

# 问题引导思维,动态演绎精彩

——一道习题探究教学案例设计

●宁夏彭阳县第三中学 王伯龙

“数学是思维的体操,问题是数学的心脏”.问题是引发学生思维与探究活动的向导,是学生课堂学习活动的载体,能有效地激发学生的好奇心和求知欲.通过问题,可以把知识的逻辑结构与学生的思维过程有机地联系起来,使知识的逻辑结构转化为学生的认知结构.通过问题,能使學生主动探究发现数学的内在规律,认识与理解数学的本质.

新课标指出:“动手实践,探索交流是学生学习数学的重要而有效的方式,学生的数学学习活动是一个动态的、活泼的、富有个性的‘再创造’过程.”叶澜教授曾提倡:“用动态生成的观念,重新全面地认识课堂教学,构建新的课堂教学观,使课堂焕发生命活力.”因此,在数学教学,特别是习题探究课的教学中,要注重问题设计的整体性、层次性和探究性,通过问题串的设计来体现低起点、小坡度、密台阶,符合学生的认知规律.让学生在问题串的引导下,可以自主学习,同时,问题间的适度思维差又能激发学生合作探究的兴趣.

笔者在每一单元授课结束后,都安排一节习题探究课,让学生在低起点、小坡度、密台阶的问题串下自然地探究学习.下面的案例是笔者在教学椭圆单元后的一节习题课探究的教学设计.

## 一、教学简述

**题目** 设点 $A, B$ 的坐标分别为 $(-5, 0), (5, 0)$ , 直线 $AM, BM$ 相交于点 $M$ , 且它们的斜率之积为 $-\frac{4}{9}$ , 求点 $M$ 的轨迹方程.

题目给出后, 全班学生几乎都不屑一顾, 这不是前面已做过的一道例题吗? 答案我们都没忘记, 点 $M$ 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1 (x \neq \pm 5)$ . 是的, 不过老师今天不是

让你们去重复昨天的故事, 而是想通过这道题目带着大家去继续探索研究, 发现更多更有价值的问题, 弄清试

题的本质, 从中感悟数学的真谛(同学们都笑了).

教师: 你能通过观察从试题的条件和所求出的结果中, 提出一般性的问题吗?

学生1: 设点 $A, B$ 的坐标分别为 $(-a, 0), (a, 0)$ , 直线 $AM, BM$ 相交于点 $M$ , 且它们的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2}$ , 求点 $M$ 的轨迹方程.

众生: 点 $M$ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) (x \neq \pm a)$ .

教师: 把上述试题看作命题, 从逆向思考问题的视角出发, 你能提出一个新的问题并且会验证它成立吗?

学生2: (口述) 设点 $A, B$ 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 长轴的左右顶点, 点 $M$  (不同于点 $A, B$ ) 为椭圆 $E$ 上一点, 则 $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$ .

学生共同完成证明过程如下:

由已知易得 $A(-a, 0), B(a, 0)$ , 设点 $M(x_0, y_0)$ , 则 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , 即 $y_0^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2)$ . 于是 $k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$ , 从而命题是真命题.

教师: 上面的问题中, 点 $A, B$ 是椭圆 $E$ 长轴的两个顶点时成立, 那么, 换成短轴的两个顶点时, 是否有同样的结论呢?

众生: 我们通过验证, 也有同样的结论.

此时, 同学们激情高昂, 渴望更多, 更有价值的新问题, 新结论出现, 教师趁热打铁.

教师: 结合上面的问题, 谁还能提出新的问题或猜想?

同学们积极思考, 同桌交流, 组内合作探讨, 大约过了3分钟的时间, 便有同学举手发言.

学生3: 我由学生2和您刚提出的问题受到启发, 提

出一个猜想(口述):点 $A, B, M$ 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上不同的三点,若 $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$ ,则点 $A, B$ 的连线过椭圆的中心 $O$ .

学生4:受学生3提出的猜想的启发,从逆向思维的视角思考问题的方法,我也提出一个猜想(口述):过原点 $O$ 的直线 $l$ 交椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 于点 $A, B, M$ (不同于点 $A, B$ )为椭圆 $E$ 上一点,则 $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$ .

教师:很好,你们不负众望,老师为你们骄傲(掌声鼓励).

为了研究问题的方便,把学生3,学生4提出的猜想分别记为①,②.刚才两位同学提出了两个猜想,既然是猜想,当然需要我们去验证.

教师用“几何画板”演示,给学生直观、动态的感受.从动态的演示中,同学们欣喜若狂——发现他们的猜想是成立的.

