第三章　多维随机变量及其分布

习题 3.1

1． 100 件商品中有 50 件一等品、30 件二等品、20 件三等品．从中任取 5 件，以 X、Y 分别表示取出的 5 件中一等品、二等品的件数，在以下情况下求 (X, Y) 的联合分布列．

（1）不放回抽取；（2）有放回抽取．

解：（1）(X, Y)服从多维超几何分布，X, Y 的全部可能取值分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5，

且 $P\{X=i, Y=j\}=\dfrac{\dbinom{50}{i}\dbinom{30}{j}\dbinom{20}{5-i-j}}{\dbinom{100}{5}}$，　$i=0,1,2,3,4,5;\ j=0,\cdots,5-i$，

故 (X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0.0002	0.0019	0.0066	0.0102	0.0073	0.0019
1	0.0032	0.0227	0.0549	0.0539	0.0182	0
2	0.0185	0.0927	0.1416	0.0661	0	0
3	0.0495	0.1562	0.1132	0	0	0
4	0.0612	0.0918	0	0	0	0
5	0.0281	0	0	0	0	0

（2）(X, Y)服从多项分布，X, Y 的全部可能取值分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5，

且 $P\{X=i, Y=j\}=\dfrac{5!}{i!\cdot j!\cdot(5-i-j)!}\times 0.5^i\times 0.3^j\times 0.2^{5-i-j}$，　$i=0,1,2,3,4,5;\ j=0,\cdots,5-i$，

故 (X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0.00032	0.0024	0.0072	0.0108	0.0081	0.00243
1	0.004	0.024	0.054	0.054	0.02025	0
2	0.02	0.09	0.135	0.0675	0	0
3	0.05	0.15	0.1125	0	0	0
4	0.0625	0.09375	0	0	0	0
5	0.03125	0	0	0	0	0

2． 盒子里装有 3 个黑球、2 个红球、2 个白球，从中任取 4 个，以 X 表示取到黑球的个数，以 Y 表示取到红球的个数，试求 $P\{X=Y\}$．

解：$P\{X=Y\}=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=2, Y=2\}=\dfrac{\dbinom{3}{1}\dbinom{2}{1}\dbinom{2}{2}}{\dbinom{7}{4}}+\dfrac{\dbinom{3}{2}\dbinom{2}{2}}{\dbinom{7}{4}}=\dfrac{6}{35}+\dfrac{3}{35}=\dfrac{9}{35}$．

3． 口袋中有 5 个白球、8 个黑球，从中不放回地一个接一个取出 3 个．如果第 i 次取出的是白球，则令 $X_i=1$，否则令 $X_i=0$，$i=1, 2, 3$．求：

（1）(X_1, X_2, X_3)的联合分布列；

（2）(X_1, X_2)的联合分布列.

解：（1）$P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,0,0)\}=\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{28}{143}$，$P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,0,1)\}=\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{70}{429}$，

$P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,1,0)\}=\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11}=\frac{70}{429}$，$P\{(X_1, X_2, X_3)=(1,0,0)\}=\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}=\frac{70}{429}$，

$P\{(X_1, X_2, X_3)=(0,1,1)\}=\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{40}{429}$，$P\{(X_1, X_2, X_3)=(1,0,1)\}=\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{40}{429}$，

$P\{(X_1, X_2, X_3)=(1,1,0)\}=\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{40}{429}$，$P\{(X_1, X_2, X_3)=(1,1,1)\}=\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}=\frac{5}{143}$；

（2）$P\{(X_1, X_2)=(0,0)\}=\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{39}$，$P\{(X_1, X_2)=(0,1)\}=\frac{8}{13}\cdot\frac{5}{12}=\frac{10}{39}$，

$P\{(X_1, X_2)=(1,0)\}=\frac{5}{13}\cdot\frac{8}{12}=\frac{10}{39}$，$P\{(X_1, X_2)=(1,1)\}=\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}=\frac{5}{39}$.

X_1 \ X_2	0	1
0	14/39	10/39
1	10/39	5/39

4．设随机变量 X_i，$i=1, 2$ 的分布列如下，且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，试求 $P\{X_1=X_2\}$.

X_i	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

解：因 $P\{X_1X_2=0\}=1$，有 $P\{X_1X_2\neq 0\}=0$，

即 $P\{X_1=-1, X_2=-1\}=P\{X_1=-1, X_2=1\}=P\{X_1=1, X_2=-1\}=P\{X_1=1, X_2=1\}=0$，分布列为

X_1 \ X_2	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0		0	0.25
0				0.5
1	0		0	0.25
$p_{\cdot j}$	0.25	0.5	0.25	

→

X_1 \ X_2	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
$p_{\cdot j}$	0.25	0.5	0.25	

故 $P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=-1, X_2=-1\}+P\{X_1=0, X_2=0\}+P\{X_1=1, X_2=1\}=0$.

5．设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

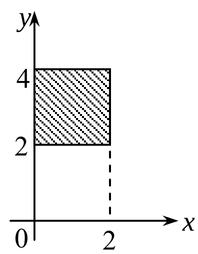
试求

（1）常数 k；

（2）$P\{X<1, Y<3\}$；

（3）$P\{X<1.5\}$；

（4）$P\{X+Y\le 4\}$.



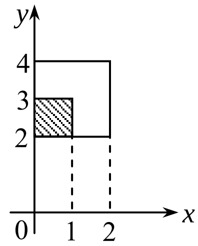
解：（1）由正则性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$，得

$$\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=\int_0^2 dx\cdot k\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^4=\int_0^2 k(6-2x)dx=k(6x-x^2)\Big|_0^2=8k=1,$$

故 $k=\dfrac{1}{8}$；

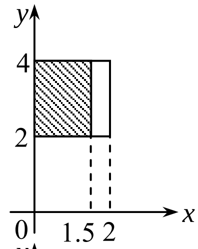
（2） $P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1 dx\int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y)dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{1}{8}\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^3$

$=\int_0^1 \frac{1}{8}\left(\frac{7}{2}-x\right)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{8}$；



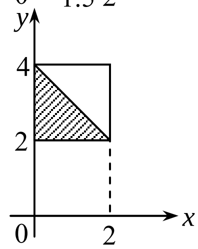
（3） $P\{X<1.5\}=\int_0^{1.5} dx\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy=\int_0^{1.5} dx\cdot\frac{1}{8}\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^4$

$=\int_0^{1.5}\frac{1}{8}(6-2x)dx=\frac{1}{8}(6x-x^2)\Big|_0^{1.5}=\frac{27}{32}$；



（4） $P\{X+Y<4\}=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\int_0^2 dx\cdot\frac{1}{8}\left(6y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^{4-x}$

$=\int_0^2\frac{1}{8}\left(6-4x+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\left(6x-2x^2+\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2=\frac{2}{3}$.



6． 设随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

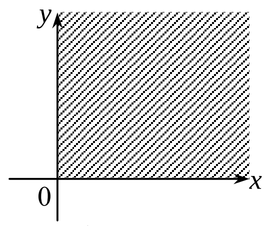
$$p(x,y)=\begin{cases}k\,\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求

（1）常数 k;

（2）(X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$;

（3）$P\{0<X\le 1, 0<Y\le 2\}$.



解：（1）由正则性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$，得

$$\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}k\,\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\,dy=\int_0^{+\infty}dx\cdot k\left[-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\right]\Big|_0^{+\infty}=\int_0^{+\infty}\frac{k}{4}\mathrm{e}^{-3x}\,dx=-\frac{k}{12}\mathrm{e}^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{k}{12}=1,$$

故 $k=12$；

（2）当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时，$F(x, y)=P(\varnothing)=0$，

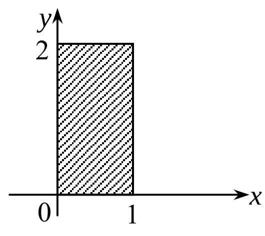
当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_0^y 12\,\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\,dv=\int_0^x du\cdot[-3\,\mathrm{e}^{-(3u+4v)}]\Big|_0^y=\int_0^x 3\,\mathrm{e}^{-3u}(1-\mathrm{e}^{-4y})du$$

$$=-\mathrm{e}^{-3u}(1-\mathrm{e}^{-4y})\Big|_0^x=(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y})$$

故(X, Y) 的联合分布函数为

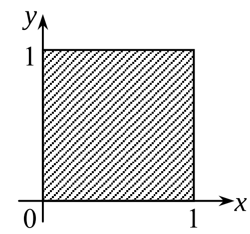
$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



（3）$P\{0<X\le 1, 0<Y\le 2\}=P\{X\le 1, Y\le 2\}=F(1, 2)=(1-\mathrm{e}^{-3})(1-\mathrm{e}^{-8})$.

7． 设二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



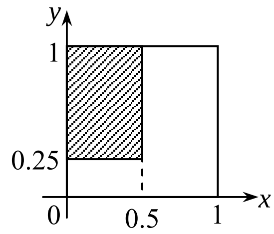
试求

（1）$P\{0<X<0.5, 0.25<Y<1\}$；

（2）$P\{X=Y\}$；

（3）$P\{X<Y\}$；

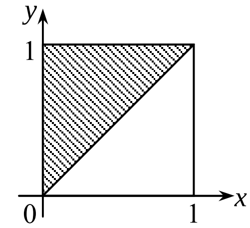
（4）(X, Y) 的联合分布函数.



解：（1）$P\{0<X<0.5, 0.25<Y<1\}=\int_0^{0.5} dx \int_{0.25}^1 4xydy=\int_0^{0.5} dx \cdot 2xy^2\Big|_{0.25}^1$

$$=\int_0^{0.5} \frac{15}{8} xdx=\frac{15}{16} x^2\Big|_0^{0.5}=\frac{15}{64}\text{；}$$

（2）$P\{X=Y\}=0$；



（3）$P\{X<Y\}=\int_0^1 dx \int_x^1 4xydy=\int_0^1 dx \cdot 2xy^2\Big|_x^1=\int_0^1 (2x-2x^3) dx$

$$=\left(x^2-\frac{1}{2} x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\text{；}$$

（4）当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x, y)=P(\varnothing)=0$，

当 $0\le x<1$ 且 $0\le y<1$ 时，

$$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_0^x du \int_0^y 4uvdv=\int_0^x du \cdot 2uv^2\Big|_0^y=\int_0^x 2uy^2 du=u^2 y^2\Big|_0^x=x^2 y^2\text{；}$$

当 $0\le x<1$ 且 $y\ge 1$ 时，

$$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_0^x du \int_0^1 4uvdv=\int_0^x du \cdot 2uv^2\Big|_0^1=\int_0^x 2udu=u^2\Big|_0^x=x^2\text{；}$$

当 $x\ge 1$ 且 $0\le y<1$ 时，

$$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_0^1 du \int_0^y 4uvdv=\int_0^1 du \cdot 2uv^2\Big|_0^y=\int_0^1 2uy^2 du=u^2 y^2\Big|_0^1=y^2\text{；}$$

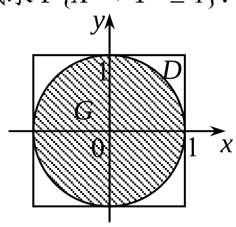
当 $x\ge 1$ 且 $y\ge 1$ 时，$F(x, y)=P(\Omega)=1$，

故(X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0, \\ x^2 y^2, & 0\le x<1, 0\le y<1, \\ x^2, & 0\le x<1, y\ge 1, \\ y^2, & x\ge 1, 0\le y<1, \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1.\end{cases}$$

8．设二维随机变量(X, Y) 在边长为 2，中心为$(0, 0)$ 的正方形区域内服从均匀分布，试求 $P\{X^2+Y^2\le 1\}$.

解：设 D 表示该正方形区域，面积 $S_D=4$，G 表示单位圆区域，面积 $S_G=\pi$，



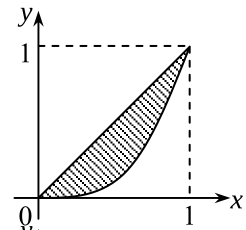
故 $P\{X^2+Y^2\le 1\}=\dfrac{S_G}{S_D}=\dfrac{\pi}{4}$.

9．设二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=\begin{cases}k, & 0<x^2<y<x<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）试求常数 k；

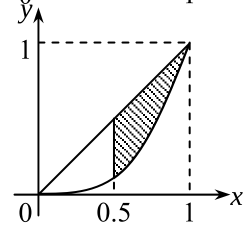
（2）求 $P\{X>0.5\}$ 和 $P\{Y<0.5\}$.



解：（1）由正则性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$，得

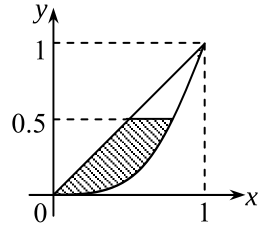
$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}kdy=\int_0^1 dx\cdot k\,y\Big|_{x^2}^{x}=\int_0^1 k(x-x^2)dx=k\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{k}{6}=1,$$

故 $k=6$；



（2）$P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^1 dx\int_{x^2}^{x}6dy=\int_{0.5}^1 dx\cdot 6y\Big|_{x^2}^{x}=\int_{0.5}^1(6x-6x^2)dx$

$$=(3x^2-2x^3)\Big|_{0.5}^1=0.5;$$

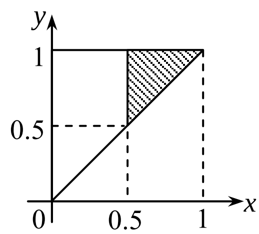


$P\{Y<0.5\}=\int_0^{0.5}dy\int_y^{\sqrt{y}}6dx=\int_0^{0.5}dy\cdot 6x\Big|_y^{\sqrt{y}}=\int_0^{0.5}(6\sqrt{y}-6y)dy$

$$=(4y^{\frac{3}{2}}-3y^2)\Big|_0^{0.5}=\sqrt{2}-\frac{3}{4}.$$

10．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}6(1-y), & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

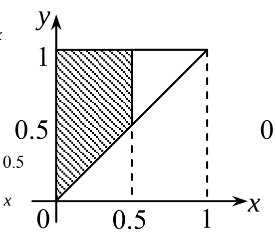


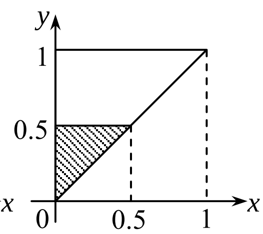
（1）求 $P\{X>0.5, Y>0.5\}$；
（2）求 $P\{X<0.5\}$ 和 $P\{Y<0.5\}$；
（3）求 $P\{X+Y<1\}$.

解：（1）$P\{X>0.5,Y>0.5\}=\int_{0.5}^1 dx\int_x^1 6(1-y)dy=\int_{0.5}^1 dx\cdot[-3(1-y)^2]\Big|_x^1=\int_{0.5}^1 3(1-x)^2dx=-(1-x)^3\Big|_{0.5}^1=\frac{1}{8}$；

（2）$P\{X<0.5\}=\int_0^{0.5}dx\int_x^1 6(1-y)dy=\int_0^{0.5}dx\cdot[-3(1-y)^2]\Big|_x^1$

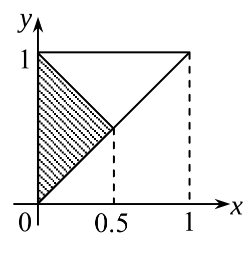
$$=\int_0^{0.5}3(1-x)^2dx=-(1-x)^3\Big|_0^{0.5}=\frac{7}{8};$$





$P\{Y<0.5\}=\int_0^{0.5}dx\int_x^{0.5}6(1-y)dy=\int_0^{0.5}dx\cdot[-3(1-y)^2]\Big|_x^{0.5}$

$$=\int_0^{0.5}\left[-\frac{3}{4}+3(1-x)^2\right]dx=\left[-\frac{3}{4}x-(1-x)^3\right]\Bigg|_0^{0.5}=\frac{1}{2};$$



（3）$P\{X+Y<1\}=\int_0^{0.5}dx\int_x^{1-x}6(1-y)dy=\int_0^{0.5}dx\cdot[-3(1-y)^2]\Big|_x^{1-x}$

$$=\int_0^{0.5}[-3x^2+3(1-x)^2]dx=[-x^3-(1-x)^3]\Big|_0^{0.5}=\frac{3}{4}.$$

11．设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，定义随机变量 X_k 如下：

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\le k,\\ 1, & Y>k.\end{cases}\quad k=1,2.$$

求 X_1 和 X_2 的联合分布列.

解：因 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

且 X_1 和 X_2 的全部可能取值为 0, 1，

则 $P\{X_1=0, X_2=0\}=P\{Y\le 1, Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=\int_0^1 e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_0^1=1-e^{-1}$，

$P\{X_1=0, X_2=1\}=P\{Y\le 1, Y>2\}=P(\varnothing)=0$，

$P\{X_1=1, X_2=0\}=P\{Y>1, Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=\int_1^2 e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_1^2=e^{-1}-e^{-2}$，

$P\{X_1=1, X_2=1\}=P\{Y>1, Y>2\}=P\{Y>2\}=\int_2^{+\infty} e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_2^{+\infty}=e^{-2}$，

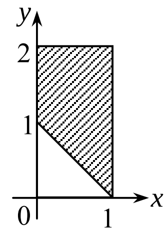
故 X_1 和 X_2 的联合分布列为

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

12．设二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0<x<1,\ 0<y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $P\{X+Y\ge 1\}$.



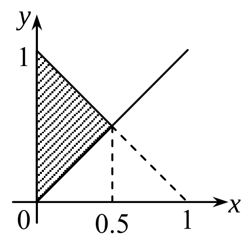
解：$P\{X+Y\ge 1\}=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2\left(x^2+\dfrac{xy}{3}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(x^2y+\dfrac{xy^2}{6}\right)\Bigg|_{1-x}^{2}$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x^3\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{4}{9}x^3+\frac{5}{24}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{65}{72}.$$

13．设二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $P\{X+Y\le 1\}$.

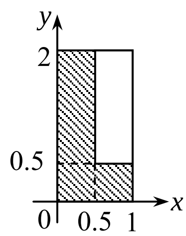


解：$P\{X+Y\le 1\}=\int_0^{0.5} dx\int_x^{1-x} e^{-y}\,dy=\int_0^{0.5} dx\cdot(-e^{-y})\Big|_x^{1-x}=\int_0^{0.5}(-e^{x-1}+e^{-x})dx$

$$=(-e^{x-1}-e^{-x})\Big|_0^{0.5}=1+e^{-1}-2e^{-0.5}.$$

14．设二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=\begin{cases} 1/2, & 0<x<1,\ 0<y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



求 X 与 Y 中至少有一个小于 0.5 的概率.

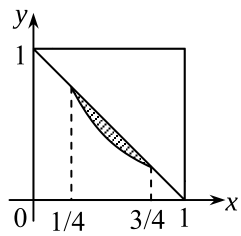
解：$P\{\min\{X, Y\}<0.5\}=1-P\{X\ge 0.5, Y\ge 0.5\}=1-\int_{0.5}^1 dx\int_{0.5}^2\dfrac{1}{2}dy=1-\int_{0.5}^1\dfrac{3}{4}dx=1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$.

15．从(0,1)中随机地取两个数，求其积不小于 3/16，且其和不大于 1 的概率.

解：设 X、Y 分别表示“从(0,1)中随机地取到的两个数”，则(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y)=\begin{cases} 1, & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故所求概率为



$$P\{XY \geq \frac{3}{16}, X+Y \leq 1\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dx \int_{\frac{3}{16x}}^{1-x} dy = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(1 - x - \frac{3}{16x}\right) dx$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{16}\ln x\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\ln 3 .$$

习题 3.2

1．设二维离散随机变量(X, Y)的可能值为

$(0, 0)$，$(-1, 1)$，$(-1, 2)$，$(1, 0)$，

且取这些值的概率依次为 1/6, 1/3, 1/12, 5/12，试求 X 与 Y 各自的边际分布列.

解：因 X 的全部可能值为$-1, 0, 1$，且

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12},\quad P\{X=0\}=\frac{1}{6},\quad P\{X=1\}=\frac{5}{12},$$

故 X 的边际分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

因 Y 的全部可能值为 0, 1, 2，且

$$P\{X=0\}=\frac{1}{6}+\frac{5}{12}=\frac{7}{12},\quad P\{X=1\}=\frac{1}{3},\quad P\{X=2\}=\frac{1}{12},$$

故 Y 的边际分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

2．设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 X 与 Y 各自的边际分布函数.

