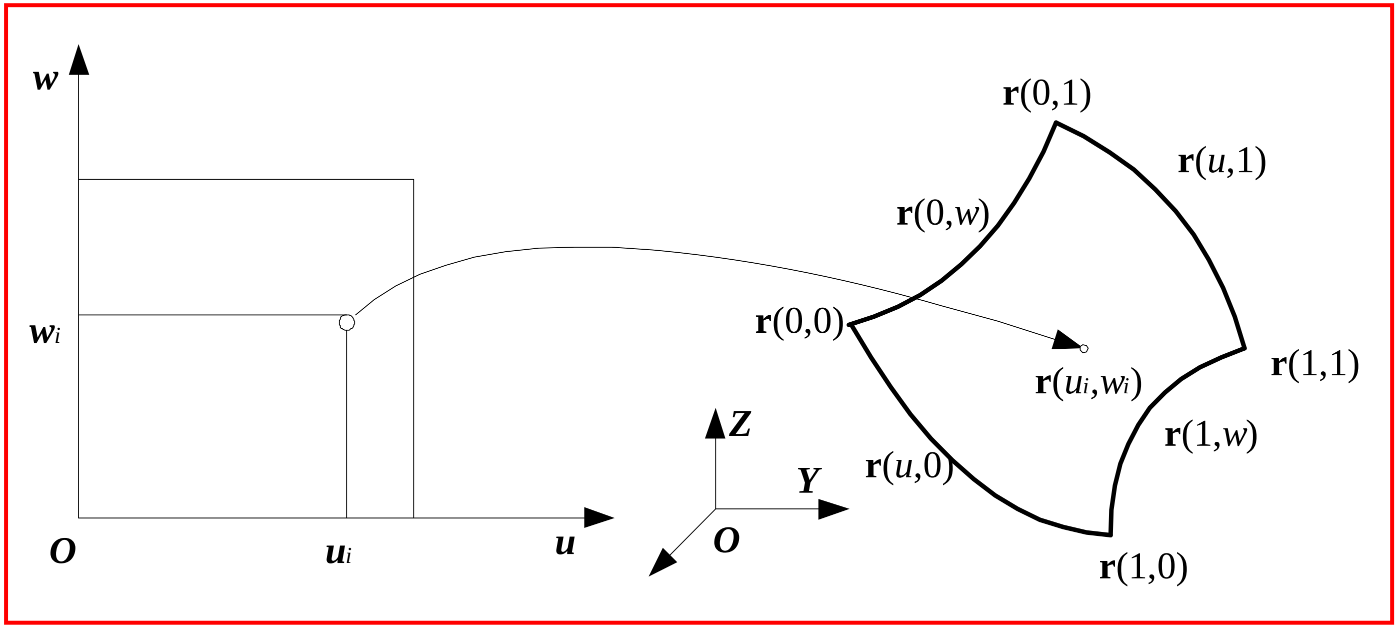
旋转面 $\begin{cases} x = f(t)\cos\theta \\ y = f(t)\sin\theta \quad \theta \in [0,2\pi] \\ z = g(t) \end{cases}$

一般曲面 $\begin{cases} x = x(u,\omega) \\ y = y(u,\omega) \\ z = z(u,\omega) \end{cases}$

3.3 曲线曲面论基础

✓ 2）曲面上参数曲线的切矢

❑a、曲面参数曲线



$$r = r(u_0, \omega) = (x(u_0, \omega), y(u_0, \omega), z(u_0, \omega))$$

$$r = r(u, \omega_0) = (x(u, \omega_0), y(u, \omega_0), z(u, \omega_0))$$

3.3 曲线曲面论基础

- **b**、二元函数的偏导数

$$\frac{\partial r}{\partial u} = r_u(u,w) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{r(u+\Delta u, w) - r(u,w)}{\Delta u}$$

$$\frac{\partial r}{\partial w} = r_w(u,w) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{r(u, w+\Delta w) - r(u,w)}{\Delta w}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} = r_{uu}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial w} = r_{uw}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial r}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2 r}{\partial w \partial u} = r_{wu}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial r}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2 r}{\partial w^2} = r_{ww}$$

3.3 曲线曲面论基础

- c、二元函数的全微分

$$dr_u = \frac{\partial r}{\partial u} du = r_u du$$

$$dr_w = \frac{\partial r}{\partial w} dw = r_w dw$$

$$dr = r_u du + r_w dw$$

3.3 曲线曲面论基础

- d、复合函数的偏导数

$$r = r(u(t), w(t))$$

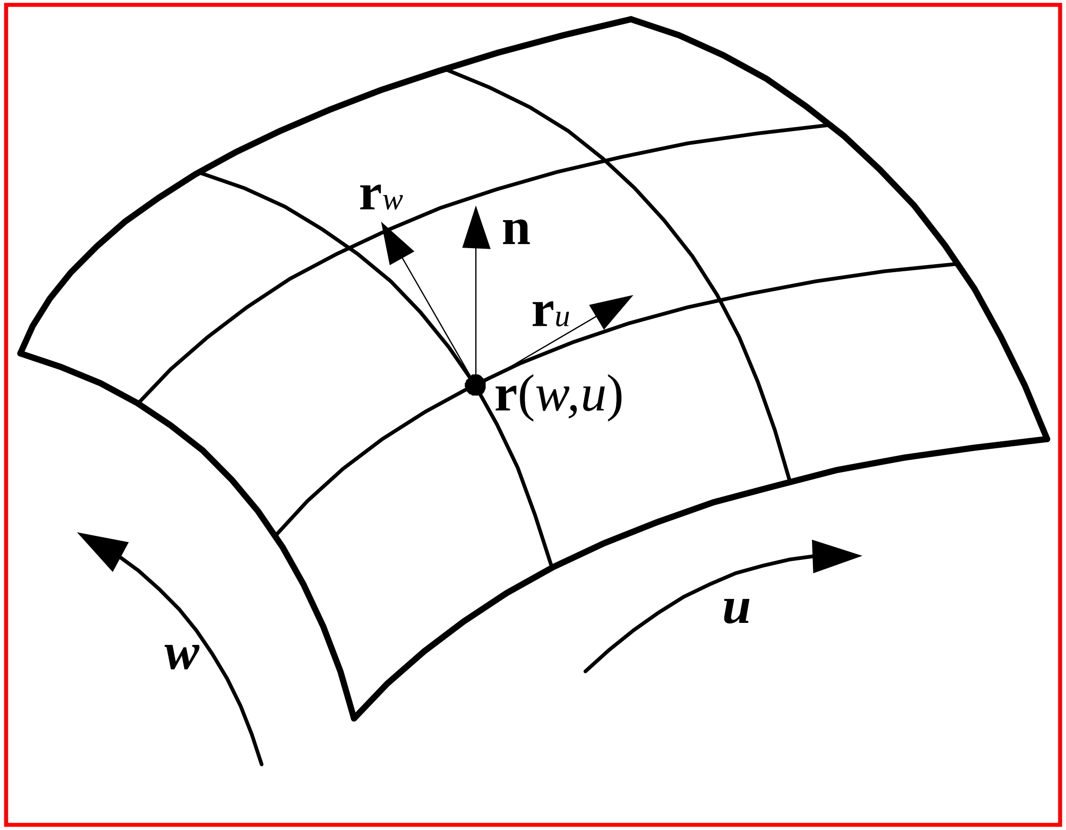
$$\frac{dr}{dt} = r_u \frac{du}{dt} + r_w \frac{dw}{dt} \qquad r' = r_u u' + r_w w'$$