经过师生共同的参与研究,完成猜想①的验证过程如下:

为了方便,记 $k_{MA} = k$ ,设 $M(x_0, y_0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,则直线 $MA: y - y_0 = k(x - x_0)$ .由方程组 
$$\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$
 消去 $y$ 整理得 $x$ 的一元二次方程 
$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2k(y_0 - kx_0)x + a^2[(y_0 - kx_0)^2 - b^2] = 0$$
 因为方程有一个根为 $x = x_0$ ,由根与系数间的关系得 
$$x_0 + x_1 = \frac{2a^2k(kx_0 - y_0)}{a^2k^2 + b^2}$$
 所以 
$$x_1 = \frac{a^2k^2x_0 - 2a^2ky_0 - b^2x_0}{a^2k^2 + b^2}$$
 代入得 
$$y_1 = \frac{b^2y_0 - a^2k^2y_0 - 2b^2kx_0}{a^2k^2 + b^2}$$
 又由 $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 得 $k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2k}$ ,所以将方程组中的 $k$ 换成 $-\frac{b^2}{a^2k}$ ,解得 
$$x_2 = \frac{-a^2k^2x_0 + 2a^2ky_0 + b^2x_0}{a^2k^2 + b^2}, y_2 = \frac{-b^2y_0 + a^2k^2y_0 + 2b^2kx_0}{a^2k^2 + b^2}$$

于是 $x_1 + x_2 = 0, y_1 + y_2 = 0$ ,所以点 $A, B$ 关于原点 $O$ 对称,故 $A, B$ 的连线过椭圆的中心 $O$ .

对于猜想②学生求解的思路是:

当 $l$ 为椭圆 $E$ 的长、短轴所在的直线时,前面已知.这里只写出不是长、短轴的情形.

设 $M(x_0, y_0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,直线 $l: y = kx$ .由方程组 
$$\begin{cases} y = kx \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$
 消去 $y$ 得 
$$(a^2k^2 + b^2)x^2 - a^2b^2 = 0$$
 所以 
$$x_1 + x_2 = 0, x_1x_2 = -\frac{a^2b^2}{a^2k^2 + b^2}$$
 于是有 
$$y_1 + y_2 = 0, x_1x_2 = -\frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2 + b^2}$$
 所以 
$$k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{(y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} = \frac{y_1y_2 - (y_1 + y_2)y_0 + y_0^2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_0^2} = -\frac{b^2}{a^2}$$
 (注意到 $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ ). 综上,猜想成立.

$$k_{MB} = \frac{(y_2 - y_0)(y_1 - y_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} = \frac{y_1y_2 - (y_1 + y_2)y_0 + y_0^2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_0^2} = -\frac{b^2}{a^2}$$

教师:大家已验证了猜想是成立的,那么把我们的研究成果形成结论,不妨分别叫做结论1和结论2.

请大家仔细观察图1,老师过椭圆的中心 $O$ 作 $OP \parallel MA$ 交 $MB$ 于点 $P$ ,结合结论1和结论2,你有什么新的发现吗?

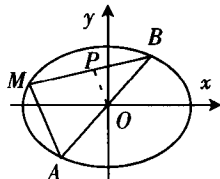


图1

学生5:我发现了点 $P$ 是线段 $MB$ 的中点,且 $k_{OP} \cdot k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$ (表述理由的过程此处略).

教师:好!看来大家也能像数学家一样,发现数学问题得出数学结论(学生脸上露出了微笑).

那么,我们就把学生的发现形成下面的结论:

结论3  $AB$ 是中心为 $O$ 的椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

的弦,点 $P$ 是 $AB$ 的中点,则 $k_{OP} \cdot k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$ .

## 二、体验高考

经过一番探究后,在大家都为自己的探究兴奋不已时,笔者顺势抛出了下面的三道练习题:

题1 (2013年全国高考大纲卷理科第8题)椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别分 $A_1, A_2$ ,点 $P$ 在 $C$ 上,且直线 $PA_1$ 的斜率的取值范围是 $[-2, -1]$ ,那么直线 $PA_2$ 的斜率的取值范围是( ).

A.  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$  B.  $[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$  C.  $[\frac{1}{2}, 1]$  D.  $[\frac{3}{4}, 1]$

题2 (2013年全国高考新课标I卷理科第10题)已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(3, 0)$ ,过点 $F$ 的直线交 $E$ 于 $A, B$ 两点.若 $AB$ 的中点坐标为 $(1, -1)$ ,则 $E$ 的方程为( ).

A.  $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$  B.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$  C.  $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$  D.  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

题3 (2010年全国高考数学上海卷理科第23题)已知椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,点 $P$ 的坐标为 $(-a, b)$ .

(I)略.

(II)设直线 $l_1: y = k_1x + p$ 交椭圆 $T$ 于 $C, D$ 两点,交直线 $l_2: y = k_2x$ 于点 $E$ .若 $k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ ,证明: $E$ 为 $CD$ 的中点.