解：当 $x\le 0$ 时，$F(x, y)=0$，有 $F_X(x)=F(x,+\infty)=0$，

当 $x>0$ 时，$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$ 有

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}[1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}]=1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x},$$

故 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

当 $y\le 0$ 时，$F(x, y)=0$，有 $F_Y(y)=F(+\infty, y)=0$，

当 $y>0$ 时，$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ 有

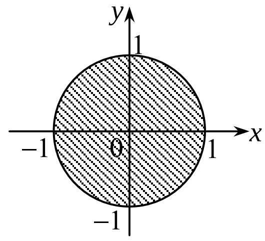
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}[1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}]=1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y},$$

故 $F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

3．试求以下二维均匀分布的边际分布：

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解：当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$p_X(x)=0$，



当$-1\le x\le 1$ 时， $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ ，

故 $p_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

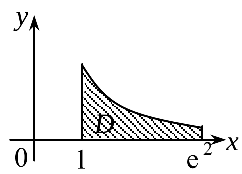
当 $y<-1$ 或 $y>1$ 时，$p_Y(y)=0$，

当$-1\le y\le 1$ 时， $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ ，

故 $p_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4． 设平面区域 D 由曲线 $y=1/x$ 及直线 $y=0$，$x=1$，$x=e^2$ 所围成，二维随机变量(X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布，试求 X 的边际密度函数．

解：因平面区域 D 的面积为 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{e^2}=2$ ，



则(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

当 $x<1$ 或 $x>e^2$ 时，$p_X(x)=0$，

当 $1\le x\le e^2$ 时， $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}$ ，

故 $p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1\le x\le e^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

5． 求以下给出的(X, Y) 的联合密度函数的边际密度函数 $p_x(x)$ 和 $p_y(y)$：

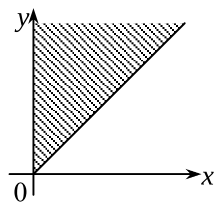
（1） $p_1(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（2） $p_2(x,y)=\begin{cases}\frac{5}{4}(x^2+y), & 0<y<1-x^2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（3） $p_3(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

解：（1）当 $x\le 0$ 时，$p_X(x)=0$，

当 $x>0$ 时， $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x,y)dy=\int_x^{+\infty}e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_x^{+\infty}=e^{-x}$ ，



故 $p_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

当 $y\le 0$ 时，$p_Y(y)=0$，

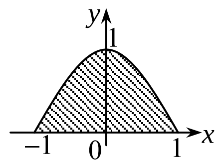
当 $y>0$ 时， $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x,y)dx=\int_0^{y}e^{-y}\,dx=y\,e^{-y}$ ，

故 $p_Y(y)=\begin{cases} y\,\mathrm{e}^{-y}, & y>0; \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$

（2）当 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$ 时，$p_X(x)=0$，

当 $-1<x<1$ 时， $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_2(x,y)dy=\int_0^{1-x^2}\frac{5}{4}(x^2+y)dy=\frac{5}{4}(x^2y+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{1-x^2}=\frac{5}{8}(1-x^4)$，

故 $p_X(x)=\begin{cases} \frac{5}{8}(1-x^4), & -1<x<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$



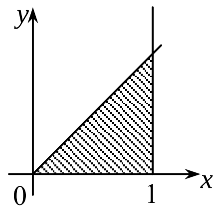
当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，$p_Y(y)=0$，

当 $0<y<1$ 时，$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{5}{4}(x^2+y)dx=\frac{5}{4}(\frac{1}{3}x^3+xy)\Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}=\frac{5}{6}(1+2y)\sqrt{1-y}$，

故 $p_Y(y)=\begin{cases} \frac{5}{6}(1+2y)\sqrt{1-y}, & 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（3）当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$p_X(x)=0$，

当 $0<x<1$ 时， $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_3(x,y)dy=\int_0^x\frac{1}{x}dy=x\cdot\frac{1}{x}=1$，



故 $p_X(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，$p_Y(y)=0$，

当 $0<y<1$ 时， $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_y^1\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_y^1=\ln 1-\ln y=-\ln y$，

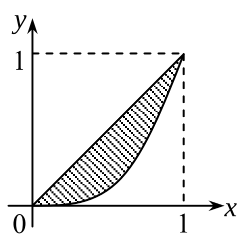
故 $p_Y(y)=\begin{cases} -\ln y, & 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

6． 设二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} 6, & 0<x^2<y<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求边际密度函数 $p_x(x)$ 和 $p_y(y)$.

解：当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$p_X(x)=0$，



当 $0<x<1$ 时， $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{x^2}^x 6dy=6(x-x^2)$，

故 $p_X(x)=\begin{cases} 6(x-x^2), & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，$p_Y(y)=0$，

当 $0<y<1$ 时， $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_y^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y)$，

故 $p_Y(y)=\begin{cases} 6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

7． 试验证：以下给出的两个不同的联合密度函数，它们有相同的边际密度函数．

$$p(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}(0.5+x)(0.5+y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证：当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$p_X(x)=0$，

当 $0\le x\le 1$ 时， $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=(xy+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^1=x+0.5$，

则 $p_X(x)=\begin{cases}x+0.5, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $y<0$ 或 $y>1$ 时，$p_Y(y)=0$，

当 $0\le y\le 1$ 时， $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_0^1(x+y)dx=(\frac{1}{2}x^2+xy)\Big|_0^1=y+0.5$，

则 $p_Y(y)=\begin{cases}y+0.5, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

并且当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$g_X(x)=0$，

当 $0\le x\le 1$ 时， $g_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dy=\int_0^1(0.5+x)(0.5+y)dy=(0.5+x)\cdot\frac{1}{2}(0.5+y)^2\Big|_0^1=x+0.5$，

则 $g_X(x)=\begin{cases}x+0.5, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $y<0$ 或 $y>1$ 时，$g_Y(y)=0$，

当 $0\le y\le 1$ 时， $g_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dx=\int_0^1(0.5+x)(0.5+y)dx=\frac{1}{2}(0.5+x)^2\cdot(0.5+y)\Big|_0^1=y+0.5$，

则 $g_Y(y)=\begin{cases}y+0.5, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故它们有相同的边际密度函数.

8． 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，且

$$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=P\{X=1\}=P\{Y=1\}=1/2,$$

试求 $P\{X=Y\}$.

解：因 X 和 Y 独立同分布，且 $P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=P\{X=1\}=P\{Y=1\}=1/2$，

则(X, Y) 的联合概率分布

$X \backslash Y$	-1	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

故 $P\{X=Y\}=P\{X=-1, Y=-1\}+P\{X=1, Y=1\}=1/2$.

9． 甲、乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的命中率为 0.5，以 X 和 Y 分别表示甲

和乙的命中次数，试求 $P\{X \le Y\}$.

解：因 X 的全部可能取值为 0, 1, 2，

且 $P\{X=0\}=0.8^2=0.64$，$P\{X=1\}=\binom{2}{1}\times 0.2\times 0.8=0.32$，$P\{X=2\}=0.2^2=0.04$，

又因 Y 的全部可能取值为 0, 1, 2，

且 $P\{Y=0\}=0.5^2=0.25$，$P\{Y=1\}=\binom{2}{1}\times 0.5\times 0.5=0.5$，$P\{Y=2\}=0.5^2=0.25$，

则(X, Y) 的联合概率分布

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0.16	0.32	0.16	0.64
1	0.08	0.16	0.08	0.32
2	0.01	0.02	0.01	0.04
$p_{\cdot j}$	0.25	0.5	0.25	

故 $P\{X \le Y\}=1-P\{X>Y\}=1-P\{X=1, Y=0\}-P\{X=2, Y=0\}-P\{X=2, Y=1\}=0.89$.

10．设随机变量 X 和 Y 相互独立，其联合分布列为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	a	$1/9$	c
x_2	$1/9$	b	$1/3$

试求联合分布列中的 a, b, c.

解：因 $p_{1\cdot}=a+\frac{1}{9}+c$，$p_{2\cdot}=\frac{1}{9}+b+\frac{1}{3}=b+\frac{4}{9}$，$p_{\cdot 1}=a+\frac{1}{9}$，$p_{\cdot 2}=\frac{1}{9}+b$，$p_{\cdot 3}=\frac{1}{3}+c$，

根据独立性，知 $p_{22}=b=p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot 2}=\left(b+\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{9}+b\right)=b^2+\frac{5}{9}b+\frac{4}{81}$，

可得 $b^2-\frac{4}{9}b+\frac{4}{81}=0$，即 $\left(b-\frac{2}{9}\right)^2=0$，

故 $b=\frac{2}{9}$；

再根据独立性，知 $p_{21}=\frac{1}{9}=p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot 1}=\left(b+\frac{4}{9}\right)\left(a+\frac{1}{9}\right)=\frac{6}{9}\left(a+\frac{1}{9}\right)$，可得 $a+\frac{1}{9}=\frac{1}{6}$，

故 $a=\frac{1}{18}$；

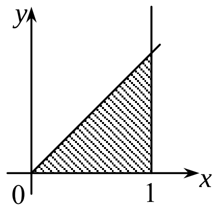
由正则性，知 $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}p_{ij}=a+\frac{1}{9}+c+\frac{1}{9}+b+\frac{1}{3}=a+b+c+\frac{5}{9}=1$，可得 $a+b+c=\frac{4}{9}$，

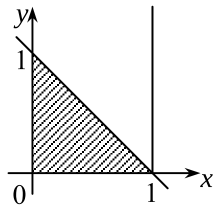
故 $c=\frac{4}{9}-a-b=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.

11．设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim U(0, 1)$，$Y\sim Exp(1)$．试求（1）X 与 Y 的联合密度函数；（2）$P\{Y\le X\}$；（3）$P\{X+Y\le 1\}$.

解：（1）因 X 与 Y 相互独立，且边际密度函数分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}\quad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$





故 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1,\, y\ge 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

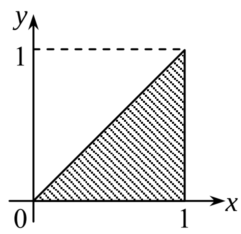
（2）$P\{Y\le X\}=\int_0^1 dx\int_0^x e^{-y}\,dy=\int_0^1 dx\cdot(-e^{-y})\Big|_0^x=\int_0^1(1-e^{-x})dx=(x+e^{-x})\Big|_0^1=1+e^{-1}-1=e^{-1}$；

（3）$P\{X+Y\le 1\}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{-y}\,dy=\int_0^1 dx\cdot(-e^{-y})\Big|_0^{1-x}=\int_0^1(1-e^{x-1})dx=(x-e^{x-1})\Big|_0^1=e^{-1}$.

12．设随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\, 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求（1）边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$；（2）X 与 Y 是否独立.



解：（1）当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$p_X(x)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2$，

故 $p_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，$p_Y(y)=0$，

当 $0<y<1$ 时，$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\dfrac{3}{2}x^2\Big|_y^1=\dfrac{3}{2}(1-y^2)$，

故 $p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）因 $p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{9}{2}x^2(1-y^2), & 0<x<1,\, 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 即 $p_X(x)p_Y(y)\ne p(x,y)$，

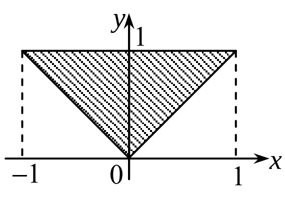
故 X 与 Y 不独立.

13．设随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |x|<y,\, 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求（1）边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$；（2）X 与 Y 是否独立.

解：（1）当 $x\le -1$ 或 $x\ge 1$ 时，$p_X(x)=0$，



当$-1<x<0$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-x}^1 1dy=1+x$，

当 $0\le x<1$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_x^1 1dy=1-x$，

故 $p_X(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $y \le 0$ 或 $y \ge 1$ 时，$p_Y(y) = 0$，

当 $0 < y < 1$ 时， $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx = \int_{-y}^{y} 1dx = 2y$，

故 $p_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

（2）因 $p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} 2y(1+x), & -1 < x < 0, 0 < y < 1, \\ 2y(1-x), & 0 \le x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 即 $p_x(x)p_y(y) \ne p(x, y)$，

故 X 与 Y 不独立．

14．设二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数如下，试问 X 与 Y 是否相互独立？

（1） $p(x, y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & 其他. \end{cases}$

（2） $p(x, y) = \dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$， $-\infty < x, y < +\infty$；

（3） $p(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1; \\ 0, & 其他. \end{cases}$

（4） $p(x, y) = \begin{cases} 24xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1; \\ 0, & 其他. \end{cases}$

（5） $p(x, y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1; \\ 0, & 其他. \end{cases}$

（6） $p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{21}{4}x^2y, & x^2 < y < 1; \\ 0, & 其他. \end{cases}$

解：（1）因 $x\mathrm{e}^{-(x+y)} = x\mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{-y}$ 可分离变量，$x > 0, y > 0$ 是广义矩形区域，故 X 与 Y 相互独立；

（2）因 $\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$ 可分离变量，$-\infty < x, y < +\infty$是广义矩形区域，故 X 与 Y 相互独立；

（3）因 $0 < x < y < 1$ 不是矩形区域，故 X 与 Y 不独立；

（4）因 $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1$ 不是矩形区域，故 X 与 Y 不独立；

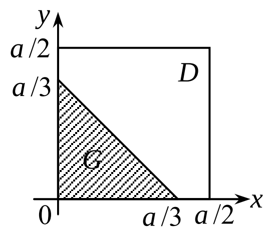
（5）因 $12xy(1-x) = 12x(1-x) \cdot y$ 可分离变量，$0 < x < 1, 0 < y < 1$ 是矩形区域，故 X 与 Y 相互独立；

（6）因 $x^2 < y < 1$ 不是矩形区域，故 X 与 Y 不独立．

15．在长为 a 的线段的中点的两边随机地各取一点，求两点间的距离小于 $a/3$ 的概率．

解：设 X 和 Y 分别表示这两个点与线段中点的距离，有 X 和 Y 相互独立且都服从$[0, a/2]$的均匀分布，则(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4}{a^2}, & 0 < x < \dfrac{a}{2}, 0 < y < \dfrac{a}{2}, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$



故所求概率为 $P\{X+Y<\frac{a}{3}\}=\frac{S_G}{S_D}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{2}{9}$.

16．设二维随机变量(X, Y) 服从区域

$$D=\{(x, y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

上的均匀分布，试证 X 与 Y 相互独立.

证：因(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b, c\le y\le d;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

当 $x<a$ 或 $x>b$ 时，$p_X(x)=0$，

当 $a\le x\le b$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_c^d\frac{1}{(b-a)(d-c)}dy=\frac{1}{b-a}$，

则 $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

当 $y<c$ 或 $y>d$ 时，$p_Y(y)=0$，

当 $c\le y\le d$ 时，$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_a^b\frac{1}{(b-a)(d-c)}dx=\frac{1}{d-c}$，

则 $p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c\le y\le d;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

因 $p_x(x)p_y(y)=p(x,y)$，

故 X 与 Y 相互独立.

17．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变量．证明

$$E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n},\quad k\le n.$$

证：因 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的正值随机变量，

则由对称性知 $\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}\quad(i=1, 2, \cdots, n)$ 同分布，且满足 $0<\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}<1$，

可得 $E\left(\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}\right)$ 存在，且 $E\left(\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\right)=E\left(\frac{X_2}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\cdots=E\left(\frac{X_n}{X_1+\cdots+X_n}\right)$，

因 $E\left(\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\right)+E\left(\frac{X_2}{X_1+\cdots+X_n}\right)+\cdots+E\left(\frac{X_n}{X_1+\cdots+X_n}\right)=E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{X_1+\cdots+X_n}\right)=1$，

则 $E\left(\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\right)=E\left(\frac{X_2}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\cdots=E\left(\frac{X_n}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{1}{n}$，

故 $E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n},\quad k\le n$.

习题 3.3

1． 设二维随机变量(X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	1	2	3
0	0.05	0.15	0.20
1	0.07	0.11	0.22
2	0.04	0.07	0.09

试分布求 $U = \max\{X, Y\}$ 和 $V = \min\{X, Y\}$ 的分布列．

解：因 $P\{U = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 1\} = 0.05 + 0.07 = 0.12$；

$P\{U = 2\} = P\{X = 0, Y = 2\} + P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\}$
$= 0.15 + 0.11 + 0.07 + 0.04 = 0.37$；

$P\{U = 3\} = P\{X = 0, Y = 3\} + P\{X = 1, Y = 3\} + P\{X = 2, Y = 3\} = 0.20 + 0.22 + 0.09 = 0.51$；

故 U 的分布列为

U	1	2	3
P	0.12	0.37	0.51

因 $P\{V = 0\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = 2\} + P\{X = 0, Y = 3\} = 0.05 + 0.15 + 0.20 = 0.40$；

$P\{V = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 1, Y = 3\} + P\{X = 2, Y = 1\}$
$= 0.07 + 0.11 + 0.22 + 0.04 = 0.44$；

$P\{V = 2\} = P\{X = 2, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 3\} = 0.07 + 0.09 = 0.16$；

故 V 的分布列为

V	0	1	2
P	0.40	0.44	0.16

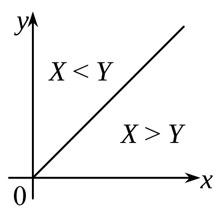
2． 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且 $X \sim Exp(\lambda)$，$Y \sim Exp(\mu)$．如果定义随机变量 Z 如下

$$Z = \begin{cases} 1, & 当 X \le Y, \\ 0, & 当 X > Y. \end{cases}$$

求 Z 的分布列．

解：因(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} \lambda\mu\,\mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$



则 $P\{Z = 1\} = P\{X \le Y\} = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \lambda\mu\,\mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y)}\,dy = \int_0^{+\infty} dx \cdot (-\lambda)\,\mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y)}\Big|_x^{+\infty}$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}\,dx = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$P\{Z = 0\} = 1 - P\{Z = 1\} = \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

故 Z 的分布列为

Z	0	1
P	$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

3．设随机变量 X 和 Y 的分布列分别为

X	-1	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Y	0	1
P	$1/2$	$1/2$

已知 $P\{XY=0\}=1$，试求 $Z=\max\{X, Y\}$的分布列．

解：因 $P\{X_1X_2=0\}=1$，有 $P\{X_1X_2\neq 0\}=0$，

即 $P\{X_1=-1, X_2=1\}=P\{X_1=1, X_2=1\}=0$，可得 (X, Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
-1			$1/4$
0			$1/2$
1			$1/4$
$p_{\cdot j}$	$1/2$	$1/2$	

→

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	$1/4$	0	$1/4$
0	0	$1/2$	$1/2$
1	$1/4$	0	$1/4$
$p_{\cdot j}$	$1/2$	$1/2$	

因 $P\{Z=0\}=P\{X=-1, Y=0\}+P\{X=0, Y=0\}=\dfrac{1}{4}+0=\dfrac{1}{4}$；

$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\dfrac{3}{4}$；

故 Z 的分布列为

Z	0	1
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

4．设随机变量 X、Y 独立同分布，在以下情况下求随机变量 $Z=\max\{X, Y\}$的分布列．

（1）X 服从 $p=0.5$ 的 (0-1) 分布；

（2）X 服从几何分布，即 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$，$k=1, 2, \cdots$．

解：（1）(X, Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.25	0.25	0.5
1	0.25	0.25	0.5
$p_{\cdot j}$	0.5	0.5	

因 $P\{Z=0\}=P\{X=0, Y=0\}=0.25$；$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=0.75$；

故 Z 的分布列为

Z	0	1
P	0.25	0.75

（2）因 $P\{Z=k\}=P\{X=k, Y\le k\}+P\{X<k, Y=k\}=P\{X=k\}P\{Y\le k\}+P\{X<k\}P\{Y=k\}$

$$=(1-p)^{k-1}p\cdot\sum_{j=1}^{k}(1-p)^{j-1}p+\sum_{i=1}^{k-1}(1-p)^{i-1}p\cdot(1-p)^{k-1}p$$

$$=(1-p)^{k-1}p\cdot\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}p+\frac{1-(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)}p\cdot(1-p)^{k-1}p$$

$$=(1-p)^{k-1}p\cdot[2-(1-p)^{k-1}-(1-p)^k]$$

故 $Z=\max\{X, Y\}$的概率函数为 $p_z(k)=(1-p)^{k-1}p\cdot[2-(1-p)^{k-1}-(1-p)^k]$，$k=1, 2, \cdots$．

5． 设 X 和 Y 为两个随机变量，且

$$P\{X \ge 0, Y \ge 0\} = \frac{3}{7}，\quad P\{X \ge 0\} = P\{Y \ge 0\} = \frac{4}{7}，$$

试求 $P\{\max\{X, Y\} \ge 0\}$.

解：设 A 表示事件“$X \ge 0$”，B 表示事件“$Y \ge 0$”，有 $P(AB) = \frac{3}{7}$，$P(A) = P(B) = \frac{4}{7}$，

故 $P\{\max\{X,Y\} \ge 0\} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$.

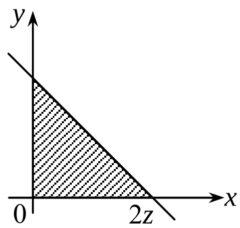
6． 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求以下随机变量的密度函数（1）$Z = (X + Y)/2$；（2）$Z = Y - X$.