$$r = r(u(s,t), w(s,t))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial s} = \dfrac{\partial r}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial r}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial s} \\ \dfrac{\partial r}{\partial t} = \dfrac{\partial r}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial r}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_s = r_u u_s + r_w w_s \\ r_t = r_u u_t + r_w w_t \end{cases}$$

3.3 曲线曲面论基础

- **e**、参数曲面的切矢



$$r_u = (x_u, y_u, z_u)$$

$$r_w = (x_w, y_w, z_w)$$

3.3 曲线曲面论基础

✓ 3）曲面上曲线的切矢和曲面的法矢

- a、曲面上的曲线

$$r = r(u,w) = (x(t), y(t), z(t))$$

- b、曲面上曲线的切矢

$$r' = \frac{dr}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

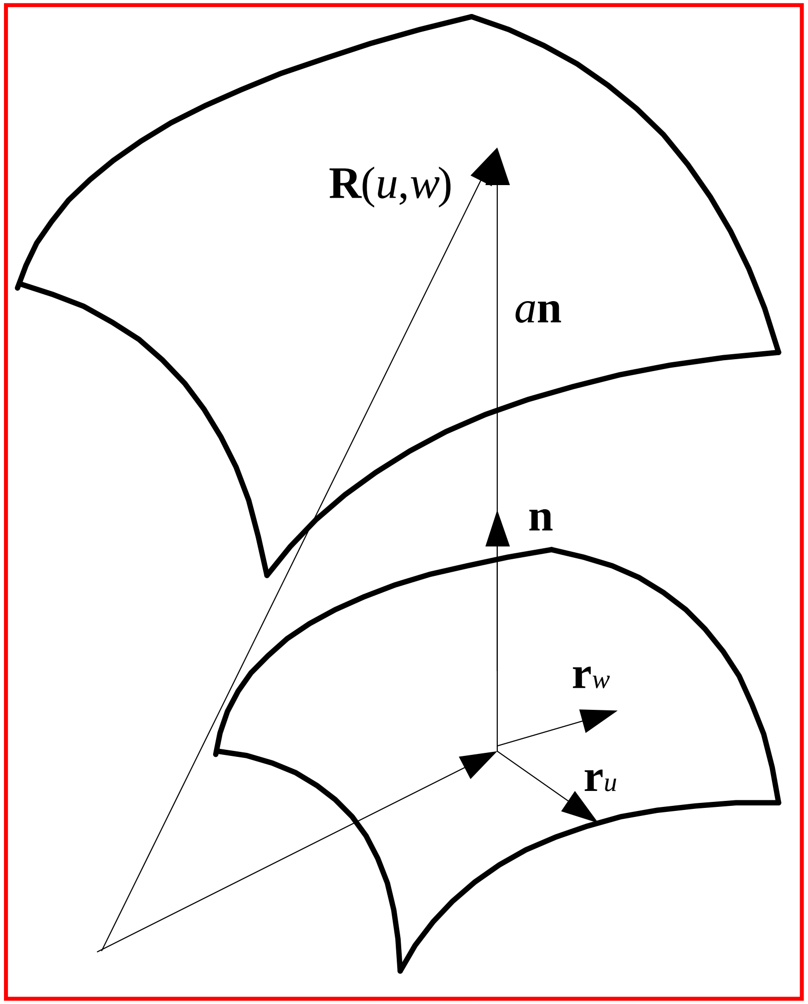
$$r' = r_u \frac{du}{dt} + r_w \frac{dw}{dt}$$

- c、曲面的法矢

$$n = \frac{r_u \times r_w}{\left| r_u \times r_w \right|}$$

3.3 曲线曲面论基础

✓ 4）曲面的等距面



$$R = R(u,w) = r(u,w) + an$$

3.3 曲线曲面论基础

3、曲面论基本知识

1）曲面的第一基本公式

$$(ds)^2 = (dr)^2 = (r_u du + r_w dw)^2$$

$$= r_u{}^2 (du)^2 + 2 r_u r_w du dw + r_w{}^2 (dw)^2$$

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}_u^2, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_w, \boldsymbol{G} = \boldsymbol{r}_w^2$$

