

材料力学

第十四章 静不定结构

习 题 课

力法及正则方程

力法的正则方程:

[illegible]

δ_{ij} 表示 X_i 作用点沿着 X_i 方向由于 $\bar{X}_j = 1$ 单独

作用时所产生的位移

Δ_{iF} 表示 X_i 作用点沿着 X_i 方向由于实际载荷单独

作用所产生的位移

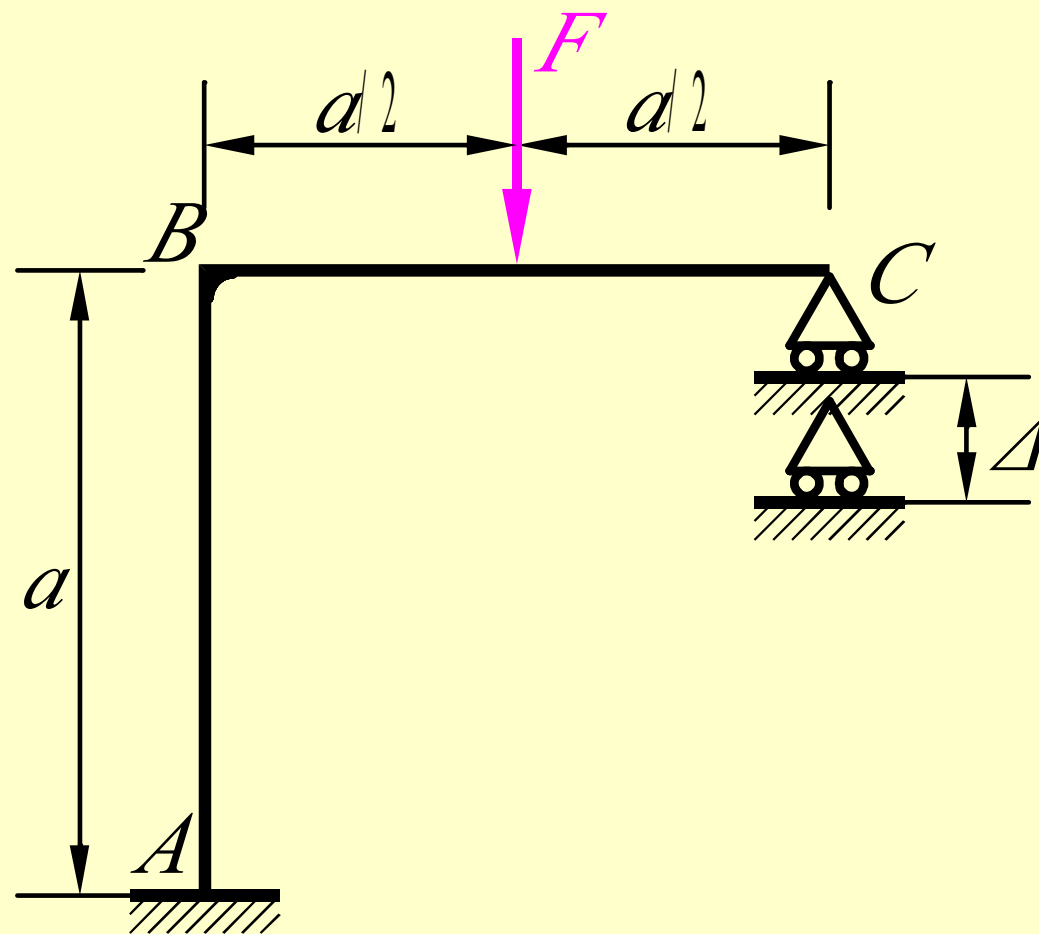
设 $\begin{cases} \bar{X}_i = 1 \text{引起的弯矩为 } \bar{M}_i \\ \bar{X}_j = 1 \text{引起的弯矩为 } \bar{M}_j \\ \text{实际载荷引起的弯矩为 } M_F \end{cases}$

$$\text{则 } \delta_{ij} = \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx, \quad \Delta_{iF} = \int_l \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} dx$$

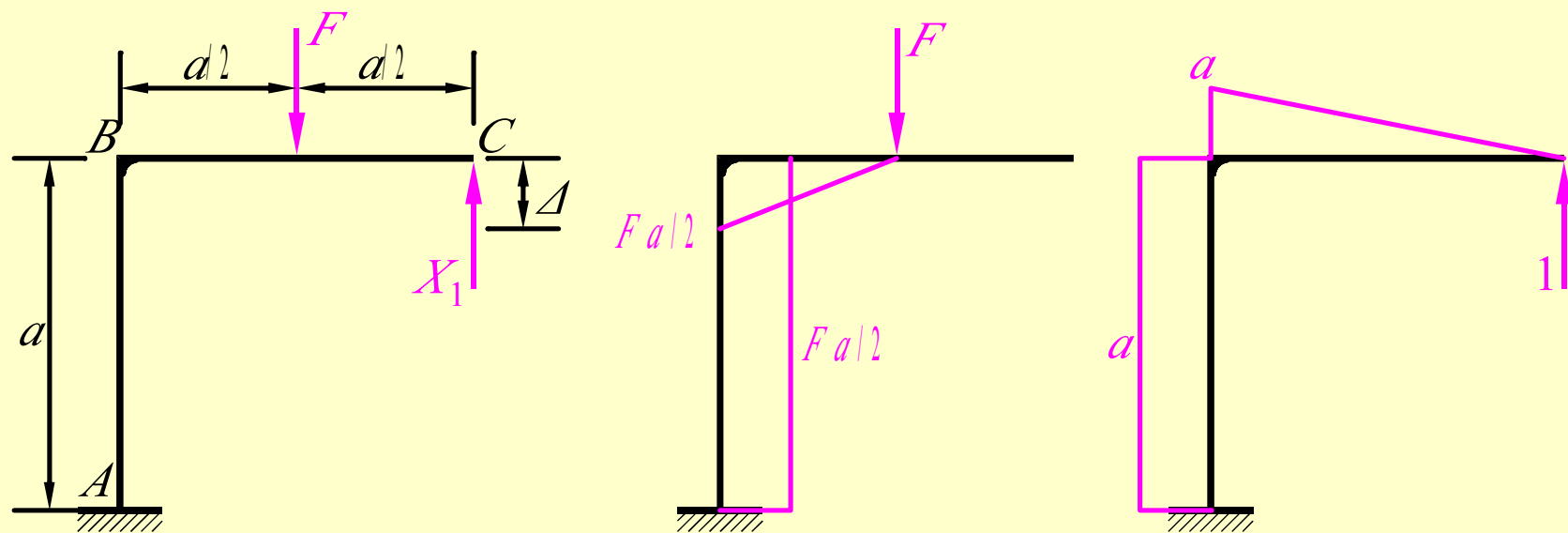
对于静不定桁架：

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{F}_{Ni,k} \bar{F}_{Nj,k} l_k}{E_k A_k}, \quad \Delta_{iF} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{F}_{Ni,k} F_{NF,k} l_k}{E_k A_k}$$

例1：刚架的弯曲刚度为 EI ，承受力 F 后，支座 C 有一下陷量 Δ ，试求刚架 C 处的反力。



解:

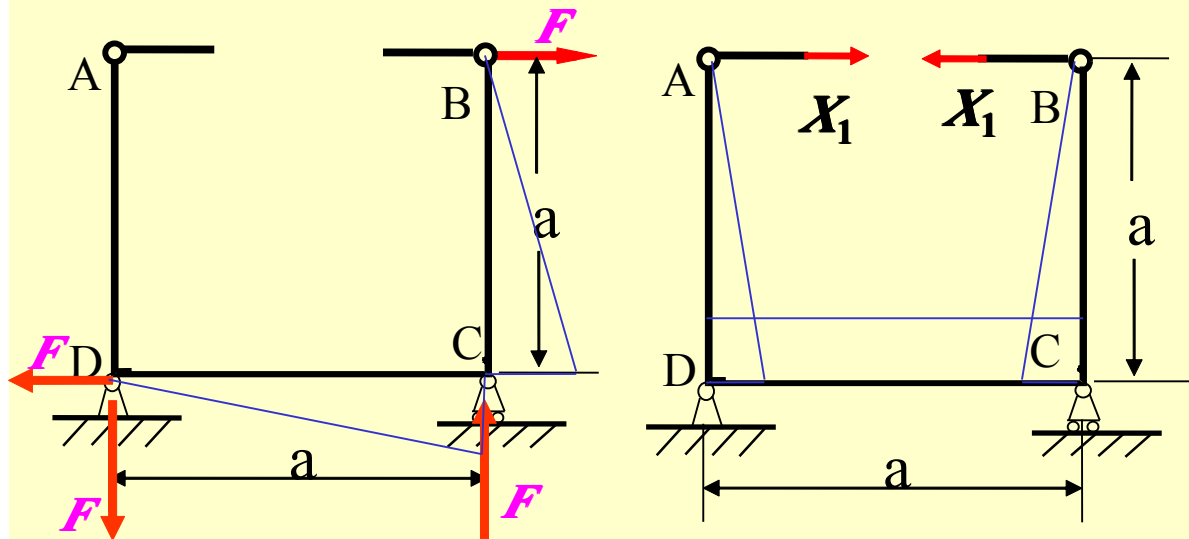


$$\delta_{11} = \frac{a^3}{EI} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{4a^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{Fa^3}{EI} \left[\frac{1}{8} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \right] = -\frac{29Fa^3}{48EI}$$

由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = -\Delta$ 得 $X_1 = \frac{29F}{64} - \frac{3EI\Delta}{4a^3}$

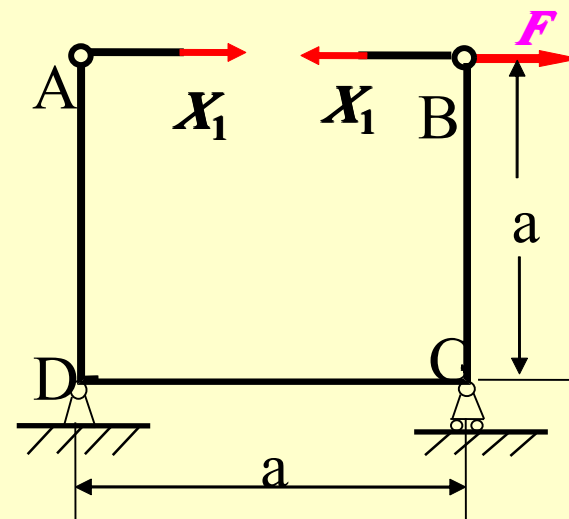
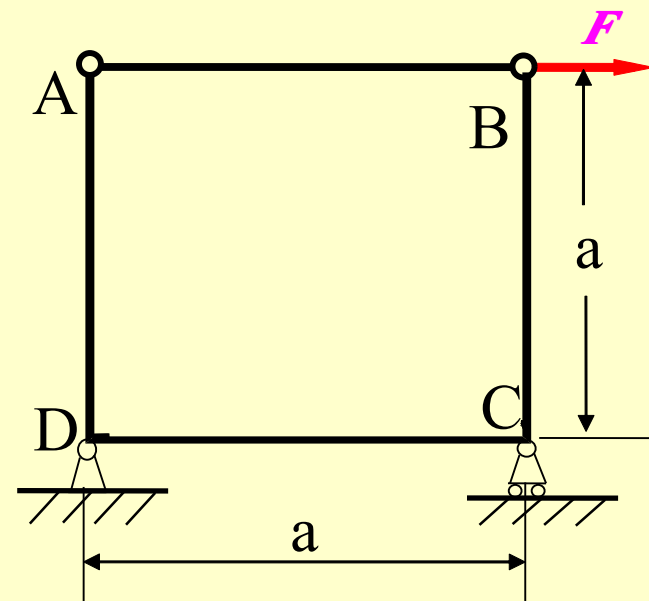
例2：刚架的弯曲刚度为 EI ，承受力 F 。
试求：刚架多余约束反力。



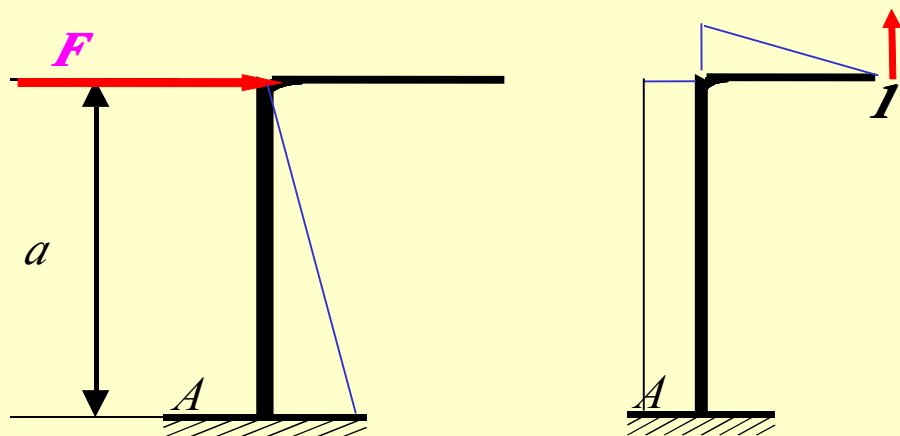
$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{a^2}{2} \times \frac{2a}{3} + a^3 \right) = \frac{5a^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{Fa^2}{2} \times \frac{2a}{3} + \frac{Fa^2}{2} \times a \right] = -\frac{5Fa^3}{6EI}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{F}{2}$$



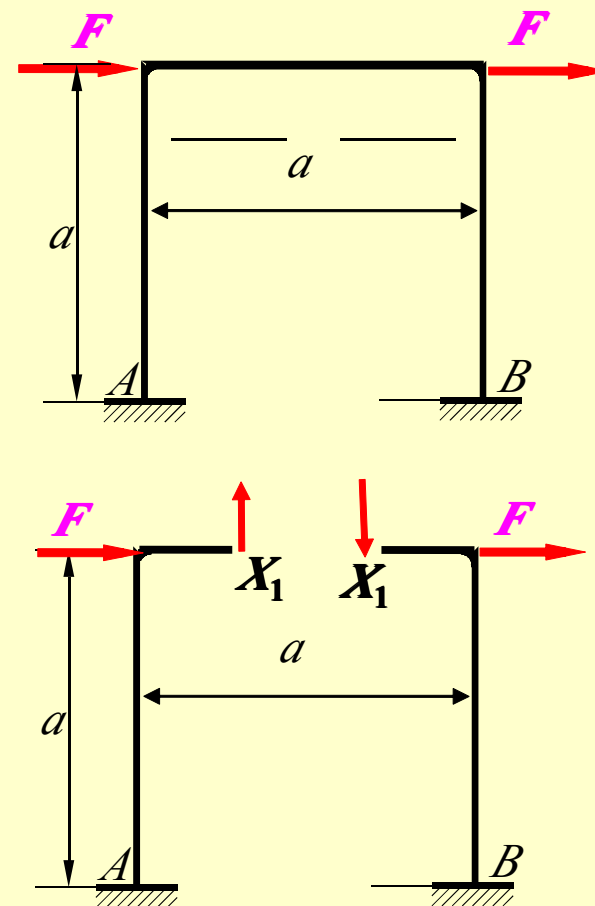
例3：刚架的弯曲刚度为 EI ，承受力 F 。
试求：刚架多余约束反力。



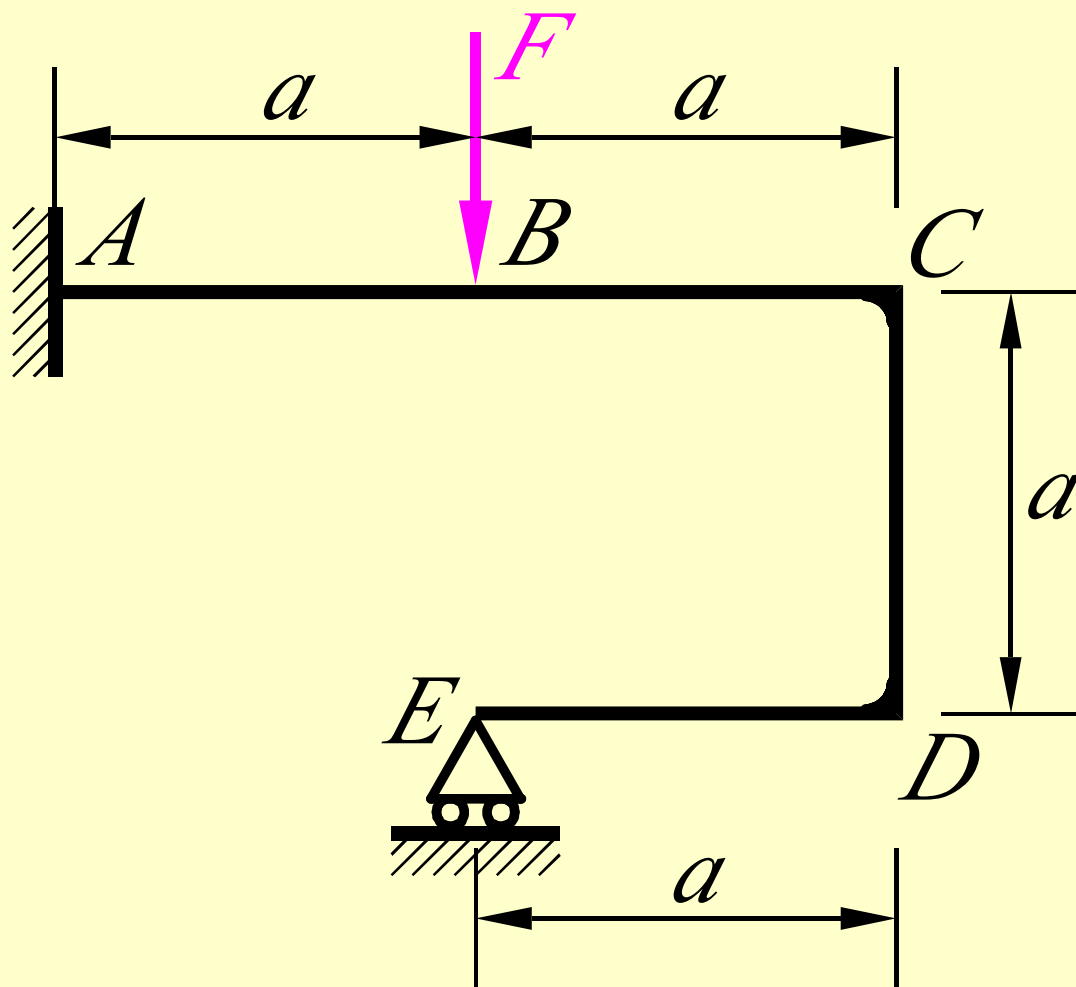
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{a^2}{8} \frac{2a}{3} \frac{a}{2} + \frac{a^3}{4} \right) = \frac{7a^3}{24EI}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \left[\frac{Fa^2}{2} \times \frac{a}{2} \right] = -\frac{Fa^3}{4EI}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{6F}{7}$$



例4：已知刚架的弯曲刚度为 EI ，试求刚架内最大弯矩及其作用位置。

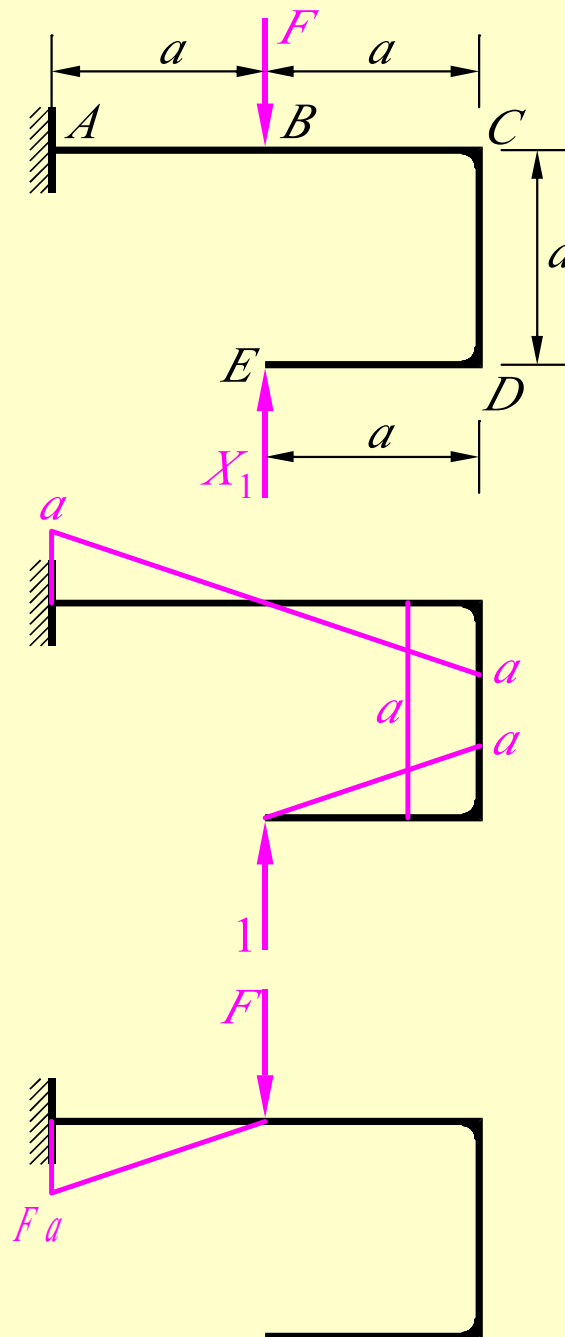


解：

$$\delta_{11} = \frac{2a^3}{EI}, \quad \Delta_{1F} = -\frac{Fa^3}{3EI}$$

由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得 $X_1 = \frac{F}{6} (\uparrow)$