解：方法一：分布函数法

（1）作曲线簇 $\frac{x+y}{2} = z$，得 z 的分段点为 0，



当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z) = 0$，

当 $z > 0$ 时，$F_Z(z) = \int_0^{2z} dx \int_0^{2z-x} e^{-(x+y)}\, dy = \int_0^{2z} dx \cdot [-e^{-(x+y)}]\Big|_0^{2z-x}$

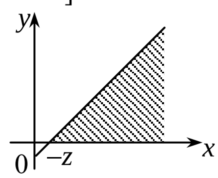
$$= \int_0^{2z} (-e^{-2z} + e^{-x}) dx = (-e^{-2z}\, x - e^{-x})\Big|_0^{2z} = 1 - (2z+1)e^{-2z}，$$

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z = (X + Y)/2$ 为连续随机变量，
故 $Z = (X + Y)/2$ 的密度函数为

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 4z\, e^{-2z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

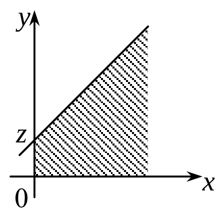
（2）作曲线簇 $y - x = z$，得 z 的分段点为 0，

当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z) = \int_{-z}^{+\infty} dx \int_0^{x+z} e^{-(x+y)}\, dy = \int_{-z}^{+\infty} dx \cdot [-e^{-(x+y)}]\Big|_0^{x+z} = \int_{-z}^{+\infty} [-e^{-(2x+z)} + e^{-x}] dx$



$$= \left[\frac{1}{2} e^{-(2x+z)} - e^{-x}\right]_{-z}^{+\infty} = -\left[\frac{1}{2} e^{z} - e^{z}\right] = \frac{1}{2} e^{z}，$$

当 $z > 0$ 时，$F_Z(z) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x+z} e^{-(x+y)}\, dy = \int_0^{+\infty} dx \cdot [-e^{-(x+y)}]\Big|_0^{x+z} = \int_0^{+\infty} [-e^{-(2x+z)} + e^{-x}] dx$



$$= \left[\frac{1}{2} e^{-(2x+z)} - e^{-x}\right]_0^{+\infty} = -\left[\frac{1}{2} e^{-z} - 1\right] = 1 - \frac{1}{2} e^{-z}，$$

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z = Y - X$ 为连续随机变量，
故 $Z = Y - X$ 的密度函数为

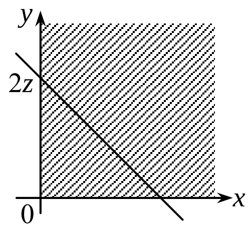
$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{z}, & z \le 0, \\ \frac{1}{2} e^{-z}, & z > 0. \end{cases}$$

方法二：增补变量法

（1）函数 $z = \frac{x+y}{2}$ 对任意固定的 y 关于 x 严格单调增加，增补变量 $v = y$，

可得$\begin{cases} z=\dfrac{x+y}{2}, \\ v=y, \end{cases}$ 有反函数$\begin{cases} x=2z-v, \\ y=v, \end{cases}$ 且 $J=\begin{vmatrix} x'_z & x'_v \\ y'_z & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$，

则 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(2z-v,v)\cdot 2dv=\int_{-\infty}^{+\infty} 2p(2z-v,v)dv$，



作曲线簇 $\dfrac{x+y}{2}=z$，得 z 的分段点为 0，

当 $z\le 0$ 时，$p_Z(z)=0$，

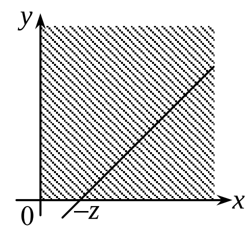
当 $z>0$ 时， $p_Z(z)=\int_0^{2z} 2\,\mathrm{e}^{-2z}\,dv=4z\,\mathrm{e}^{-2z}$，

故 $Z=(X+Y)/2$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases} 4z\,\mathrm{e}^{-2z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

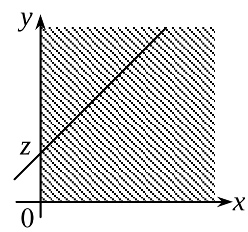
（2）函数 $z=y-x$ 对任意固定的 y 关于 x 严格单调增加，增补变量 $v=y$，

可得$\begin{cases} z=y-x, \\ v=y, \end{cases}$ 有反函数$\begin{cases} x=v-z, \\ y=v, \end{cases}$ 且 $J=\begin{vmatrix} x'_z & x'_v \\ y'_z & y'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$，



则 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(v-z,v)dv$，

作曲线簇 $y-x=z$，得 z 的分段点为 0，



当 $z\le 0$ 时， $p_Z(z)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2v+z}\,dv=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2v+z}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{z}$，

当 $z>0$ 时， $p_Z(z)=\int_z^{+\infty} \mathrm{e}^{-2v+z}\,dv=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2v+z}\Big|_z^{+\infty}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}$，

故 $Z=Y-X$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{z}, & z\le 0, \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z>0. \end{cases}$$

7. 设 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0<x<1, 0<y<x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $Z=X-Y$ 的密度函数.

解：方法一：分布函数法

作曲线簇 $x-y=z$，得 z 的分段点为 0, 1，

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，

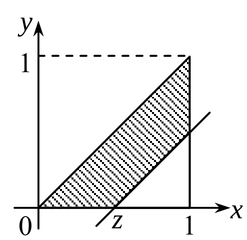
当 $0\le z<1$ 时， $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^x 3xdy+\int_z^1 dx\int_{x-z}^x 3xdy=\int_0^z 3x^2dx+\int_z^1 3xzdx=x^3\Big|_0^z+\dfrac{3}{2}x^2z\Big|_z^1=\dfrac{3}{2}z-\dfrac{1}{2}z^3$，

当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$，

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z=X-Y$ 为连续随机变量，

故 $Z=X-Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}(1-z^2), & 0<z<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



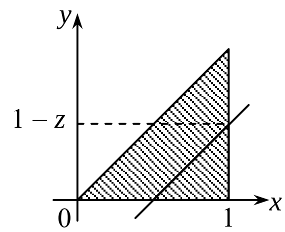
方法二：增补变量法

函数 $z = x - y$ 对任意固定的 y 关于 x 严格单调增加，增补变量 $v = y$，

可得 $\begin{cases} z = x - y, \\ v = y, \end{cases}$ 有反函数 $\begin{cases} x = z + v, \\ y = v, \end{cases}$ 且 $J = \begin{vmatrix} x'_z & x'_v \\ y'_z & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$，

则 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z + v, v) dv$，

作曲线簇 $x - y = z$，得 z 的分段点为 0, 1，



当 $z \le 0$ 或 $z \ge 1$ 时，$p_Z(z) = 0$，

当 $0 < z < 1$ 时， $p_Z(z) = \int_0^{1-z} 3(z + v) dv = \dfrac{3}{2}(z + v)^2 \Big|_0^{1-z} = \dfrac{3}{2}(1 - z^2)$，

故 $Z = X - Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1 - z^2), & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

8． 某种商品一周的需要量是一个随机变量，其密度函数为

$$p_1(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{e}^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

设各周的需要量是相互独立的，试求

（1）两周需要量的密度函数 $p_2(x)$；（2）三周需要量的密度函数 $p_3(x)$.

解：方法一：根据独立伽玛变量之和仍为伽玛变量

设 T_i 表示“该种商品第 i 周的需要量”，因 T_i 的密度函数为

$$p_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2)} t^{2-1}\,\mathrm{e}^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

可知 T_i 服从伽玛分布 $Ga(2, 1)$，

（1）两周需要量为 $T_1 + T_2$，因 T_1 与 T_2 相互独立且都服从伽玛分布 $Ga(2, 1)$，

故 $T_1 + T_2$ 服从伽玛分布 $Ga(4, 1)$，密度函数为

$$p_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(4)} x^{4-1}\,\mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{6} x^3\,\mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

（2）三周需要量为 $T_1 + T_2 + T_3$，因 T_1, T_2, T_3 相互独立且都服从伽玛分布 $Ga(2, 1)$，

故 $T_1 + T_2 + T_3$ 服从伽玛分布 $Ga(6, 1)$，密度函数为

$$p_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(6)} x^{6-1}\,\mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{120} x^5\,\mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

方法二：分布函数法

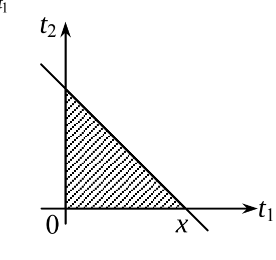
（1）两周需要量为 $X_2 = T_1 + T_2$，作曲线簇 $t_1 + t_2 = x$，得 x 的分段点为 0，

当 $x \le 0$ 时，$F_2(x) = 0$，

当 $x > 0$ 时， $F_2(x) = \int_0^x dt_1 \int_0^{x-t_1} t_1\,\mathrm{e}^{-t_1} \cdot t_2\,\mathrm{e}^{-t_2}\, dt_2 = \int_0^x dt_1 \cdot t_1\,\mathrm{e}^{-t_1} (-t_2\,\mathrm{e}^{-t_2} - \mathrm{e}^{-t_2}) \Big|_0^{x-t_1}$

$$= \int_0^x [(t_1^2 - x t_1 - t_1)\mathrm{e}^{-x} + t_1\,\mathrm{e}^{-t_1}] dt_1$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3} t_1^3 - \frac{1}{2} t_1^2 x - \frac{1}{2} t_1^2 \right) \mathrm{e}^{-x} - t_1\,\mathrm{e}^{-t_1} - \mathrm{e}^{-t_1} \right]_0^x$$



$$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}-(-1)$$

$$=1-\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x},$$

因分布函数 $F_2(x)$ 连续，有 $X_2=T_1+T_2$ 为连续随机变量，

故 $X_2=T_1+T_2$ 的密度函数为

$$p_2(x)=F_2'(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（2）三周需要量为 $X_3=T_1+T_2+T_3=X_2+T_3$，作曲线簇 $x_2+t_3=x$，得 x 的分段点为 0，

当 $x\le 0$ 时，$F_3(x)=0$，

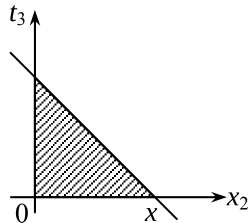
当 $x>0$ 时，$F_3(x)=\int_0^x dx_2\int_0^{x-x_2}\frac{1}{6}x_2^3\,\mathrm{e}^{-x_2}\cdot t_3\,\mathrm{e}^{-t_3}\,dt_3=\int_0^x dx_2\cdot\frac{1}{6}x_2^3\,\mathrm{e}^{-x_2}(-t_3\,\mathrm{e}^{-t_3}-\mathrm{e}^{-t_3})\Big|_0^{x-x_2}$

$$=\frac{1`}{6}\int_0^x[(x_2^4-x_2^3x-x_2^3)\mathrm{e}^{-x}+x_2^3\,\mathrm{e}^{-x_2}]dx_2$$

$$=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{5}x_2^5-\frac{1}{4}x_2^4x-\frac{1}{4}x_2^4\right)\mathrm{e}^{-x}-x_2^3\,\mathrm{e}^{-x_2}-3x_2^2\,\mathrm{e}^{-x_2}-6x_2\,\mathrm{e}^{-x_2}-6\,\mathrm{e}^{-x_2}\right]\Bigg|_0^x$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^5-\frac{1}{4}x^4\right)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}-(-1)$$

$$=1-\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{24}x^4\,\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{120}x^5\,\mathrm{e}^{-x},$$

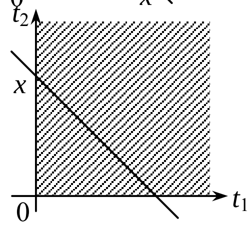


因分布函数 $F_3(x)$ 连续，有 $X_3=T_1+T_2+T_3$ 为连续随机变量，

故 $X_3=T_1+T_2+T_3$ 的密度函数为

$$p_3(x)=F_3'(x)=\begin{cases}\frac{1}{120}x^5\,\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

方法三：卷积公式（增补变量法）



（1）两周需要量为 $X_2=T_1+T_2$，卷积公式 $p_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{T_1}(x-t_2)p_{T_2}(t_2)dt_2$，

作曲线簇 $t_1+t_2=x$，得 x 的分段点为 0，

当 $x\le 0$ 时，$p_2(x)=0$，

当 $x>0$ 时，

$$p_2(x)=\int_0^x(x-t_2)\mathrm{e}^{-(x-t_2)}\cdot t_2\,\mathrm{e}^{-t_2}\,dt_2=\int_0^x(xt_2-t_2^2)\mathrm{e}^{-x}\,dt_2=\left(\frac{1}{2}t_2^2x-\frac{1}{3}t_2^3\right)\mathrm{e}^{-x}\Bigg|_0^x=\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x},$$

故 $X_2=T_1+T_2$ 的密度函数为

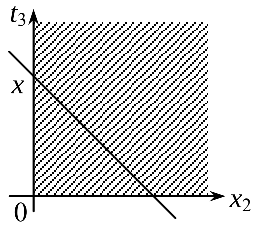
$$p_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（2）三周需要量为 $X_3=T_1+T_2+T_3=X_2+T_3$，卷积公式 $p_3(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X_2}(x-t_3)p_{T_3}(t_3)dt_3$，

作曲线簇 $x_2+t_3=x$，得 x 的分段点为 0，

当 $x\le 0$ 时，$p_3(x)=0$，

当 $x>0$ 时， $p_3(x)=\int_0^x \frac{1}{6}(x-t_3)^3\,e^{-(x-t_3)}\,t_3\,e^{-t_3}\,dt_3=\int_0^x \frac{1}{6}(x^3t_3-3x^2t_3^2+3xt_3^3-t_3^4)\,e^{-x}\,dt_3$



$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}t_3^2x^3-t_3^3x^2+\frac{3}{4}t_3^4x-\frac{1}{5}t_3^5\right)e^{-x}\bigg|_0^x=\frac{1}{120}x^5\,e^{-x},$$

故 $X_3=T_1+T_2+T_3$ 的密度函数为

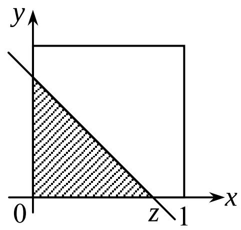
$$p_3(x)=\begin{cases}\frac{1}{120}x^5\,e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

9. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，试在以下情况下求 $Z=X+Y$ 的密度函数：

（1）$X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,1)$；（2）$X\sim U(0,1)$，$Y\sim Exp(1)$.

解：方法一：分布函数法

（1）作曲线簇 $x+y=z$，得 z 的分段点为 0, 1, 2，

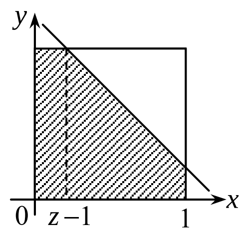


当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $0\le z<1$ 时， $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}1dy=\int_0^z(z-x)dx=\left(zx-\frac{1}{2}x^2\right)\bigg|_0^z=\frac{1}{2}z^2$，

当 $1\le z<2$ 时， $F_Z(z)=\int_0^{z-1}dx\int_0^1 1dy+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x}1dy=\int_0^{z-1}1dx+\int_{z-1}^1(z-x)dx=z-1-\frac{1}{2}(z-x)^2\Big|_{z-1}^1$

$$=z-1-\frac{1}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2}=2z-\frac{1}{2}z^2-1,$$

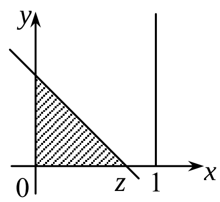


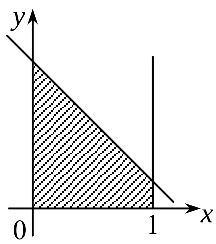
当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$，

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z=X+Y$ 为连续随机变量，

故 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}z, & 0\le z<1,\\ 2-z, & 1\le z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$





（2）作曲线簇 $x+y=z$，得 z 的分段点为 0, 1，

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $0\le z<1$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}\,dy=\int_0^z dx\cdot(-e^{-y})\Big|_0^{z-x}=\int_0^z(1-e^{-z+x})dx=(x-e^{-z+x})\Big|_0^z=z-1+e^{-z},$$

当 $z\ge 1$ 时，

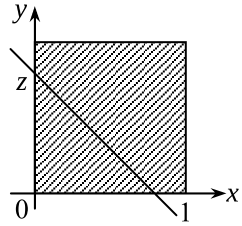
$$F_Z(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}\,dy=\int_0^1 dx\cdot(-e^{-y})\Big|_0^{z-x}=\int_0^1(1-e^{-z+x})dx=(x-e^{-z+x})\Big|_0^1=1-e^{1-z}+e^{-z},$$

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z=X+Y$ 为连续随机变量，

故 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0\le z<1,\\ (e-1)\,e^{-z}, & z\ge 1,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

方法二：卷积公式（增补变量法）

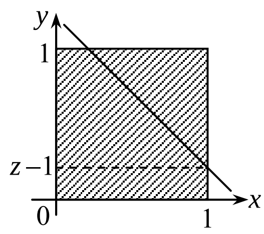


卷积公式 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(z-y)\,p_Y(y)\,dy$，

（1）作曲线簇 $x+y=z$，得 z 的分段点为 0, 1, 2，

当 $z \le 0$ 或 $z \ge 2$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $0<z<1$ 时， $p_Z(z)=\int_0^z 1dy = z$，

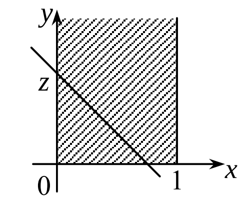


当 $1 \le z < 2$ 时， $p_Z(z)=\int_{z-1}^1 1dy = 2-z$，

故 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases} z, & 0 \le z < 1, \\ 2-z, & 1 \le z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

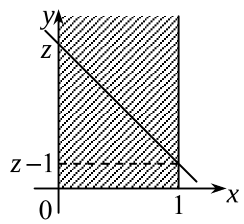
（2）作曲线簇 $x + y = z$，得 z 的分段点为 0, 1，



当 $z \le 0$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $0<z<1$ 时， $p_Z(z)=\int_0^z \mathrm{e}^{-y}\,dy = (-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^z = 1-\mathrm{e}^{-z}$，

当 $z \ge 1$ 时， $p_Z(z)=\int_{z-1}^z \mathrm{e}^{-y}\,dy = (-\mathrm{e}^{-y})\Big|_{z-1}^z = -\mathrm{e}^{-z}+\mathrm{e}^{-z+1} = (\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^{-z}$，



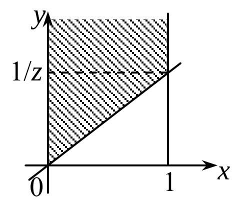
故 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-z}, & 0 \le z < 1, \\ (\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^{-z}, & z \ge 1, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

10．设随机变量 X 与 Y 相互独立，试在以下情况下求 $Z = X/Y$ 的密度函数：

（1）$X \sim U(0,1)$，$Y \sim Exp(1)$；　（2）$X \sim Exp(\lambda_1)$，$Y \sim Exp(\lambda_2)$.