3.3 曲线曲面论基础

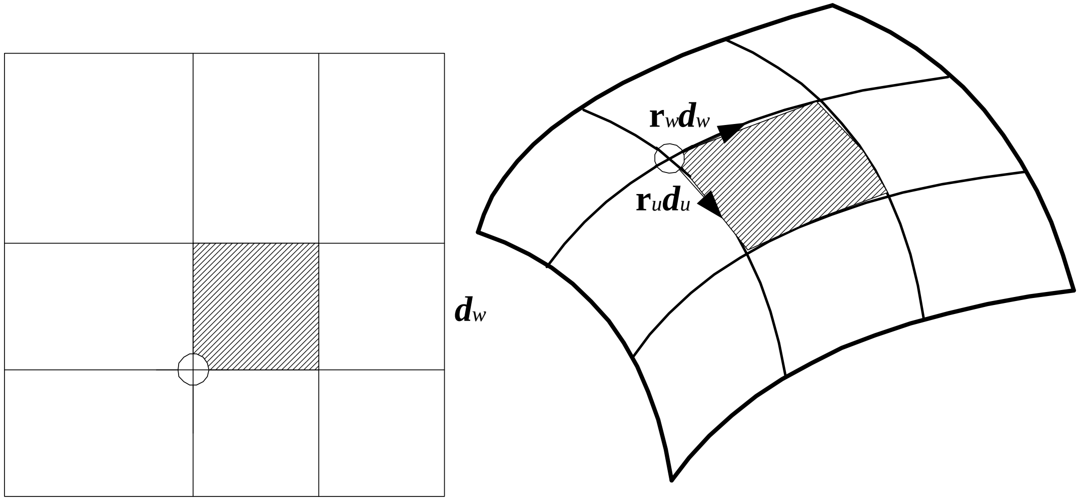
2）曲面第一基本公式的应用

a、计算曲线的弧长

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{ds}{dt}\right|dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E(\frac{du}{dt})^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dw}{dt}+G(\frac{dw}{dt})^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E(u')^2+2Fu'w'+Gw'^2}\,dt$$

3.3 曲线曲面论基础

b、计算曲面面积



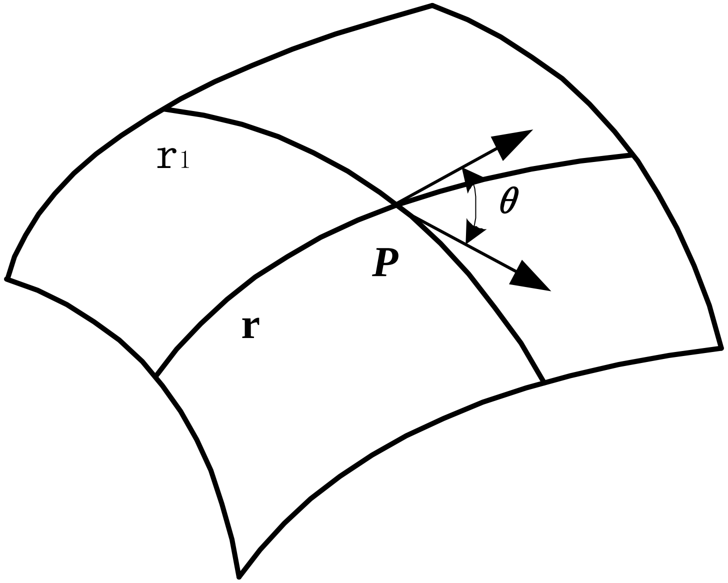
$$dA = \left| r_u du \times r_w dw \right| = \left| r_u \times r_w \right| dudw$$

$$D = \left| r_u \times r_w \right| = \sqrt{r_u^{\,2} r_w^{2} - (r_u r_w)^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$A = \iint_V \sqrt{EG - F^2}\, dudw$$

3.3 曲线曲面论基础

c、计算曲面上两条曲线的夹角



$$dr = r_u du + r_w dw$$

$$d_1 r = r_u d_1 u + r_w d_1 w$$

$$\cos\theta = \frac{dr \cdot d_1 r}{|dr||d_1 r|}$$

$$\cos\theta = \frac{Edud_1u + F(dud_1w + dwd_1u) + Gdwd_1w}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudw + Gdw^2}\sqrt{Ed_1u^2 + 2Fd_1ud_1w + Gd_1w^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \qquad F = 0$$