$M_{\max} = \frac{5Fa}{6}$ 作用于固定端 **A**



例5：已知结构的弯曲刚度为 EI ，
试求对称轴上A截面的内力。

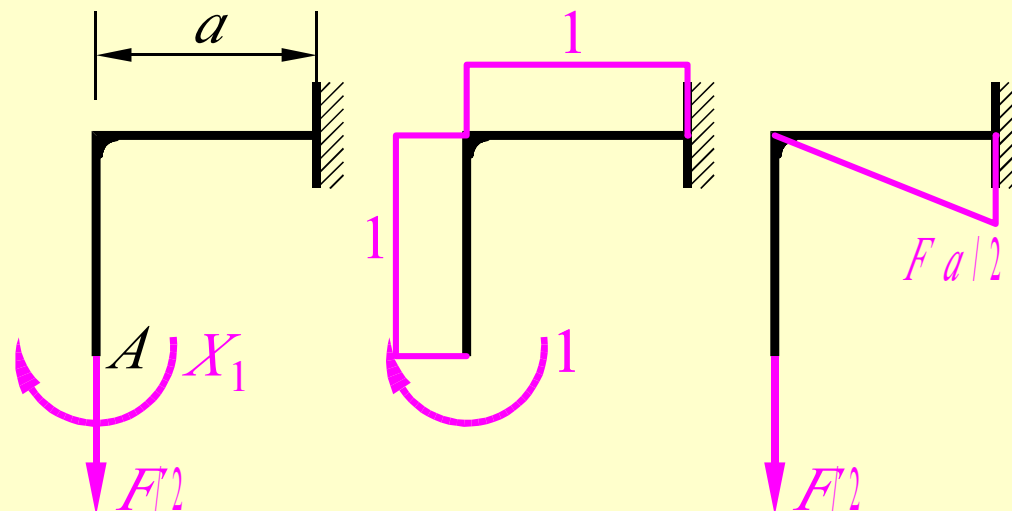
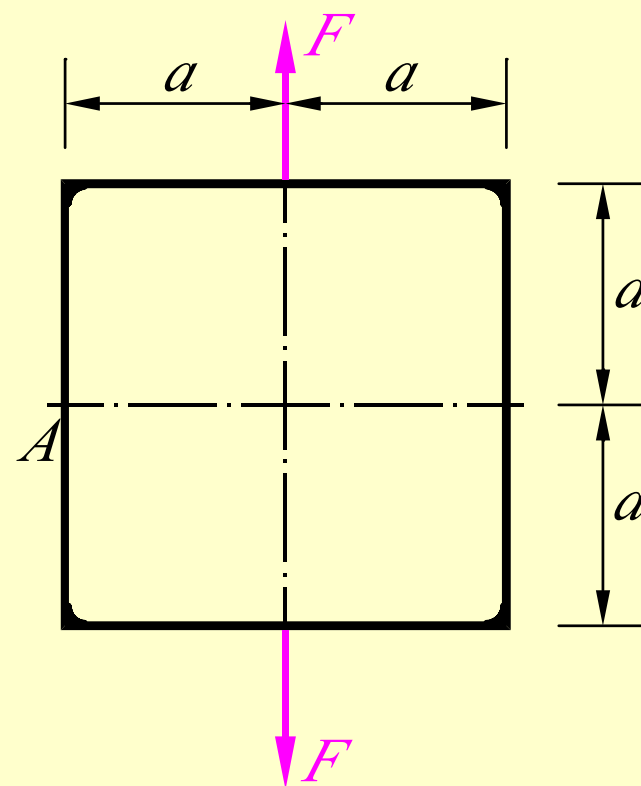
$$\text{解： } \delta_{11} = \frac{2a}{EI}, \quad \Delta_{1F} = -\frac{Fa^2}{4EI}$$

由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得

$$X_1 = \frac{Fa}{8}$$

$$\therefore F_{SA} = 0$$

$$F_{NA} = \frac{F}{2}, \quad M_A = \frac{Fa}{8}$$



例6：已知刚架的弯曲刚度为 EI 。
试求截面A处弯矩。

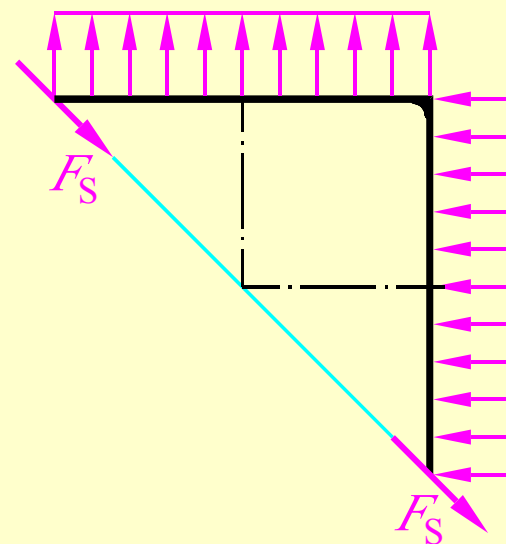
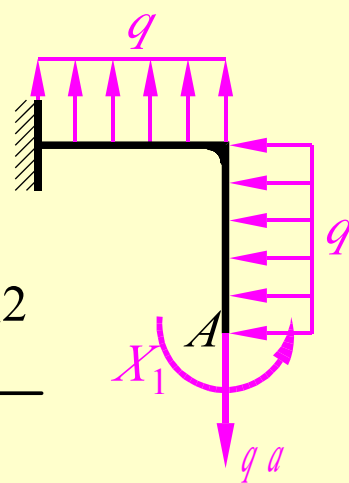
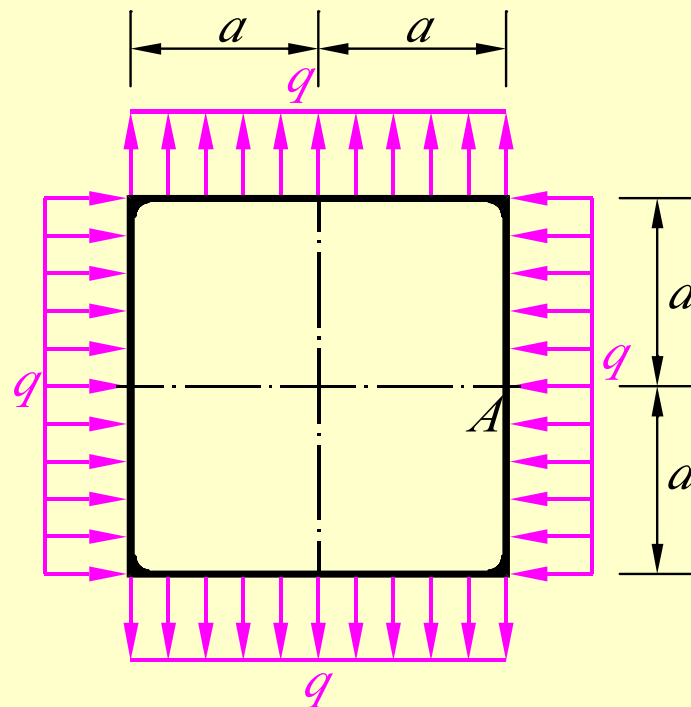
解： $\delta_{11} = \frac{2a}{EI}$, $\Delta_{1F} = -\frac{qa^3}{EI}$

由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得

$$M_A = X_1 = \frac{1}{2}qa^2$$

另解：

$$F_S = \sqrt{2}qa, \quad M_A = \frac{qa^2}{2}$$



例7: 1/4圆形曲杆ACB如图。半径为R，曲杆抗弯刚度为EI。求:A、B处的反力矩（只考虑杆件的弯曲变形）。

解： 一、 分析

B点为多余约束，解除多余约束以反力代替，形成基本静定系

使用莫尔积分，在任一横截面上，

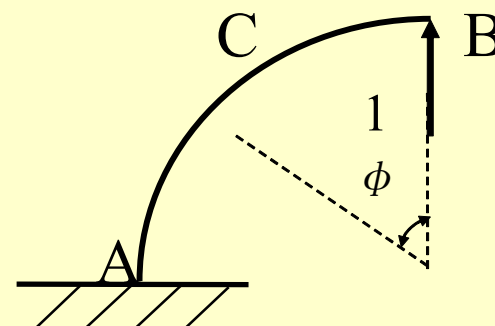
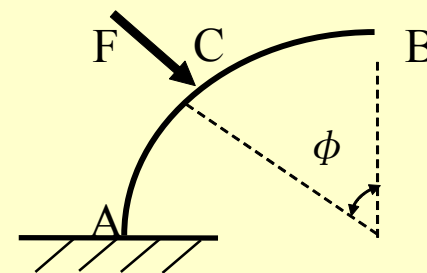
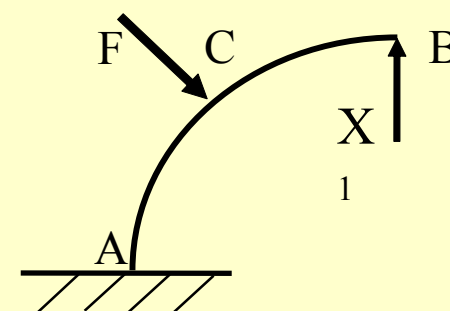
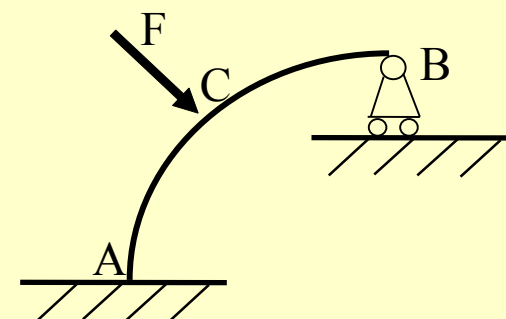
$$M = -FR\cos(\varphi - \pi/4) \quad \varphi \in [\pi/4, \pi/2]$$

$$\bar{M} = R\sin\varphi \quad \varphi \in [0, \pi/2]$$

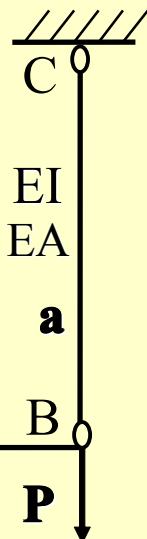
$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (R\sin\varphi)^2 R d\varphi = \frac{\pi R^3}{4EI}$$

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{M\bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(-FR\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right) (R\sin\varphi) R d\varphi$$

$$= -\frac{\pi FR^3}{8\sqrt{2}EI} \quad \therefore X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{F}{2\sqrt{2}} (\uparrow)$$

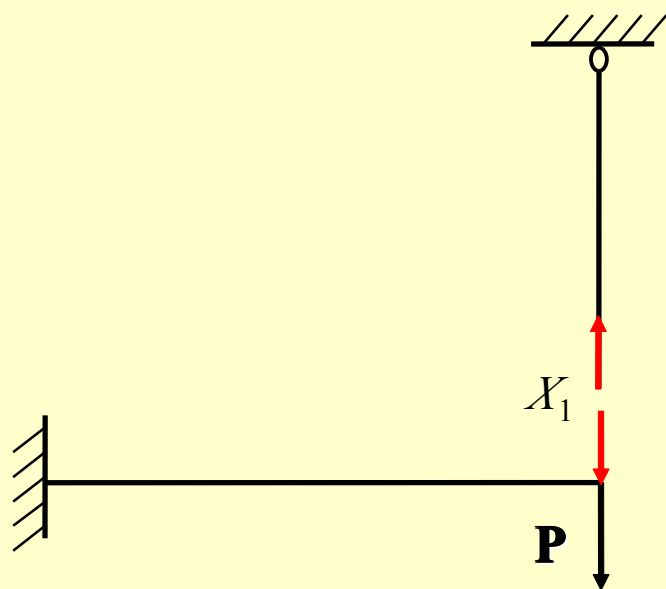


例8、求图示结构的约束反力



解: 1) 判断静不定种类及次数
约束反力一次静不定

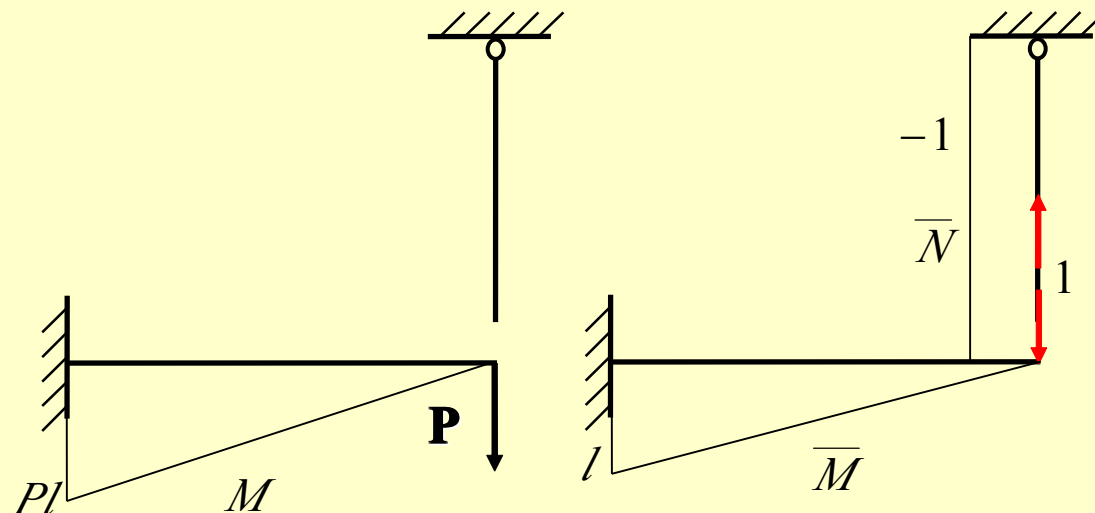
2) 解除B点约束, 建立静定基



3) 对静定基进行受力分析, 建立相当系统

4) 研究AB梁的B点与BC杆的B点的竖直相对线位移, 建立正则方程

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

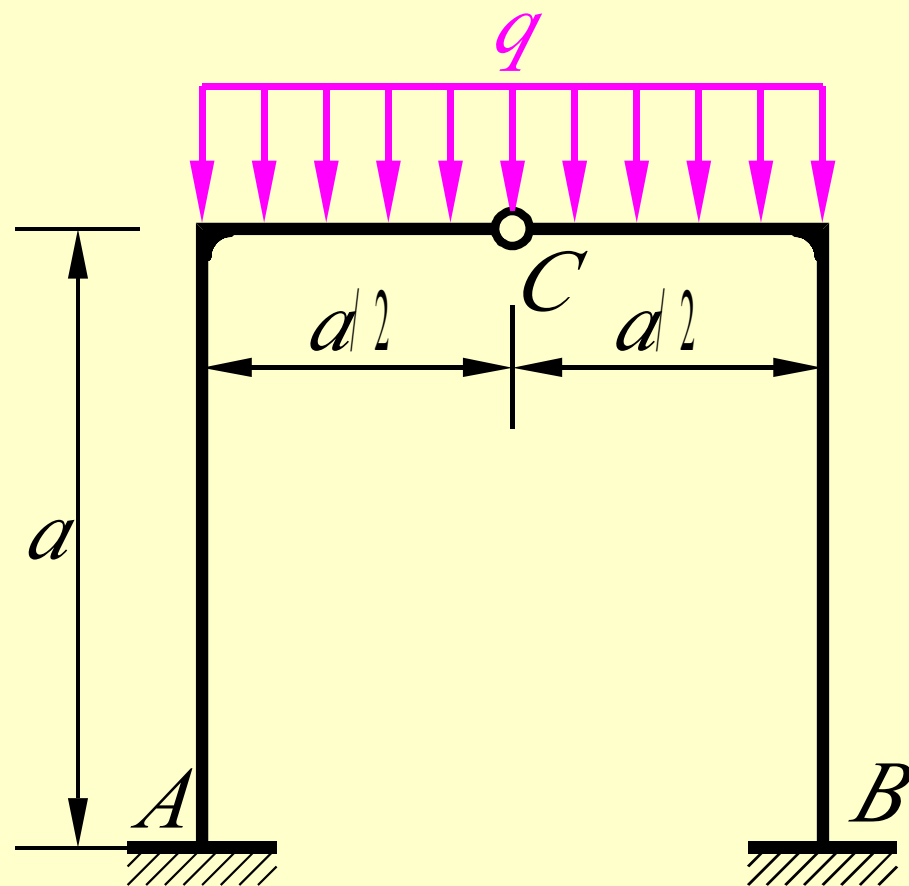


$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot Pl \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

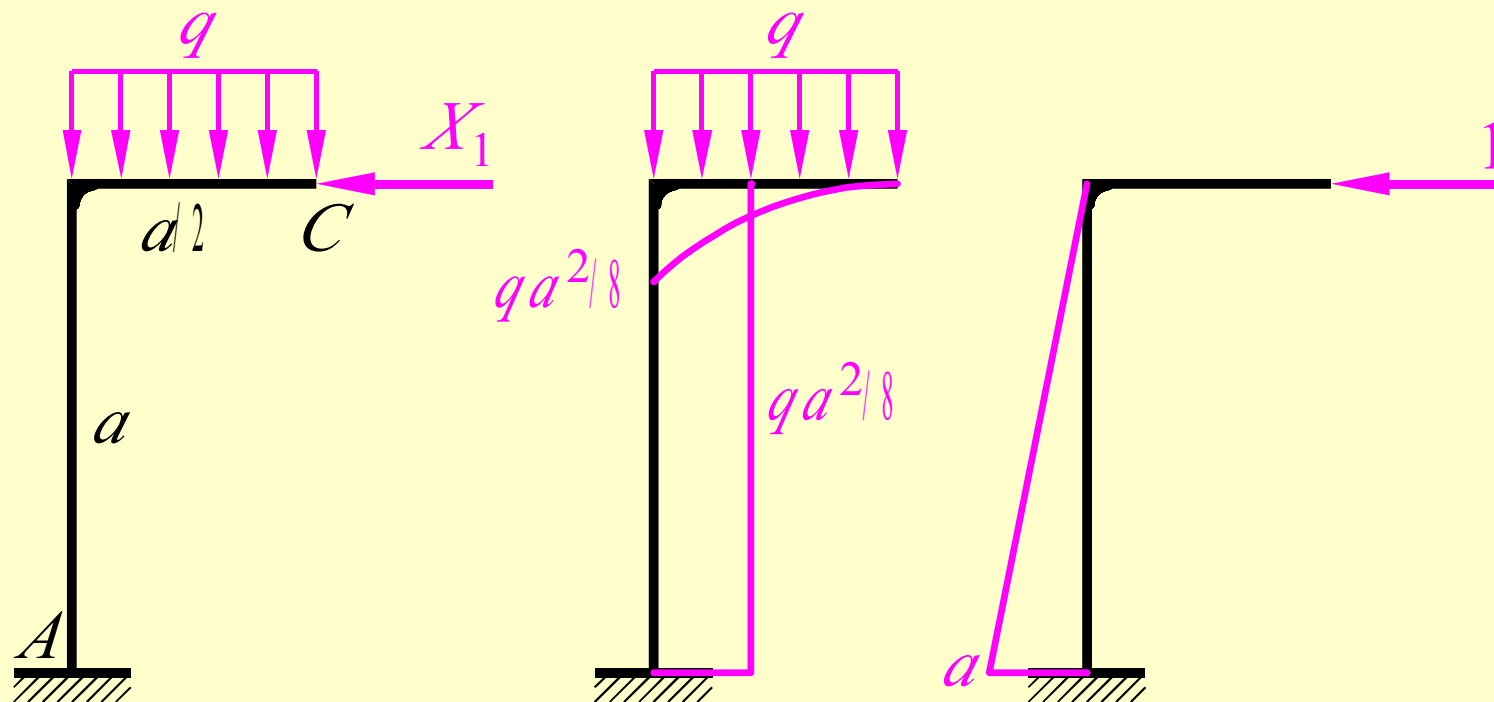
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) + \frac{1}{EA} \cdot (a \cdot 1 \cdot 1) = \frac{l^3}{3EI} + \frac{a}{EA}$$

→ X_1

例9：平面刚架受力如图，各杆 EI 常数。试求 C 处的约束力及支座 A 、 B 的约束反力。



解:

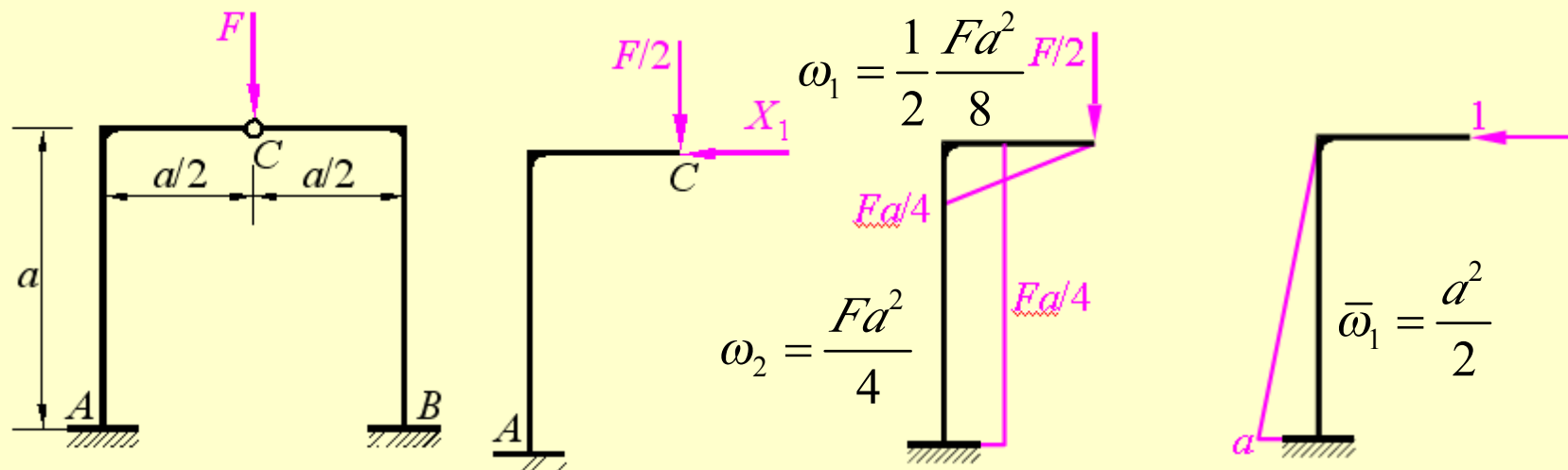


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} \right) = \frac{a^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{qa^2}{8} \right) = -\frac{qa^4}{16EI}$$

由力法正则方程 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得 $X_1 = \frac{3qa}{16}$

例10：平面刚架受力如图，各杆 EI 常数。试求 C 处的约束力及支座 A 、 B 的约束反力。

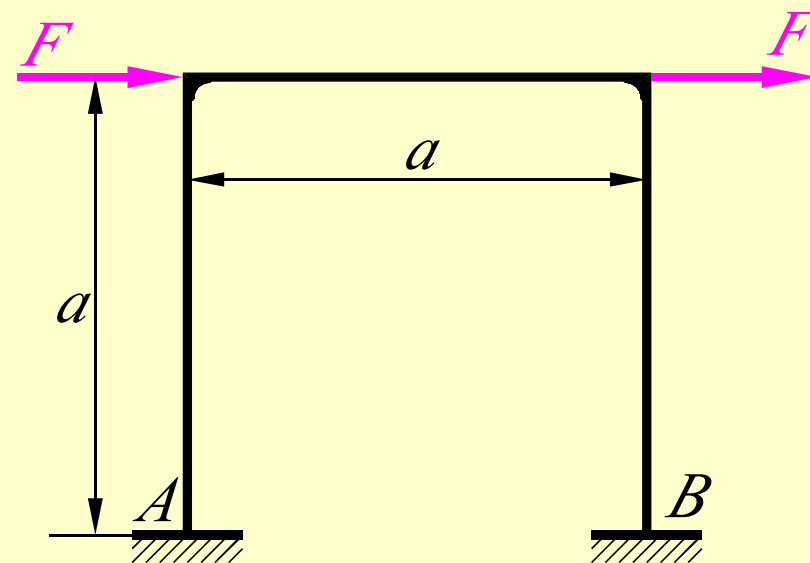


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{a^2}{2} \frac{2a}{3} \right) = \frac{a^3}{3EI}$$