解：方法一：分布函数法



（1）作曲线簇 $\dfrac{x}{y}=z$，即直线簇 $y=\dfrac{x}{z}$，得 z 的分段点为 0，

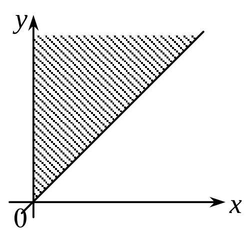
当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $z>0$ 时， $F_Z(z)=\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{z}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,dy=\int_0^1 dx\cdot(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_{\frac{x}{z}}^{+\infty}=\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x}{z}}\,dx=(-z)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{z}}\Big|_0^1=z(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}})$，

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z = X/Y$ 为连续随机变量，

故 $Z = X/Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}, & z>0; \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$



（2）作曲线簇 $\dfrac{x}{y}=z$，即直线簇 $y=\dfrac{x}{z}$，得 z 的分段点为 0，

当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z)=0$，

当 $z>0$ 时， $F_Z(z)=\int_0^{+\infty}dx\int_{\frac{x}{z}}^{+\infty}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\cdot\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\,dy=\int_0^{+\infty}dx\cdot\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\cdot(-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y})\Big|_{\frac{x}{z}}^{+\infty}=\int_0^{+\infty}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_2 x}{z}}\,dx$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda_1\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{z})x}\,dx=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\dfrac{\lambda_2}{z}}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{z})x}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\lambda_1 z}{\lambda_1 z+\lambda_2},$$

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z = X/Y$ 为连续随机变量，

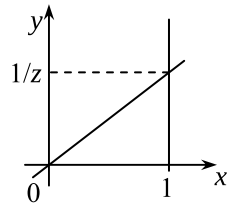
故 $Z = X/Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2}, & z > 0; \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

方法二：增补变量法

（1）函数 $z = x/y$ 对任意固定的 y 关于 x 严格单调增加，增补变量 $v = y$，

可得 $\begin{cases} z = x/y, \\ v = y, \end{cases}$ 有反函数 $\begin{cases} x = zv, \\ y = v, \end{cases}$ 且 $J = \begin{vmatrix} x_z' & x_v' \\ y_z' & y_v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$，



则 $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(zv, v) \cdot |v| \, dv$，

作曲线簇 $x/y = z$，得 z 的分段点为 0，

当 $z \le 0$ 时，$p_Z(z) = 0$，

当 $z > 0$ 时，$p_Z(z) = \int_0^{\frac{1}{z}} \mathrm{e}^{-v} \cdot v dv = -(v+1)\mathrm{e}^{-v}\Big|_0^{\frac{1}{z}} = -\left(\dfrac{1}{z}+1\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{z}} - \dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}$，

故 $Z = X/Y$ 的密度函数为

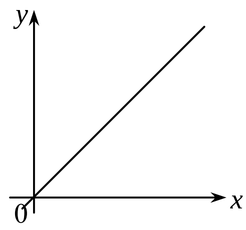
$$p_Z(z) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{z}} - \dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}, & z > 0; \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

（2）作曲线簇 $x/y = z$，得 z 的分段点为 0，

当 $z \le 0$ 时，$p_Z(z) = 0$，

当 $z > 0$ 时，$p_Z(z) = \int_0^{+\infty} \lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 z v} \cdot \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 v} \cdot v dv = -\lambda_1\lambda_2\left[\dfrac{v}{\lambda_1 z + \lambda_2} + \dfrac{1}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2}\right]\mathrm{e}^{-(\lambda_1 z + \lambda_2)v}\Bigg|_0^{+\infty}$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2},$$

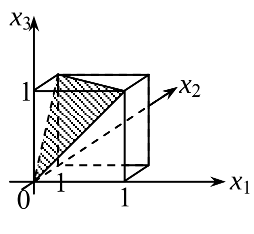


故 $Z = X/Y$ 的密度函数为

$$p_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2}, & z > 0; \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

11．设 X_1, X_2, X_3 为相互独立的随机变量，且都服从(0, 1)上的均匀分布，求三者中最大者大于其他两者之和的概率．

解：设 A_i 分别表示 X_i 大于其他两者之和，$i = 1, 2, 3$，



显然 A_1, A_2, A_3 两两互不相容，且 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$，

则 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 3P(A_3) = 3P\{X_3 > X_1 + X_2\}$

因 X_1, X_2, X_3 相互独立且都服从(0, 1)上的均匀分布，

则由几何概型知 $P\{X_3 > X_1 + X_2\} = \dfrac{\frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{6}$，

故 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3P\{X_3 > X_1 + X_2\} = \dfrac{1}{2}$．

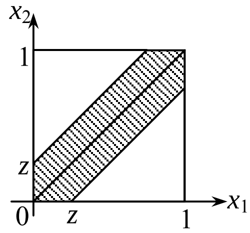
12．设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立同分布，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $Z = \max\{X_1, X_2\} - \min\{X_1, X_2\}$的分布.

解：分布函数法，

二维随机变量(X_1, X_2) 的联合密度函数为



$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因 $Z = \max\{X_1, X_2\} - \min\{X_1, X_2\} = |X_1 - X_2|$，

作曲线簇 $|x_1 - x_2| = z$，得 z 的分段点为 0, 1，

当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 0$，

当 $0 \le z < 1$ 时，

$$F_Z(z) = 1 - 2\int_z^1 dx_1 \int_0^{x_1 - z} 4x_1x_2 dx_2 = 1 - 2\int_z^1 dx_1 \cdot 2x_1x_2^2 \Big|_0^{x_1 - z} = 1 - 4\int_z^1 (x_1^3 - 2zx_1^2 + z^2x_1)dx_1$$

$$= 1 - 4\left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{2zx_1^3}{3} + \frac{z^2x_1^2}{2}\right)\Bigg|_z^1 = 1 - 4\left(\frac{1}{4} - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{2}\right) + 4\left(\frac{z^4}{4} - \frac{2z^4}{3} + \frac{z^4}{2}\right) = \frac{8z}{3} - 2z^2 + \frac{z^4}{3},$$

当 $z \ge 1$ 时，$F_Z(z) = 1$，

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z = \max\{X_1, X_2\} - \min\{X_1, X_2\}$为连续随机变量，

故 $Z = \max\{X_1, X_2\} - \min\{X_1, X_2\}$的密度函数为

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \dfrac{8}{3} - 4z + \dfrac{4z^3}{3}, & 0 < z < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

13．设某一个设备装有 3 个同类的电器元件，元件工作相互独立，且工作时间都服从参数为λ 的指数分布．当 3 个元件都正常工作时，设备才正常工作．试求设备正常工作时间 T 的概率分布．

解：设 T_i 表示“第 i 个元件正常工作”，有 T_i 服从指数分布 $Exp(\lambda)$，分布函数为

$$F_i(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases} \quad i = 1, 2, 3,$$

则设备正常工作时间 $T = \min\{T_1, T_2, T_3\}$，分布函数为

$$F(t) = P\{T = \min\{T_1, T_2, T_3\} \le t\} = 1 - P\{\min\{T_1, T_2, T_3\} > t\} = 1 - P\{T_1 > t\}P\{T_2 > t\}P\{T_3 > t\}$$
$$= 1 - [1 - F_1(t)][1 - F_2(t)][1 - F_3(t)]$$

当 $t \le 0$ 时，$F(t) = 0$，

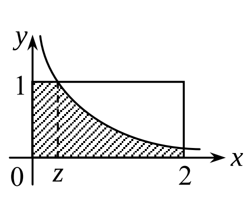
当 $t > 0$ 时，$F(t) = 1 - (\mathrm{e}^{-\lambda t})^3 = 1 - \mathrm{e}^{-3\lambda t}$,

故设备正常工作时间 T 服从参数为 3λ 的指数分布 $Exp(3\lambda)$，密度函数为

$$p(t) = F'(t) = \begin{cases} 3\lambda \mathrm{e}^{-3\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

14．设二维随机变量(X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$上服从均匀分布，试求边长分别为 X 和 Y 的矩形面积 Z 的密度函数．

解：二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为



$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

方法一：分布函数法

矩形面积 $Z = XY$，作曲线族 $xy = z$，得 z 的分段点为 0, 2，

当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z) = 0$，

当 $0<z<2$ 时， $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^1 \frac{1}{2}dy+\int_z^2 dx\int_0^{\frac{z}{x}}\frac{1}{2}dy=\int_0^z \frac{1}{2}dx+\int_z^2 \frac{z}{2x}dx$

$$=\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\ln x\Big|_z^2=\frac{z}{2}+\frac{z}{2}(\ln 2-\ln z),$$

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$，

因分布函数 $F_Z(z)$ 连续，有 $Z=XY$ 为连续随机变量，

故矩形面积 $Z=XY$ 的密度函数为

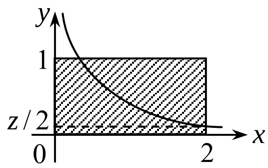
$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

方法二：增补变量法

矩形面积 $Z=XY$，函数 $z=xy$ 对任意固定的 $y\ne 0$ 关于 x 严格单调增加，增补变量 $v=y$，

可得 $\begin{cases}z=xy,\\ v=y,\end{cases}$ 有反函数 $\begin{cases}x=\dfrac{z}{v},\\ y=v,\end{cases}$ 且 $J=\begin{vmatrix}x_z' & x_v'\\ y_z' & y_v'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{v} & -\dfrac{z}{v^2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{v}$，

则 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(\frac{z}{v},v\right)\cdot\left|\frac{1}{v}\right|dv$，



作曲线族 $xy=z$，得 z 的分段点为 0, 2，

当 $z\le 0$ 或 $z\ge 2$ 时，$p_Z(z)=0$，

当 $0<z<2$ 时， $p_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^1 \frac{1}{2v}dy=\frac{1}{2}\ln v\Big|_{\frac{z}{2}}^1=0-\frac{1}{2}\ln\frac{z}{2}=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z)$，

故矩形面积 $Z=XY$ 的密度函数为

$$p_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

15．设二维随机变量(X, Y) 服从圆心在原点的单位圆内的均匀分布，求极坐标

$$R=\sqrt{X^2+Y^2},\quad \theta=\arctan(Y/X),$$

的联合密度函数

注：此题有误，对于极坐标，不是$\theta=\arctan(Y/X)$，应改为 $\tan\theta=Y/X$，$0\le\theta<2\pi$

解：二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & 0\le x^2+y^2\le 1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

因 $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2};\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$ 有反函数 $\begin{cases}x=r\cos\theta;\\ y=r\sin\theta.\end{cases}$ 且 $J=\begin{vmatrix}x_r' & x_\theta'\\ y_r' & y_\theta'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$，

且当 $0\le x^2+y^2\le 1$ 时，有 $0\le r\le 1$，$0\le\theta<2\pi$，

故(R, θ) 的联合密度函数为

$$p_{R\theta}(r,\theta)=p_{XY}(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot|r|=\begin{cases}\frac{r}{\pi}, & 0\le r\le 1, 0\le\theta<2\pi;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

16．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

（1）求 $U=X+Y$ 与 $V=X/(X+Y)$ 的联合密度函数 $p_{UV}(u,v)$；

（2）以上的 U 与 V 独立吗？

解：二维随机变量(X,Y) 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（1）因 $\begin{cases}u=x+y,\\ v=\dfrac{x}{x+y},\end{cases}$ 有反函数 $\begin{cases}x=uv,\\ y=u(1-v),\end{cases}$ 且 $J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-u$，

且当 $x>0, y>0$ 时，有 $uv>0, u(1-v)>0$，即 $u>0, 0<v<1$，

故 $U=X+Y$ 与 $V=X/(X+Y)$ 的联合密度函数为

$$p_{UV}(u,v)=p_{XY}(uv,u(1-v))\cdot|(-u)|=\begin{cases}u\,e^{-u}, & u>0, 0<v<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（2）当 $u\le 0$ 时，$p_U(u)=0$，

当 $u>0$ 时，$p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)dv=\int_0^1 u\,e^{-u}\,dv=u\,e^{-u}$，

则 $p_U(u)=\begin{cases}u\,e^{-u}, & u>0,\\ 0, & u\le 0.\end{cases}$

当 $v\le 0$ 或 $v\ge 1$ 时，$p_V(v)=0$，

当 $0<v<1$ 时，$p_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)du=\int_0^{+\infty}u\,e^{-u}\,du=\Gamma(2)=1$，

则 $p_V(v)=\begin{cases}1, & 0<v<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

因 $p_{UV}(u,v)=p_U(u)p_V(v)=\begin{cases}u\,e^{-u}, & u>0, 0<v<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

故 U 与 V 相互独立.

17．设 X, Y 独立同分布，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，试证：$U=X^2+Y^2$ 与 $V=X/Y$ 相互独立.

证：二维随机变量(X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$，

因 $\begin{cases}u=x^2+y^2;\\ v=\dfrac{x}{y}.\end{cases}$ 有 $\begin{cases}x=\pm\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u};\\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}.\end{cases}$

对于 $\begin{cases}x=\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u};\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}.\end{cases}$ 有 $J=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} & \dfrac{1}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} & -\dfrac{v}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2(1+v^2)}$，

对于 $\begin{cases} x = -\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}; \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}. \end{cases}$ 有 $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} & -\dfrac{1}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} & \dfrac{v}{(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2(1+v^2)}$，

且$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < 0$ 与$-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty$时，都有 $0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$，
故由对称性知 $U = X^2 + Y^2$ 与 $V = X/Y$ 的联合密度函数为

$$p_{UV}(u,v) = p_{XY}\left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}, \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\right)\cdot\left|-\frac{1}{2(1+v^2)}\right|$$

$$+ p_{XY}\left(-\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}, -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\sqrt{u}\right)\cdot\left|-\frac{1}{2(1+v^2)}\right|$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi(1+v^2)}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}, & 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

当 $u \le 0$ 时，$p_U(u) = 0$，

当 $u > 0$ 时，$p_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{UV}(u,v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{2\pi(1+v^2)}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}dv = \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\cdot\arctan v\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}$，

则 $p_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}, & u > 0; \\ 0, & u \le 0. \end{cases}$

且 $p_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{UV}(u,v)du = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2\pi(1+v^2)}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}du = -\dfrac{1}{\pi(1+v^2)}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{\pi(1+v^2)}, \quad -\infty < x < +\infty$，

因 $p_{UV}(u,v) = p_U(u)p_V(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi(1+v^2)}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}, & 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty; \\ 0, & 其他. \end{cases}$

故 U 与 V 相互独立.

18．设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim Ga(\alpha_1, \lambda)$，$Y \sim Ga(\alpha_2, \lambda)$．试证：$U = X + Y$ 与 $V = X/(X+Y)$相互独立，且 $V \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$.

证：二维随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}x^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

因 $\begin{cases} u = x + y; \\ v = \dfrac{x}{x+y}. \end{cases}$ 有反函数 $\begin{cases} x = uv; \\ y = u(1-v). \end{cases}$ 且 $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$，

且当 $x > 0, y > 0$ 时，有 $uv > 0, u(1-v) > 0$，即 $u > 0, 0 < v < 1$，
故 $U = X + Y$ 与 $V = X/(X+Y)$ 的联合密度函数为

$$p_{UV}(u,v) = p_{XY}(uv, u(1-v))\cdot|(-u)|$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}(uv)^{\alpha_1-1}[u(1-v)]^{\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\cdot|-u|, & u>0,\ 0<v<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\,v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}, & u>0,\ 0<v<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $u\le 0$ 时，$p_U(u)=0$，

当 $u>0$ 时， $p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)dv=\int_0^1\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\cdot v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}dv$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\int_0^1 v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}dv$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u},$$

则 $p_U(u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}, & u>0;\\ 0, & u\le 0.\end{cases}$

当 $v\le 0$ 或 $v\ge 1$ 时，$p_V(v)=0$，

当 $0<v<1$ 时， $p_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{UV}(u,v)du=\int_0^{+\infty}\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\cdot v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}du$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}\cdot\int_0^{+\infty}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}du$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}=\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1},$$

则 $p_V(v)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\cdot v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}, & 0<v<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故 $V\sim Be(\alpha_1,\alpha_2)$.

因 $p_{UV}(u,v)=p_U(u)p_V(v)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\,v^{\alpha_1-1}(1-v)^{\alpha_2-1}, & u>0,\ 0<v<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故 U 与 V 相互独立.

19．设随机变量 U_1 与 U_2 相互独立，且都服从(0, 1)上的均匀分布，试证明：

（1）$Z_1=-2\ln U_1\sim Exp(1/2)$，$Z_2=2\pi U_2\sim U(0,2\pi)$；

（2） $X=\sqrt{Z_1}\cos Z_2$ 和 $Y=\sqrt{Z_1}\sin Z_2$ 是相互独立的标准正态随机变量.

证：（1）因 $z_1=-2\ln u_1$ 严格单调减少，反函数为 $u_1=h(z_1)=\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}$，$h'(z_1)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}$，

当 $0<u_1<1$ 时，有 $0<z_1<+\infty$，可得 $p_{Z_1}(z_1)=1\cdot\left|-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}\right|=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}},\quad 0<z_1<+\infty$，

则 $Z_1=-2\ln U_1$ 的密度函数为

$$p_{Z_1}(z_1)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}, & z_1>0;\\ 0, & z_1\le 0.\end{cases}$$

故 $Z_1=-2\ln U_1\sim Exp(1/2)$；

因 $z_2=2\pi u_2$ 严格单调增加，反函数为 $u_2=h(z_2)=\frac{z_2}{2\pi}$，$h'(z_2)=\frac{1}{2\pi}$，

当 $0<u_2<1$ 时，有 $0<z_2<2\pi$，可得 $p_{Z_2}(z_2)=1\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\right|=\frac{1}{2\pi},\quad 0<z_2<2\pi$，

则 $Z_2=2\pi U_2$ 的密度函数为

$$p_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0<z_2<2\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $Z_2=2\pi U_2\sim U(0,2\pi)$；

（2）因 U_1 与 U_2 相互独立，有 $Z_1=-2\ln U_1$ 与 $Z_2=2\pi U_2$ 相互独立，
则二维随机变量(Z_1, Z_2) 的联合密度函数为

$$p_{Z_1Z_2}(z_1,z_2)=p_{Z_1}(z_1)p_{Z_2}(z_2)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z_1}{2}}, & z_1>0, 0<z_2<2\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因 $\begin{cases}x=\sqrt{z_1}\cos z_2;\\ y=\sqrt{z_1}\sin z_2.\end{cases}$ 有反函数 $\begin{cases}z_1=x^2+y^2;\\ \tan z_2=\frac{y}{x}, 0<z_2<2\pi.\end{cases}$ 且 $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y}\\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{vmatrix}=2$，

且当 $z_1>0, 0<z_2<2\pi$时，有$-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$，

则 $X=\sqrt{Z_1}\cos Z_2$ 与 $Y=\sqrt{Z_1}\sin Z_2$ 的联合密度函数为

$$p_{XY}(x,y)=p_{Z_1Z_2}(x^2+y^2,\arctan\frac{y}{x})\cdot|2|=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$$

即(X, Y)服从二维正态分布 $N(0, 0, 1, 1, 0)$，相关系数$\rho=0$，

故 $X=\sqrt{Z_1}\cos Z_2$ 和 $Y=\sqrt{Z_1}\sin Z_2$ 是相互独立的标准正态随机变量.

20．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim Exp(\lambda_i)$，试证：

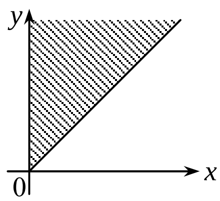
$$P\{X_i=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\}=\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

证：因 $X_j\sim Exp(\lambda_j)$，密度函数和分布函数分别为

$$p_j(x)=\begin{cases}\lambda_j\,\mathrm{e}^{-\lambda_j x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad F_j(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_j x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad j=1,2,\cdots,n,$$

设 $Y_i = \min\{X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n\}$，

则 Y_i 的分布函数为



$$F_{Y_i}(y) = P\{Y_i = \min\{X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n\} \le y\}$$
$$= 1 - P\{\min\{X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n\} > y\}$$
$$= 1 - P\{X_1 > y\}\cdots P\{X_{i-1} > y\}P\{X_{i+1} > y\}\cdots P\{X_n > y\},$$

当 $y \le 0$ 时，$F_{Y_i}(y) = 0$，

当 $y > 0$ 时，$F_{Y_i}(y) = 1 - e^{-\lambda_1 y}\cdots e^{-\lambda_{i-1} y} e^{-\lambda_{i+1} y}\cdots e^{-\lambda_n y} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n)y}$，

因分布函数 $F_{Y_i}(y)$ 连续，有 $Y_i = \min\{X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n\}$ 为连续随机变量，

则 Y_i 的密度函数为

$$p_{Y_i}(y) = F'_{Y_i}(y) = \begin{cases} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n) e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n)y}, & y > 0; \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

故 $P\{X_i = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\} = P\{X_i \le Y_i\}$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i x} \cdot (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n) e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n)y} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} dx \cdot \lambda_i e^{-\lambda_i x} \cdot [-e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_n)y}]\Big|_x^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \lambda_i e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x} dx$$

$$= -\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}.$$

21．设连续随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，试证：

$$P\{X_n > \max\{X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\}\} = \frac{1}{n}.$$

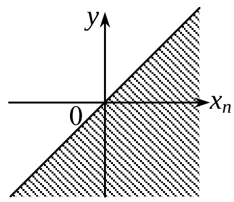
证：设 X_i 的密度函数为 $p(x)$，分布函数为 $F(x)$，又设 $Y = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\}$，

则 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\} \le y\} = P\{X_1 \le y\}P\{X_2 \le y\}\cdots P\{X_{n-1} \le y\} = [F(y)]^{n-1},$$

可得 $p_Y(y) = F_Y'(y) = (n-1)[F(y)]^{n-2} \cdot p(y)$，

故 $P\{X_n > \max\{X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\}\} = P\{X_n > Y\}$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{x} p(x) p_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot p(x) F_Y(y)\Big|_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) F_Y(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)[F(x)]^{n-1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x)]^{n-1} dF(x) = \frac{1}{n}[F(x)]^n\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{n}.$$

习题 3.4

1． 掷一颗均匀的骰子 2 次，其最小点数记为 X，求 $E(X)$.