3.3 曲线曲面论基础

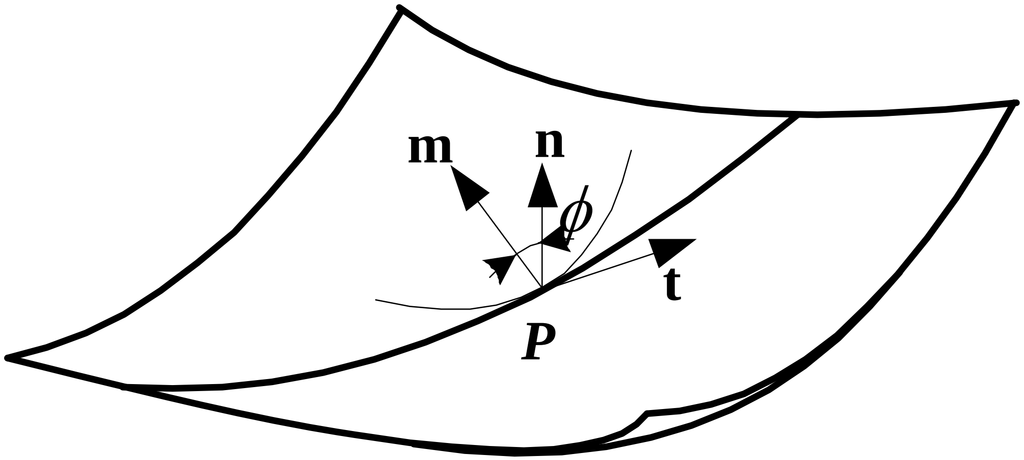
3）曲面的局部坐标系

由单位法矢和非规范切矢三者构成曲面的局部坐标系，亦称标架

$$n = \frac{r_u \times r_w}{\left| r_u \times r_w \right|}$$

3.3 曲线曲面论基础

4）曲面的第二基本公式



$$r = r(u(s), w(s))$$

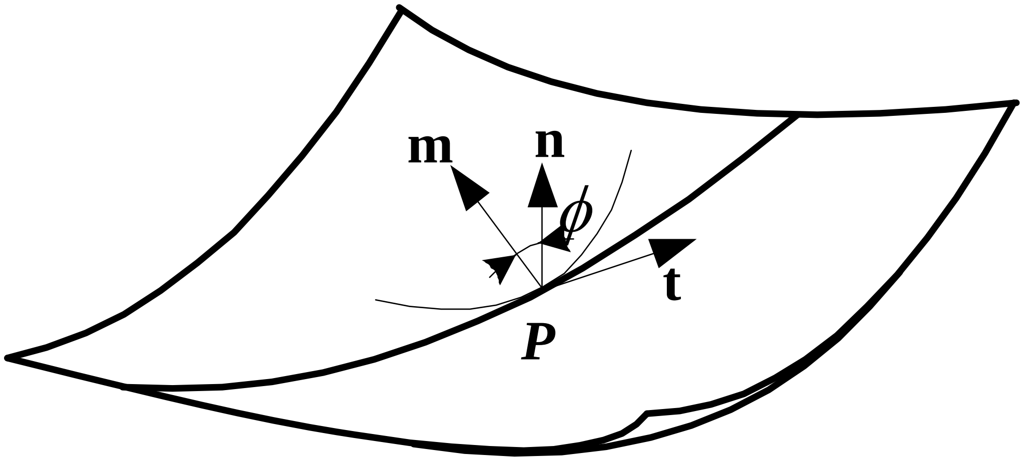
$$t = r' = \frac{dr}{ds} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial r}{\partial w}\frac{dw}{ds} = r_u u' + r_w w'$$

$$t' = r'' = \frac{d^2 r}{ds^2} = r_u u'' + \frac{dr_u}{ds} u' + r_w w'' + \frac{dr_w}{ds} w'$$

$$= r_{uu} u'^2 + 2r_{uw} u' w' + r_{ww} w'^2 + r_u u'' + r_w w''$$

3.3 曲线曲面论基础

4）曲面的第二基本公式



- 令曲面点处曲线的单位主法矢为m，曲面单位法矢为n，两者夹角为 ϕ

$$t'\cdot n = km\cdot n = k\cos\phi$$

$$k\cos\phi ds^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndw^2$$

$$L = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uu}, M = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{uw}, N = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_{ww}$$

3.3 曲线曲面论基础

5）法曲率

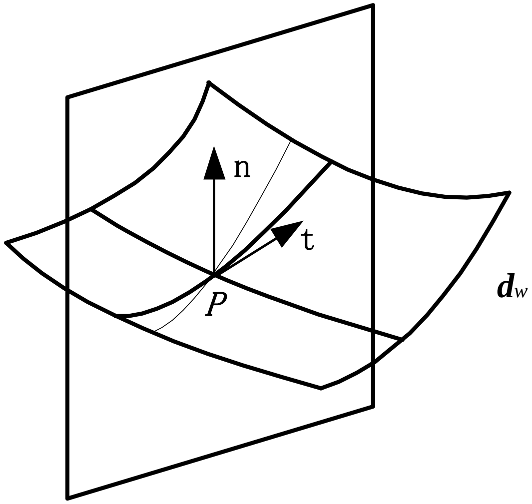
- 在P点处曲面上曲线的主法矢m和曲面的法矢重合时，此时曲面上曲线的密切面垂直于曲面的切平面，该曲面上曲线的曲率称为曲面在P点处的法曲率。

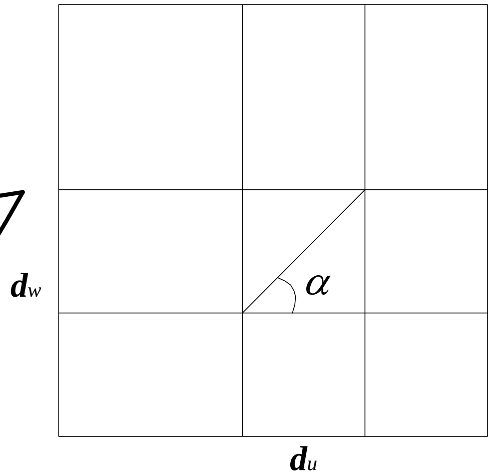
$$k_n = \frac{1}{\rho_n} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudw + Ndw^2}{ds^2}$$

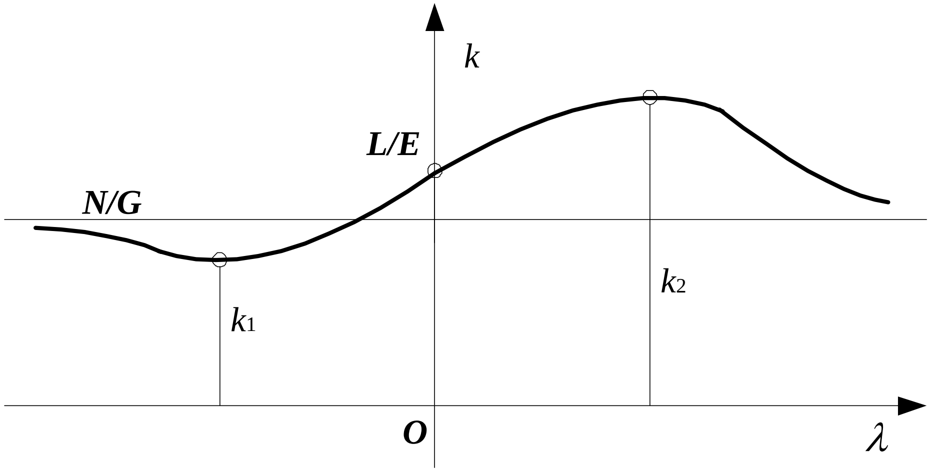
$$= \frac{Ldu^2 + 2Mdudw + Ndw^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdw^2} = \frac{\text{曲面第二基本公式}}{\text{曲面第一基本公式}}$$

3.3 曲线曲面论基础

6）主曲率、主方向、曲率线







$$\begin{cases} k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \end{cases}$$

3.3 曲线曲面论基础

7）Gauss曲率

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

- 曲面在已知点处的弯曲程度自然就用这个比值当 σ 收缩成点P 时的极限来衡量，这个极限就等于P 点的高斯曲率的绝对值。
- k1和k2符号相同时，K大于0，所考虑的点为椭圆点；
- k1和k2符号不同，K小于0，所考虑的点为双曲点；
- 当k1和k2之一为0时，K等于0，该点为抛物点；当K和H都等于0时，曲面上的点为平面点。