(Ⅲ)略.

很快,有学生结合结论得出了题1,题2的选项分别为B和D.对于题3,当大家正在激烈地进行代数运算时,平时爱思考的学生6给出了简洁证法:

证明:过点C作 $CG \parallel l_2$ 交椭圆T于点G,由 $k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ 得 $k_1 k_G = -\frac{b^2}{a^2}$ ,由结论1知原点O为GD的中点,所以E为CD的中点.

.....

课堂在一片热烈的掌声中落下了帷幕.

### 三、教后反思

本节课迎合新课程理念,不仅圆满地完成了预期的课堂教学任务,更重要的是达到了以下的效果.

(1)给学生留出了时间,留出了空间,提供了体验和领悟的机会,通过问题串的引领,让学生经历了数学认知的过程,让学生大胆地猜想,感悟数学问题的产生原本就是那么的自然、合理、简单,自己通过努力也能发现和解决,从心理上消除了数学难学的困惑.

(2)调动了学生探究学习的热情,激发了学生的求知欲和进取精神,学习潜力也得到了挖掘,正所谓“知之

者不如好之者,好之者不如乐之者”.也增强了课堂教学活力,提高了教学效率.

教材凝聚了专家们的心智,教材中的例习题都具有很强的基础性、典范性和示范性,它是教师教学的基础和根本,也是高考命题的立足点.因此对教材例习题的探究、拓展,能够引导学生重视教材,回归教材,夯实基础,培养学生学习数学的自信心.

数学的精髓在于探索和创新.本节课通过教材中一道平常的例题,经过教师精心的设计,以问题串引领学生不断地发现新问题,获取新信息,得出新结论(对学生而言).调动学生通过探索交流的动态方式去参与探索、发现、解决问题的全过程.这样,学生学到的不单是知识本身,也经历了知识发生、形成的过程.同时在分析、探索、发现的过程中领会到知识创新的思维过程和思维方法,从而提高他们的创新能力.

#### 参考文献:

- 1.人民教育出版社中学数学室.普通高中课程标准实验教科书:选修2-1[M].北京:人民教育出版社,2007.
- 2.叶尧城.高中数学课程标准教师读本[M].武汉:华中师范大学出版社,2003.
- 3.邵珍红.自主探究、合作交流在课堂中的实际应用[J].数学通报,2011(2). FH

(上接第15页)

- (1)求证:直线 $EF \parallel$ 面 $ACD$ ;
- (2)求证:面 $EFC \perp$ 面 $BCD$ .

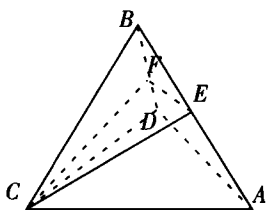


图2

在解题过程中,相同的,也有定义法和建立直角坐标系法两种,要证明两平面垂直,首先就得明白:①两个平面相交,如果所成的二面角是直二面角,那么这两个平面互相垂直.②如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.③如果一个平面垂直于两个平行面中的一个,那么,也垂直于另一个平面.

当然,也可以同样通过以D为原点建立直角坐标系,通过求两个平面的法向量,当两个平面的法向量数量积为0时,那么两个平面相互垂直.

4.复习课的设计要以学生为主体,引导学生进行有效复习与巩固

在高中数学复习阶段,复习时更应该以学生为主体.在讲授新课时,多以教师的讲授和学生的被动接受为主要方式.但是,在复习时就应该打破这样的模式,教师在这一过程中,应当以学生为主,尽可能地让学生自

己去回忆和思考以前所学的知识,在学生想不起来时,再予以提醒和指点.然后,在学生对知识有了印象之后,再将前后的知识连贯起来,突出新的知识点.最后,再在新知识的基础上,出练习题,让学生练习.这样,学生不仅不会觉得复习课无聊,相反,他们还会觉得复习课有新的知识点,更有乐趣,而且,综合的练习题对于学生而言,更有挑战性,更能激发学生学习和练习的积极性.

### 二、总结

传统高中数学课的复习主要以题海战术和教师讲述为主,在目前的教育环境下,所取得的效果不是非常理想.因为这样的复习课无法使学生拥有学习的兴趣和积极性,相反,还会打消他们学习数学的热情.所以,高中数学复习课教学设计的创新是一个重要的环节,对学生复习效果有着举足轻重的影响.只有创新的、新颖的复习课设计才能提高学生的积极性,复习效果才会更为理想.

#### 参考文献:

- 1.朱彤.从几个案例谈高中数学复习课教学设计的创新[J].成功(教育),2012(3).
- 3.吕增锋.切口宜求小,视角力求新——数学复习课教学“新思维”[J].教学时空(论教谈学),2012(8). FH