解：因 X 的全部可能取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6，

且 $P\{X=1\}=\dfrac{6^2-5^2}{6^2}=\dfrac{11}{36}$， $P\{X=2\}=\dfrac{5^2-4^2}{6^2}=\dfrac{9}{36}$， $P\{X=3\}=\dfrac{4^2-3^2}{6^2}=\dfrac{7}{36}$，

$P\{X=4\}=\dfrac{3^2-2^2}{6^2}=\dfrac{5}{36}$， $P\{X=5\}=\dfrac{2^2-1}{6^2}=\dfrac{3}{36}$， $P\{X=6\}=\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$，

故 $E(X)=1\times\dfrac{11}{36}+2\times\dfrac{9}{36}+3\times\dfrac{7}{36}+4\times\dfrac{5}{36}+5\times\dfrac{3}{36}+6\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{91}{36}$.

2． 求掷 n 颗骰子出现点数之和的数学期望与方差.

解：设 X_i 表示“第 i 颗骰子出现的点数”，X 表示“n 颗骰子出现点数之和”，有 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，

且 X_i 的分布列为

X_i	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

则 $E(X_i)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{6}+5\times\dfrac{1}{6}+6\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{21}{6}=\dfrac{7}{2}$，

且 $E(X_i^2)=1^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times\dfrac{1}{6}+3^2\times\dfrac{1}{6}+4^2\times\dfrac{1}{6}+5^2\times\dfrac{1}{6}+6^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{91}{6}$，

可得 $\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\dfrac{91}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{35}{12}$，

故 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\dfrac{7}{2}n$， $\mathrm{Var}(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\dfrac{35}{12}n$.

3． 从数字 0, 1, …, n 中任取两个不同的数字，求这两个数字之差的绝对值的数学期望.

解：设 X 表示“所取的两个数字之差的绝对值”，有 X 的全部可能取值为 1, 2, …, n，

且 $P\{X=k\}=\dfrac{n+1-k}{\binom{n+1}{2}}=\dfrac{2(n+1-k)}{n(n+1)},\quad k=1,2,\cdots,n$，

故 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}kP\{X=k\}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k(n+1-k)}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}[(n+1)k-k^2]$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\left[(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]=(n+1)-\frac{1}{3}(2n+1)=\frac{n+2}{3}.$$

4． 设在区间 (0, 1) 上随机地取 n 个点，求相距最远的两点之间的距离的数学期望.

解：设 X_i 表示“第 i 个点”，有 X_i 都服从均匀分布 $U(0, 1)$，密度函数和分布函数分别为

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

又设 $X_{(1)}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，

则相距最远的两点之间的距离为 $X=X_{(n)}-X_{(1)}$ ，

因 $X_{(1)}$ 的分布函数为

$$F_1(x)=P\{X_{(1)}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\le x\}=1-P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}>x\}$$
$$=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}=1-[1-F(x)]^n$$
$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-(1-x)^n, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

可得 $p_1(x)=F_1'(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

则 $E(X_{(1)})=\int_0^1 x\cdot n(1-x)^{n-1}dx=\int_0^1 x\cdot d[-(1-x)^n]=-x(1-x)^n\Big|_0^1+\int_0^1(1-x)^n dx=-\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{n+1}$，

又因 $X_{(n)}$ 的分布函数为

$$F_n(x)=P\{X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\le x\}=P\{X_1\le x\}P\{X_2\le x\}\cdots P\{X_n\le x\}=[F(x)]^n$$
$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^n, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

可得 $p_n(x)=F_n'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

则 $E(X_{(n)})=\int_0^1 x\cdot nx^{n-1}dx=\int_0^1 nx^n dx=n\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\dfrac{n}{n+1}$，

故相距最远的两点之间的距离的数学期望 $E(X)=E(X_{(n)})-E(X_{(1)})=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n-1}{n+1}$.

5． 盒中有 n 个不同的球，其上分别写有数字 $1, 2, \cdots, n$. 每次随机抽出一个，记下其号码，放回去再抽．直到抽到有两个不同数字为止．求平均抽球次数．

解：设 X 表示“抽球次数”，有 X 的全部可能取值为 $2, 3, \cdots$，

且 $P\{X=k\}=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{n-1}{n},\quad k=2, 3, \cdots$，

则 $E(X)=\sum_{k=2}^{+\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-2}\cdot\dfrac{n-1}{n}=(n-1)\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$，

因当 $|x|<1$ 时，$\sum_{k=2}^{+\infty}kx^{k-1}=\left(\sum_{k=2}^{+\infty}x^k\right)'=\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'=\dfrac{2x(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}$，

故平均抽球次数 $E(X)=(n-1)\cdot\dfrac{\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{2n-1}{n-1}$.

6．设随机变量(X, Y) 的联合分布列为

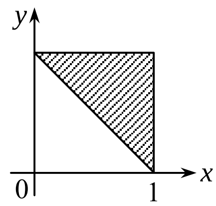
X \ Y	0	1
0	0.1	0.15
1	0.25	0.2
2	0.15	0.15

试求 $Z=\sin\left[\frac{\pi}{2}(X+Y)\right]$的数学期望.

解：$E(Z)=0.1\times\sin 0+0.15\times\sin\frac{\pi}{2}+0.25\times\sin\frac{\pi}{2}+0.2\times\sin\pi+0.15\times\sin\pi+0.15\times\sin\frac{3\pi}{2}=0.25$.

7．随机变量(X, Y) 服从以点 (0, 1)，(1, 0)，(1, 1) 为顶点的三角形区域上的均匀分布，试求 $E(X+Y)$ 和 $\mathrm{Var}(X+Y)$.

解：因(X, Y) 的联合密度函数为



$$p(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

其中区域 D 为以点 (0, 1)，(1, 0)，(1, 1) 为顶点的三角形区域，

故 $E(X+Y)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (x+y)\cdot 2dy=\int_0^1 dx\cdot(x+y)^2\Big|_{1-x}^1=\int_0^1(x^2+2x)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3}$；

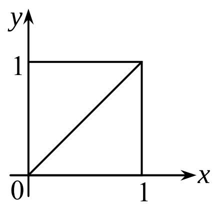
且 $E[(X+Y)^2]=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (x+y)^2\cdot 2dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{2}{3}(x+y)^3\Big|_{1-x}^1=\int_0^1\frac{2}{3}(x^3+3x^2+3x)dx$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{11}{6},$$

故 $\mathrm{Var}(X+Y)=\frac{11}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$.

8．设 X, Y 均为(0, 1)上独立的均匀随机变量，试证：

$$E(|X-Y|^\alpha)=\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)},\quad \alpha>0 .$$



证：因(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $E(|X-Y|^\alpha)=\int_0^1 dx\int_0^1|x-y|^\alpha\cdot 1dy=2\int_0^1 dx\int_0^x(x-y)^\alpha dy=2\int_0^1 dx\cdot\frac{-1}{\alpha+1}(x-y)^{\alpha+1}\Big|_0^x=2\int_0^1\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}dx$

$$=\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}x^{\alpha+2}\Big|_0^1=\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

9．设 X 与 Y 是独立同分布的随机变量，且

$$P\{X=i\}=\frac{1}{m},\quad i=1,2,\cdots,m .$$

试证：

$$E(X-Y)=\frac{(m-1)(m+1)}{3m}$$

注：此题有误，$E(X-Y)$ 必等于 0，应改为 $E(|X-Y|)$

证：$E(|X-Y|)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|i-j|\cdot\frac{1}{m^2}=\frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)=\frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}i(i-1)=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}(i^2-i)$

$$=\frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)-\frac{1}{2}m(m+1)\right]=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{6}m(m+1)[(2m+1)-3]=\frac{(m-1)(m+1)}{3m}.$$

10．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 $E(X)=\mu$，$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$，试求 $E(X-Y)^2$.

解：$E(X-Y)^2=\mathrm{Var}(X-Y)+[E(X-Y)]^2=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+(\mu-\mu)^2=2\sigma^2$.

11．设随机变量(X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}x(1+3y^2)/4, & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $E(Y/X)$.

解：$E\left(\frac{Y}{X}\right)=\int_0^2 dx\int_0^1\frac{y}{x}\cdot\frac{x(1+3y^2)}{4}dy=\int_0^2 dx\int_0^1\frac{1}{4}(y+3y^3)dy=\int_0^2 dx\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}y^4\right)\Big|_0^1=\int_0^2\frac{5}{16}dx=\frac{5}{8}$.

12．设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是独立同分布的随机变量，其共同密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_5\}$的密度函数、数学期望和方差.

解：因 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 的共同分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

当 $Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_5\}$的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_5\}\le y\}=P\{X_1\le y\}P\{X_2\le y\}\cdots P\{X_5\le y\}=[F(y)]^5$$

$$=\begin{cases}0, & y<0,\\ y^{10}, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

故 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}10y^9, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

数学期望 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot 10y^9dy=\frac{10}{11}y^{11}\Big|_0^1=\frac{10}{11}$；

且 $E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2p_Y(y)dy=\int_0^1 y^2\cdot 10y^9dy=\frac{10}{12}y^{12}\Big|_0^1=\frac{10}{12}$，

故方差 $\mathrm{Var}(Y)=\frac{10}{12}-\left(\frac{10}{11}\right)^2=\frac{10}{1452}=\frac{5}{726}$.

13．系统由 n 个部件组成．记 X_i 为第 i 个部件能持续工作的时间，如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且 $X_i \sim Exp(\lambda)$，试在以下情况下求系统持续工作的平均时间：

（1）如果有一个部件停止工作，系统就不工作了；

（2）如果至少有一个部件在工作，系统就工作．

解：$X_i \sim Exp(\lambda)$，可得 X_i 的密度函数和分布函数分别为

$$p(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

设 Y 表示"系统持续工作的时间"，

（1）$Y=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，可得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\le y\}=1-P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}>y\}$$
$$=1-P\{X_1>y\}P\{X_2>y\}\cdots P\{X_n>y\}=1-[1-F(y)]^n$$
$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-n\lambda y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

可得 $p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$ 即 $Y\sim Exp(n\lambda)$，

故 $E(Y)=\dfrac{1}{n\lambda}$；

（2）$Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，可得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\le y\}=P\{X_1\le y\}P\{X_2\le y\}\cdots P\{X_n\le y\}=[F(y)]^n$$
$$=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})^n, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

可得 $p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})^{n-1}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

则 $E(Y)=\int_0^{+\infty} y\cdot n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})^{n-1}dy$，

令 $t=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}$，有 $y=-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-t)$，$dy=\dfrac{1}{\lambda(1-t)}dt$，且 $y=0$ 时，$t=0$；$y\to+\infty$ 时，$t\to 1$，

$$故\ E(Y)=\int_0^1\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-t)\right]\cdot n\lambda(1-t)t^{n-1}\cdot\frac{1}{\lambda(1-t)}dt=-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 nt^{n-1}\ln(1-t)dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\ln(1-t)d(1-t^n)$$

$$=\frac{1}{\lambda}(1-t^n)\ln(1-t)\Big|_0^1-\frac{1}{\lambda}\int_0^1(1-t^n)\cdot\left(-\frac{1}{1-t}\right)dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^1(1+t+\cdots+t^{n-1})dt$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(t+\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{t^n}{n}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

14．设 X, Y 独立同分布，都服从正态分布 $N(0, 1)$，求 $E[\max\{X, Y\}]$．

解：方法一：先求最小值的分布函数，再求其数学期望

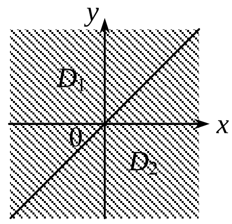
因 X, Y 独立且密度函数和分布函数都分别是标准正态分布密度函数 $\varphi(x)$ 和分布函数 $\Phi(x)$，

则 $Z=\max\{X, Y\}$ 的分布函数为 $F(z)=[\Phi(z)]^2$，密度函数为 $p(z)=F'(z)=2\Phi(z)\varphi(z)$，

故 $E[\max\{X,Y\}]=\int_{-\infty}^{+\infty} z\cdot 2\Phi(z)\varphi(z)dz=\int_{-\infty}^{+\infty} z\cdot 2\Phi(z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(z)\cdot(-1)d\,e^{-\frac{z^2}{2}}$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Phi(z)e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\varphi(z)dz=0+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$



方法二：直接求最小值函数的期望

因 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad -\infty<x,y<+\infty,$$

故 $E[\max\{X,Y\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}p(x,y)dxdy=\iint_{D_1}y\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\iint_{D_2}x\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$

$$=2\iint_{D_1}y\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}y\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\cdot(-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Bigg|_x^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

15．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从 $(0, \theta)$ 上的均匀分布，记

$$Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\quad Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},$$

试求 $E(Y)$ 和 $E(Z)$.

解：因 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且密度函数和分布函数分别是

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta,\\ 1, & x\ge\theta.\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 和 $Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数分别是

$$F_Y(y)=[F(y)]^n=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{y^n}{\theta^n}, & 0\le y<\theta,\\ 1, & y\ge\theta.\end{cases}\quad F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-\frac{(\theta-z)^n}{\theta^n}, & 0\le z<\theta,\\ 1, & x\ge\theta.\end{cases}$$

且密度函数分别是

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{n(\theta-z)^{n-1}}{\theta^n}, & 0<z<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $E(Y)=\int_0^\theta y\cdot\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{y^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^\theta=\frac{n}{n+1}\theta$；

$$E(Z)=\int_0^\theta z\cdot\frac{n(\theta-z)^{n-1}}{\theta^n}dz=\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta z\cdot d[-(\theta-z)^n]=-\frac{1}{\theta^n}\cdot z(\theta-z)^n\Big|_0^\theta+\frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta(\theta-z)^n dz$$

$$= 0 + \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{-(\theta - z)^{n+1}}{n+1} \Bigg|_0^\theta = \frac{1}{n+1}\theta .$$

16．设随机变量 U 服从 $(-2, 2)$ 上的均匀分布，定义 X 和 Y 如下：

$$X = \begin{cases} -1, & 若 U < -1, \\ 1, & 若 U \ge -1. \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & 若 U < 1, \\ 1, & 若 U \ge 1. \end{cases}$$

试求 $\mathrm{Var}(X + Y)$.

解：方法一：先求 $X + Y$ 的分布

因 $X + Y$ 的全部可能取值为$-2, 0, 2$，

且 $P\{X + Y = -2\} = P\{U < -1, U < 1\} = P\{U < -1\} = \dfrac{1}{4}$，

$P\{X + Y = 0\} = P\{U \ge -1, U < 1\} = P\{-1 \le U < 1\} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$，

$P\{X + Y = 2\} = P\{U \ge -1, U \ge 1\} = P\{U \ge 1\} = \dfrac{1}{4}$，

则 $E(X + Y) = (-2) \times \dfrac{1}{4} + 0 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{4} = 0$ 且 $E(X + Y)^2 = (-2)^2 \times \dfrac{1}{4} + 0^2 \times \dfrac{1}{2} + 2^2 \times \dfrac{1}{4} = 2$，

故 $\mathrm{Var}(X + Y) = E(X + Y)^2 - [E(X + Y)]^2 = 2$.

方法二：用方差的性质

因 X 和 Y 的全部可能取值都$-1, 1$

且 $P\{X = -1, Y = -1\} = P\{U < -1\} = \dfrac{1}{4}$，$P\{X = -1, Y = 1\} = P\{U < -1, U \ge 1\} = P(\varnothing) = 0$，

$P\{X = 1, Y = -1\} = P\{-1 \le U < 1\} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$，$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{U \ge 1\} = \dfrac{1}{4}$，

则 $E(X) = (-1) \times \dfrac{1}{4} + (-1) \times 0 + 1 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$，$E(Y) = (-1) \times \dfrac{1}{4} + 1 \times 0 + (-1) \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}$，

$E(X^2) = (-1)^2 \times \dfrac{1}{4} + (-1)^2 \times 0 + 1^2 \times \dfrac{1}{2} + 1^2 \times \dfrac{1}{4} = 1$，

$E(Y^2) = (-1)^2 \times \dfrac{1}{4} + 1^2 \times 0 + (-1)^2 \times \dfrac{1}{2} + 1^2 \times \dfrac{1}{4} = 1$，

$E(XY) = 1 \times \dfrac{1}{4} + (-1) \times 0 + (-1) \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{4} = 0$，

可得 $\mathrm{Var}(X) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$，$\mathrm{Var}(X) = 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$，$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$，

故 $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} + 2 \times \dfrac{1}{4} = 2$.

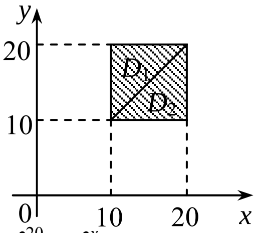
17．一商店经销某种商品，每周进货量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $(10, 20)$ 上的均匀分布．商店每售出一单位商品可得利润 1000 元；若需求量超过了进货量，则可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元．试求此商店经销该种商品每周的平均利润.

解：二维随机变量 (X, Y) 服从二维均匀分布，联合密度函数为 $p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}, & 10 < x < 20, 10 < y < 20, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

设 Z 表示此商店经销该种商品每周所得利润，

当 $X \le Y$ 时，$Z = 1000X + 500(Y - X) = 500X + 500Y$；当 $X > Y$ 时，$Z = 1000\,Y$，

即 $Z = g(X,Y) = \begin{cases} 500X + 500Y, & X \le Y, \\ 1000Y, & X > Y, \end{cases}$



故 $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)p(x,y)dxdy$

$$= \iint_{D_1} (500x + 500y)\frac{1}{100}dxdy + \iint_{D_2} 1000y \cdot \frac{1}{100}dxdy = \int_{10}^{20}dx\int_{x}^{20}(5x+5y)dy + \int_{10}^{20}dx\int_{10}^{x}10ydy$$

$$= \int_{10}^{20}dx \cdot (5xy + \frac{5}{2}y^2)\Big|_x^{20} + \int_{10}^{20}dx \cdot 5y^2)\Big|_{10}^{x} = \int_{10}^{20}(100x + 1000 - \frac{15}{2}x^2)dx + \int_{10}^{20}(5x^2 - 500)dx$$

$$= (50x^2 + 1000x - \frac{5}{2}x^3)\Big|_{10}^{20} + (\frac{5}{3}x^3 - 500x)\Big|_{10}^{20} = \frac{42500}{3}.$$

18．设随机变量 X 与 Y 独立，都服从正态分布 $N(a, \sigma^2)$，试证 $E[\max\{X,Y\}] = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

证：方法一：先求最小值的分布函数，再求其数学期望

因 X, Y 独立且密度函数和分布函数都分别是

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du,$$

则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 $F_Z(z) = [F(z)]^2$，密度函数为 $p_Z(z) = F_Z'(z) = 2F(z)p(z)$，

可得 $E[\max\{X,Y\}] = a + E(Z-a) = a + \int_{-\infty}^{+\infty}(z-a)\cdot 2F(z)p(z)dz$

$$= a + \int_{-\infty}^{+\infty}(z-a)\cdot 2F(z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz = a + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)\cdot(-\sigma)d\,e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}$$

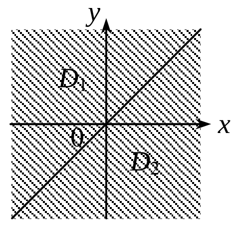
$$= a - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}F(z)\cdot\sigma e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}p(z)dz$$

$$= a - 0 + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz = a + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(z-a)^2}{\sigma^2}}dz$$

$$= a + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)^2}\cdot\sigma d\left(\frac{z-a}{\sigma}\right) = a + \frac{1}{\pi}\cdot\sigma\sqrt{\pi} = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

方法二：直接求最小值函数的期望

因 (X, Y) 的联合密度函数为



$$p(x,y) = p(x)p(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x, y < +\infty,$$

故 $E[\max\{X,Y\}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}p(x,y)dxdy = a + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x-a, y-a\}p(x,y)dxdy$

$$= a + \iint_{D_1}(y-a)\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}dxdy + \iint_{D_2}(x-a)\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}dxdy$$

$$= a + 2\iint\limits_{D_1}(y-a)\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}dxdy = a + \frac{1}{\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}(y-a)\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$= a + \frac{1}{\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\cdot(-\sigma^2)\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2+(y-a)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_x^{+\infty} = a + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}dx$$

$$= a + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\cdot\sigma d\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = a + \frac{1}{\pi}\cdot\sigma\sqrt{\pi} = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

方法三：根据第 14 题结论

因 $\dfrac{X-a}{\sigma}$ 与 $\dfrac{Y-a}{\sigma}$ 独立同分布，都服从正态分布 $N(0, 1)$，

则根据第 12 题结论知 $E\left[\max\left\{\dfrac{X-a}{\sigma},\dfrac{Y-a}{\sigma}\right\}\right] = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$，

故 $E[\max\{X,Y\}] = a + \sigma E\left[\max\left\{\dfrac{X-a}{\sigma},\dfrac{Y-a}{\sigma}\right\}\right] = a + \dfrac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

19．设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	−1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

试求 X^2 与 Y^2 的协方差.