3.3 曲线曲面论基础

8）平均曲率

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{NE-2MF+LG}{2(EG-F^2)}$$

第3章 曲线曲面造型基础

- 3.1 B样条曲线曲面
- 3.2 NURBS曲线曲面
- 3.3 曲线曲面论基本知识
- 3.4 曲面建模中的几个关键技术

3.4 曲面建模中的几个关键技术

1、实体造型技术概述

实体造型的表示方法

- 边界表示法（B-rep ）
- 体素构造法（CSG）
- 八叉树表示法
- 半空间法
- 欧拉操作法
- 射线表示法

3.4 曲面建模中的几个关键技术

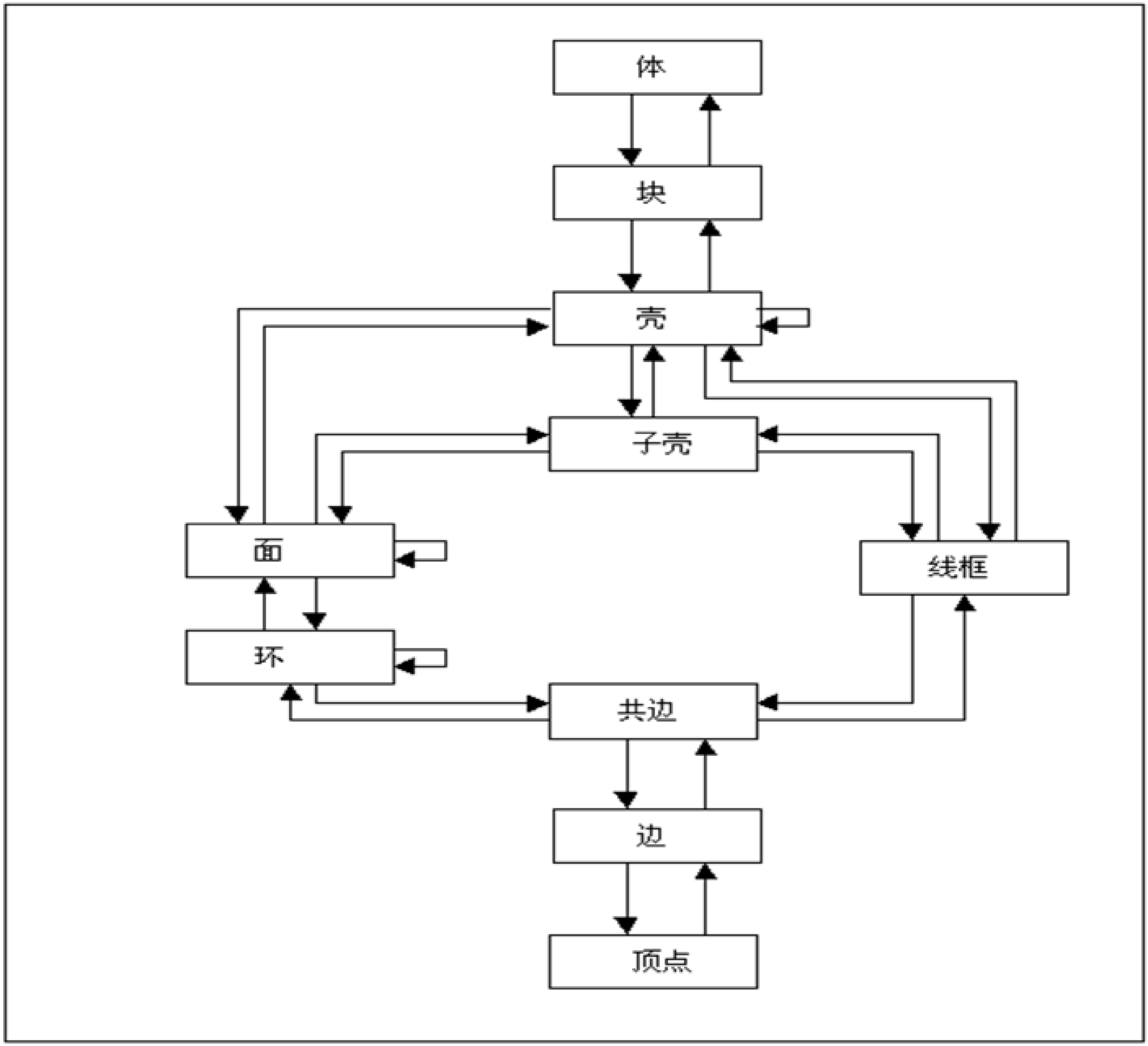
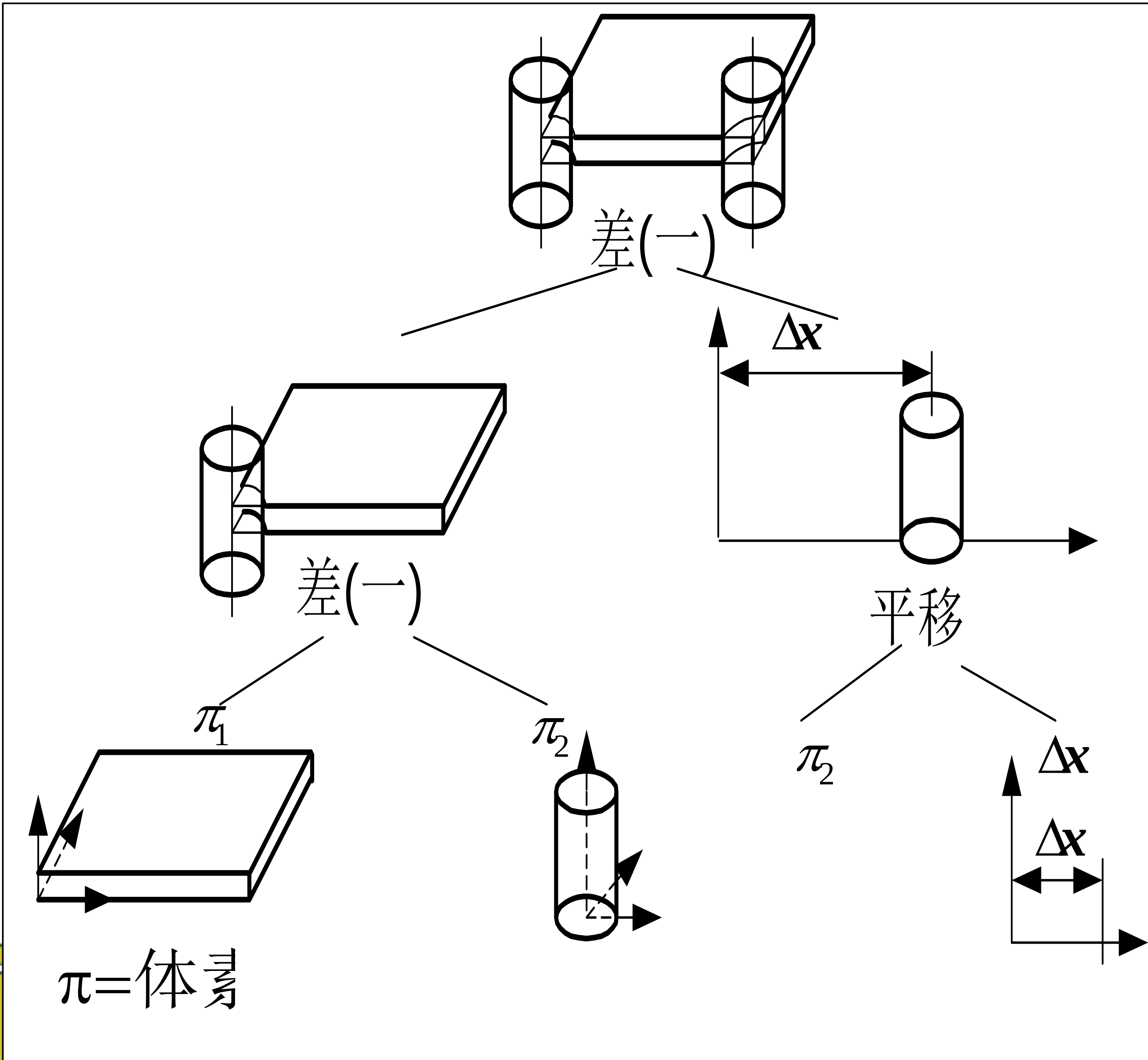