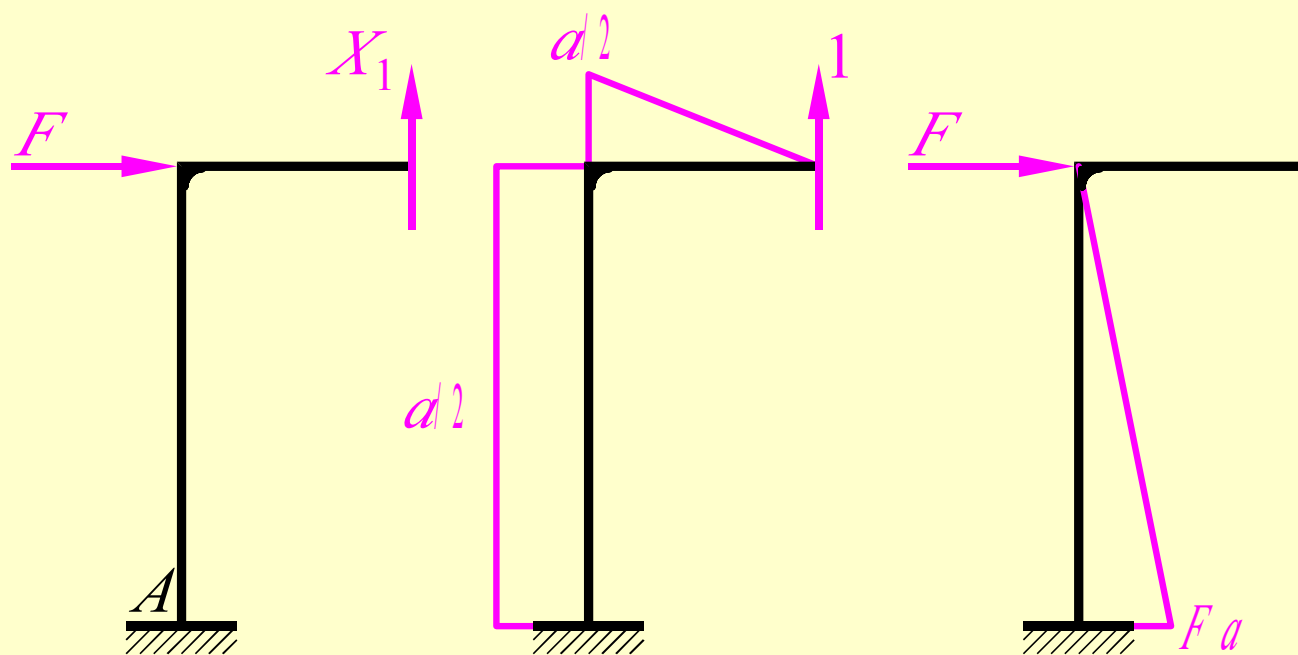
$$\Delta_{1F} = -\frac{Fa^2}{4EI} \frac{a}{2} = -\frac{Fa^3}{8EI}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{Fa^3}{8EI}}{\frac{a^3}{3EI}} = \frac{3F}{8}$$

例11：图示刚架 EI 为常量，画出刚架的弯矩图。



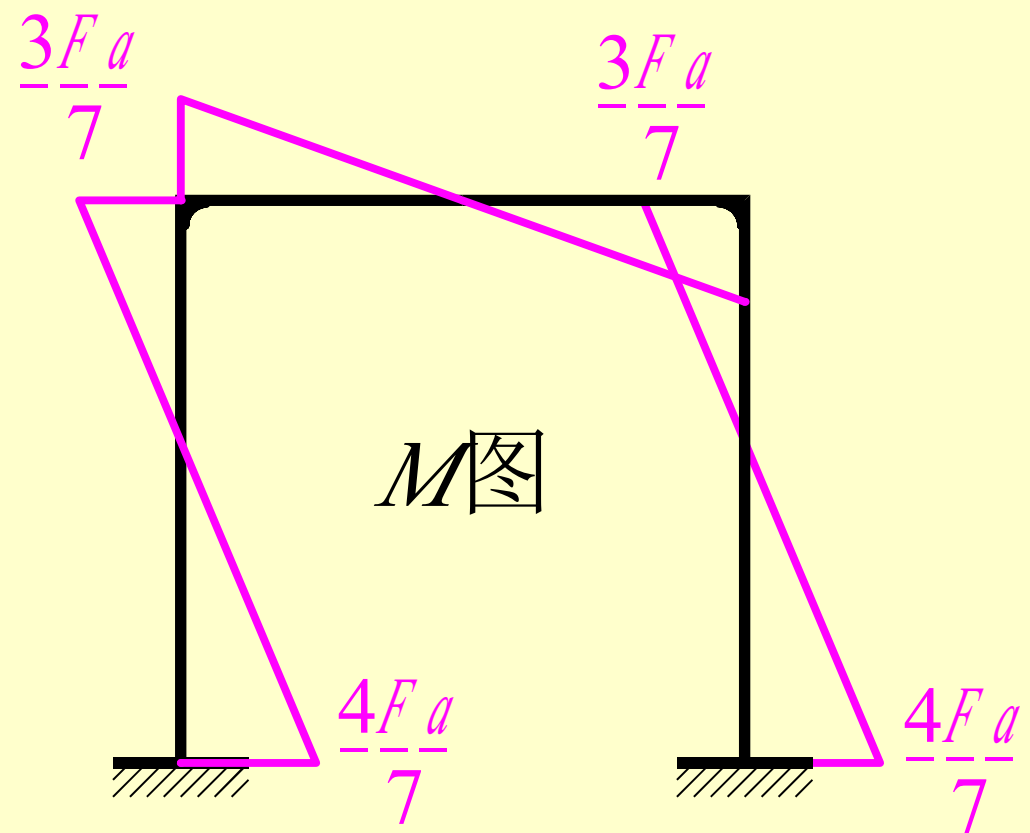
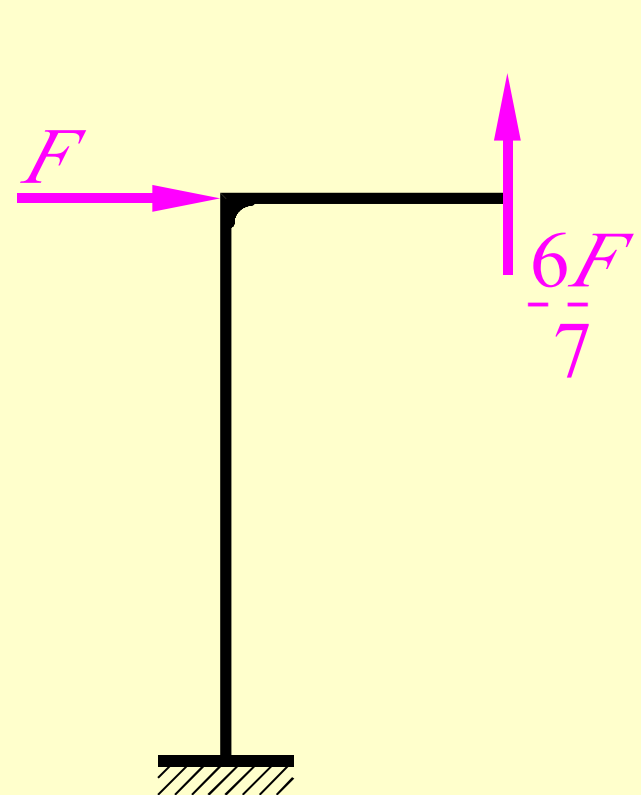
解：



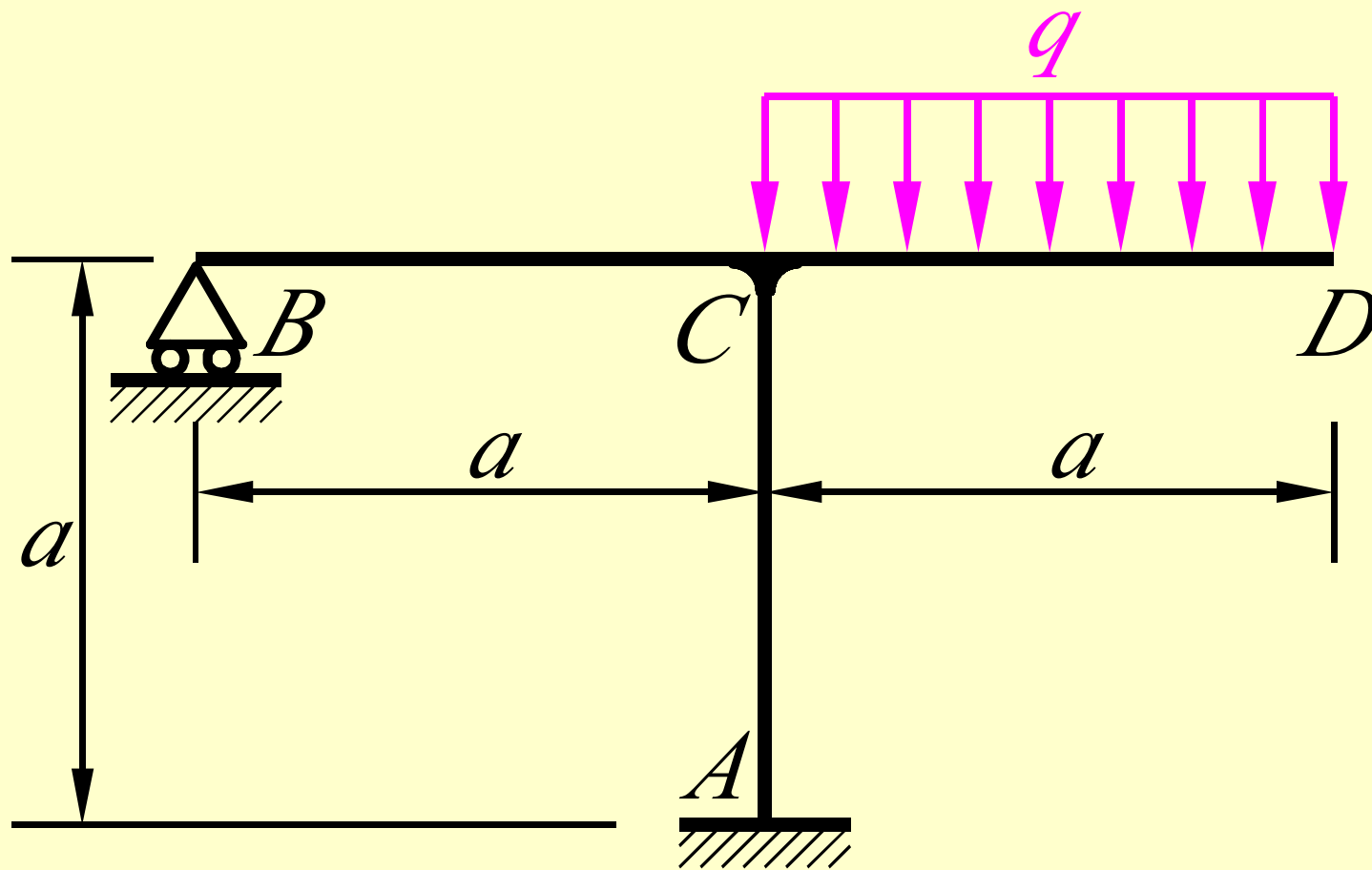
$$\delta_{11} = \frac{7a^3}{24EI}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{Fa^3}{4EI}$$

$$X_1 = \frac{6F}{7}$$



例12：试求图示平面刚架的支座反力。已知各杆 EI 常数。



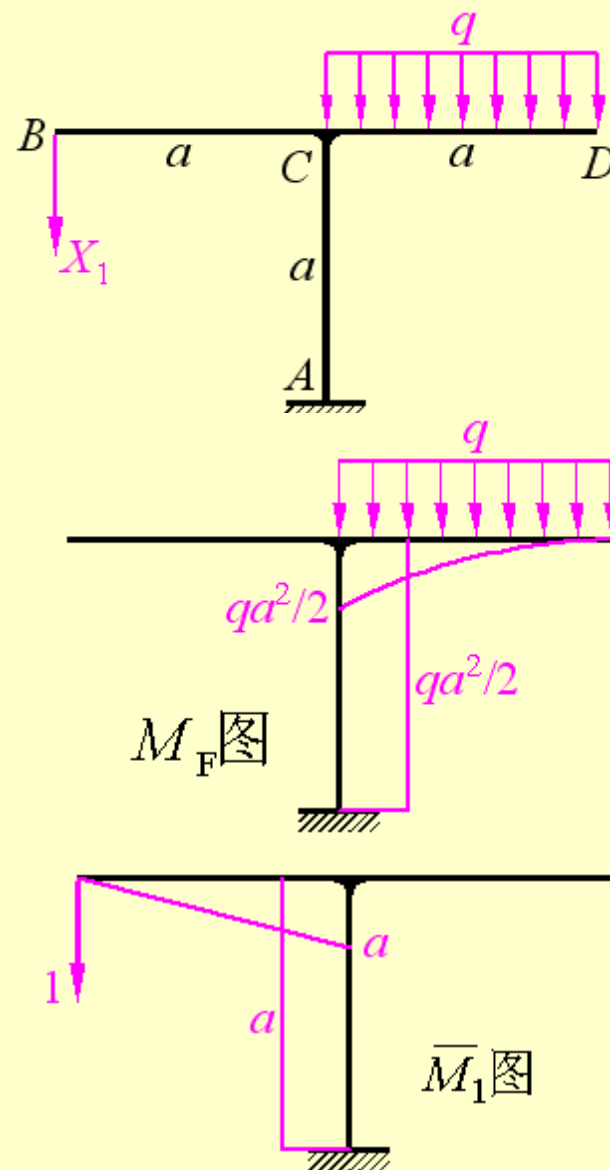
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} + a^2 \cdot a \right) = \frac{4a^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{qa^3}{2} \cdot a \right) = -\frac{qa^4}{2EI}$$

由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得 $X_1 = \frac{3qa}{8}$

$$F_{Bx} = 0, \quad F_{By} = \frac{3qa}{8} (\downarrow)$$

$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} = \frac{11qa}{8} (\uparrow), \quad M_A = \frac{qa^2}{8} (\text{逆时针})$$



例13：已知刚架的弯曲刚度为 EI 。
试求支座 B 处的反力。

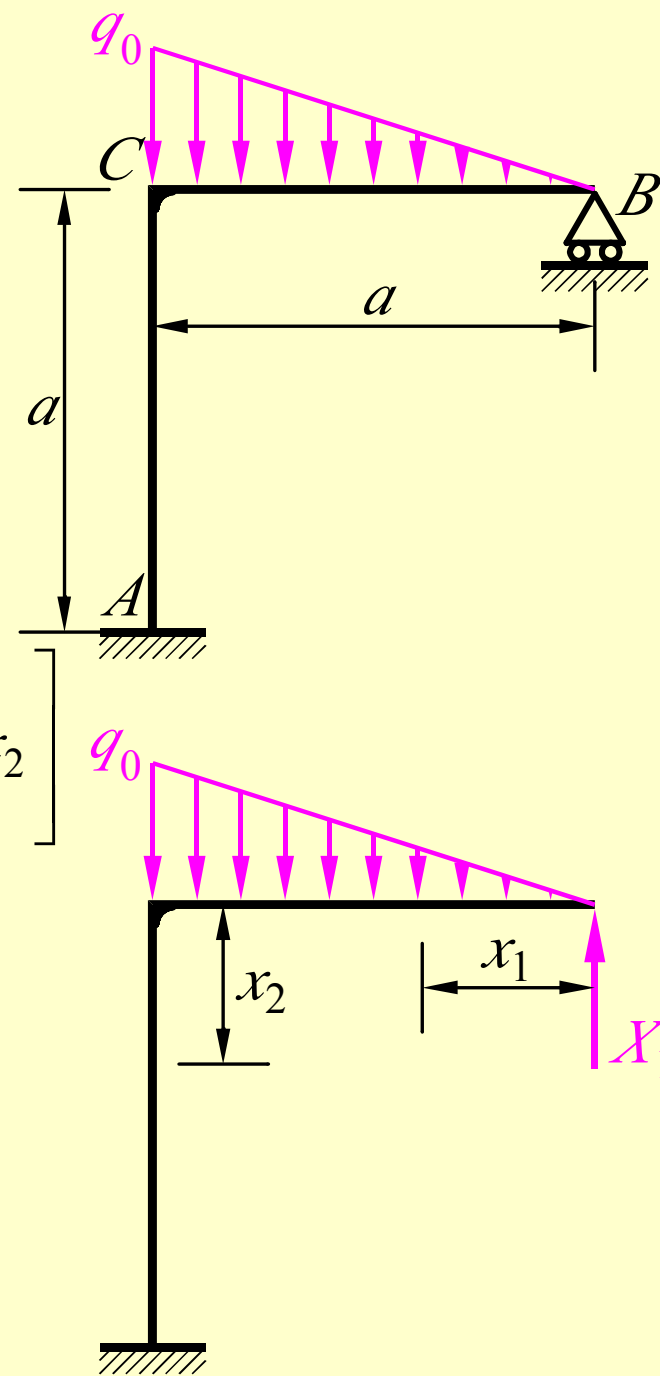
解：

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^a x_1^2 dx_1 + \int_0^a a^2 dx_2 \right) = \frac{4a^3}{3EI}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(-\frac{q_0 x_1^3}{6a} \right) x_1 dx_1 + \int_0^a \left(-\frac{q_0 a^2}{6} \right) a dx_2 \right] \\ &= -\frac{q_0 a^4}{5EI} \end{aligned}$$

由 $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得

$$F_{By} = X_1 = \frac{3}{20} q_0 a \quad (\uparrow)$$



例14 等截面半圆形杆受力如图所示，EI为常数，略去剪力、轴力对变形影响，求A，B固定端处的支座反力和C处垂直位移

解：从C截开可知此结构对C-C轴为反对称结构，对称截面上仅有反对称内力—剪力。故为一次超静定问题。

(C左面) 截面上外力分配P/2

$$N_C = \frac{P}{2}, Q_C = X_1$$

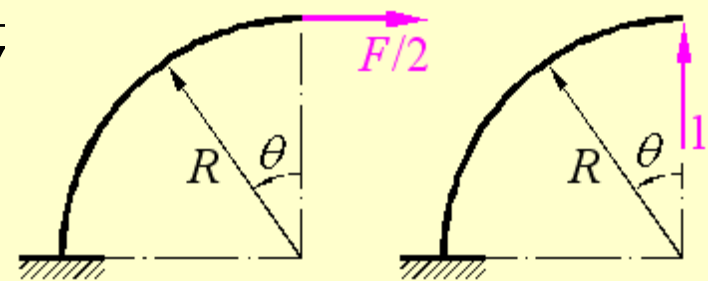
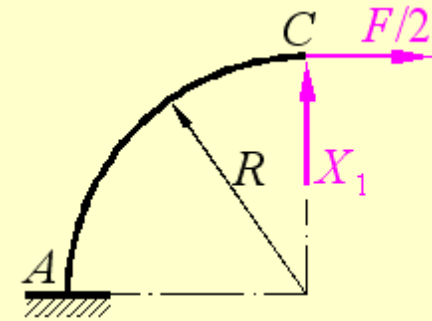
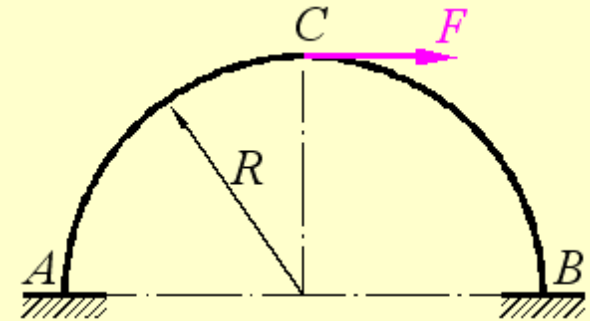
$$\Delta v_C = \Delta_1 = 0, \quad \Delta_1 = \Delta_{1P} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$M_P = -\frac{1}{2} PR(1 - \cos \varphi) \quad M_0 = R \sin \varphi$$

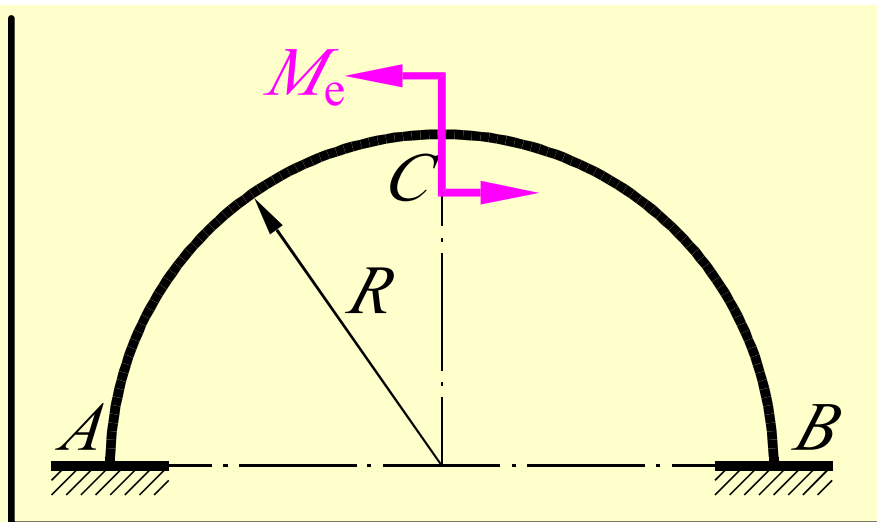
$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{2} PR^2 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi \cdot R d\varphi = -\frac{PR^3}{4EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin^2 \varphi \cdot R d\varphi = \frac{\pi R^3}{4EI}$$