解：因 $E(X^2) = 0^2 \times (0.07 + 0.18 + 0.15) + 1^2 \times (0.08 + 0.32 + 0.20) = 0.6$，

$E(Y^2) = (-1)^2 \times (0.07 + 0.08) + 0^2 \times (0.18 + 0.32) + 1^2 \times (0.15 + 0.20) = 0.5$，

$E(X^2Y^2) = 0 \times 0.07 + 0 \times 0.18 + 0 \times 0.15 + 1 \times 0.08 + 0 \times 0.32 + 1 \times 0.20 = 0.28$，

故 $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X^2Y^2) - E(X^2)E(Y^2) = 0.28 - 0.6 \times 0.5 = -0.02$.

20．把一颗骰子独立地掷 n 次，求 1 点出现次数与 6 点出现次数的协方差及相关系数.

解：设 X 与 Y 分别表示“1 点出现次数”与“6 点出现次数”，又设

$$X_i = \begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次掷出1点,}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次没有掷出1点.}\end{cases}\quad Y_i = \begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次掷出6点,}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次没有掷出6点.}\end{cases}$$

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 也相互独立，且当 $i \neq j$ 时，X_i 与 Y_j 相互独立，

因 (X_i, Y_i) 的联合分布列为

X_i \ Y_i	0	1
0	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	0

则 $E(X_i) = 0\times\dfrac{5}{6} + 1\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$， $E(Y_i) = 0\times\dfrac{5}{6} + 1\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$，

$E(X_i^2) = 0^2\times\dfrac{5}{6} + 1^2\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$， $E(Y_i^2) = 0^2\times\dfrac{5}{6} + 1^2\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$，

$$E(X_iY_i)=0\times\frac{4}{6}+0\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{6}+1\times 0=0,$$

可得 $\mathrm{Var}(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$，$\mathrm{Var}(Y_i)=E(Y_i^2)-[E(Y_i)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$，

$$\mathrm{Cov}(X_i,Y_i)=E(X_iY_i)-E(X_i)E(Y_i)=0-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{36},$$

因 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i$，且当 $i\neq j$ 时，X_i 与 Y_j 相互独立，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,Y_i)=-\frac{n}{36}$；

又因 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 也相互独立，

则 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{5n}{36}$，$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}Y_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_i)=\frac{5n}{36}$，

故 $\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{-\frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}\sqrt{\frac{5n}{36}}}=-\frac{1}{5}$.

21．掷一颗骰子两次，求其点数之和与点数之差的协方差.

解：设 X_1, X_2 分别表示第 1, 2 颗骰子出现的点数，有 $E(X_1)=E(X_2)$，$\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)$，
故 $\mathrm{Cov}(X_1+X_2, X_1-X_2)=\mathrm{Var}(X_1)-\mathrm{Var}(X_2)=0$.

22．某箱装 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件．现从中随机取一件，定义三个随机变量 X_1, X_2, X_3 如下

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad i=1,2,3,$$

试求随机变量 X_1 和 X_2 的相关系数 $\mathrm{Corr}(X_1, X_2)$.

解：因 $P\{X_1=0, X_2=0\}=P\{\text{抽到三等品}\}=\frac{10}{100}=0.1$，$P\{X_1=0, X_2=1\}=P\{\text{抽到二等品}\}=\frac{10}{100}=0.1$，

$P\{X_1=1, X_2=0\}=P\{\text{抽到一等品}\}=\frac{80}{100}=0.8$，$P\{X_1=1, X_2=1\}=P(\varnothing)=0$，

则 X_1 和 X_2 的联合分布为

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

因 $E(X_1)=0\times(0.1+0.1)+1\times(0.8+0)=0.8$，$E(X_2)=0\times(0.1+0.8)+1\times(0.1+0)=0.1$，

$E(X_1^2)=0^2\times(0.1+0.1)+1^2\times(0.8+0)=0.8$，$E(X_2^2)=0^2\times(0.1+0.8)+1^2\times(0.1+0)=0.1$，

$E(X_1X_2)=0\times0.1+0\times0.1+0\times0.8+1\times0=0$，

则 $\mathrm{Var}(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=0.8-0.8^2=0.16$，$\mathrm{Var}(X_2)=E(X_2^2)-[E(X_2)]^2=0.09$，

$\mathrm{Cov}(X_1, X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=0-0.8\times0.1=-0.08$，

故 $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(X_2)}} = \dfrac{-0.08}{0.4 \times 0.3} = -\dfrac{2}{3}$.

23．将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面朝上和反面朝上的次数，试求 X 和 Y 的协方差及相关系数．

解：方法一：根据相关系数的性质

因 $Y = n - X$，即 X 与 Y 线性负相关，

故 $\mathrm{Corr}(X, Y) = -1$；

又因 X 和 Y 都服从二项分布 $b(n, 0.5)$，有 $E(X) = E(Y) = 0.5n$，$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 0.25n$，

故 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} \cdot \mathrm{Corr}(X, Y) = \sqrt{0.25n} \cdot \sqrt{0.25n} \cdot (-1) = -0.25n$.

方法二：直接计算

因 X 和 Y 都服从二项分布 $b(n, 0.5)$，且 $Y = n - X$，有 $E(X) = E(Y) = 0.5n$，$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 0.25n$，

故 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, n - X) = \mathrm{Cov}(X, n) - \mathrm{Cov}(X, X) = 0 - \mathrm{Var}(X) = -0.25n$；

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-0.25n}{\sqrt{0.25n} \cdot \sqrt{0.25n}} = -1.$$

24．设随机变量 X 和 Y 独立同服从参数为 λ 的泊松分布，令 $U = 2X + Y$，$V = 2X - Y$，求 U 和 V 的相关系数 $\mathrm{Corr}(U, V)$.

解：因 X 和 Y 独立同服从泊松分布 $P(\lambda)$，有 $E(X) = E(Y) = \lambda$，$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \lambda$，

则 $E(U) = E(2X + Y) = 2E(X) + E(Y) = 3\lambda$，$E(V) = E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = \lambda$，

$\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(2X + Y) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 5\lambda$，$\mathrm{Var}(V) = \mathrm{Var}(2X - Y) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 5\lambda$，

$\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{Cov}(2X + Y, 2X - Y) = 4\mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(Y, Y) = 4\mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 3\lambda$，

故 $\mathrm{Corr}(U, V) = \dfrac{\mathrm{Cov}(U, V)}{\sqrt{\mathrm{Var}(U)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(V)}} = \dfrac{3\lambda}{\sqrt{5\lambda} \cdot \sqrt{5\lambda}} = \dfrac{3}{5}$.

25．在一个有 n 个人参加的晚会上，每个人带了一件礼物，且假定各人带的礼物都不相同．晚会期间各人从放在一起的 n 件礼物中随机抽取一件，试求抽中自己礼物的人数 X 的均值与方差．

解：设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个人抽到自己的礼物}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个人抽到其他人的礼物}. \end{cases}$ $i = 1, 2, \cdots, n$，有 $P\{X_i = 1\} = \dfrac{1}{n}$，$P\{X_i = 0\} = \dfrac{n-1}{n}$，

则 $E(X_i) = 0 \times \dfrac{n-1}{n} + 1 \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n}$，$E(X_i^2) = 0^2 \times \dfrac{n-1}{n} + 1^2 \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n}$，

$$\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{n-1}{n^2},$$

因当 $i \neq j$ 时，(X_i, X_j) 的联合分布列为

X_i \ X_j	0	1
0	$\dfrac{(n-1)(n-2)+1}{n(n-1)}$	$\dfrac{n-2}{n(n-1)}$
1	$\dfrac{n-2}{n(n-1)}$	$\dfrac{1}{n(n-1)}$

则 $E(X_i X_j) = 0 \times \dfrac{(n-1)(n-2)+1}{n(n-1)} + 0 \times \dfrac{n-2}{n(n-1)} + 0 \times \dfrac{n-2}{n(n-1)} + 1 \times \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n(n-1)}$，

可得 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\dfrac{1}{n(n-1)}-\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^2(n-1)}$，

因抽中自己礼物的人数 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，

故 $E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\times\dfrac{1}{n}=1$，

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=n\times\frac{n-1}{n^2}+n(n-1)\times\frac{1}{n^2(n-1)}=1.$$

26．设随机变量 X 和 Y 数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而它们的相关系数为 -0.5，试根据切比雪夫不等式，估计 $P\{|X+Y|\ge 6\}$的上限.

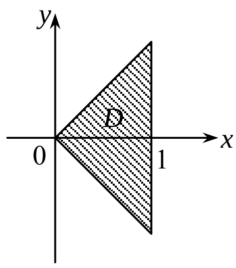
解：因 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-2+2=0$，

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4+2\sqrt{1}\times\sqrt{4}\times(-0.5)=3,$$

则 $P\{|X+Y|\ge 6\}=P\{|(X+Y)-E(X+Y)|\ge 6\}\le\dfrac{\mathrm{Var}(X+Y)}{6^2}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$，

故 $P\{|X+Y|\ge 6\}$的上限为 $\dfrac{1}{12}$.

27．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为



$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

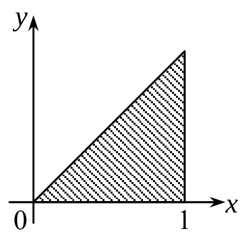
求 $E(X), E(Y), \mathrm{Cov}(X, Y)$.

解：$E(X)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}x\cdot 1dy=\int_0^1 2x^2dx=\dfrac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$；$E(Y)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}y\cdot 1dy=\int_0^1 dx\cdot\dfrac{1}{2}y^2\Big|_{-x}^{x}=0$；

因 $E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}xy\cdot 1dy=\int_0^1 dx\cdot\dfrac{1}{2}xy^2\Big|_{-x}^{x}=0$，

故 $\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$.

28．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为



$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 X 与 Y 的相关系数.

解：因 $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 3xdy=\int_0^1 3x^3dx=\dfrac{3}{4}x^4\Big|_0^1=\dfrac{3}{4}$，

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x y\cdot 3xdy=\int_0^1 dx\cdot\frac{3}{2}xy^2\Big|_0^x=\int_0^1\frac{3}{2}x^3dx=\frac{3}{8}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{8},$$

$$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^x x^2\cdot 3xdy=\int_0^1 3x^4dx=\frac{3}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{3}{5},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^x y^2\cdot 3xdy=\int_0^1 dx\cdot xy^3\Big|_0^x=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{1}{5},$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 3xdy=\int_0^1 dx\cdot\frac{3}{2}x^2y^2\Big|_0^x=\int_0^1\frac{3}{2}x^4dx=\frac{3}{10}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{10},$$

则 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{3}{5}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{3}{80}$， $\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\dfrac{1}{5}-\left(\dfrac{3}{8}\right)^2=\dfrac{19}{320}$，

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{160},$$

故 $\mathrm{Corr}(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\dfrac{\frac{3}{160}}{\sqrt{\frac{3}{80}}\sqrt{\frac{19}{320}}}=\sqrt{\dfrac{3}{19}}$．

29．已知随机变量 X 与 Y 的相关系数为ρ，求 $X_1=aX+b$ 与 $Y_1=cY+d$ 的相关系数，其中 a,b,c,d 均为非零正常数．

解：因 $\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X)$，$\mathrm{Var}(Y_1)=\mathrm{Var}(cY+d)=c^2\,\mathrm{Var}(Y)$，

$$\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)=\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=E[(aX+b)-E(aX+b)][(cY+d)-E(cY+d)]$$
$$=E[aX-aE(X)][cY-cE(Y)]=ac\,E[X-E(X)][Y-E(Y)]=ac\,\mathrm{Cov}(X,Y),$$

故 $\mathrm{Corr}(X_1,Y_1)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)}}=\dfrac{ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{a^2\,\mathrm{Var}(X)}\sqrt{c^2\,\mathrm{Var}(Y)}}=\dfrac{ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)}{|ac|\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\dfrac{ac}{|ac|}\rho$．

30．设 X_1 与 X_2 独立同分布，其共同分布为 $Exp(\lambda)$．试求 $Y_1=4X_1-3X_2$ 与 $Y_2=3X_1+X_2$ 的相关系数．

解：因 X_1 与 X_2 独立同分布，有 $\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)$，$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$，

则 $\mathrm{Var}(Y_1)=\mathrm{Var}(4X_1-3X_2)=\mathrm{Var}(4X_1)+\mathrm{Var}(3X_2)=16\,\mathrm{Var}(X_1)+9\,\mathrm{Var}(X_2)=25\,\mathrm{Var}(X_1)$，

$\mathrm{Var}(Y_2)=\mathrm{Var}(3X_1+X_2)=\mathrm{Var}(3X_1)+\mathrm{Var}(X_2)=9\,\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)=10\,\mathrm{Var}(X_1)$，

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=\mathrm{Cov}(4X_1-3X_2,3X_1+X_2)=\mathrm{Cov}(4X_1,3X_1)-\mathrm{Cov}(3X_2,X_2)=12\,\mathrm{Var}(X_1)-3\,\mathrm{Var}(X_2)$$
$$=9\,\mathrm{Var}(X_1),$$

故 $\mathrm{Corr}(Y_1,Y_2)=\dfrac{\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y_2)}}=\dfrac{9\,\mathrm{Var}(X_1)}{\sqrt{25\,\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{10\,\mathrm{Var}(X_1)}}=\dfrac{9}{5\sqrt{10}}$．

31．设 X_1 与 X_2 独立同分布，其共同分布为 $N(\mu,\sigma^2)$．试求 $Y=aX_1+bX_2$ 与 $Z=aX_1-bX_2$ 的相关系数，其中 a 与 b 为非零常数．

解：因 X_1 与 X_2 独立同分布，有 $\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)$，$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=0$，

则 $\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(aX_1+bX_2)=\mathrm{Var}(aX_1)+\mathrm{Var}(bX_2)=a^2\,\mathrm{Var}(X_1)+b^2\,\mathrm{Var}(X_2)=(a^2+b^2)\,\mathrm{Var}(X_1)$，

$\mathrm{Var}(Z)=\mathrm{Var}(aX_1-bX_2)=\mathrm{Var}(aX_1)+\mathrm{Var}(bX_2)=a^2\,\mathrm{Var}(X_1)+b^2\,\mathrm{Var}(X_2)=(a^2+b^2)\,\mathrm{Var}(X_1)$，

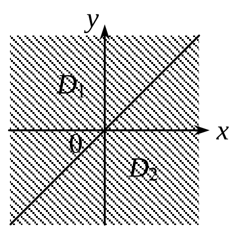
$$\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{Cov}(aX_1+bX_2,aX_1-bX_2)=\mathrm{Cov}(aX_1,aX_1)-\mathrm{Cov}(bX_2,bX_2)=a^2\,\mathrm{Var}(X_1)-b^2\,\mathrm{Var}(X_2)$$
$$=(a^2-b^2)\,\mathrm{Var}(X_1),$$

故 $\mathrm{Corr}(Y,Z)=\dfrac{\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}}=\dfrac{(a^2-b^2)\mathrm{Var}(X_1)}{\sqrt{(a^2+b^2)\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{(a^2+b^2)\mathrm{Var}(X_1)}}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$．

32．设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0,1,1,\rho)$，

（1）求 $E[\max\{X,Y\}]$；

（2）求 $X-Y$ 与 XY 的协方差及相关系数．



解：（1）方法一：直接计算

因 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}},\quad -\infty<x,y<+\infty,$$

则 $E[\max\{X,Y\}]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,y\}\,p(x,y)dxdy=\iint_{D_1}yp(x,y)dxdy+\iint_{D_2}xp(x,y)dxdy$

$$=2\iint_{D_1} y\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+\rho^2y^2+(1-\rho^2)y^2}{2(1-\rho^2)}}dx=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}y\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}dx$$

令 $u=x-\rho y$，有 $x=u+\rho y$，$dx=du$，且当 $x\to-\infty$ 时，$u\to-\infty$；当 $x=y$ 时，$u=(1-\rho)y$，

故 $E[\max\{X,Y\}]=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}y\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\left[\int_{-\infty}^{(1-\rho)y}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\right]dy$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{(1-\rho)y}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\right]\cdot(-1)d\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{(1-\rho)y}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}}du\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(1-\rho)^2y^2}{2(1-\rho^2)}}\cdot(1-\rho)dy\right]$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot(1-\rho)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}-\frac{(1-\rho)y^2}{2(1+\rho)}}dy=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{1+\rho}}dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{\sqrt{1+\rho}}\right)^2}\cdot\sqrt{1+\rho}\,d\frac{y}{\sqrt{1+\rho}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\cdot\sqrt{1+\rho}\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}\ ;$$

方法二：利用二维正态分布的性质

因 $\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$，且 $E(X)=E(Y)=0$，

则 $E[\max\{X,Y\}]=\frac{1}{2}E(X+Y+|X-Y|)=\frac{1}{2}[E(X)+E(Y)+E(|X-Y|)]=\frac{1}{2}E(|X-Y|)$，

因 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0, 1, 1, \rho)$，有 $E(X)=E(Y)=0$，$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$，

且 $\mathrm{Corr}(X, Y)=\rho$，可得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\,\mathrm{Corr}(X,Y)=\rho$，

则 $X-Y$ 服从正态分布，且 $E(X-Y)=0$，$\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\,\mathrm{Cov}(X, Y)=2-2\rho$，
即 $X-Y$ 服从正态分布 $N(0, 2-2\rho)$，密度函数为

$$p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}},$$

故 $E[\max\{X,Y\}]=\frac{1}{2}E(|X-Y|)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}dz$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}\int_{0}^{+\infty}z\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}dz=\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho)}}\cdot[-(2-2\rho)]\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}\Bigg|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho)}}\cdot(2-2\rho)=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}\ ;$$

（2）因 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}},\quad -\infty<x,\ y<+\infty,$$

则由对称性知 $E(X^2Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy^2\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy=E(XY^2),$$

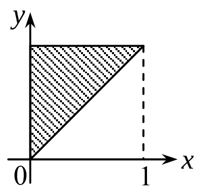
且 $E(X)=E(Y)=0$，

故 $\mathrm{Cov}(X-Y, XY)=E[(X-Y)XY]-E(X-Y)E(XY)$

$$=[E(X^2Y)-E(XY^2)]-[E(X)-E(Y)]E(XY)=0;$$

$$\mathrm{Corr}(X-Y, XY)=\frac{\mathrm{Cov}(X-Y, XY)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X-Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(XY)}}=0.$$

33．设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\ 0<x<y<1\}$上的均匀分布，求 X 与 Y 的协方差及相关系数.



解：因 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $E(X)=\int_0^1dx\int_x^1x\cdot 2dy=\int_0^1 2x(1-x)dx=\left(x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，

$$E(Y)=\int_0^1dx\int_x^1y\cdot 2dy=\int_0^1dx\cdot y^2\Big|_x^1=\int_0^1(1-x^2)dx=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

$$E(X^2)=\int_0^1dx\int_x^1x^2\cdot 2dy=\int_0^1 2x^2(1-x)dx=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1dx\int_x^1y^2\cdot 2dy=\int_0^1dx\cdot\frac{2}{3}y^3\Big|_x^1=\int_0^1\frac{2}{3}(1-x^3)dx=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},$$

$$E(XY)=\int_0^1dx\int_x^1xy\cdot 2dy=\int_0^1dx\cdot xy^2\Big|_x^1=\int_0^1(x-x^3)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

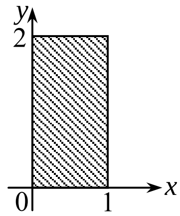
可得 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$， $\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$；

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{2}.$$

34．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6}{7}\left(x^2+\dfrac{xy}{2}\right), & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



求 X 与 Y 的协方差及相关系数．

解：因 $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^2 x\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{6}{7}x^3y+\frac{3}{14}x^2y^2\right)\Big|_0^2=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)dx$

$$=\left(\frac{3}{7}x^4+\frac{2}{7}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7},$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^2 y\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{3}{7}x^2y^2+\frac{1}{7}xy^3\right)\Big|_0^2=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^2+\frac{8}{7}x\right)dx$$

$$=\left(\frac{4}{7}x^3+\frac{4}{7}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{8}{7},$$

$$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{6}{7}x^4y+\frac{3}{14}x^3y^2\right)\Big|_0^2=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^4+\frac{6}{7}x^3\right)dx$$

$$=\left(\frac{12}{35}x^5+\frac{3}{14}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{12}{35}+\frac{3}{14}=\frac{39}{70},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{2}{7}x^2y^3+\frac{3}{28}xy^4\right)\Big|_0^2=\int_0^1\left(\frac{16}{7}x^2+\frac{12}{7}x\right)dx$$

$$=\left(\frac{16}{21}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{16}{21}+\frac{6}{7}=\frac{34}{21},$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^2 xy\cdot\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{xy}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\cdot\left(\frac{3}{7}x^3y^2+\frac{1}{7}x^2y^3\right)\Big|_0^2=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{8}{7}x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{3}{7}x^4+\frac{8}{21}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{3}{7}+\frac{8}{21}=\frac{17}{21},$$

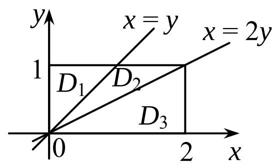
则 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{39}{70}-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{23}{490}$，$\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{34}{21}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{46}{147}$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147}$；

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{-\frac{1}{147}}{\sqrt{\frac{23}{490}}\sqrt{\frac{46}{147}}}=-\frac{\sqrt{5}}{23\sqrt{3}}.$$

35．设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}1, & X>Y,\\ 0, & X\le Y.\end{cases}\quad V=\begin{cases}1, & X>2Y,\\ 0, & X\le 2Y.\end{cases}$$



求 U 和 V 的相关系数.