图 1　ACIS 拓扑结构

边界表示法

（**B-rep**）

3.4 曲面建模中的几个关键技术



体素构造法

（**CSG**）

3.4 曲面建模中的几个关键技术

2、曲线的生成

曲线生成有两种实现方法:

a、由设计人员输入曲线控制顶点来设计曲线

b、由设计人员输入曲线上的型值点来设计曲线

3.4 曲面建模中的几个关键技术

2、曲线的生成

曲线反算过程一般包括以下几个主要步骤：

a、确定插值曲线的节点矢量；

b、确定曲线两端的边界条件；

c、反算插值曲线的控制顶点。

3.4 曲面建模中的几个关键技术

1）确定插值曲线的节点矢量：

a、均匀参数化(又称等距参数化)法

$$u_i = i, \qquad i = 0,1,\cdots,n-1$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

b、积累弦长参数化(或简称弦长参数化)法

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = 0 \\ \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \left|\Delta p_{i-1}\right| \end{cases} \qquad \mathbf{i} = 1,2,\cdots,\mathbf{n}$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

c、向心参数化法

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_i = u_{i-1} + \left|\Delta \mathbf{p}_{i+1}\right|^{1/2} \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

d、修正弦长参数化法

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_i = u_{i-1} + k_i \left| \Delta \mathbf{p}_{i-1} \right| \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\mathbf{k}_i = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\left|\Delta p_{i-2}\right| \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{i-1}}}{\left|\Delta p_{i-2}\right| + \left|\Delta p_{i-1}\right|} + \frac{\left|\Delta p_{i}\right| \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{i}}}{\left|\Delta p_{i-1}\right| + \left|\Delta p_{i}\right|} \right)$$

$$\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{min}\left(\boldsymbol{\pi} - \angle p_i - p_i p_{i+1}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{2} \right)$$

$$\left|\Delta p_{-1}\right| = \left|\Delta p_n\right| = 0$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

2）确定曲线两端的边界条件

a）切矢条件

$$\begin{cases} d_1 - d_0 = \dfrac{\Delta_3}{3} p_0' \\[2ex] d_{n+2} - d_{n+1} = \dfrac{\Delta_{n+2}}{3} p_n' \end{cases}$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

b）自由端点条件

$$\begin{cases} d_0 = d_1 \\ d_{n+2} = d_{n+1} \end{cases}$$

c）闭曲线条件

$$\begin{cases} d_0 = d_{n+1} \\ d_1 = d_{n+2} \end{cases}$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

3）反算插值曲线的控制顶点。

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \mathbf{a}_n & \mathbf{b}_n & \mathbf{c}_n \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \\ e_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_i = \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}}$$

$$\mathbf{b}_i = \frac{\Delta_{i+2}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}} + \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}}$$

$$\mathbf{c}_i = \frac{(\Delta_{i+1})^2}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}} \qquad \mathbf{i} = 1, 2, \cdots, \mathbf{n}$$

$$e_1 = p_0 + \frac{\Delta_3}{3} p_0', \qquad e_{n+1} = p_0 - \frac{\Delta_{n+2}}{3} p_0'$$

$$e_i = (\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}) p_{i-1}, \qquad \mathbf{i} = 2, 3, \cdots, \mathbf{n}$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

3、曲面生成

曲面生成方法通常可分为两大类:

- 蒙皮曲面生成法
- 扫描曲面生成法

不管哪一种生成方法，其核心都是曲面的反算技术。

3.4 曲面建模中的几个关键技术

1）双三次B样条插值曲面的反算

a）参数方向与参数选取

b）节点矢量的确定

c）反算控制顶点

3.4 曲面建模中的几个关键技术

2）蒙皮曲面生成法——关键在于设计出条具有统一次数与节点矢量，且参数化情况良好地相近的符合要求的截面曲线。

3.4 曲面建模中的几个关键技术

实现步骤：

a)初始地生成形状符合要求的截面曲线，都用B样条曲线表示。

b)统一次数

c)域参数变换

d)插入节点

e)最后从曲面光顺性考虑，应使所有截面线的端点与分段连接点沿曲线弧长的分布情况比较接近

3.4 曲面建模中的几个关键技术

得到具有统一次数与节点矢量，且参数化情况良好地相近的条截面曲线：

$$S_j(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{m+k-1} d_{i,j} \cdot \mathbf{N}_{i,k}(\mathbf{u})$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