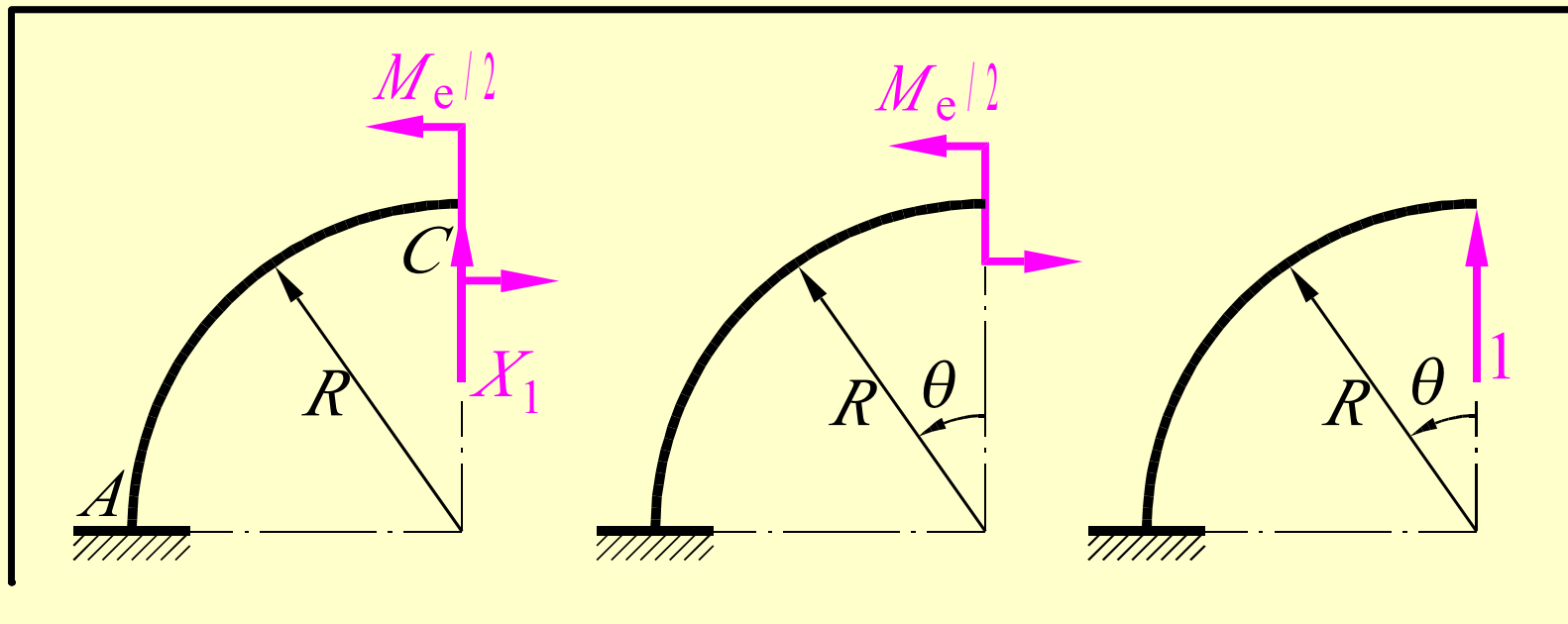
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{\pi} = 0.318P(\uparrow)$$



讨论：已知图示半圆曲杆的
弯曲刚度为 EI ，试求曲杆支
座 A 处垂直反力 F_{Ay} 。



解：



例15 半圆形曲杆ACB为直杆AD、BF铰接如图。曲杆及直杆的抗弯刚度均为EI。求D、F处的反力矩 M_D 、 M_F （只考虑杆件的弯曲变形）。

解：由对称性知 $N=P/2$ 。

一、分析图。由对称性取一半研究，求B点水平位移使用莫尔积分，在任一横截面上，

$$M = -NR(1 - \cos \varphi) + FR \sin \varphi$$

$$\bar{M} = -R \sin \varphi$$

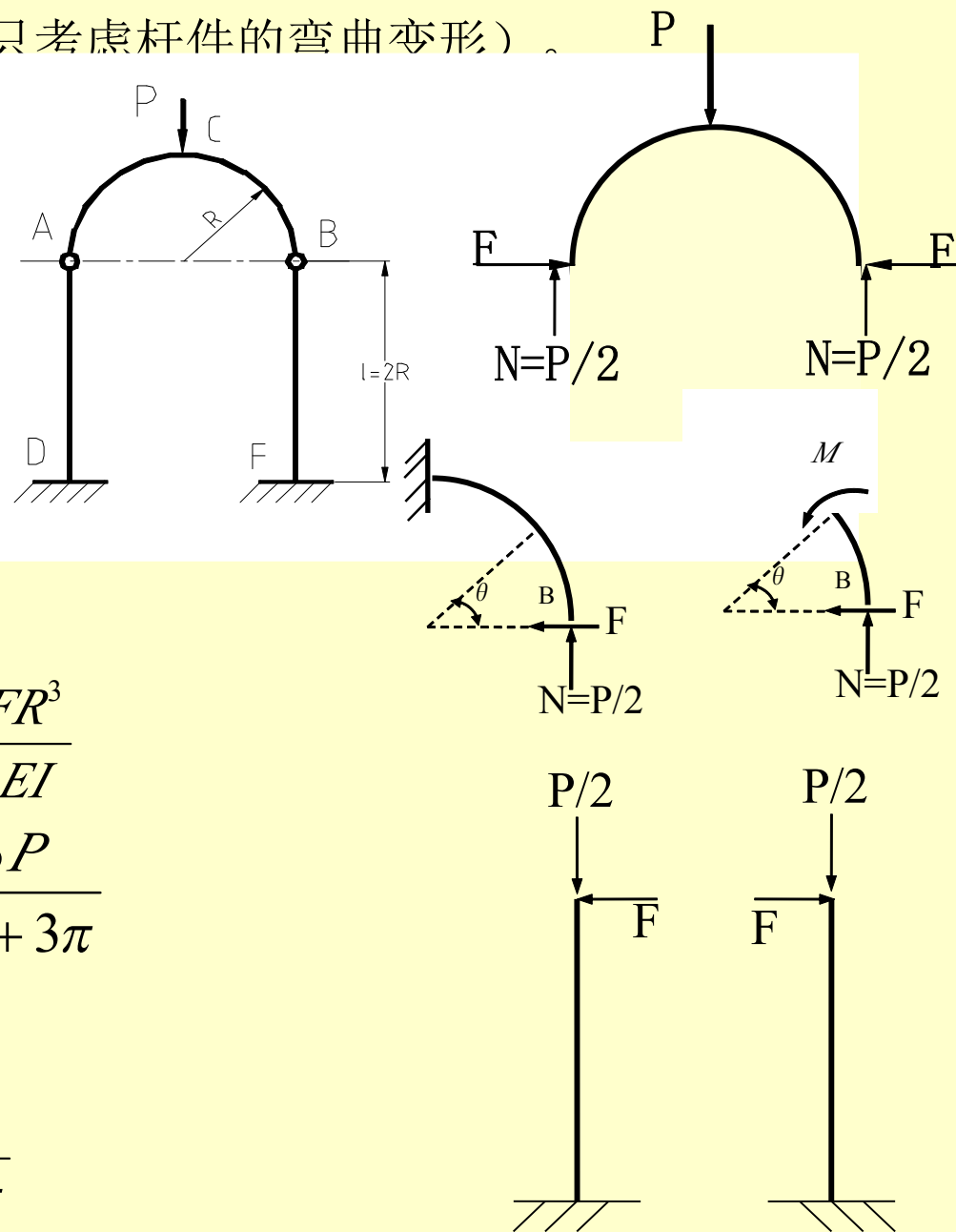
$$V_{Bx} = \int_l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{PR^3}{4EI} - \frac{FR^3\pi}{4EI}$$

$$V'_{Bx} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (2FR \times 2R) \times \frac{2}{3} \times 2R \right] = \frac{8FR^3}{3EI}$$

$$\text{协调条件} \quad V_{Bx} = V'_{Bx} \quad F = \frac{3P}{32 + 3\pi}$$

因AD与BF对称，其受力也对称，

$$M_D = M_F = Fl = F \times 2R = \frac{6PR}{32 + 3\pi}$$

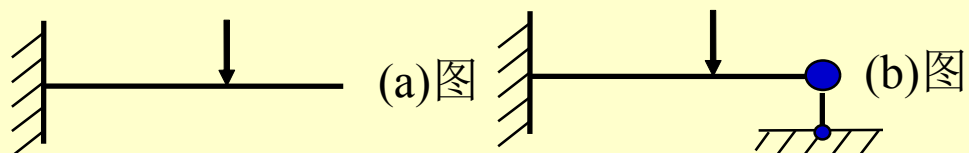


例16、选择题:

一、(a)图所示悬臂梁,如在自由端B上加一个活动铰支座(b)图,则该梁的____

- (A) 强度提高,刚度不变
- (B) 强度不变,刚度提高
- (C) 强度,刚度都提高
- (D) 强度,刚度都不变

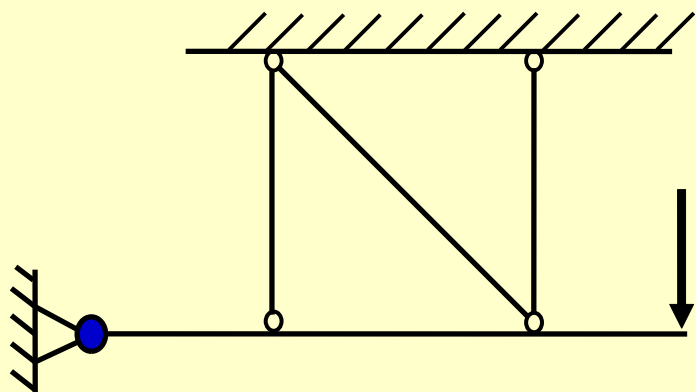
答案: (C)



二、下图所示结构是 ____ 静不定机构

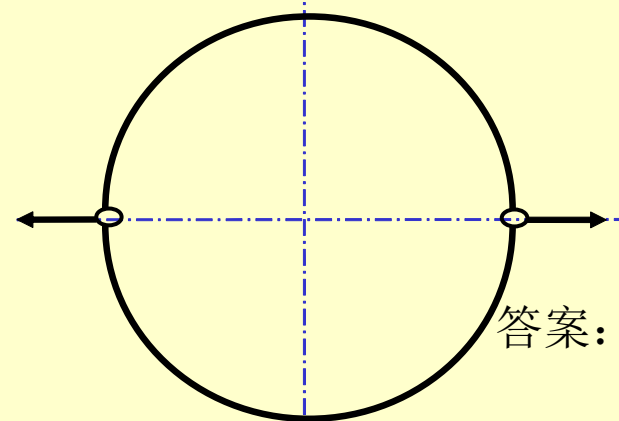
- (A) 1次 (B) 2次 (C) 3次 (D) 4次

答案: (B)



三、下图所示结构是 ____ 静不定机构

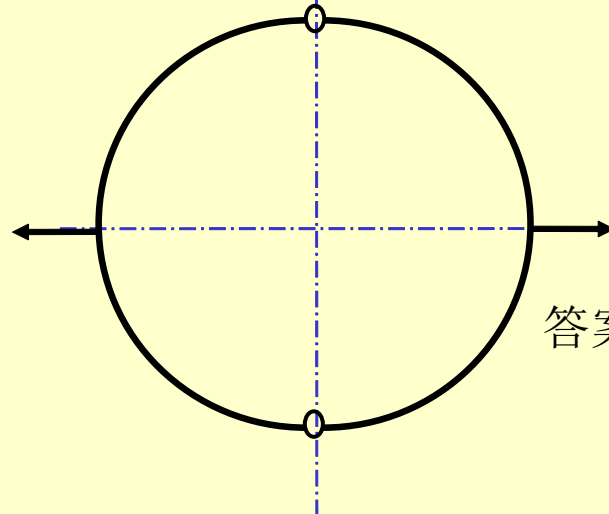
- (A) 0次 (B) 2次 (C) 3次 (D) 4次



答案: (A)

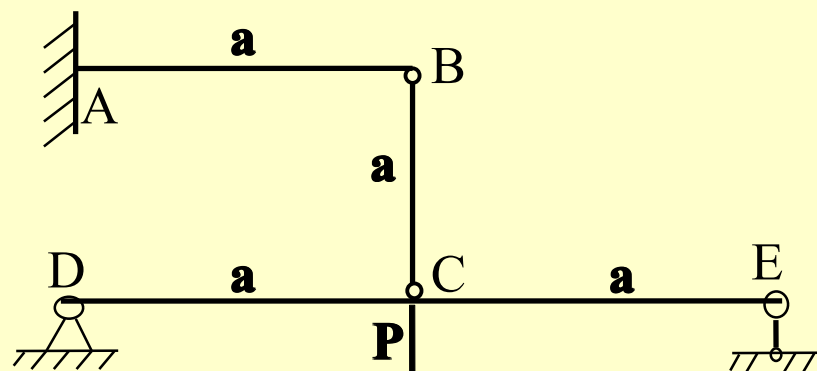
四、下图所示结构是 ____ 静不定机构

- (A) 0次 (B) 2次 (C) 3次 (D) 4次



答案: (A)

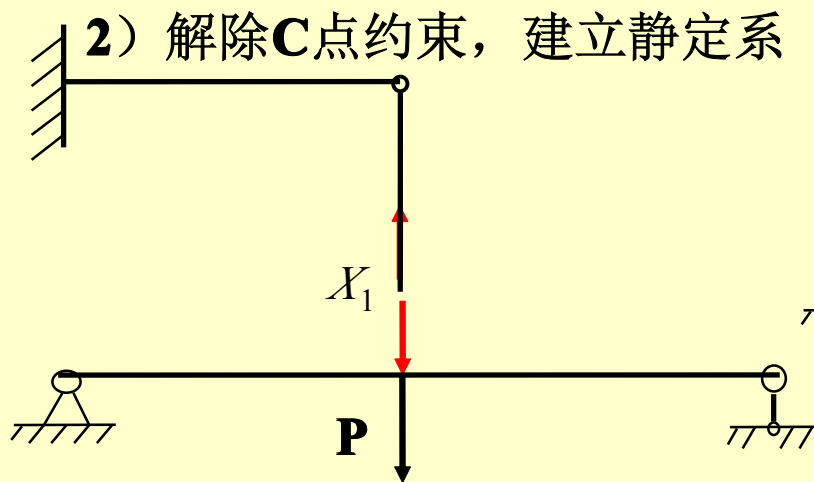
例17、求图示结构梁DE的最大正应力 $\sigma_{\max}=?$



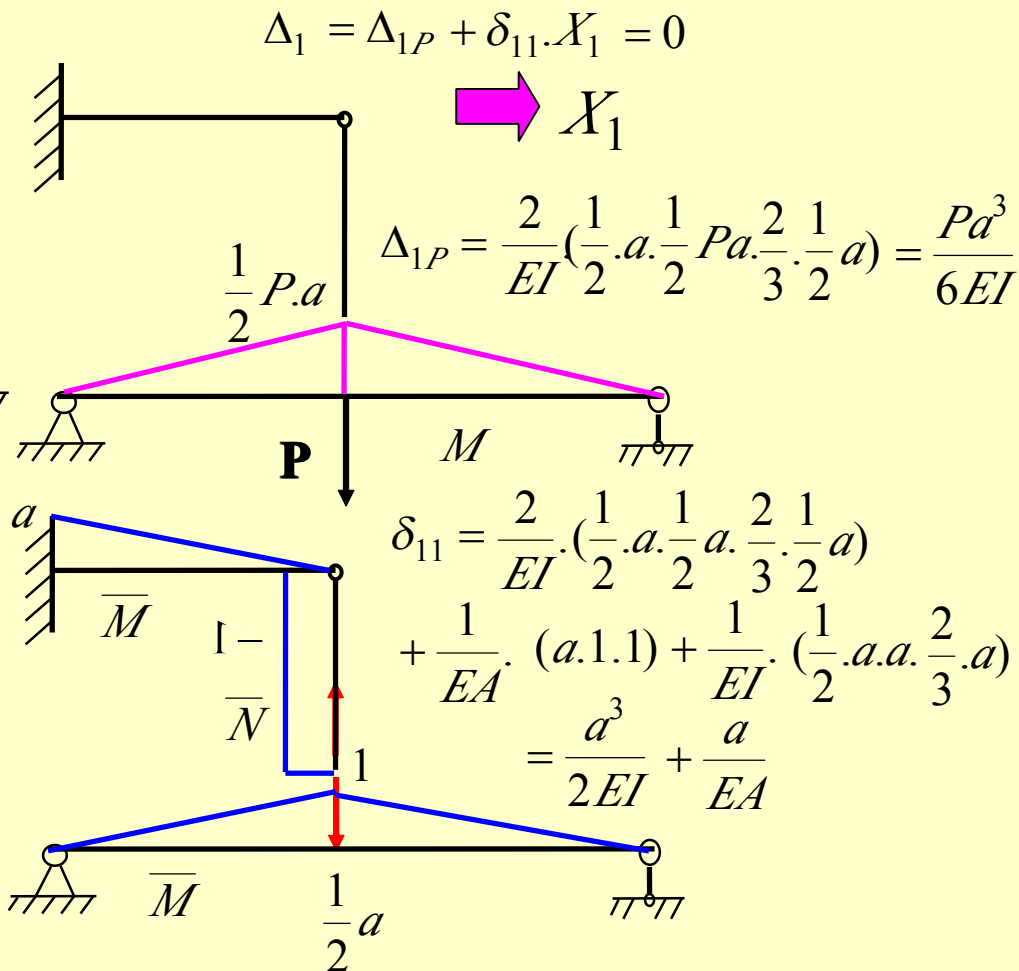
解：1) 判断静不定种类及次数

约束反力一次静不定

2) 解除C点约束，建立静定系



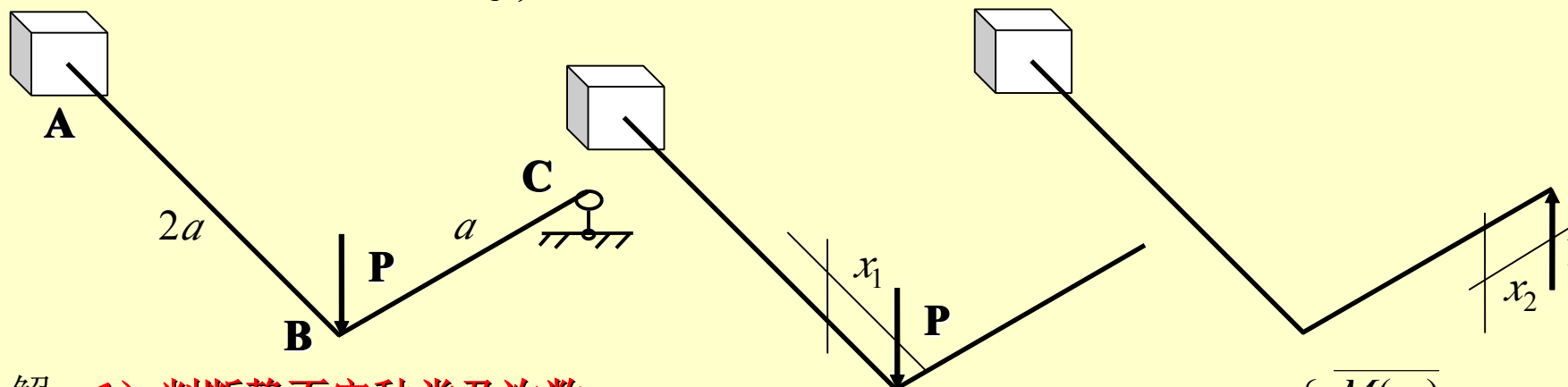
3) 对静定基进行受力分析，
建立相当系统



4) 研究DE梁的C点与BC杆的C点的
竖直相对线位移，建立正则方程

5) 根据相当系统图，求出其他
全部约束反力

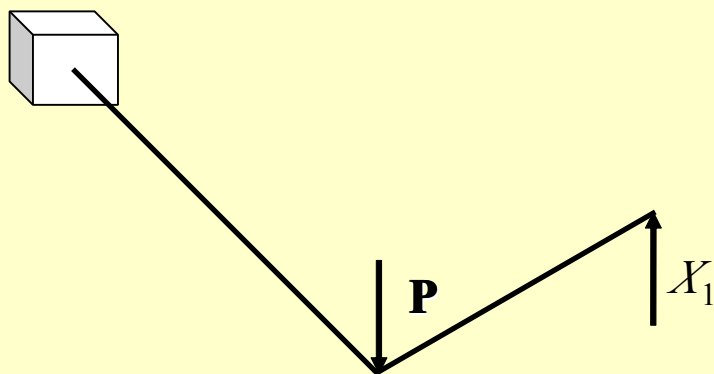
例18:已知平面刚架的 EI, GI_P ,求C处约束反力.