解：因 $P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,\, X\le 2Y\}=P\{(X,Y)\in D_1\}=\dfrac{S_{D_1}}{S_G}=\dfrac{0.5}{2}=0.25$，

$P\{U=0,\, V=1\}=P\{X\le Y, X>2Y\}=P(\varnothing)=0$，

$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,\, X\le 2Y\}=P\{(X,Y)\in D_2\}=\dfrac{S_{D_2}}{S_G}=\dfrac{0.5}{2}=0.25$，

$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,\, X>2Y\}=P\{(X,Y)\in D_3\}=\dfrac{S_{D_3}}{S_G}=\dfrac{1}{2}=0.5$，

则 $E(U)=0\times(0.25+0)+1\times(0.25+0.5)=0.75$，$E(V)=0\times(0.25+0.25)+1\times(0+0.5)=0.5$，

$E(U^2)=0^2\times(0.25+0)+1^2\times(0.25+0.5)=0.75$，$E(V^2)=0^2\times(0.25+0.25)+1^2\times(0+0.5)=0.5$，

$E(UV)=0\times 0.25+0\times 0+0\times 0.25+1\times 0.5=0.5$，

有 $\operatorname{Var}(U)=E(U^2)-[E(U)]^2=0.75-0.75^2=0.1875$，$\operatorname{Var}(V)=E(V^2)-[E(V)]^2=0.5-0.5^2=0.25$，

$\operatorname{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=0.5-0.75\times 0.5=0.125$，

故 $\operatorname{Corr}(U,V)=\dfrac{\operatorname{Cov}(U,V)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(V)}}=\dfrac{0.125}{0.25\sqrt{3}\times 0.5}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

36．设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数如下，试求 (X, Y) 的协方差矩阵.

（1） $p_1(x,y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（2） $p_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{8}, & 0<x<2, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

解：（1）因 $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^1 x\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot 2x^2y^3\Big|_0^1=\int_0^1 2x^2dx=\dfrac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$，

$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^1 y\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot\dfrac{6}{4}xy^4\Big|_0^1=\int_0^1\dfrac{3}{2}xdx=\dfrac{3}{4}x^2\Big|_0^1=\dfrac{3}{4}$，

$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot 2x^3y^3\Big|_0^1=\int_0^1 2x^3dx=\dfrac{2}{4}x^4\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}$，

$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 y^2\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot\dfrac{6}{5}xy^5\Big|_0^1=\int_0^1\dfrac{6}{5}xdx=\dfrac{3}{5}x^2\Big|_0^1=\dfrac{3}{5}$，

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy\cdot 6xy^2dy=\int_0^1 dx\cdot\dfrac{6}{4}x^2y^4\Big|_0^1=\int_0^1\dfrac{3}{2}x^2dx=\dfrac{1}{2}x^3\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}$，

有 $\operatorname{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{18}$， $\operatorname{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\dfrac{3}{5}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{3}{80}$，

$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=0$，

故协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{3}{80} \end{pmatrix}.$$

（2）因 $E(X)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{8}x^2y+\frac{1}{16}xy^2\right)\Big|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\right)dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$，

$$E(Y)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{16}xy^2+\frac{1}{24}y^3\right)\Big|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6},$$

$$E(X^2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{8}x^3y+\frac{1}{16}x^2y^2\right)\Big|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)dx=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$

$$E(Y^2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{24}xy^3+\frac{1}{32}y^4\right)\Big|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3},$$

$$E(XY)=\int_0^2 dx\int_0^2 xy\cdot\frac{x+y}{8}dy=\int_0^2 dx\cdot\left(\frac{1}{16}x^2y^2+\frac{1}{24}xy^3\right)\Big|_0^2=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x\right)dx=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3},$$

有 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$， $\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$，

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36},$$

故协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

37．设 a 为区间 $(0, 1)$ 上的一个定点，随机变量 X 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布，以 Y 表示点 X 到 a 的距离．问 a 为何值时 X 与 Y 不相关．

解：因 X 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布，有 $E(X)=\frac{1}{2}$ 且 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $E(Y)=\int_0^1|x-a|\cdot 1dx=\int_0^a(a-x)dx+\int_a^1(x-a)dx=-\frac{1}{2}(a-x)^2\Big|_0^a+\frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_a^1=\frac{1}{2}-a+a^2$，

$$E(XY)=\int_0^1 x|x-a|\cdot 1dx=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx=\left(\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right)\Big|_a^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^3\right)-0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a^3,$$

可得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a^3\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a+a^2\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3$，

令 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3=\frac{1}{12}(2a-1)(2a^2-2a+1)=0$，可得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{4}$，

因 a 为区间 (0, 1) 上的一个定点，

故当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\mathrm{Cov}(X, Y)=0$，即 X 与 Y 不相关.

38．设随机向量 (X_1, X_2, X_3) 满足条件

$$aX_1+bX_2+cX_3=0,$$
$$E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=d,$$
$$\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)=\mathrm{Var}(X_3)=\sigma^2,$$

其中 a, b, c, d, σ^2 均为常数，求相关系数 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$.

注：此题条件有误，应更正为“其中 a, b, c, σ^2 均为非零常数，d 为常数”

解：因 $cX_3=-aX_1-bX_2$，有 $\mathrm{Var}(cX_3)=\mathrm{Var}(-aX_1-bX_2)$，

则 $c^2\mathrm{Var}(X_3)=a^2\mathrm{Var}(X_1)+b^2\mathrm{Var}(X_2)+2ab\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$，

因 $\mathrm{Var}(X_1)=\mathrm{Var}(X_2)=\mathrm{Var}(X_3)=\sigma^2$，$\mathrm{Cov}(X_1, X_2)=\sigma^2\rho_{12}$，且 a, b 为非零常数，

故 $\rho_{12}=\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$，同理可得 $\rho_{23}=\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$，$\rho_{31}=\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac}$；

此外，因 $aX_1+bX_2+cX_3=0$，且 $E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=d$，

则 $E(aX_1+bX_2+cX_3)=aE(X_1)+bE(X_2)+cE(X_3)=(a+b+c)d=0$，

如果 $d\neq0$，有 $a+b+c=0$，即 $c=-a-b$，

故 $\rho_{12}=\frac{(-a-b)^2-a^2-b^2}{2ab}=1$，同理可得 $\rho_{23}=1$，$\rho_{31}=1$.

39．设随机向量 X 与 Y 都只能取两个值，试证：X 与 Y 的独立性与不相关性是等价的.

证：因独立必然不相关，只需证明若 X 与 Y 不相关可推出 X 与 Y 独立，

设 X 与 Y 不相关，且 X 只能取两个值 a 与 b，Y 只能取两个值 c 与 d，有 $a\neq b$，$c\neq d$，

令 $X^*=\frac{X-a}{b-a}$，$Y^*=\frac{Y-c}{d-c}$，有 X^* 与 Y^* 只能取两个值 0 与 1，

则 $\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)=\mathrm{Cov}\left(\frac{X-a}{b-a},\frac{Y-c}{d-c}\right)=\frac{\mathrm{Cov}(X-a,Y-c)}{(b-a)(d-c)}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{(b-a)(d-c)}=0$，

设随机向量 (X^*, Y^*) 的联合分布列与边际分布列为

X^* \ Y^*	0	1	$p_{i\cdot}$
0	p_{11}	p_{12}	$p_{1\cdot}$
1	p_{21}	p_{22}	$p_{2\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot1}$	$p_{\cdot2}$	

则 $\mathrm{Cov}(X^*, Y^*)=E(X^*Y^*)-E(X^*)E(Y^*)=p_{22}-p_{2\cdot}\,p_{\cdot2}=0$，即 $p_{22}=p_{2\cdot}\,p_{\cdot2}$，

有 $p_{12}=p_{\cdot2}-p_{22}=p_{\cdot2}-p_{2\cdot}\,p_{\cdot2}=(1-p_{2\cdot})p_{\cdot2}=p_{1\cdot}\,p_{\cdot2}$，

$p_{21}=p_{2\cdot}-p_{22}=p_{2\cdot}-p_{2\cdot}\,p_{\cdot2}=p_{2\cdot}(1-p_{\cdot2})\ =p_{2\cdot}\,p_{\cdot1}$，

$p_{11}=p_{\cdot1}-p_{21}=p_{\cdot1}-p_{2\cdot}\,p_{\cdot1}=(1-p_{2\cdot})p_{\cdot1}=p_{1\cdot}\,p_{\cdot1}$，

故 $p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}$，$i, j=1, 2$，即 X 与 Y 独立，得证.

40．设随机变量 X 服从区间 (−0.5, 0.5) 上的均匀分布，$Y=\cos X$，则 X 与 Y 有函数关系．试证：X 与 Y 不相关，即 X 与 Y 无线性关系.

证：因 X 服从区间 (−0.5, 0.5) 上的均匀分布，有 $E(X)=0$ 且 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1, & -0.5<x<0.5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

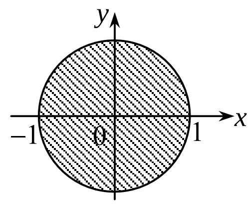
则 $E(Y)=\int_{-0.5}^{0.5}\cos x\cdot 1dx=\sin x\Big|_{-0.5}^{0.5}=\sin 0.5-\sin(-0.5)=2\sin 0.5$，

因 $x\cos x$ 为奇函数，有 $E(XY)=\int_{-0.5}^{0.5}x\cos x\cdot 1dx=0$，

故 $\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0\times 2\sin 0.5=0$，即 X 与 Y 不相关，X 与 Y 无线性关系.

41．设二维随机变量 (X, Y) 服从单位圆内的均匀分布，其联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1,\\ 0, & x^2+y^2\geq 1.\end{cases}$$



试证 X 与 Y 不独立且 X 与 Y 不相关.

证：当 $-1<x<1$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$，

当 $-1<y<1$ 时，$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$，

则 $p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{\pi^2}, & -1<x<1, -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故 $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$，即 X 与 Y 不独立；

因 $E(X)=\iint\limits_{x^2+y^2<1}x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\pi}dy=\int_{-1}^{1}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=-\frac{2}{3\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}=0$，

$E(Y)=\iint\limits_{x^2+y^2<1}y\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{y}{\pi}dy=\int_{-1}^{1}dx\cdot\frac{y^2}{2\pi}\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=0$，

$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2<1}xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{\pi}dy=\int_{-1}^{1}dx\cdot\frac{xy^2}{2\pi}\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=0$，

故 $\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0\times 0=0$，即 X 与 Y 不相关.

42．设随机向量 (X_1, X_2, X_3) 的相关系数分别为 $\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$，证明 $\rho_{12}^2+\rho_{23}^2+\rho_{31}^2\leq 1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}$.

证：设 $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma_i^2$，$i=1, 2, 3$，有 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)=\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$，$i, j=1, 2, 3$；$i\neq j$，

对任意实数 c_1, c_2, c_3，都有 $\mathrm{Var}(c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3)\geq 0$，即

$$c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+c_3^2\sigma_3^2+2c_1c_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}+2c_2c_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23}++2c_3c_1\sigma_3\sigma_1\rho_{31}\geq 0,$$

$$(c_1\sigma_1,\ c_2\sigma_2,\ c_3\sigma_3)\begin{pmatrix}1 & \rho_{12} & \rho_{31}\\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{23} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\sigma_1\\ c_2\sigma_2\\ c_3\sigma_3\end{pmatrix}\geq 0,$$

根据二次型理论及 c_1, c_2, c_3 的任意性，可知随机向量 (X_1, X_2, X_3) 的相关系数矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & \rho_{12} & \rho_{31}\\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{23} & 1\end{pmatrix}$$

为半正定矩阵，

故$\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{31} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{23} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31} - \rho_{12}^2 - \rho_{23}^2 - \rho_{31}^2 \ge 0$，即 $\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 + \rho_{31}^2 \le 1 + 2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}$.

43．设随机向量 (X_1, X_2, X_3) 的相关系数分别为$\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}$，且

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 0，\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \mathrm{Var}(X_3) = \sigma^2，$$

令

$$Y_1 = X_1 + X_2，Y_2 = X_2 + X_3，Y_3 = X_3 + X_1，$$

证明：Y_1, Y_2, Y_3 两两不相关的充要条件为$\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31} = -1$．

证：充分性，设$\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31} = -1$，

因 $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \mathrm{Var}(X_3) = \sigma^2$，有 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sigma^2\rho_{ij}$ ，$i, j = 1, 2, 3$；$i \ne j$，

则 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_1, X_3) + \mathrm{Cov}(X_2, X_3) + \mathrm{Cov}(X_2, X_2)$

$= \sigma^2\rho_{12} + \sigma^2\rho_{31} + \sigma^2\rho_{23} + \sigma^2 = \sigma^2(\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31} + 1) = 0$；

同理 $\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3) = 0$，$\mathrm{Cov}(Y_3, Y_1) = 0$，

故 Y_1, Y_2, Y_3 两两不相关；

必要性，设 Y_1, Y_2, Y_3 两两不相关，有 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \sigma^2(\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31} + 1) = 0$，

故$\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31} = -1$．

44．设 $X \sim N(0, 1)$，Y 各以 0.5 的概率取值 ±1，且假定 X 与 Y 相互独立．令 $Z = X \cdot Y$，证明：

（1）$Z \sim N(0, 1)$；

（2）X 与 Z 不相关，但不独立．

证：（1）因 $X \sim N(0, 1)$，$P\{Y = 1\} = P\{Y = -1\} = 0.5$，且 X 与 Y 相互独立，

则 $F_Z(z) = P\{Z = XY \le z\} = P\{X \le z, Y = 1\} + P\{X \ge -z, Y = -1\} = 0.5\,P\{X \le z\} + 0.5\,P\{X \ge -z\}$

$= 0.5\,\Phi(z) + 0.5[1 - \Phi(-z)] = 0.5\,\Phi(z) + 0.5\,\Phi(z) = \Phi(z)$，

故 $Z \sim N(0, 1)$；

（2）因 $E(X) = 0$，$\mathrm{Var}(X) = 1$，$E(Y) = 0.5 \times (-1) + 0.5 \times 1 = 0$，且 X 与 Y 相互独立，

则 $E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y) = 0 \times 0 = 0$，$E(XZ) = E(X^2Y) = E(X^2)E(Y) = 1 \times 0 = 0$，

故 $\mathrm{Cov}(X, Z) = E(XZ) - E(X)E(Z) = 0 - 0 \times 0 = 0$，即 X 与 Z 不相关；

因 (X, Z) 的联合分布函数

$F_{XZ}(x, z) = P\{X \le x, Z = XY \le z\} = P\{X \le x, X \le z, Y = 1\} + P\{X \le x, X \ge -z, Y = -1\}$

$= 0.5\,P\{X \le x, X \le z\} + 0.5\,P\{X \le x, X \ge -z\}$，

当 $x = z < 0$ 时，$F_{XZ}(x, x) = 0.5\,P\{X \le x\} = 0.5\,\Phi(x)$，

但 $F_X(x)F_Z(x) = [\Phi(x)]^2$，

故当 $x = z < 0$ 时，$F_{XZ}(x, x) \ne F_X(x)F_Z(x)$，即 X 与 Z 不独立．

45．设随机变量 X 有密度函数 $p(x)$，且密度函数 $p(x)$ 是偶函数，假定 $E(|X|^3) < +\infty$．证明 X 与 $Y = X^2$ 不相关，但不独立．

证：因 $p(x)$ 是偶函数，有 $x\,p(x)$ 与 $x^3p(x)$ 都是奇函数，

则 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = 0$ ，$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3p(x)dx = 0$ ，

故 $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0 - 0 \times E(X^2) = 0$，即 X 与 $Y = X^2$ 不相关；

因 (X, Y) 的联合分布函数 $F_{XY}(x, y) = P\{X \le x, Y = X^2 \le y\}$，

当 $y = x^2, x > 0$ 时，$F_{XY}(x, x^2) = P\{X \le x, Y = X^2 \le x^2\} = P\{-x \le X \le x\} = F_X(x) - F_X(-x)$，

但 $F_X(x)F_Y(x^2) = F_X(x)P\{-x \le X \le x\} = F_X(x)[F_X(x) - F_X(-x)]$，

故当 $y = x^2, x > 0$ 且 $F_X(x) < 1$ 时，$F_{XY}(x, x^2) \ne F_X(x)F_Y(x^2)$，即 X 与 $Y = X^2$ 不独立．

46．设二维随机向量 (X, Y) 服从二维正态分布，且 $E(X) = E(Y) = 0$，$E(XY) < 0$，证明：对任意正常数 a, b 有 $P\{X \ge a, Y \ge b\} \le P\{X \ge a\}\,P\{Y \ge b\}$．

证：设 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，

则 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]}$，

因 $E(X) = E(Y) = 0$，$E(XY) < 0$，

则 $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_1\sigma_2} = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_1\sigma_2} = \dfrac{E(XY)}{\sigma_1\sigma_2} < 0$，

当 $x > 0, y > 0$ 时，有

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]} \le \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}},$$

即 $P\{X \ge a, Y \ge b\} = \int_a^{+\infty} dx \int_b^{+\infty} p(x, y) dy \le \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}} dx \cdot \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}} dy$，

令 $u = \dfrac{x}{\sqrt{1-\rho^2}}$，$v = \dfrac{y}{\sqrt{1-\rho^2}}$，有 $dx = \sqrt{1-\rho^2}\,du$，$dy = \sqrt{1-\rho^2}\,dv$，

当 $x = a$ 时，$u = \dfrac{a}{\sqrt{1-\rho^2}}$，当 $x \to +\infty$时，$u \to +\infty$；且当 $y = b$ 时，$v = \dfrac{b}{\sqrt{1-\rho^2}}$，当 $y \to +\infty$时，$v \to +\infty$；

则 $P\{X \ge a, Y \ge b\} \le \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{\frac{a}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} \sqrt{1-\rho^2}\,du \cdot \int_{\frac{b}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} \sqrt{1-\rho^2}\,dv$

$$= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\frac{a}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} du \cdot \int_{\frac{b}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} dv,$$

因 X 服从正态分布 $N(0, \sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(0, \sigma_2^2)$，

则 $P\{X \ge a\}P\{Y \ge b\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} du \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} dv = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} du \cdot \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} dv$，

故 $P\{X \ge a, Y \ge b\} \le \dfrac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\frac{a}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} du \cdot \int_{\frac{b}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} dv \le \dfrac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} du \cdot \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} dv$

$$\le \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}} du \cdot \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2\sigma_2^2}} dv = P\{X \ge a\}P\{Y \ge b\}.$$

47．设随机向量 (X, Y) 满足 $E(X) = E(Y) = 0$，$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$，$\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho$，证明：

$$E[\max\{X^2, Y^2\}] \le 1 + \sqrt{1-\rho^2}.$$

证：因 $E(X) = E(Y) = 0$，$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$，$\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho$，

则 $E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [E(X)]^2 = 1$，$E(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + [E(Y)]^2 = 1$，$E(XY) = \mathrm{Cov}(X, Y) + E(X)E(Y) = \rho$，

因 $\max\{X^2, Y^2\} = \dfrac{1}{2}\left[X^2 + Y^2 + |X^2 - Y^2|\right]$，

则 $E[\max\{X^2, Y^2\}] = \frac{1}{2}\left[E(X^2) + E(Y^2) + E(|X^2 - Y^2|)\right] = 1 + \frac{1}{2}E(|X^2 - Y^2|)$，

根据 Cauchy-Schwarz 不等式有 $E(UV) = \sqrt{E(U^2)E(V^2)}$，

则 $E[\max\{X^2, Y^2\}] = 1 + \frac{1}{2}E(|X^2 - Y^2|) = 1 + \frac{1}{2}E(|X+Y|\cdot|X-Y|) \le 1 + \frac{1}{2}\sqrt{E(|X+Y|^2)E(|X-Y|^2)}$，

因 $E(|X+Y|^2) = E(X^2 + Y^2 + 2XY) = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) = 2 + 2\rho$,

$E(|X-Y|^2) = E(X^2 + Y^2 - 2XY) = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(XY) = 2 - 2\rho$,

故 $E[\max\{X^2, Y^2\}] \le 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(2+2\rho)(2-2\rho)} = 1 + \sqrt{1-\rho^2}$.