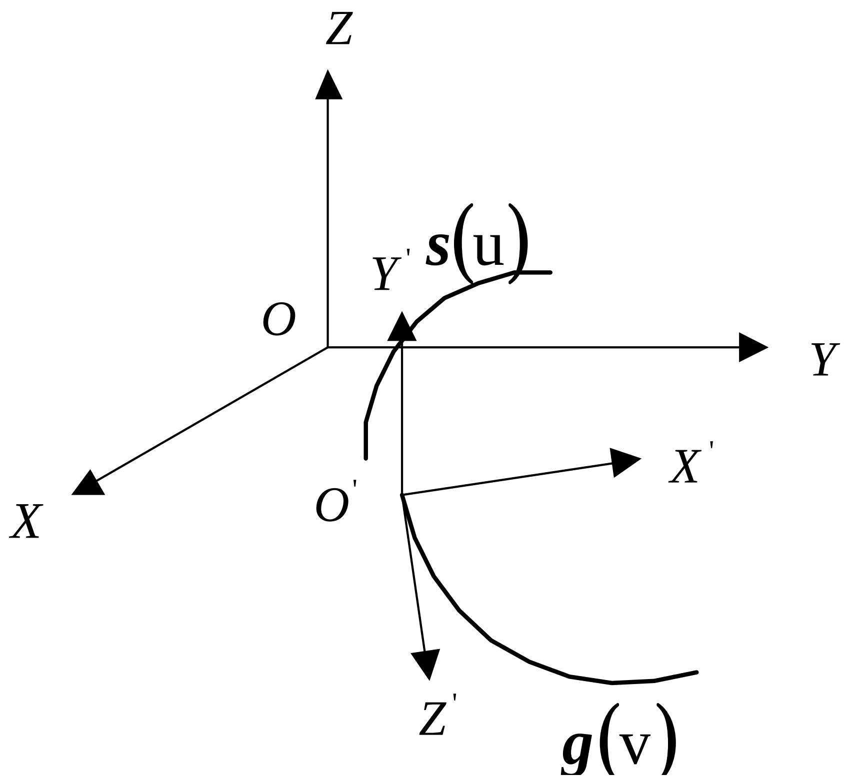
4）扫描面生成法——扫描面生成法是蒙皮曲面生成法的推广。

- 设计一族反映曲面基本截面形状的曲线，称为基线族，以及一族控制曲面基本走向的曲线，称为导线族；
- 规定一种运动方式，使基线族沿导线族进行扫掠运动，这样形成的曲面就叫扫曲面。

3.4 曲面建模中的几个关键技术

- 根据基线族、导线族中曲线个数的多少，一基一导扫曲面及多基多导扫曲面等；
- 根据运动方式的不同，扫曲面则又可分为脊线扫曲面、旋转扫曲面及同步扫曲面等。

3.4 曲面建模中的几个关键技术



O' $g(\mathbf{v})$

$O'Z'$ $k = g(\mathbf{v}) / \|g(\mathbf{v})\|$

$O'Y'$ $j = (0,0,1)^T$

$O'X'$ $i = j \times k$

$$p(\mathbf{u},\mathbf{v}) = [i \quad j \quad k] \cdot s(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v})$$