解: **1) 判断静不定种类及次数**

约束反力一次静不定

2) 解除C点约束, 建立静定基



$$\begin{aligned} \text{AB段: } M(x_1) &= Px_1 & \text{AB段: } \begin{cases} \overline{M}(x_1) = -x_1 \\ \overline{T}(x_1) = a \end{cases} \\ \text{BC段: } \overline{M}(x_2) &= x_2 \end{aligned}$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^{2a} \frac{M(x_1) \cdot \overline{M}(x_1)}{EI} dx_1 = -\frac{8Pa^3}{3EI}$$

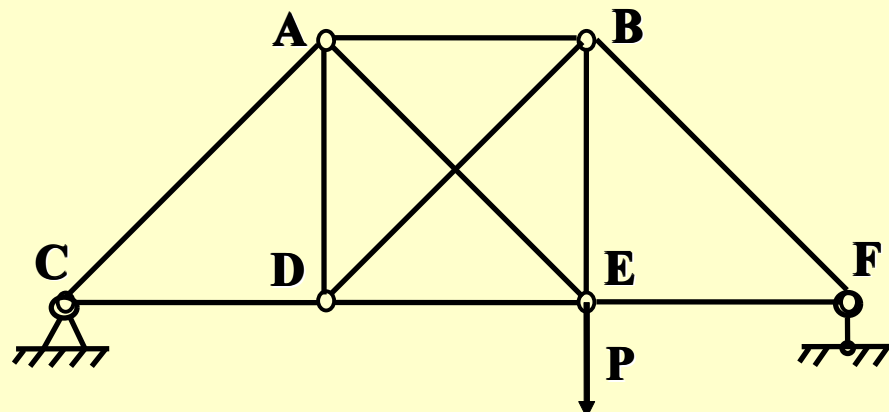
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^{2a} \frac{\overline{M}(x_1) \cdot \overline{M}(x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^{2a} \frac{\overline{T}(x_1) \cdot \overline{T}(x_1)}{GI_P} dx_1 \\ &\quad + \int_0^a \frac{\overline{M}(x_2) \cdot \overline{M}(x_2)}{EI} dx_2 = \frac{3a^3}{EI} + \frac{2a^3}{GI_P} \end{aligned}$$

3) 对静定基进行受力分析, 建立相当系统

4) 研究C点竖直线位移, 建立正则方程

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 \quad \Rightarrow \quad \text{即为C处约束反力}$$

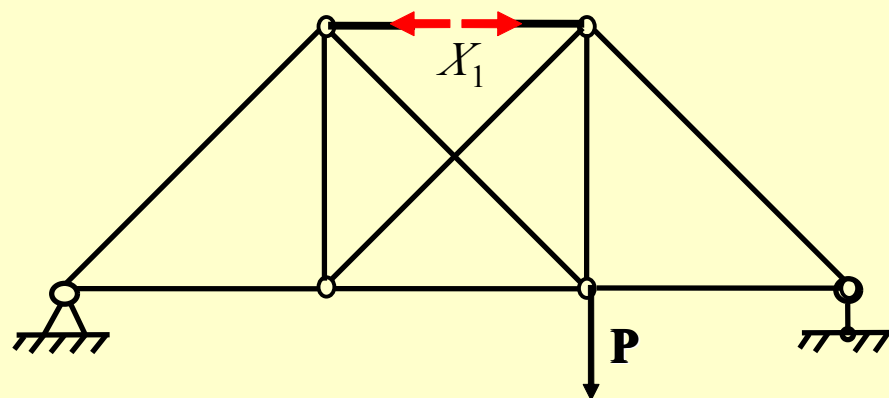
例19:求图示桁架AB杆的轴力, N_{AB}



解: 1) 判断静不定种类及次数

内力一次静不定

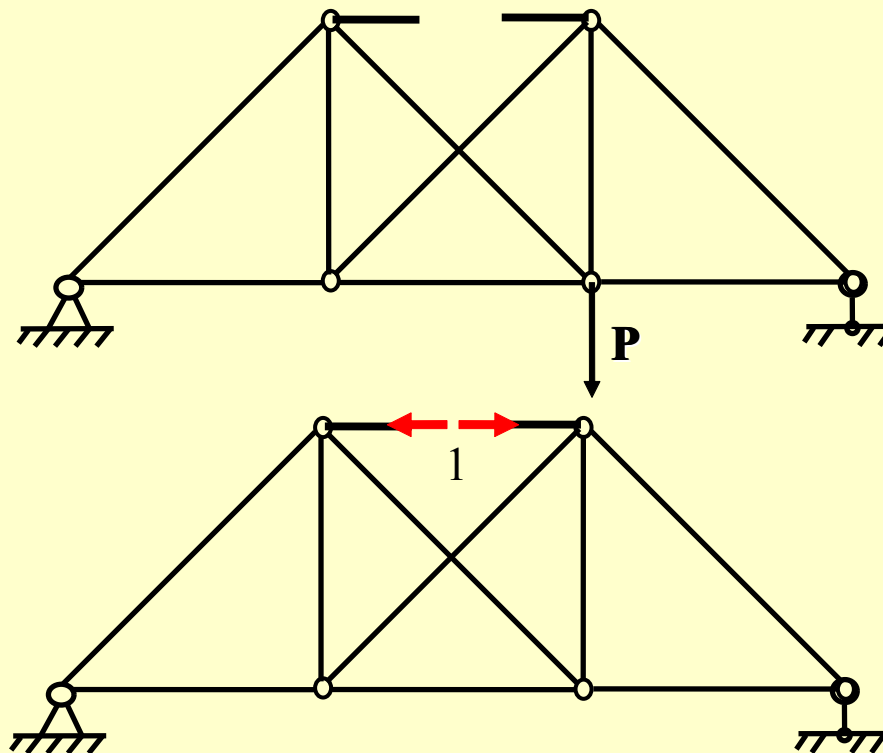
2) 解除AB杆轴力, 建立静定基

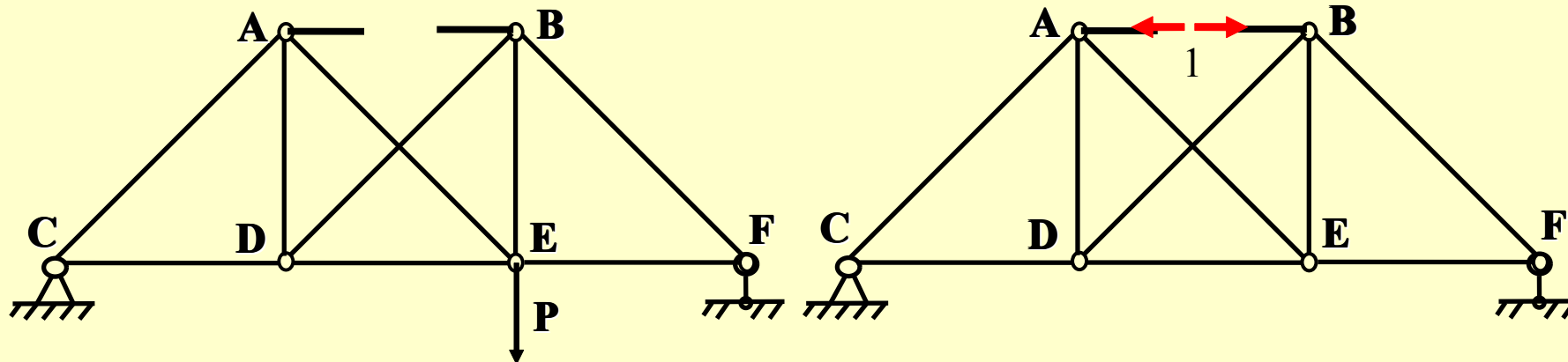


3) 对静定基进行受力分析, 建立相当系统

4) 研究AB杆切口两侧水平相对位移, 建立正则方程

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$





杆号	杆长 l_i	N_i	$\bar{N}_i$	$N_i \bar{N}_i l_i$	$\bar{N}_i \bar{N}_i l_i$
AC	$\sqrt{2}a$	$-\sqrt{2}P/3$	0	0	0
CD	a	$P/3$	0	0	0
BF	$\sqrt{2}a$	$-2\sqrt{2}P/3$	0	0	0
EF	a	$2P/3$	0	0	0
AB	a	0	-1	0	a
AD	a	$2P/3$	-1	$-2Pa/3$	a
AE	$\sqrt{2}a$	$-\sqrt{2}P/3$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}Pa/3$	$2\sqrt{2}a$
BE	a	$4P/3$	-1	$-4Pa/3$	a
BD	$\sqrt{2}a$	$-2\sqrt{2}P/3$	$\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}Pa/3$	$2\sqrt{2}a$
DE	a	P	-1	$-Pa$	a

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^{10} \frac{N_i \bar{N}_i l_i}{EA_i} = -\frac{(7 + 6\sqrt{2}) \cdot P \cdot a}{3EA}$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{10} \frac{\bar{N}_i \bar{N}_i l_i}{EA_i} = -\frac{(4 + 4\sqrt{2}) \cdot a}{EA}$$

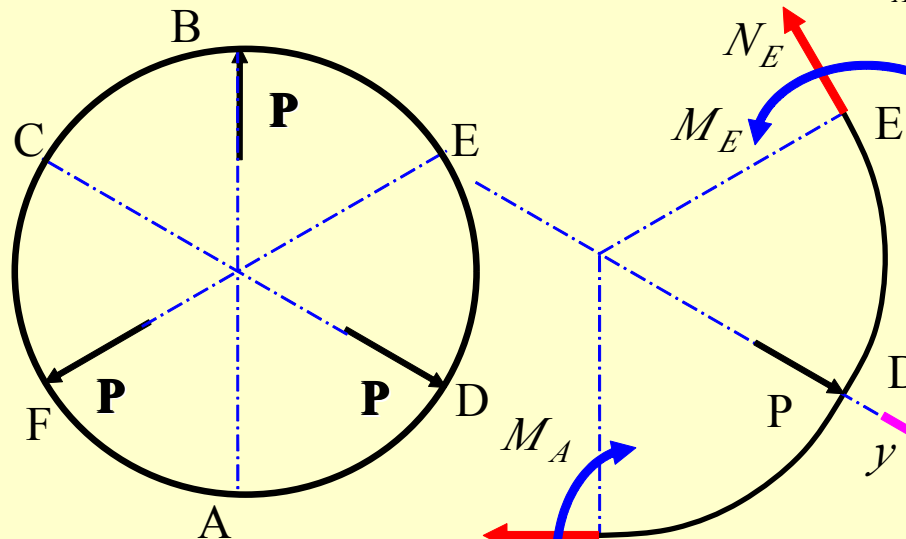
由正则方程 $\Rightarrow X_1 \Rightarrow$

即为杆**AB**的轴力

而原结构中其它各杆的轴力=?

$$F_{NI} = N_i + X_i \cdot \bar{N}_i$$

例20:求图示闭合圆形刚架在A截面上的弯矩 M_A 因为A,E都是结构的对称截面



所以: A,E截面上反对称的内力等于0

即: A,E截面上只有轴力和弯矩

又因为CD是对称轴: $N_E = N_A$ 且 $M_E = M_A$

以CD轴为Y轴: $\because \sum y = 0$

$$N_E \cdot \cos 30^\circ + N_A \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$N_E = N_A = \sqrt{3}P/3$$

4) 用D截面将刚架截开,取DA(1/6)段研究

因为A,D都是结构的对称截面

所以: A,D截面的转角等于0

5) 研究A截面转角, 建立正则方程

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

解: 1) 静不定分析:

三次静不定

2) 对称性分析:

结构对称, 载荷对称,

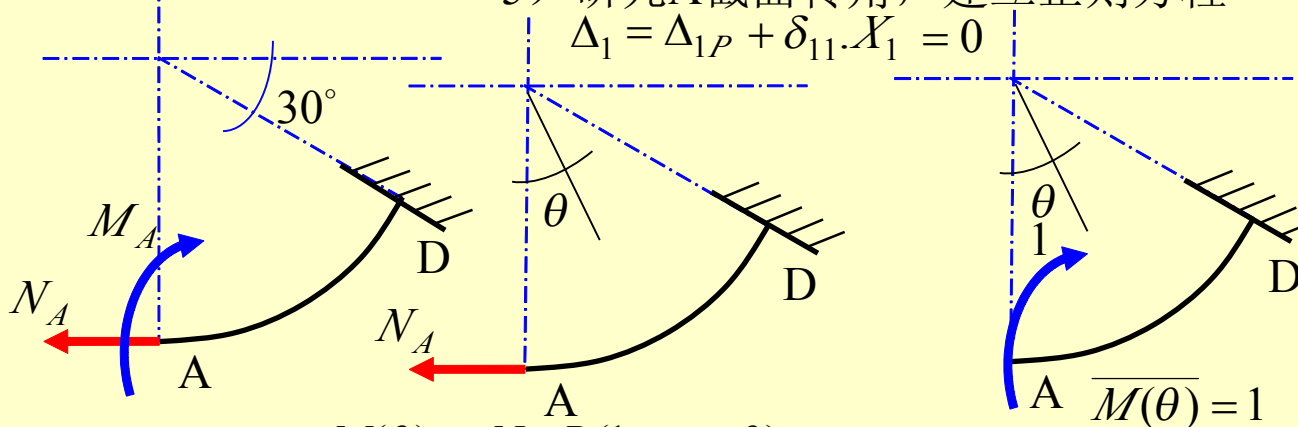
AB, CD, EF 都是对称轴

结构的对称截面有6个:

A, B, C, D, E, F

3) 用E, A两截面将刚架截开,

取EA(1/3)段研究:

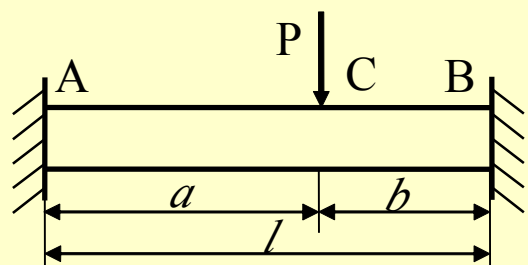


$$M(\theta) = N_A \cdot R \cdot (1 - \cos \theta)$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^{\pi/3} \frac{M_P(\theta) \overline{M(\theta)}}{EI} R d\theta$$

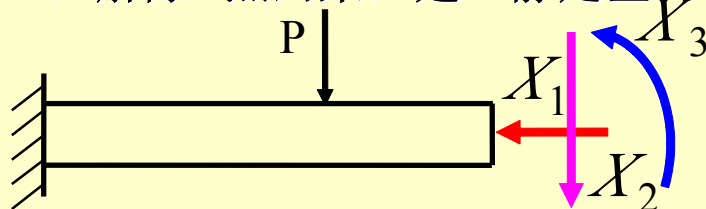
$$\delta_{11} = \int_0^{\pi/3} \frac{\overline{M(\theta)} \overline{M(\theta)}}{EI} R d\theta$$

例21、求图示结构的约束反力



解: 1) 判断静不定种类及次数
约束反力三次静不定

2) 解除B点约束, 建立静定基



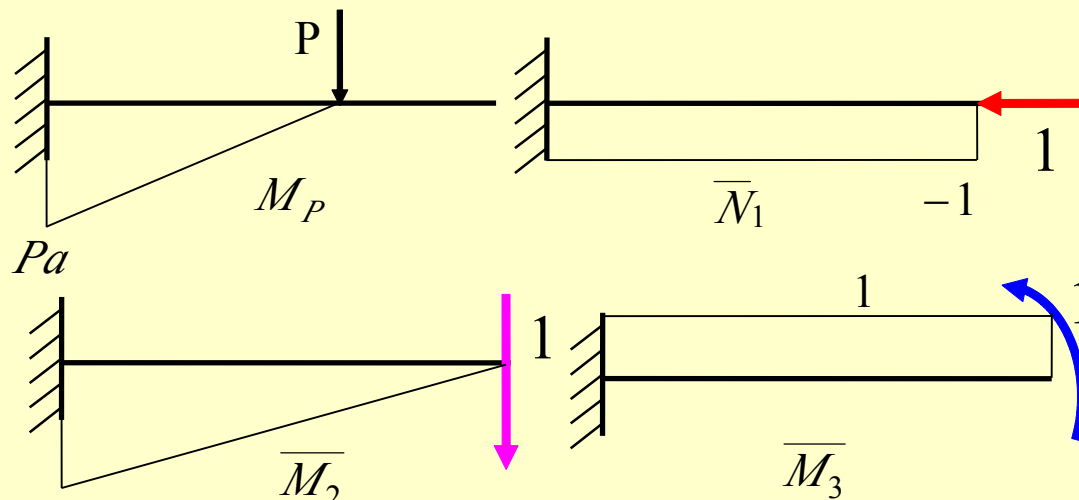
3) 对静定基进行受力分析, 建立相当系统

4) 研究B点竖直, 水平位移和转角建立正则方程

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{2P} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 = 0$$

$$\Delta_3 = \Delta_{3P} + \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 = 0$$



$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{M_P \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = 0$$

$$\delta_{12} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = 0$$

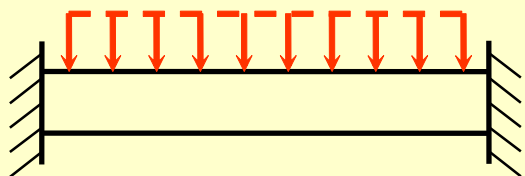
$$\delta_{13} = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = 0$$

结论:

当载荷作用线垂直于结构轴线所在平面时, 则位于结构轴线所在平面内的约束反力和内力都等于0.

例22、求图示结构的约束反力



1) 判断静不定种类及次数

约束反力三次静不定



利用对称性性质

对称截面上剪力等于0,

简化为:二次静不定

对称截面上只有轴力和弯矩

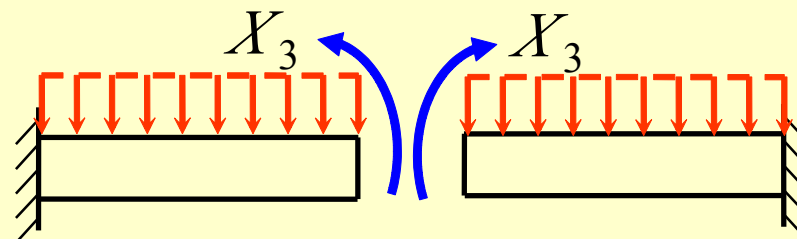


利用上一道题的结论

对称截面上的轴力也等于0

简化为:一次静不定

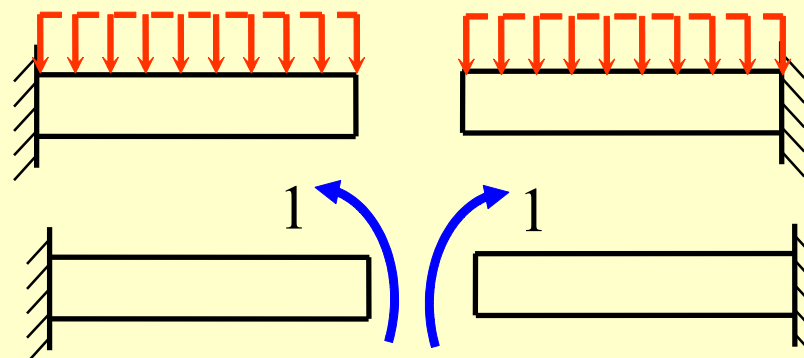
2) 从原结构的对称截面截开, 建立静定基



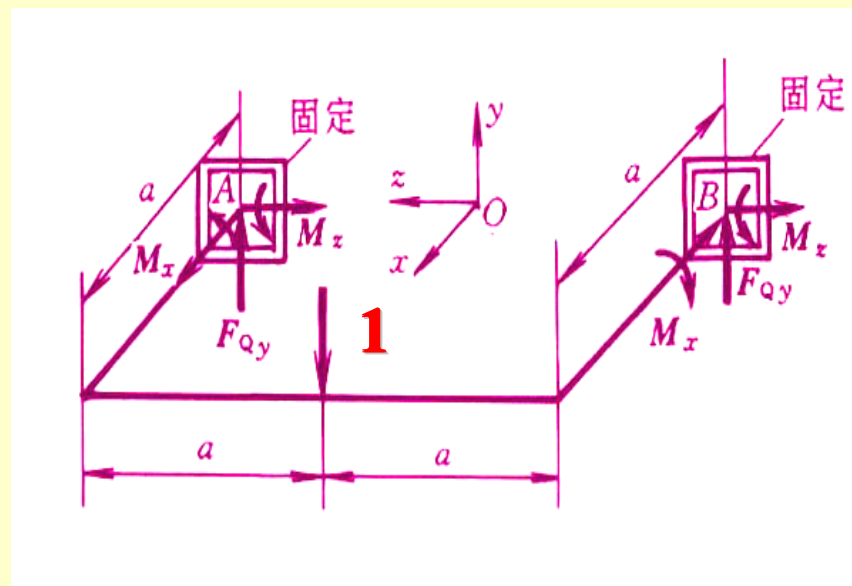
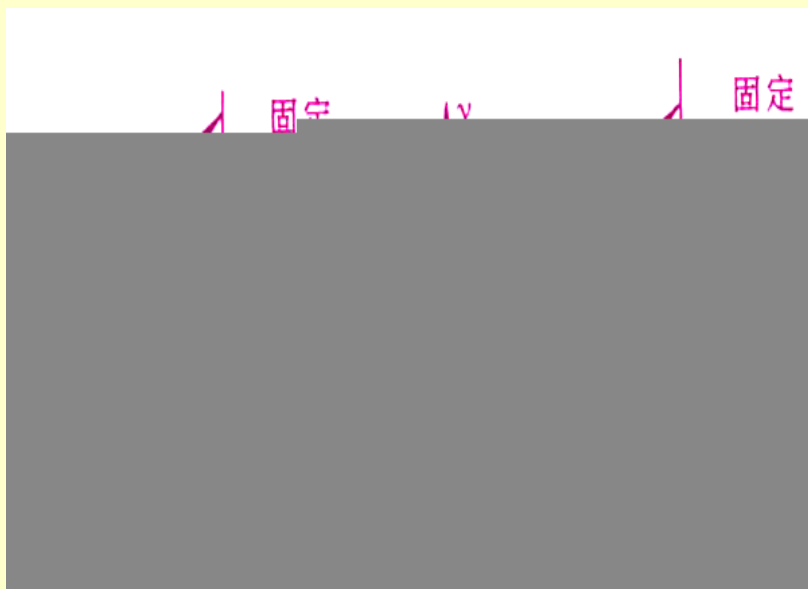
3) 对静定基进行受力分析, 建立相当系统

4) 研究切口两侧相对转角, 建立正则方程

$$\Delta_3 = \Delta_{3P} + \delta_{33} \cdot X_3 = 0$$



例23、求图示结构F的作用点的竖直位移



分析：本题求的是F作用点的竖直位移

所以：应该用莫尔积分求解

先求原载荷引起的内力

再施加与所求位移对应的单位载荷

求出单位载荷引起的内力

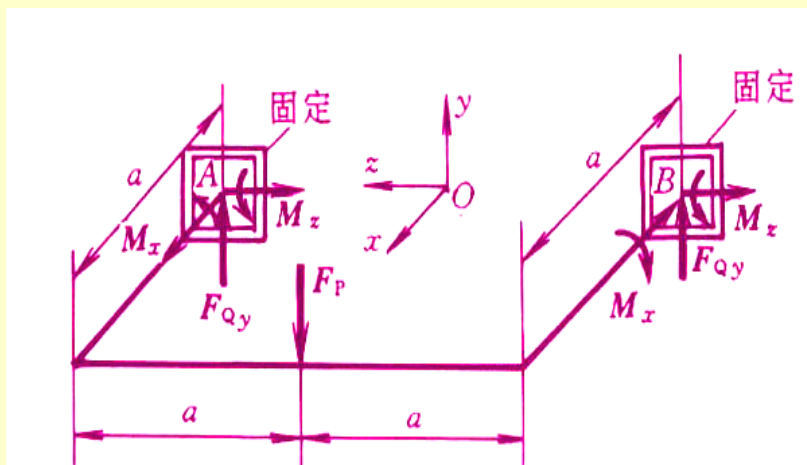
然后同一段的同一种内力图乘积分

但是无论是原载荷系统, 还是单位载荷系统,

都是六次静不定结构

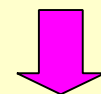
所以：本题应首先用力法求解静不定结构

然后再用莫尔积分求位移



1) 判断静不定种类及次数

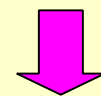
约束反力六次静不定



利用对称性性质

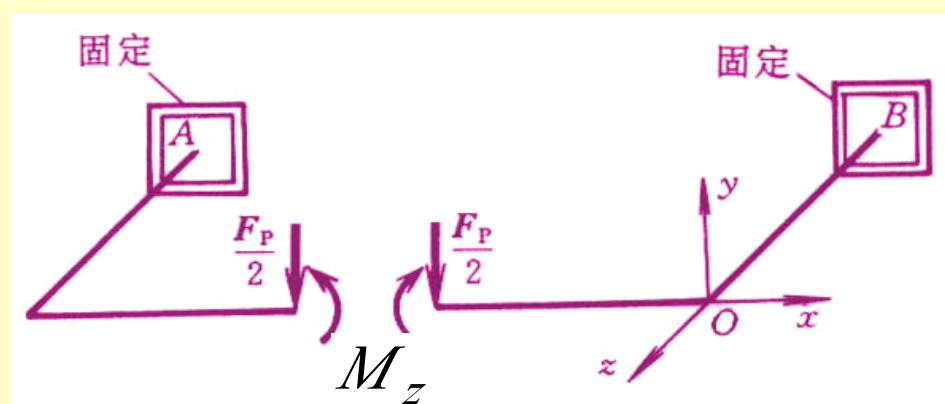
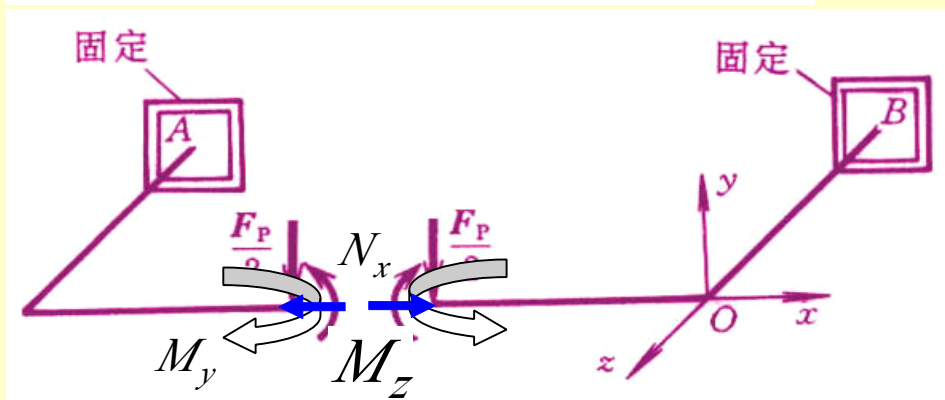
对称截面上2个剪力和1个扭矩等于0,
简化为:三次静不定