48．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中任意两个的相关系数都是ρ，试证：$\rho \ge -\frac{1}{n-1}$.

证：设 $X_i^* = \frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}}$， $i = 1, 2, \cdots, n$ ，有 $\mathrm{Var}(X_i^*) = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$，

则 $\mathrm{Cov}(X_i^*, X_j^*) = \mathrm{Cov}\left(\frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}}, \frac{X_j - E(X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_j)}}\right) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_j)}} = \rho$， $1 \le i < j \le n$，

因 $0 \le \mathrm{Var}(X_1^* + X_2^* + \cdots + X_n^*) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i^*) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}(X_i^*, X_j^*) = n + 2\times\frac{n(n-1)}{2}\rho = n[1+(n-1)\rho]$，

故 $\rho \ge -\frac{1}{n-1}$.

习题 3.5

1． 以 X 记某医院一天内诞生婴儿的个数，以 Y 记其中男婴的个数，设 X 与 Y 的联合分布列为

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{\mathrm{e}^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},\quad m=0,1,\cdots,n;\ n=0,1,2,\cdots$$

试求条件分布列 $P\{Y=m\mid X=n\}$.

解：因 $P\{X=n\}=\sum_{m=0}^{n}P\{X=n,Y=m\}=\sum_{m=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}=\frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}(7.14)^m(6.86)^{n-m}$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(7.14)^m(6.86)^{n-m}=\frac{\mathrm{e}^{-14}}{n!}(7.14+6.86)^n=\frac{14^n}{n!}\mathrm{e}^{-14},$$

故 $P\{Y=m\mid X=n\}=\dfrac{P\{X=n,Y=m\}}{P\{X=n\}}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}}{\dfrac{14^n}{n!}\mathrm{e}^{-14}}=\binom{n}{m}\cdot\left(\dfrac{7.14}{14}\right)^m\cdot\left(\dfrac{6.86}{14}\right)^{n-m}$.

2． 一射手单发命中目标的概率为 p $(0<p<1)$，射击进行到命中目标两次为止．设 X 表示第一次命中目标所需的射击次数，Y 为总共进行的射击次数，求(X, Y) 的联合分布和条件分布．

解：(X, Y) 的联合分布为

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=p^2(1-p)^{j-2},\quad i=1,2,\cdots;\quad j=i+1,i+2,\cdots;$$

则 X 的边际分布为几何分布 $Ge(p)$，即概率分布为 $p_{i\cdot}=P\{X=i\}=p(1-p)^{i-1},\quad i=1,2,\cdots$，

Y 的边际分布为负二项分布 $Nb(2,p)$，即概率分布为 $p_{\cdot j}=P\{Y=j\}=(j-1)p^2(1-p)^{j-2},\quad j=2,3,\cdots$，

故当 $Y=j$ 时，X 的条件分布为

$$P\{X=i\mid Y=j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{1}{j-1},\quad i=1,2,\cdots,j-1;$$

当 $X=i$ 时，Y 的条件分布为

$$P\{Y=j\mid X=i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}=p(1-p)^{j-i-1},\quad j=i+1,i+2,\cdots.$$

3． 已知(X, Y) 的联合分布列如下：

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{8},\ P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{4},\ P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{2}.$$

试求：

（1）已知 $Y=i$ 的条件下，X 的条件分布列，$i=1, 2$；

（2）X 与 Y 是否独立？

解：（1）因 Y 的边际分布为 $P\{Y=1\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$，$P\{Y=2\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，

故当 $Y=1$ 时，X 的条件分布列为

$$P\{X=1\mid Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{1}{2},\ P\{X=2\mid Y=1\}=\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{1}{2};$$

当 $Y=2$ 时，X 的条件分布列为

$$P\{X=1\mid Y=2\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{1}{3},\ P\{X=2\mid Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{2}{3};$$

（2）因当 $Y=1$ 与 $Y=2$ 时，X 的条件分布列不同，故 X 与 Y 不独立．

4．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，试在以下情况下求 $P\{X=k|X+Y=m\}$：

（1）X 与 Y 都服从参数为 p 的几何分布；

（2）X 与 Y 都服从参数为 (n, p) 的二项分布.

解：（1）因 X 与 Y 的概率函数为 $P\{X=k\}=P\{Y=k\}=p(1-p)^{k-1}$，$k=1, 2, \cdots$，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y$ 的概率函数为

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=1}^{m-1}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}=\sum_{k=1}^{m-1}p(1-p)^{k-1}\cdot p(1-p)^{m-k-1}$$

$$=(m-1)p^2(1-p)^{m-2},\quad m=2,3,\cdots,$$

故 $P\{X=k\,|\,X+Y=m\}=\dfrac{P\{X=k, X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}=\dfrac{P\{X=k\}P\{Y=m-k\}}{P\{X+Y=m\}}$

$$=\frac{p(1-p)^{k-1}\cdot p(1-p)^{m-k-1}}{(m-1)p^2(1-p)^{m-2}}=\frac{1}{m-1};$$

（2）因 X 与 Y 的概率函数为 $P\{X=k\}=P\{Y=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$，且 X 与 Y 独立，

则 $X+Y$ 的概率函数为

$$P\{X+Y=m\}=\sum_k P\{X=k\}P\{Y=m-k\}=\sum_k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\cdot\binom{n}{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-m+k}$$

$$=\sum_k\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}p^m(1-p)^{2n-m}=\binom{2n}{m}p^m(1-p)^{2n-m},\quad m=0,1,2,\cdots,2n,$$

这里比较 $(1+x)^n\cdot(1+x)^n$ 与 $(1+x)^{2n}$ 中 x^m 的系数可得 $\sum_k\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}=\binom{2n}{m}$，

故 $P\{X=k\,|\,X+Y=m\}=\dfrac{P\{X=k, X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}=\dfrac{P\{X=k\}P\{Y=m-k\}}{P\{X+Y=m\}}$

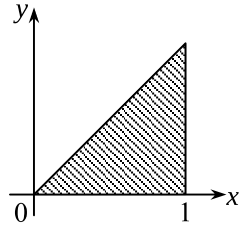
$$=\frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\cdot\binom{n}{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-m+k}}{\binom{2n}{m}p^m(1-p)^{2n-m}}=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}},\quad k=l,l+1,\cdots,r,$$

其中 $l=\max\{0, m-n\}$，$r=\min\{m, n\}$.

5．设二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求条件密度函数 $p(y|x)$.



解：当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$p_X(x)=0$，

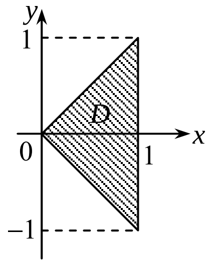
当 $0<x<1$ 时，$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^x 3x\,dy=3x^2$，

则 $p_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故当 $0<x<1$ 时，$p_X(x)>0$，条件密度函数 $p_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

6． 设二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & |\,y\,|<x, 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



求条件密度函数 $p(x\,|\,y)$.

解：当 $y\le -1$ 或 $y\ge 1$ 时，$p_Y(y)=0$，

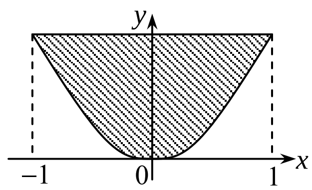
当 $-1<y\le 0$ 时， $p_Y(y)=\int_{-y}^{1}1dx=1+y$，当 $0<y<1$ 时， $p_Y(y)=\int_{y}^{1}1dx=1-y$，

则 $p_Y(y)=\begin{cases}1-|\,y\,|, & -1<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

故当 $-1<y<1$ 时，$p_Y(y)>0$，条件密度函数 $p_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|\,y\,|}, & |\,y\,|<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

7． 设二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



求条件概率 $P\{Y\ge 0.75\,|\,X=0.5\}$.

解：当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$p_X(x)=0$，

当 $-1\le x\le 1$ 时， $p_X(x)=\int_{x^2}^{1}\dfrac{21}{4}x^2ydy=\dfrac{21}{8}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}=\dfrac{21}{8}(x^2-x^6)$，

则 $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}(x^2-x^6), & -1\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

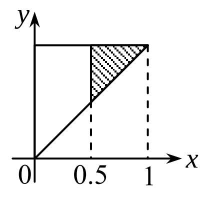
当 $-1<x<1$ 时，$p_X(x)>0$，条件密度函数 $p_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

即 $p_{Y|X}(y\,|\,x=0.5)=\begin{cases}\dfrac{2y}{0.9375}, & 0.25\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

故 $P\{Y\ge 0.75\,|\,X=0.5\}=\int_{0.75}^{1}\dfrac{2y}{0.9375}dy=\dfrac{1}{0.9375}y^2\Big|_{0.75}^{1}=\dfrac{1}{0.9375}\times 0.4375=\dfrac{7}{15}$.

8． 已知随机变量 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



在给定 $Y=y$ 条件下，随机变量 X 的条件密度函数为

$$p_{X|Y}(x\,|\,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求概率 $P\{X>0.5\}$.

解：因 (X, Y) 的联合密度函数为

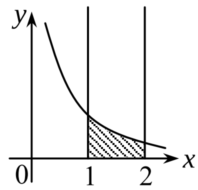
$$p(x,y)=p_Y(y)p_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^{1}dx\int_{x}^{1}15x^2y\,dy=\int_{0.5}^{1}dx\cdot\frac{15}{2}x^2y^2\Big|_x^1=\int_{0.5}^{1}\left(\frac{15}{2}x^2-\frac{15}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x^5\right)\Bigg|_{0.5}^{1}$

$$=\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{5}{16}-\frac{3}{64}\right)=\frac{47}{64}.$$

9．设随机变量 X 服从 (1, 2) 上的均匀分布，在 $X = x$ 的条件下，随机变量 Y 的条件分布是参数为 x 的指数分布，证明：XY 服从参数为 1 的指数分布．

证：因 X 密度函数为



$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在 $X = x$ 的条件下，Y 的条件密度函数为

$$p_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^{-xy}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

则 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}x\,\mathrm{e}^{-xy}, & 1<x<2,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 $Z = XY$，

当 $z\le 0$ 时，有 $F_Z(z) = 0$，

当 $z>0$ 时，有 $F_Z(z)=P\{Z=XY\le z\}=\int_1^2dx\int_0^{\frac{z}{x}}x\,\mathrm{e}^{-xy}\,dy=\int_1^2dx\cdot(-\mathrm{e}^{-xy})\Big|_0^{\frac{z}{x}}=\int_1^2(1-\mathrm{e}^{-z})dx=1-\mathrm{e}^{-z}$，

即 $Z = XY$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}\qquad p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

故 $Z = XY$ 服从参数为 1 的指数分布．

10．设二维离散随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

X \ Y	0	1	2	3
0	0	0.01	0.01	0.01
1	0.01	0.02	0.03	0.02
2	0.03	0.04	0.05	0.04
3	0.05	0.05	0.05	0.06
4	0.07	0.06	0.05	0.06
5	0.09	0.08	0.06	0.05

试求 $E(X\mid Y=2)$ 和 $E(Y\mid X=0)$．

解：因 $P\{Y=2\} = 0.01 + 0.03 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.06 = 0.25$，

则条件分布列 $(X\mid Y=2)$ 为

$X\mid Y=2$	0	1	2	3	4	5
P	0.04	0.12	0.2	0.2	0.2	0.24

故 $E(X\mid Y=2)=0\times 0.04+1\times 0.12+2\times 0.2+3\times 0.2+4\times 0.2+5\times 0.24=3.12$；

因 $P\{X=0\}=0+0.01+0.01+0.01=0.03$，

则条件分布列 $(Y\mid X=0)$ 为

$Y\mid X=0$	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

故 $E(Y\mid X=0)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$.

11．设 X 与 Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，试求 $E(X\mid X+Y=n)$.

解：因 X 与 Y 的概率函数分别为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1},\quad p\{Y=k\}=\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2},\quad k=1,2,\cdots,$$

则 $P\{X+Y=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n,$$

当 $0\le k\le n$ 时，$P\{X=k\mid X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$

$$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},$$

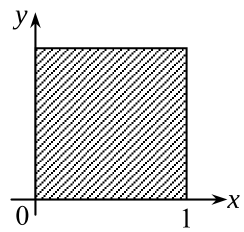
即在 $X+Y=n$ 的条件下，X 服从二项分布 $b\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$，

故条件数学期望 $E(X\mid X+Y=n)=n\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

12．设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x,y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $E(X\mid Y=0.5)$.



解：当 $0<y<1$ 时，$p_Y(y)=\int_0^1(x+y)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\Big|_0^1=0.5+y$，

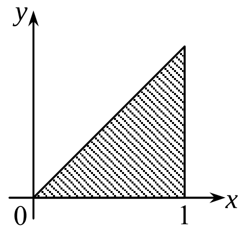
则 $p(x\mid y=0.5)=\frac{p(x,0.5)}{p_Y(0.5)}=\begin{cases}x+0.5, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故 $E(X\mid Y=0.5)=\int_0^1 x\cdot(x+0.5)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$.

13．设二维连续随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}24(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试在 $0<y<1$ 时，求 $E(X|Y=y)$.



解：当 $0<y<1$ 时， $p_Y(y)=\int_y^1 24(1-x)y dx=-12(1-x)^2 y\Big|_y^1=12y(1-y)^2$，

则 $0<y<1$ 时， $p(x|y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2(1-x)}{(1-y)^2}, & y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故 $E(X|Y=y)=\int_y^1 x\cdot\dfrac{2(1-x)}{(1-y)^2}dx=\dfrac{1}{(1-y)^2}\left(x^2-\dfrac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_y^1=\dfrac{1}{(1-y)^2}\left[(1-y^2)-\dfrac{2}{3}(1-y^3)\right]$

$$=\frac{1}{1-y}\cdot\left[(1+y)-\frac{2}{3}(1+y+y^2)\right]=\frac{1+y-2y^2}{3(1-y)}=\frac{1+2y}{3}.$$

14．设 $E(Y), E(h(Y))$ 存在，试证 $E(h(Y)|Y)=h(Y)$.

证：在 $Y=y$ 条件下，$h(Y)=h(y)$为常数，即 $E(h(Y)|Y=y)=h(y)$，

故 $E(h(Y)|Y)=h(Y)$.

15．设以下所涉及的数学期望均存在，试证：

（1）$E(g(X)Y|X)=g(X)E(Y|X)$；

（2）$E(XY)=E(XE(Y|X))$；

（3）$\mathrm{Cov}(X, E(Y|X))=\mathrm{Cov}(X, Y)$.

证：（1）在 $X=x$ 条件下，$g(X)=g(x)$为常数，

则 $E(g(X)Y|X=x)=E(g(x)Y|X=x)=g(x)E(Y|X=x)$；

故 $E(g(X)Y|X)=g(X)E(Y|X)$；

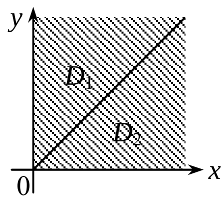
（2）因 $E(XY|X)=XE(Y|X)$，故 $E(XE(Y|X))=E(E(XY|X))=E(XY)$；

（3）$\mathrm{Cov}(X, E(Y|X))=E(XE(Y|X))-E(X)E(E(Y|X))=E(XY)-E(X)E(Y)=\mathrm{Cov}(X, Y)$.

16．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，都服从参数为λ的指数分布．令

$$Z=\begin{cases}3X+1, & X\ge Y,\\ 6Y, & X<Y.\end{cases}$$

求 $E(Z)$.



解：因 X 与 Y 独立，且 X 与 Y 的密度函数分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad p_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

则 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $E(Z)=\iint\limits_{D_1}6y\cdot\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy+\iint\limits_{D_2}(3x+1)\cdot\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y 6y\cdot\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dx+\int_0^{+\infty}dx\int_0^x(3x+1)\cdot\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dy$$

$$=\int_0^{+\infty} dy\cdot 6y\cdot[-\lambda\,e^{-\lambda(x+y)}]\Big|_0^y+\int_0^{+\infty} dx\cdot(3x+1)\cdot[-\lambda\,e^{-\lambda(x+y)}]\Big|_0^x$$

$$=\int_0^{+\infty} 6y\cdot\lambda(e^{-\lambda y}-e^{-2\lambda y})dy+\int_0^{+\infty}(3x+1)\cdot\lambda(e^{-\lambda x}-e^{-2\lambda x})dx$$

$$=\int_0^{+\infty} 6y\cdot d(-e^{-\lambda y}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda y})+\int_0^{+\infty}(3x+1)\cdot d(-e^{-\lambda x}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda x})$$

$$=6y(-e^{-\lambda y}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda y})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-e^{-\lambda y}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda y})\cdot 6dy$$

$$+(3x+1)(-e^{-\lambda x}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda x})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-e^{-\lambda x}+\frac{1}{2}e^{-2\lambda x})\cdot 3dx$$

$$=0-6\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}-\frac{1}{4\lambda}e^{-2\lambda y}\right)\Bigg|_0^{+\infty}+0-\left(-1+\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{1}{4\lambda}e^{-2\lambda x}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=6\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{4\lambda}\right)+\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{4\lambda}\right)=\frac{1}{2}+\frac{27}{4\lambda}.$$

17．设随机变量 $X\sim N(\mu, 1)$，$Y\sim N(0, 1)$，且 X 与 Y 相互独立，令

$$I=\begin{cases}1, & Y<X;\\ 0, & X\le Y.\end{cases}$$

试证明：

（1）$E(I\,|\,X=x)=\Phi(x)$；

（2）$E(\Phi(X))=P\{Y<X\}$；

（3）$E(\Phi(X))=\Phi(\mu/\sqrt{2})$.

（提示：$X-Y$ 的分布是什么？）

证：（1）记示性函数

$$I_{Y<x}=\begin{cases}1, & Y<x;\\ 0, & X\le x.\end{cases}$$

故 $E(I\,|\,X=x)=E(I_{Y<x})=\int_{-\infty}^{+\infty}I_{y<x}\,p_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy=\Phi(x)$；

（2）$E(\Phi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)p_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)\left[\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}p_X(x)p_Y(y)dydx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}p(x,y)dydx=P\{Y<X\};$$

（3）因 $X\sim N(\mu, 1)$，$Y\sim N(0, 1)$，且 X 与 Y 相互独立，有 $X-Y$ 服从正态分布，

则 $E(X-Y)=E(X)-E(Y)=\mu-0=\mu$，$\text{Var}(X-Y)=\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)=2$，即 $X-Y\sim N(\mu, 2)$，

故 $E(\Phi(X))=P\{Y<X\}=P\{X-Y>0\}=1-F_{X-Y}(0)=1-\Phi\left(\frac{0-\mu}{\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)$.

18．设 $X_1, X_2, \cdots$为独立同分布的随机变量序列，且方差存在．随机变量 N 只取正整数值，$\text{Var}(N)$ 存在，且 N 与$\{X_n\}$独立．证明

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathrm{Var}(N)[E(X_1)]^2 + E(N)\,\mathrm{Var}(X_1)\,.$$

证：因 $X_1, X_2, \cdots$为独立同分布的随机变量序列，且方差存在，有 $E(X_i) = E(X_1)$，$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X_1)$，

则 $E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right) P\{N=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) P\{N=n\}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right) P\{N=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nE(X_1)\cdot P\{N=n\} = E(X_1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot P\{N=n\} = E(X_1)E(N)\,,$$

且 $E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] = E\left\{E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 \middle| N\right]\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 \middle| N=n\right] P\{N=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] P\{N=n\}$，

因 $E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2\sum_{1\le i<j\le n} E(X_i)E(X_j)$

$$= n\{\mathrm{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2\} + 2\times\frac{n(n-1)}{2}[E(X_1)]^2 = n\,\mathrm{Var}(X_1) + n^2[E(X_1)]^2\,,$$

则 $E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\{n\,\mathrm{Var}(X_1) + n^2[E(X_1)]^2\} P\{N=n\}$

$$= \mathrm{Var}(X_1)\sum_{n=1}^{\infty} nP\{N=n\} + [E(X_1)]^2\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P\{N=n\}$$

$$= \mathrm{Var}(X_1)\,E(N) + [E(X_1)]^2 E(N^2) = \mathrm{Var}(X_1)\,E(N) + [E(X_1)]^2\{\mathrm{Var}(N) + [E(N)]^2\},$$

故 $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] - \left[E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right]^2$

$$= \mathrm{Var}(X_1)\,E(N) + [E(X_1)]^2\{\mathrm{Var}(N) + [E(N)]^2\} - [E(X_1)E(N)]^2$$
$$= \mathrm{Var}(X_1)\,E(N) + [E(X_1)]^2\,\mathrm{Var}(N).$$