3.4 曲面建模中的几个关键技术

4、 曲线曲面求交

a） 所谓曲面求交就是指给定两张曲面，通过一定的算法求得两张曲面所有交线（相切情况包括切点和切线）的过程

b） 曲面求交算法应满足的要求：稳定、准确、快速

c） 曲面求交的基本类型：代数/代数曲面求交；代数/参数曲面求交；参数/参数曲面求交

3.4 曲面建模中的几个关键技术

d）参数\参数曲面求交的基本方法

- 代数法
- 网格离散法
- 分割法
- 迭代法
- 追踪法

3.4 曲面建模中的几个关键技术

e）混合法的主要步骤如下：

步骤1：参数曲面的自适应几何分割

步骤2：交线初始点的获取

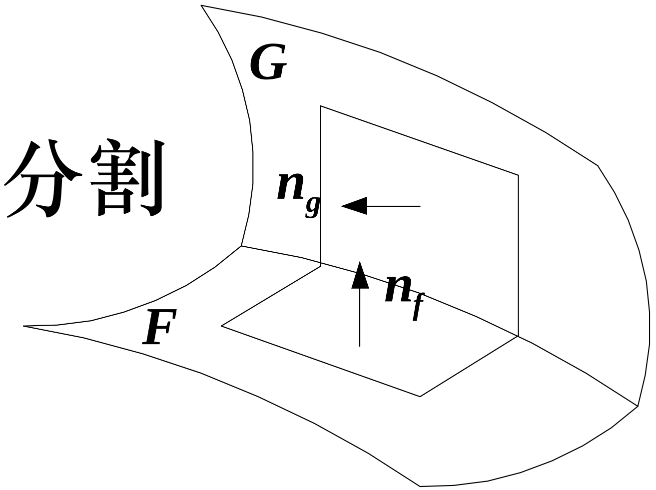
步骤3：交曲线追踪

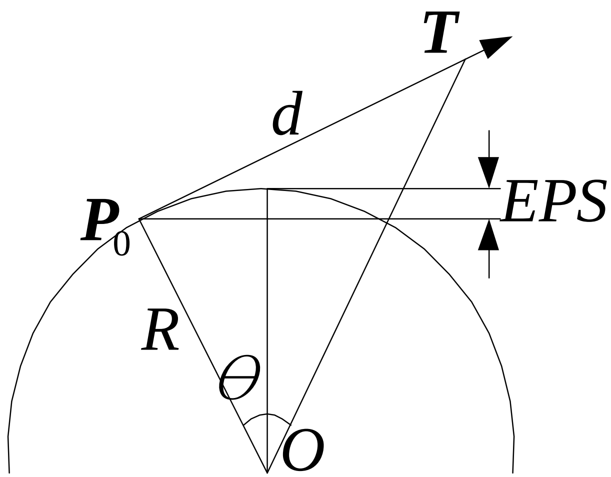
问题1：追踪方向的确定。

问题2：追踪步长d的确定。

问题3：交曲线追踪方法。

问题4：初始交点的精确化处理。





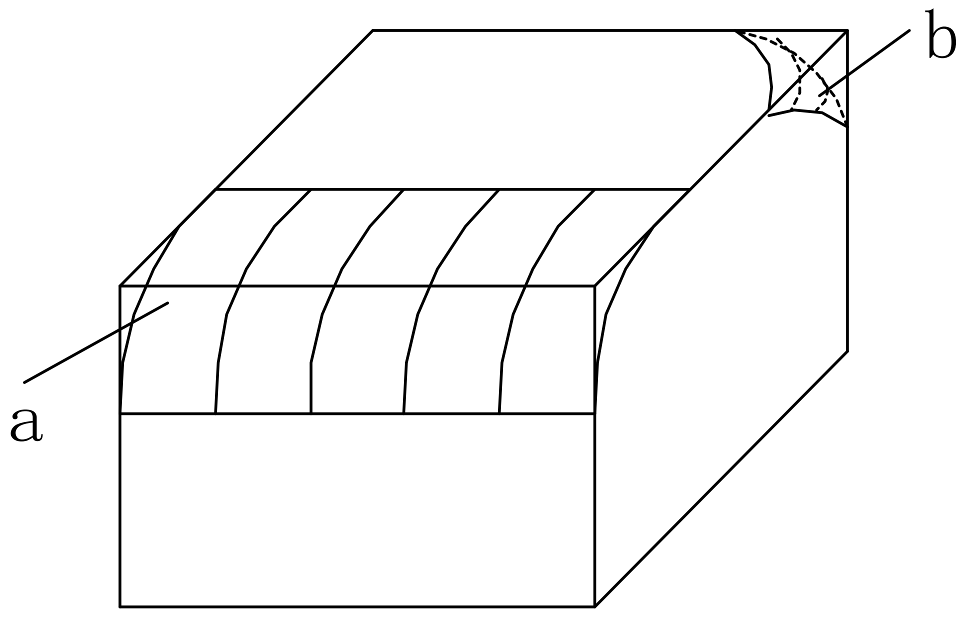
3.4 曲面建模中的几个关键技术

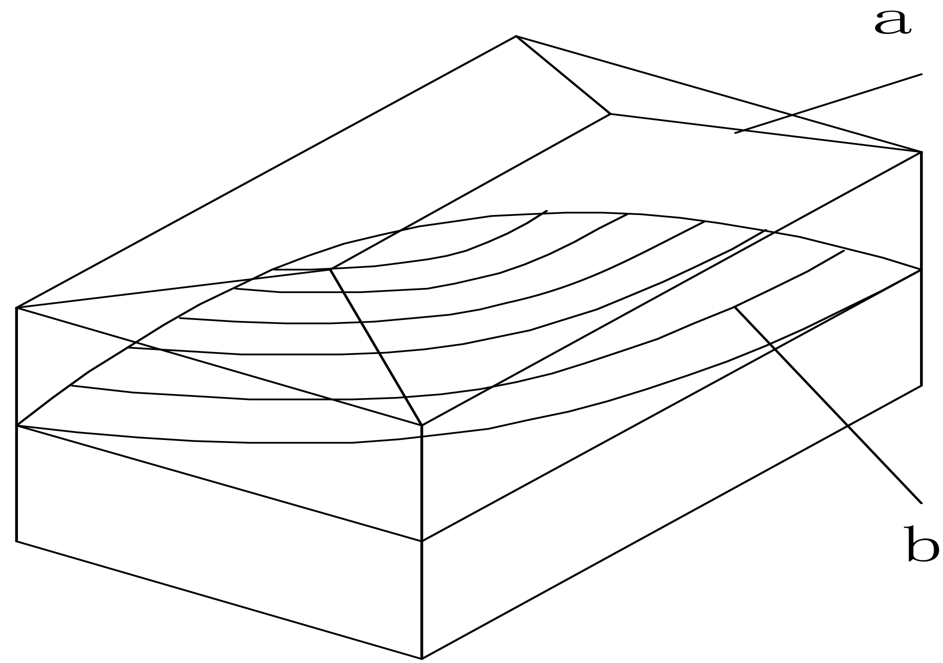
5、过渡曲面

过渡面（Blending面）是在相邻曲面间形成的光滑过渡曲面。过渡曲面生成法可分为:

- 整体构造法
- 局部构造法:
  - 顶点过渡曲面构造法
  - 棱边过渡曲面构造法
  - 区域过渡曲面构造法

3.4 曲面建模中的几个关键技术

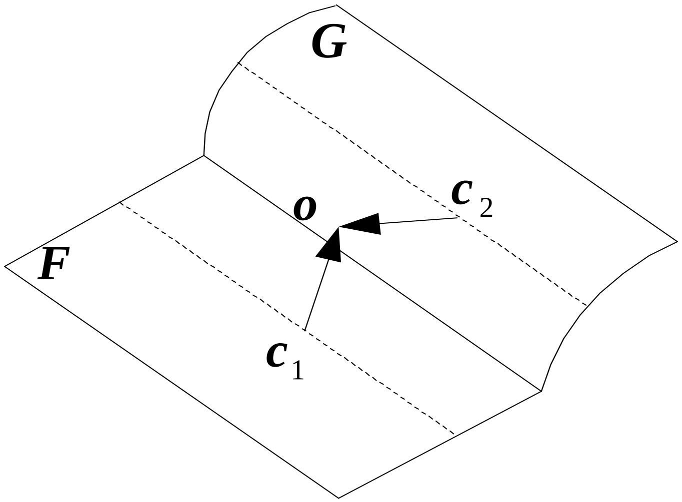




3.4 曲面建模中的几个关键技术

按过渡曲面生成机理的不同，过渡曲面生成法又可分为：

- N边域过渡曲面构造法
- 等半径过渡曲面构造法
- 变半径过渡曲面构造法
- 脊线过渡曲面构造法
- 截交线过渡曲面构造法



3.4 曲面建模中的几个关键技术

6、曲线、曲面光顺

1）什么样的曲线、曲面才是光顺的（fair），即光顺准则（fairing criterion）如何定义；

2）对于不光顺的曲线、曲面，如何进行一定的数学处理使其光顺性得到满足或改善，即采取何种光顺处理方法。

Thanks…

谢 谢!