对称截面上只有1个轴力和2个弯矩
这2个弯矩,一个是绕着Z轴的 M_z
另一个是绕着Y轴的 M_y 位于水平面内

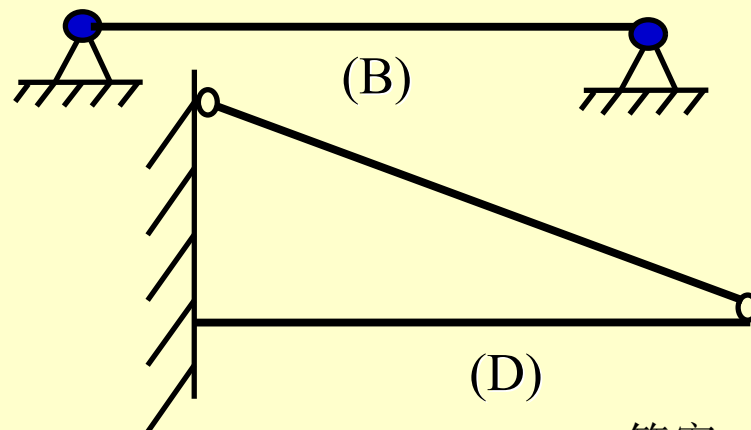
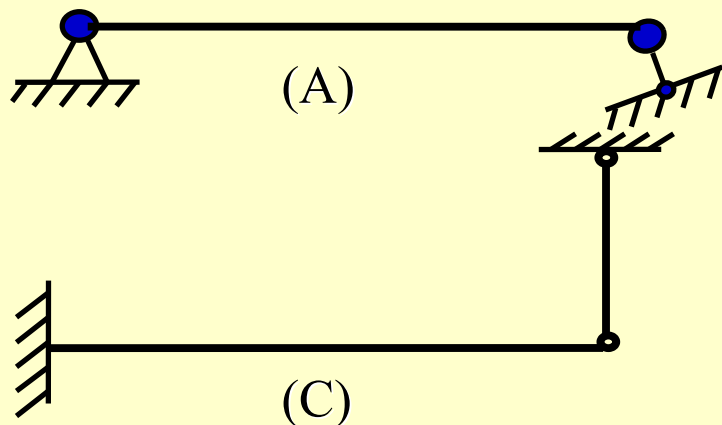


利用例题6的结论

对称截面上的轴力和弯矩 M_y 也等于0
简化为:一次静不定
对称截面上只有1个弯矩 M_z

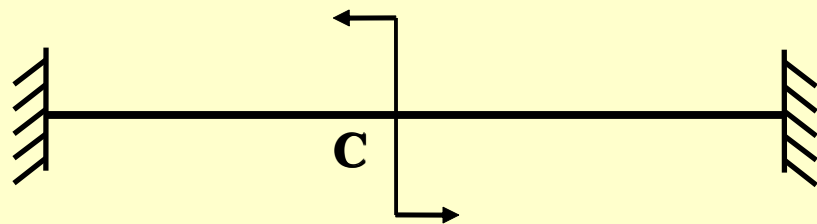


五、当系统温度升高时,下列结构中 —— 不会产生温度应力



答案: (A)

六、图示等截面直梁,在中点C 截面承受一集中力偶的作用,在C截面上 ——



(A) 转角 $\theta = 0$ 挠度 $f \neq 0$

(B) 转角 $\theta \neq 0$ 挠度 $f = 0$

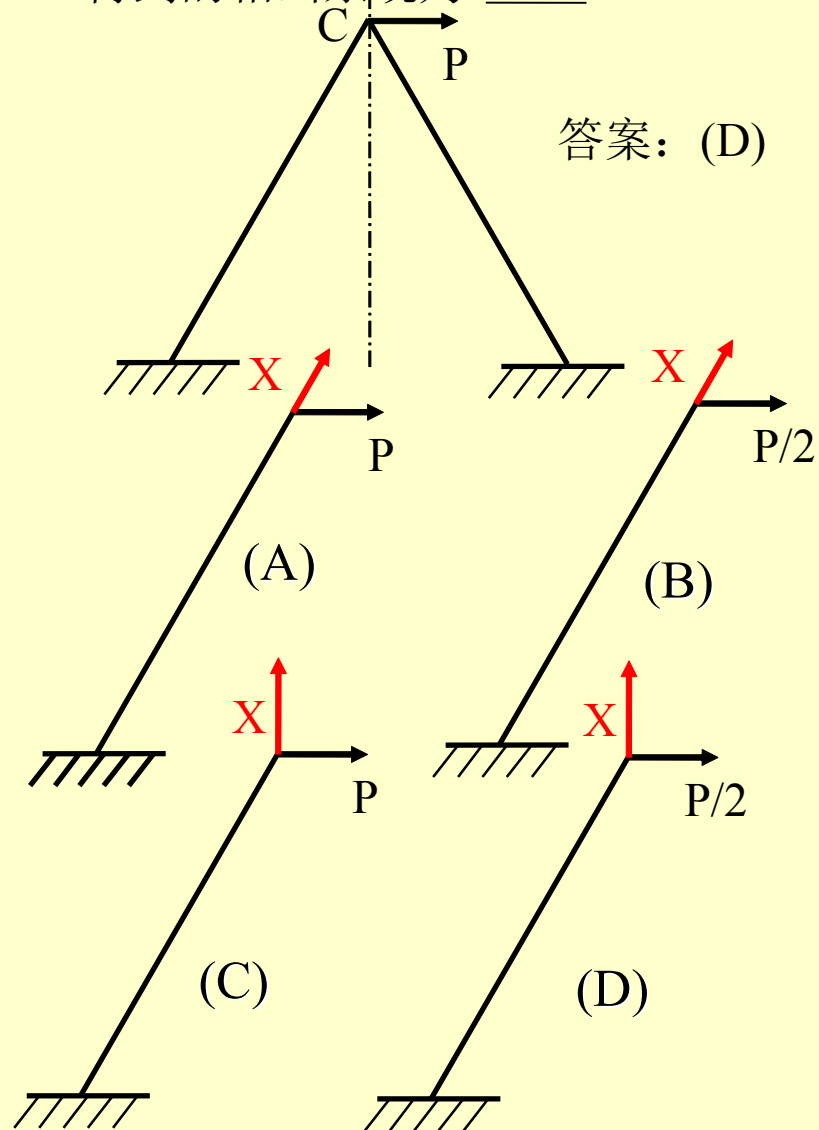
(C) 转角 $\theta = 0$ 挠度 $f = 0$

(D) 转角 $\theta \neq 0$ 挠度 $f \neq 0$

答案: (B)

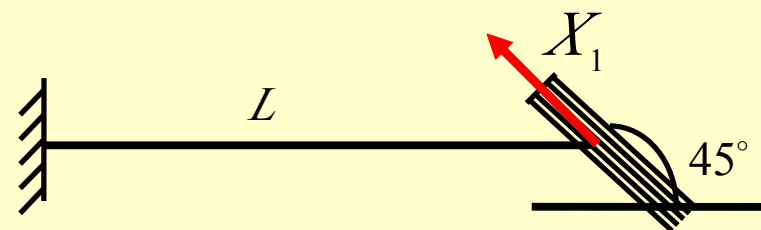
七、图示等腰三角形为静不定刚架,利用反对称性质,从截面C截开得到的相当系统为 _____

答案: (D)



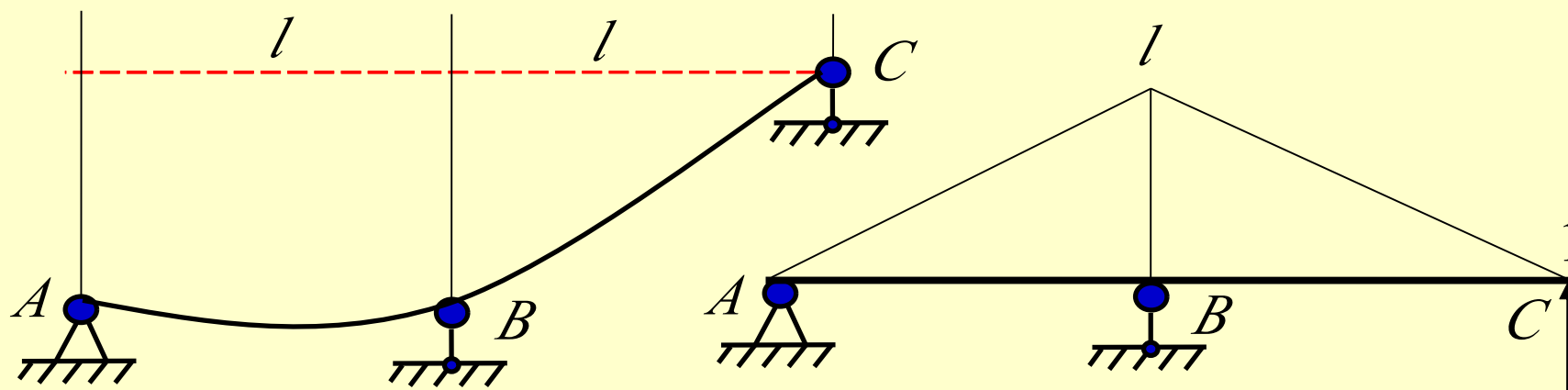
八、如图所示,线膨胀系数为 α 的悬臂梁AB,室温时右端正好靠在光滑斜面上,当温度升高 ΔT 时,斜面对杆B的支座反力为 X_1 ,若用力法求解 X_1 正则方程为: $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1T} = 0$ 则:正则方程中的: $\Delta_{1T} =$ _____

- (A) $\alpha \cdot l \cdot \Delta T$ (C) $\alpha \cdot l \cdot \Delta T / \sqrt{2}$
 (B) $-\alpha \cdot l \cdot \Delta T$ (D) $-\alpha \cdot l \cdot \Delta T / \sqrt{2}$



答案: (D)

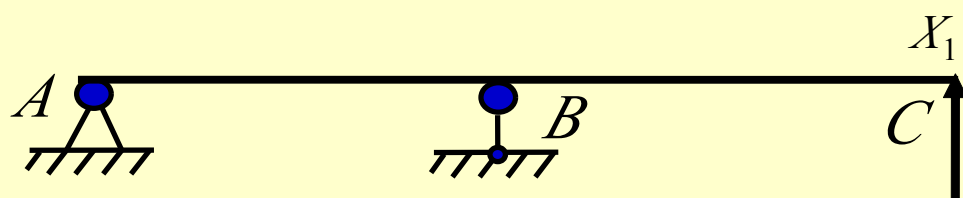
例24:梁ABC原来是一根直梁,后来支座A,B发生沉陷,沉陷量为 δ ,求C处约束反力.



解: **1) 判断静不定种类及次数**

约束反力一次静不定

2) 解除C点约束, 建立静定基



3) 对静定基进行受力分析, 建立相当系统

4) 研究C点竖直线位移, 建立正则方程

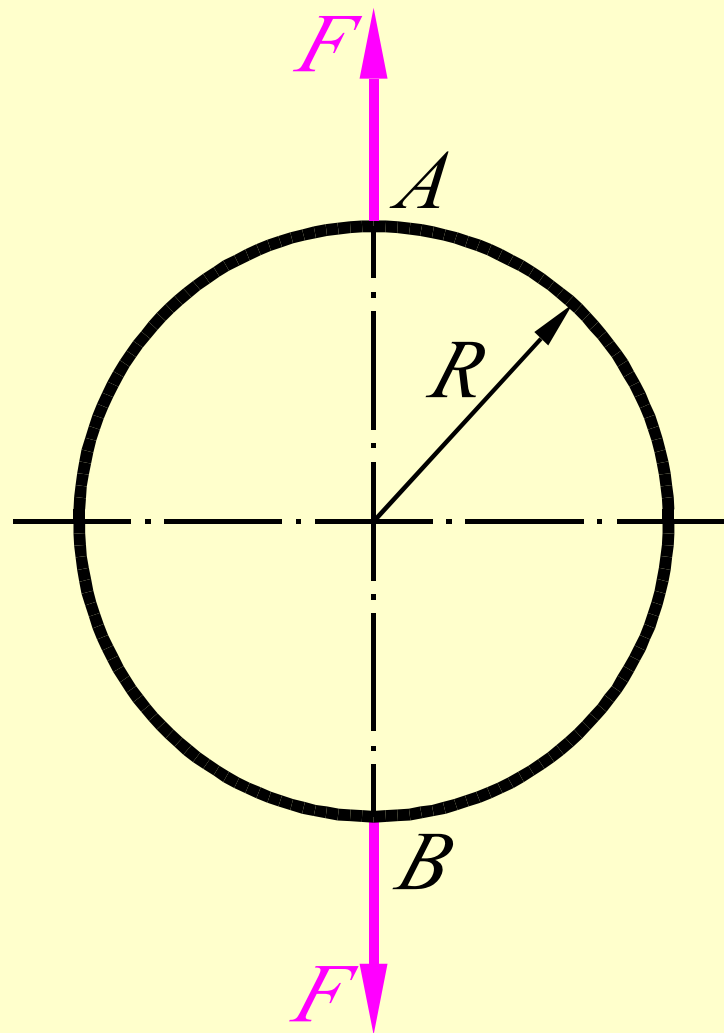
$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot X_1 = \delta$$

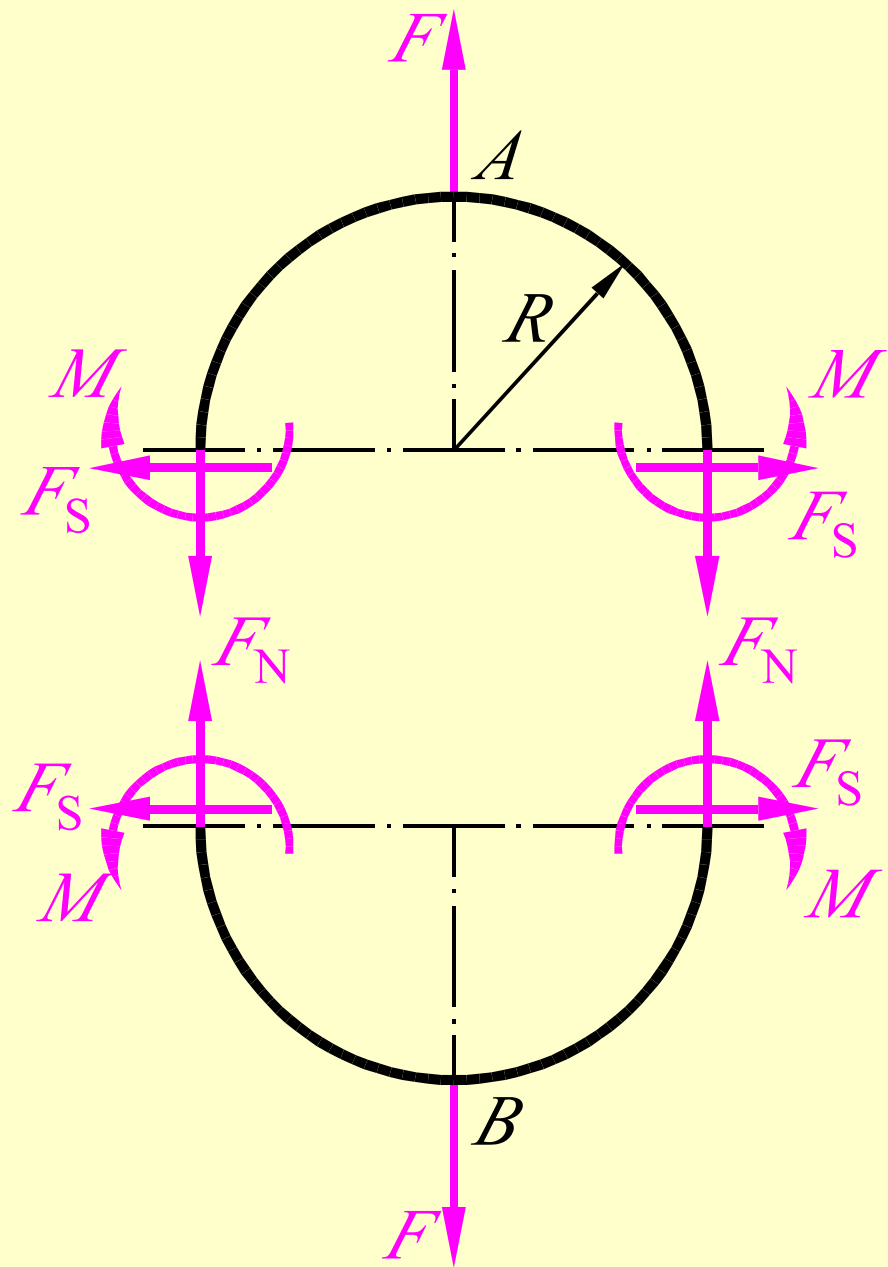
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{2l^3}{3EI}$$

由正则方程, 得:

$$X_1 = \frac{3EI\delta}{2l^3}$$

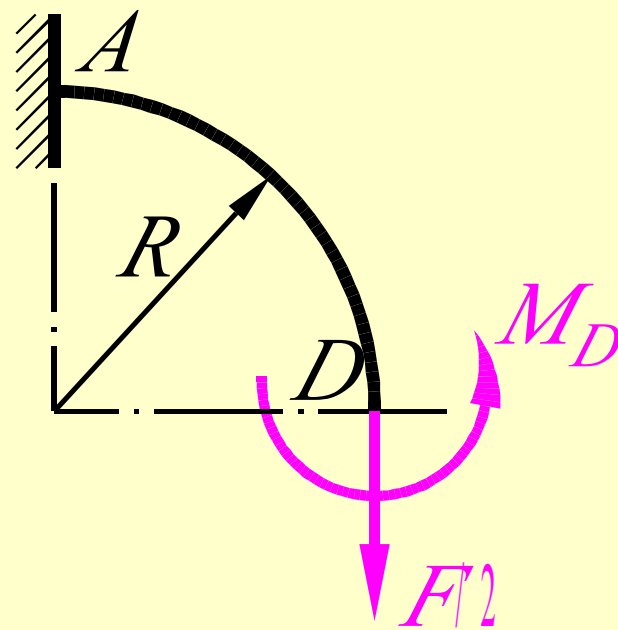
例25: 求 A 、 B 两点间的相对线位移 Δ_{AB} 。



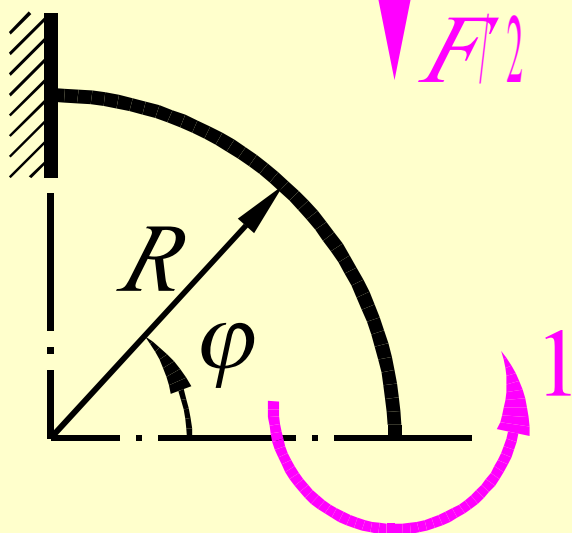
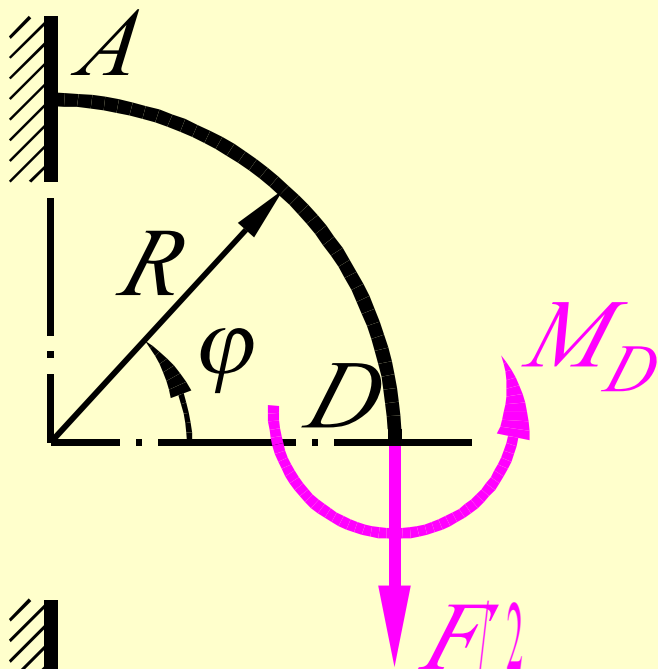


由对称性知:

$$F_N = \frac{F}{2}, \quad F_S = 0$$



变形协调条件: $\theta_D = 0$



$$M(\varphi) = M_D - \frac{F}{2} R(1 - \cos \varphi)$$

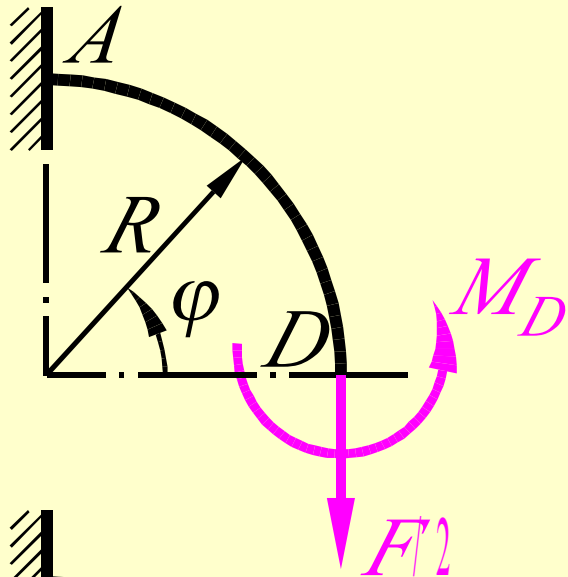
$$\bar{M}(\varphi) = 1$$

$$\theta_D = \int_s \frac{M\bar{M}}{EI} ds$$

$$= \frac{R}{EI} \left[M_D \frac{\pi}{2} - \frac{F}{2} R \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right]$$

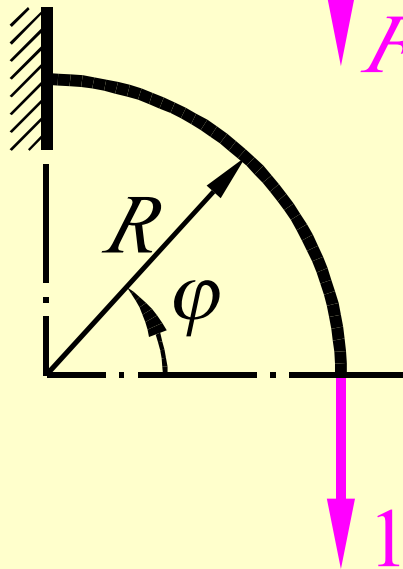
$$= 0$$

$$\text{由此得 } M_D = FR \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$



$$M(\varphi) = FR \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) - \frac{F}{2} R (1 - \cos \varphi)$$

$$= FR \left(\frac{\cos \varphi}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

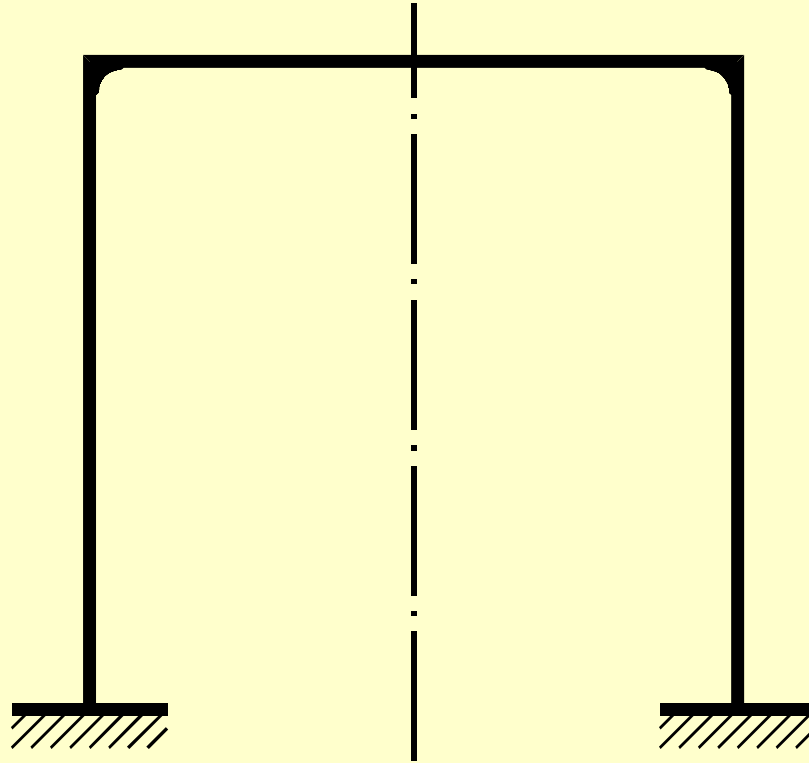


$$\bar{M}(\varphi) = -R(1 - \cos \varphi)$$

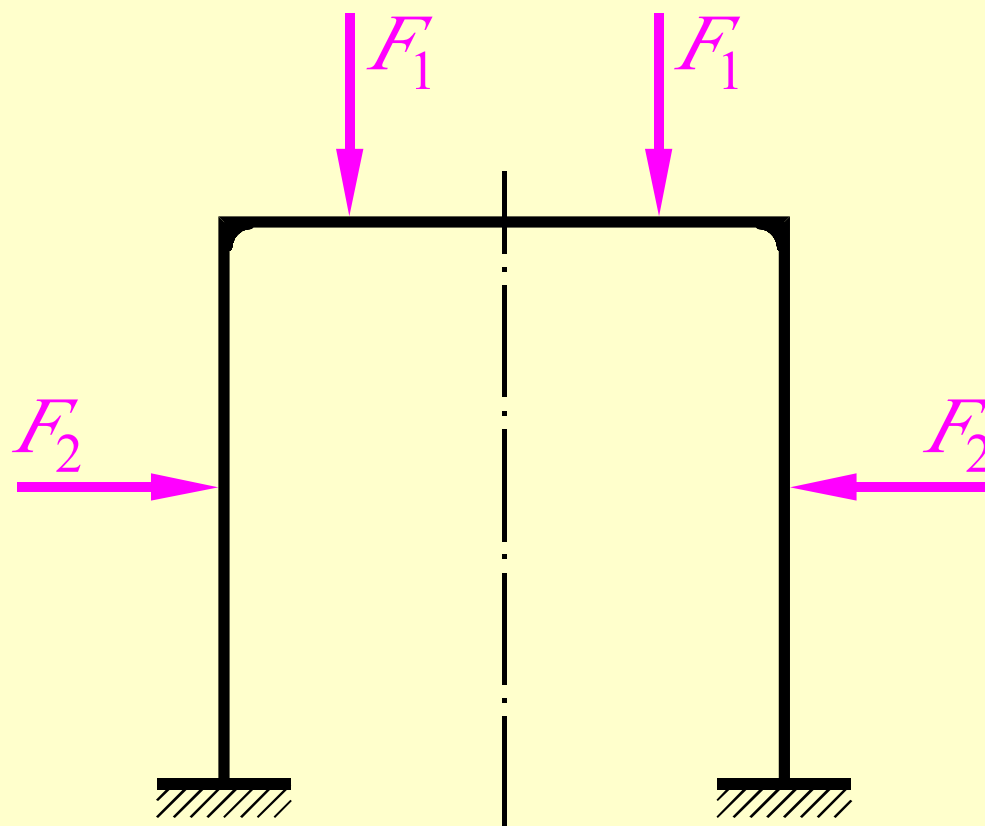
$$\Delta_D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\varphi) \bar{M}(\varphi)}{EI} R d\varphi = \frac{FR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \right)$$

$$\Delta_{AB} = 2\Delta_D = \frac{FR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right)$$

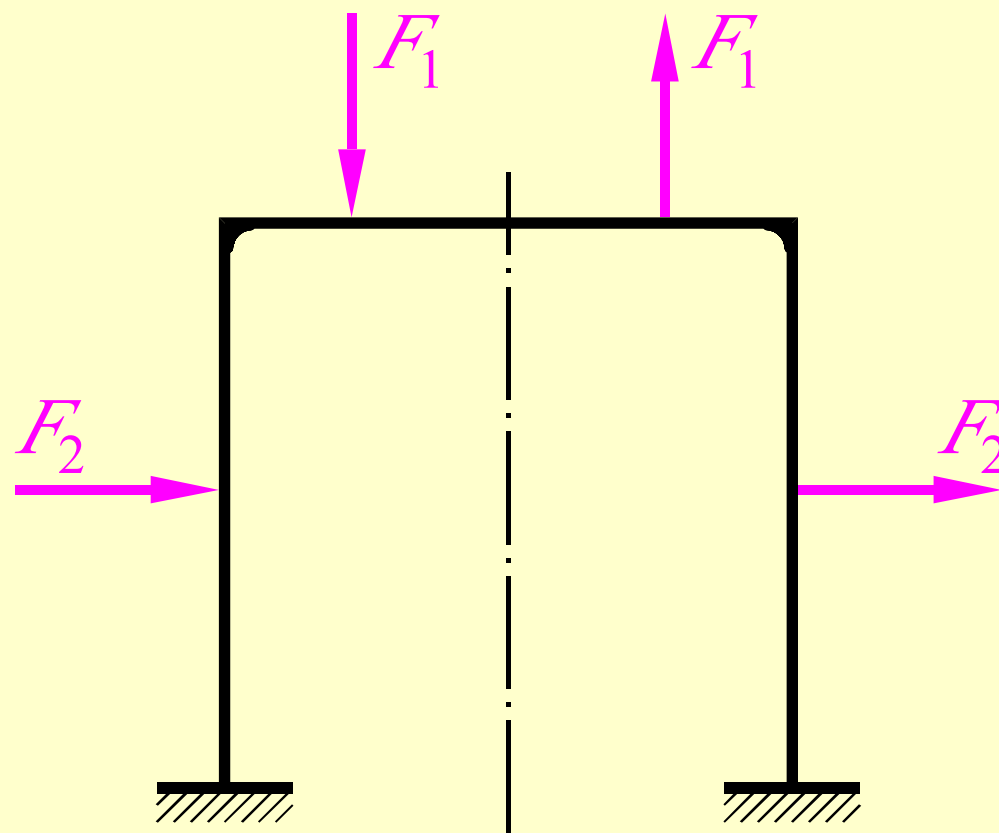
讨论：对称性的利用：



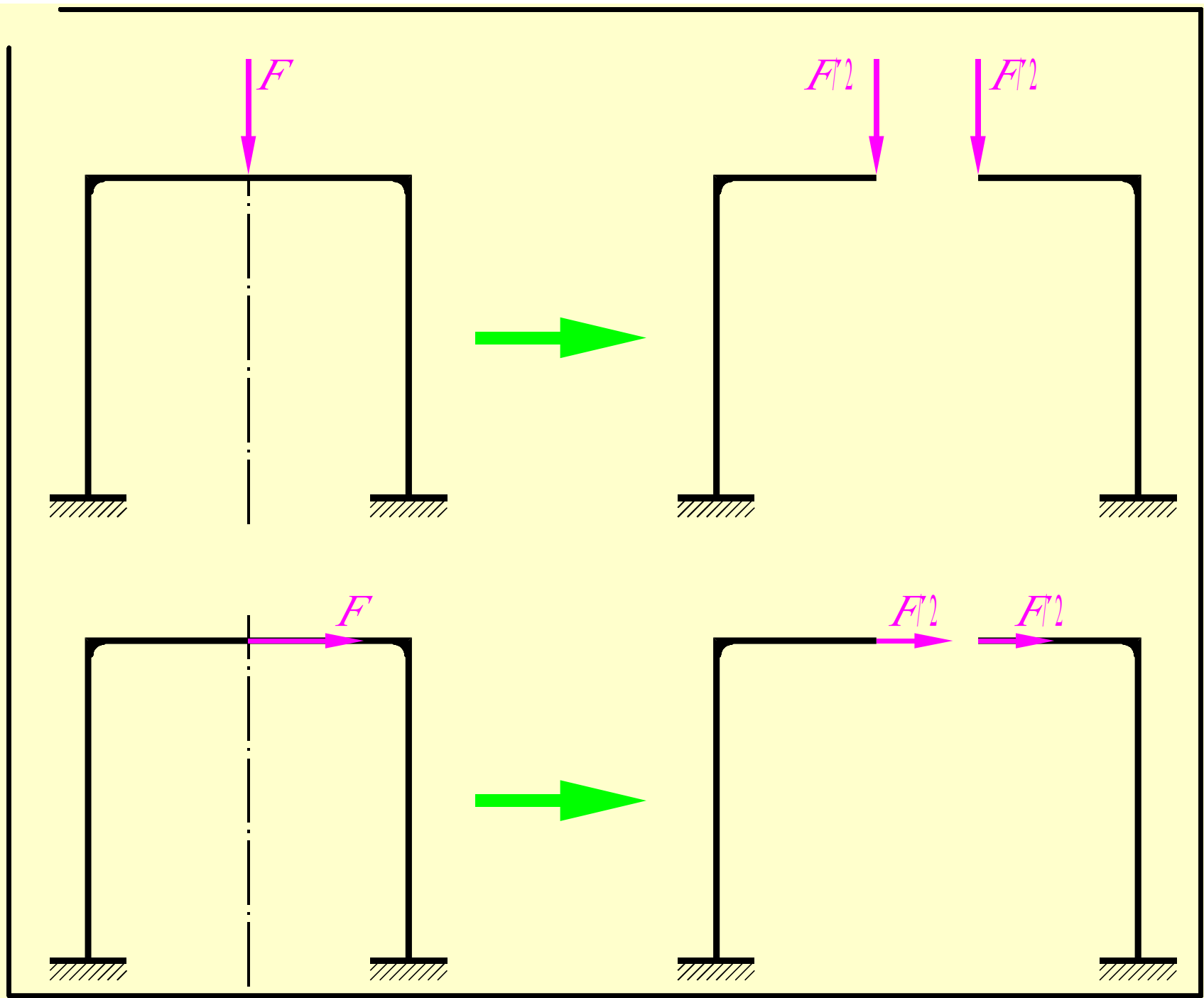
对称结构：若将结构绕对称轴对折后，结构在对称轴两边的部分将完全重合。

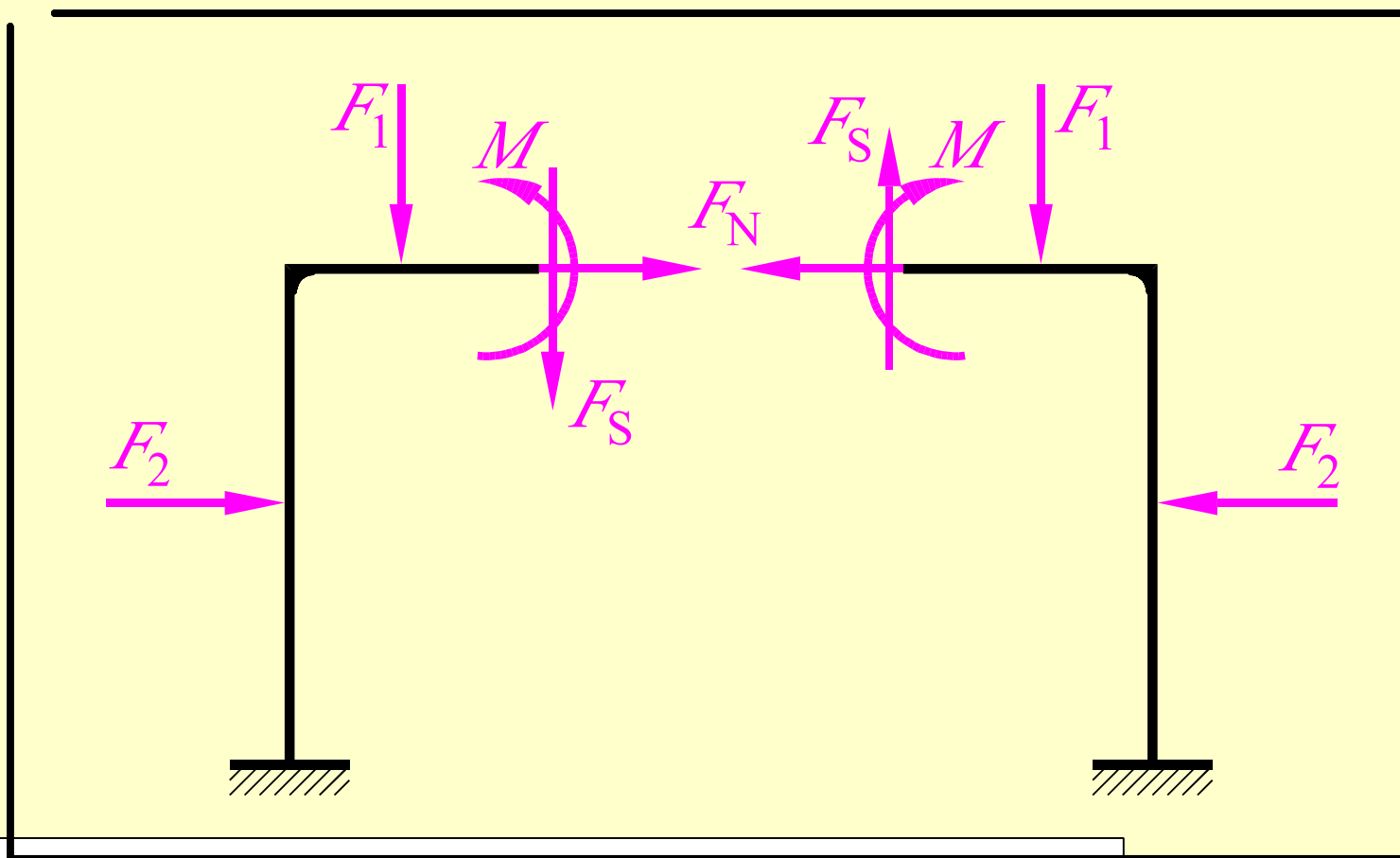


正对称载荷： 绕对称轴对折后，结构在对称轴两边的载荷的作用点和作用方向将重合，而且每对力数值相等。



反对称载荷： 绕对称轴对折后，结构在对称轴两边的载荷的数值相等，作用点重合而作用方向相反。

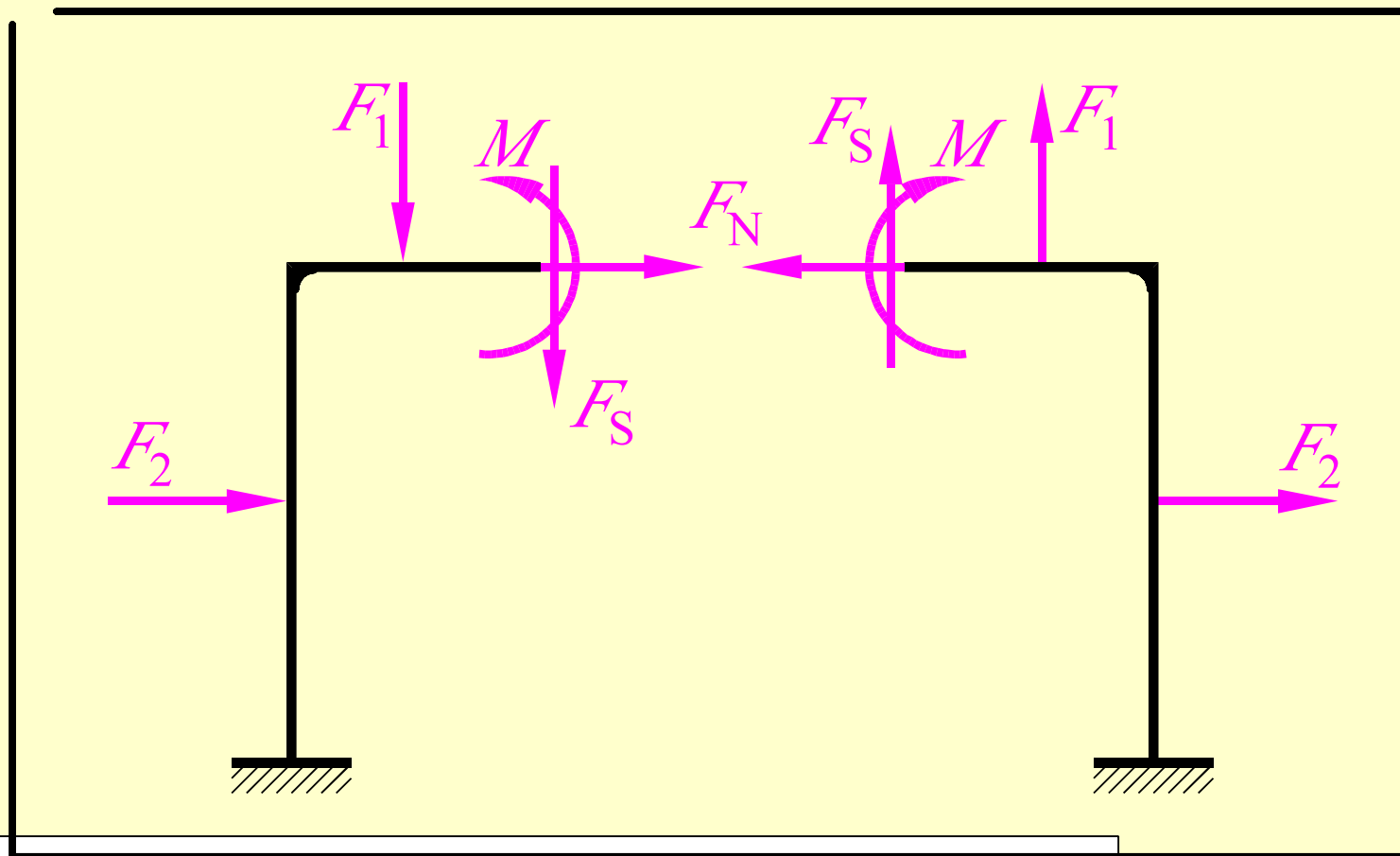




对称结构在正对称载荷作用下:

结构的内力及变形是对称的

位于对称轴上的截面 C 的内力 $F_S=0$

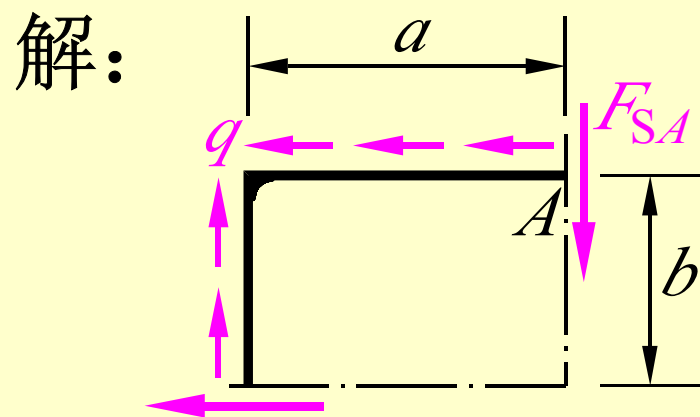
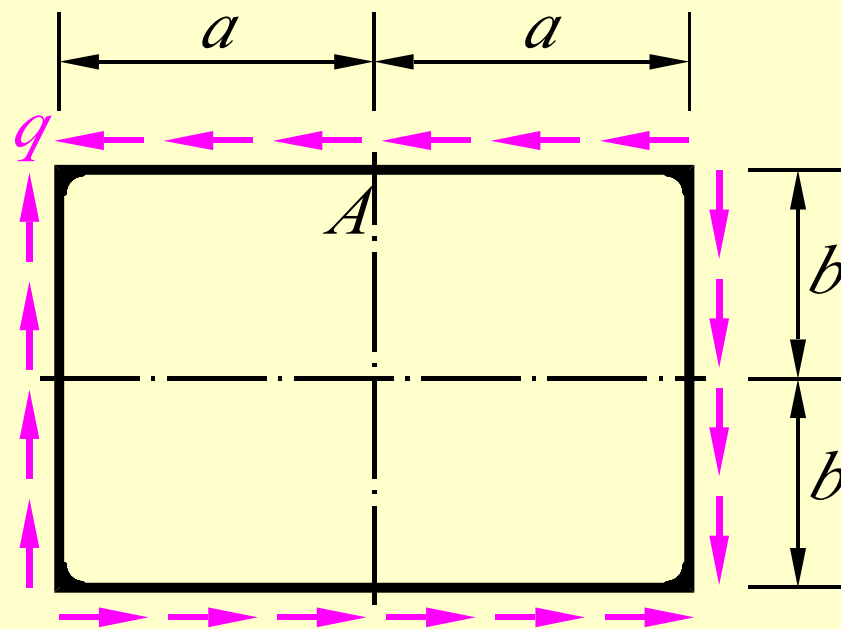


对称结构在反对称载荷作用下：

结构的内力及变形是反对称的

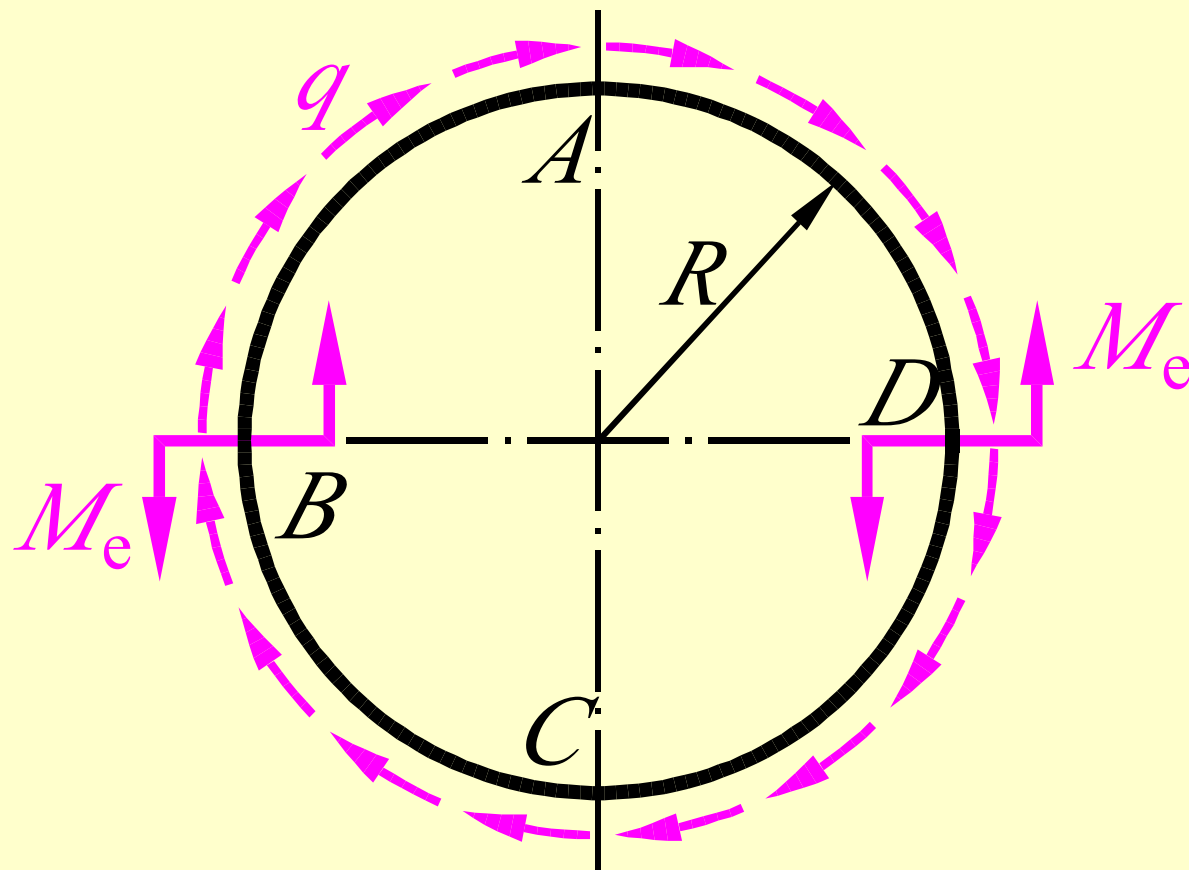
位于对称轴上的截面 C 的内力 $F_N=0$, $M=0$

例**26**：平面框架受切向分布载荷 q 作用，求截面**A**的剪力、弯矩和轴力。

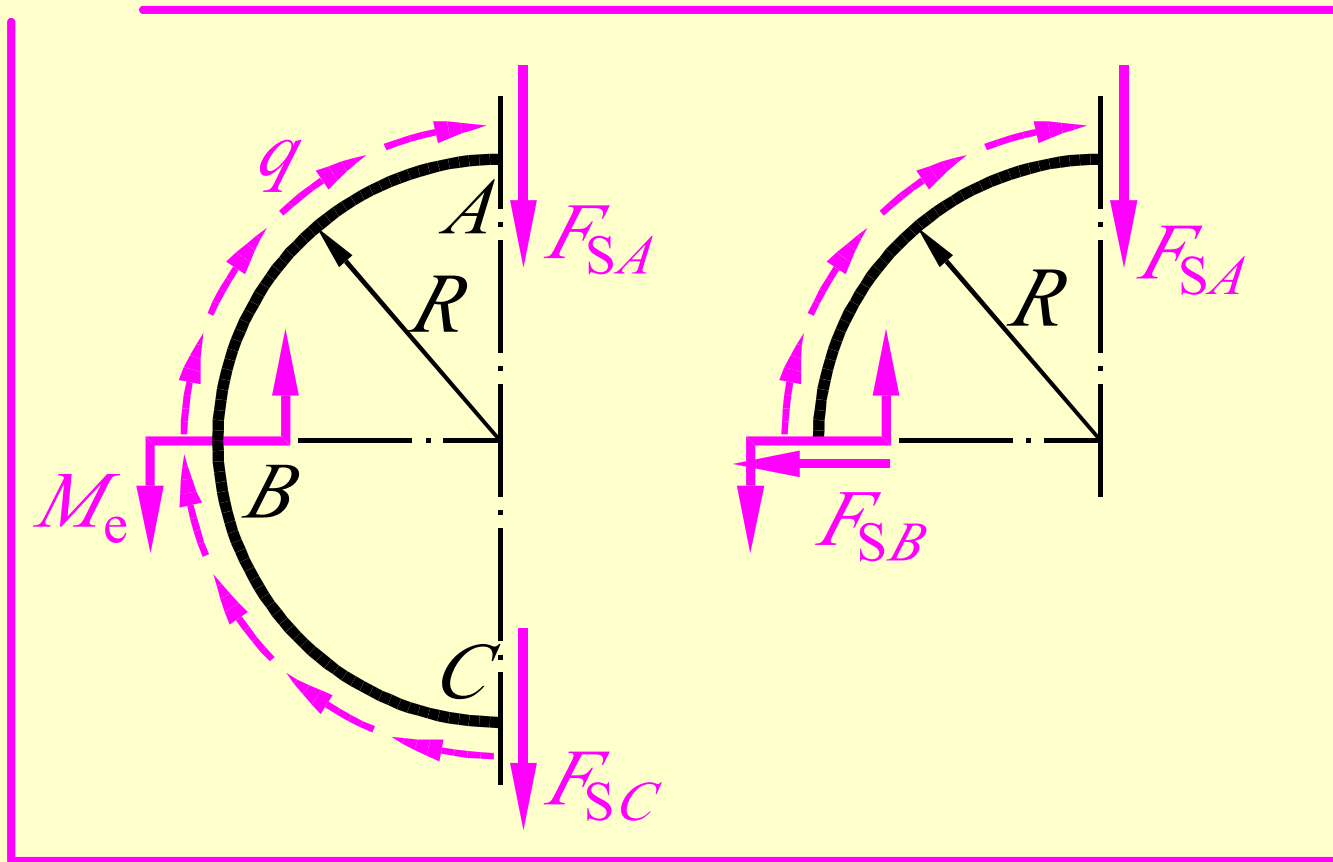


$$F_{SA} = qb, \quad M_A = 0, \quad F_{NA} = 0$$

例**27**：图示小曲率杆在力偶 M_e 与均匀分布剪流 q 作用下处于平衡状态, 已知 q 、 R 与 EF =常数, 试求截面 A 的剪力、弯矩和轴力。

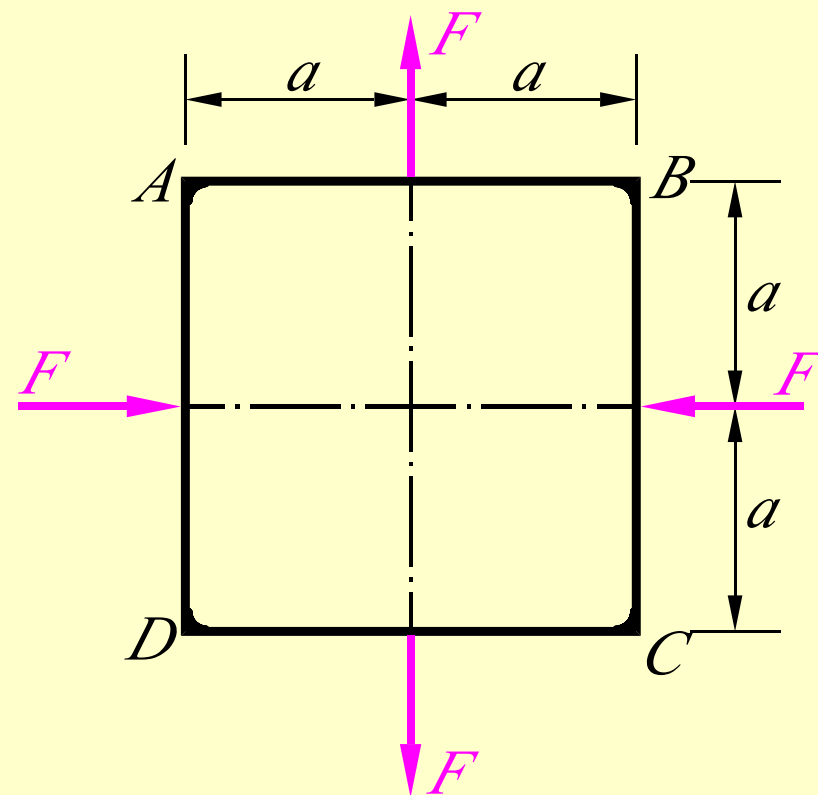


解：

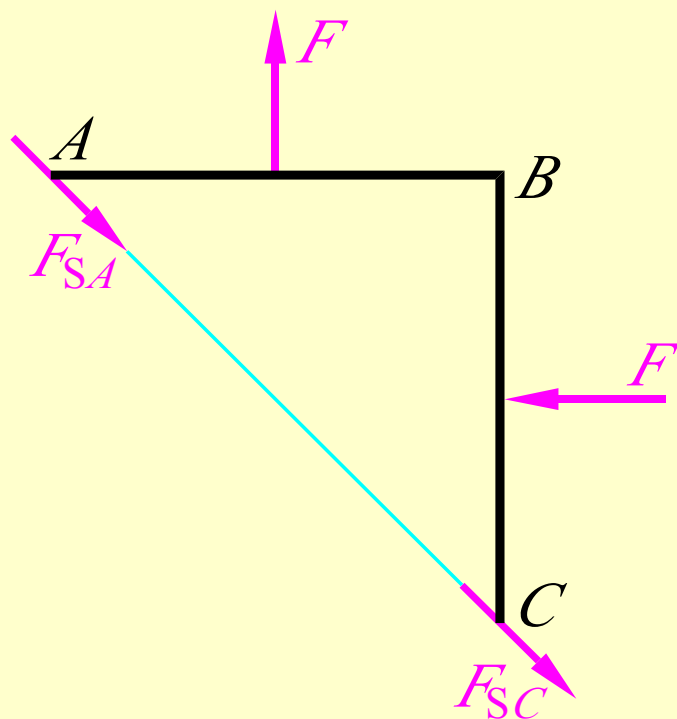


$$F_{SA} = qR, \quad M_A = 0, \quad F_{NA} = 0$$

例28：等截面平面框架的受力情况如图所示。试求最大弯矩及其作用位置。



解：

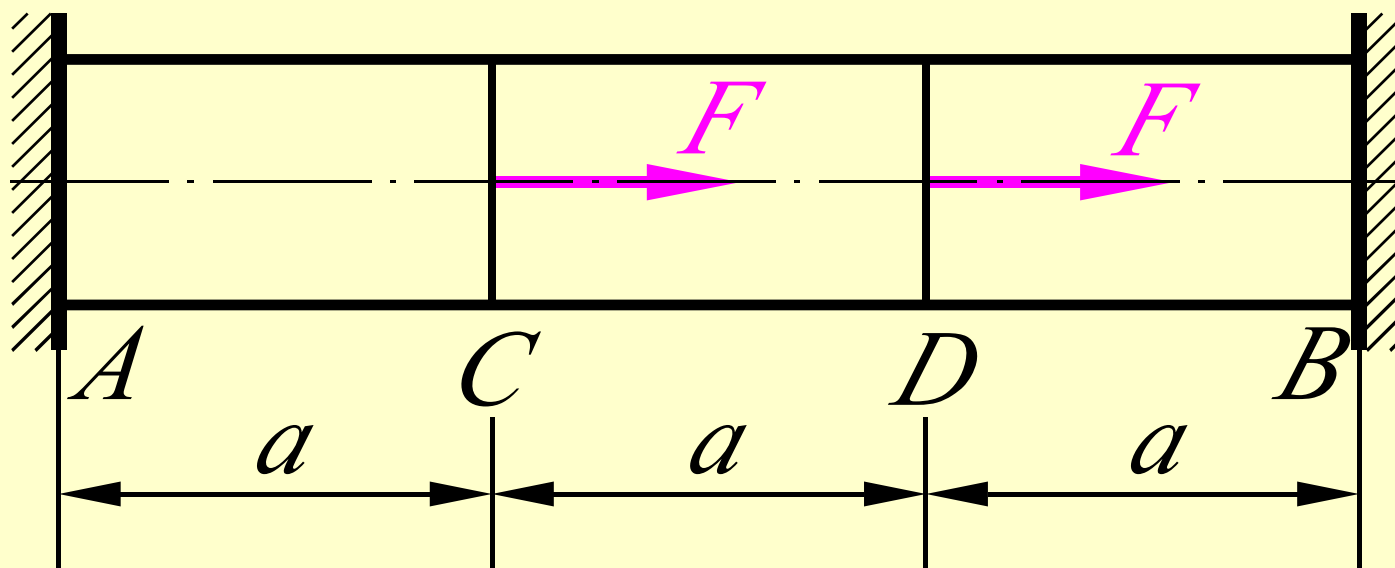


$$F_{SA} = F \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

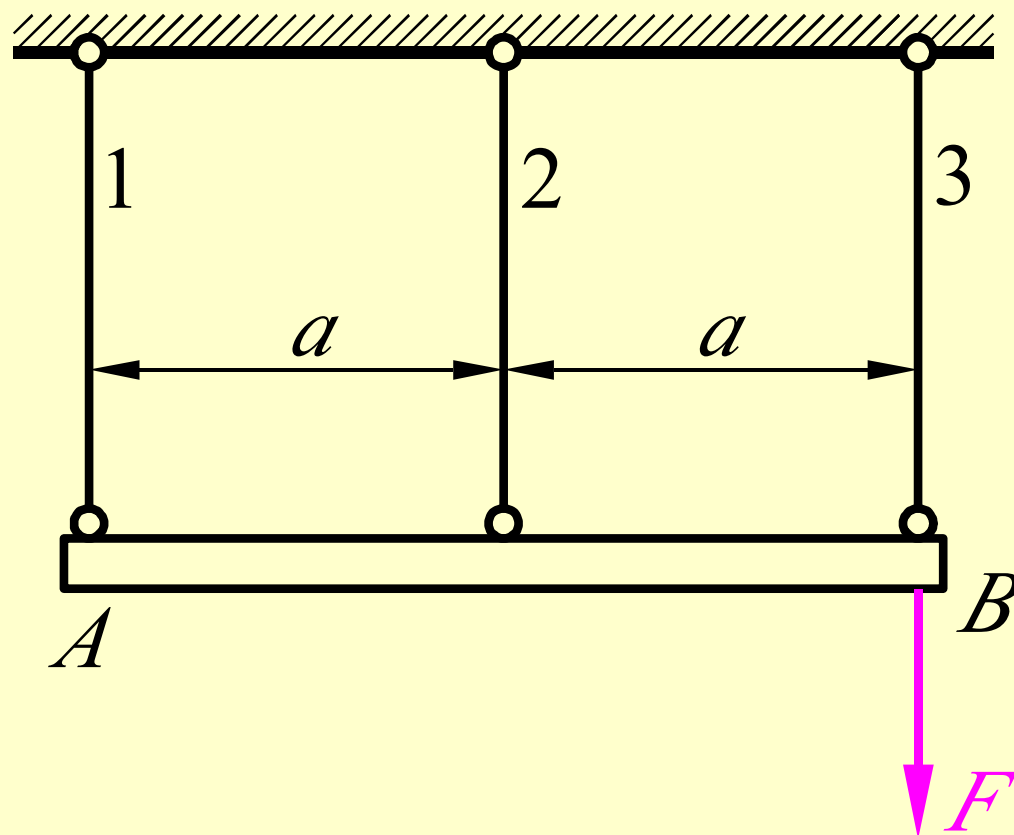
$$M_{\max} = \frac{Fa}{2}$$

$M_{\max}$ 发生在外载荷 F 作用点处

例29：图示等直杆两端固定，材料弹性模量为 E ，横截面面积为 A 。求两端的反力。



例30：如图所示， AB 为刚杆，1、2、3杆 E 、 A 、 I 均相同，求各杆内力值。



解：静力平衡条件：

$$F_{N1} + F_{N2} + F_{N3} = F$$

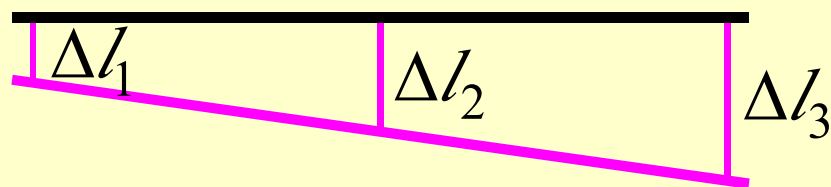
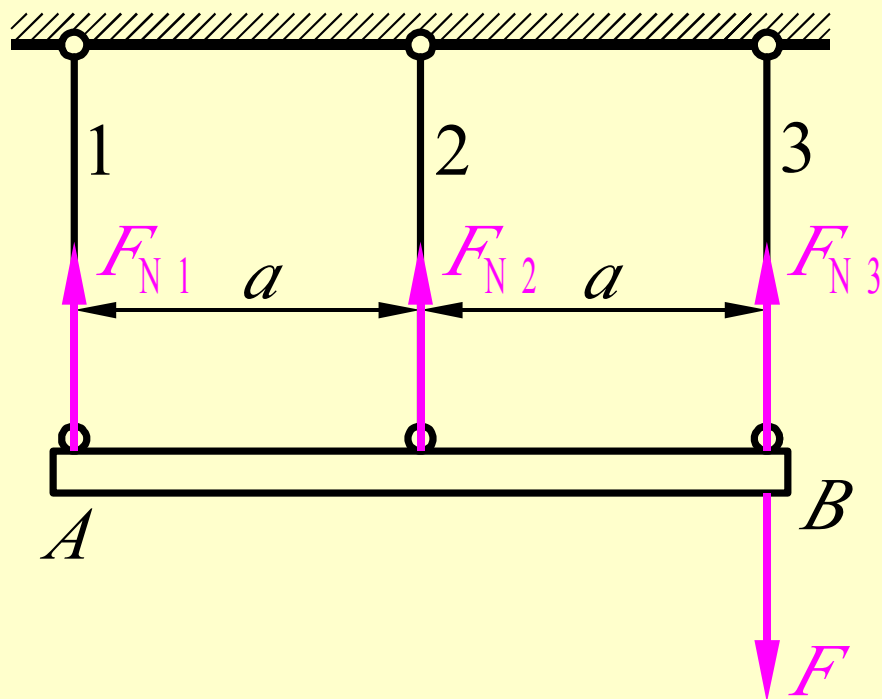
$$2F_{N1} + F_{N2} = 0$$

变形协调条件：

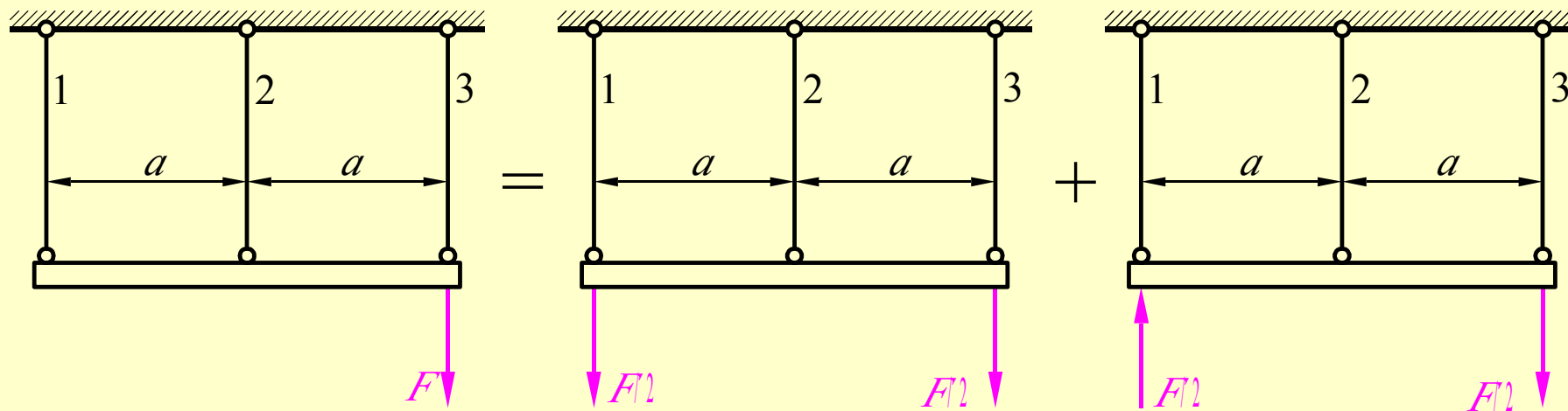
$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_3}{2}$$

引用胡克定律，可得：

$$F_{N2} = \frac{F_{N1} + F_{N3}}{2}$$



另解：

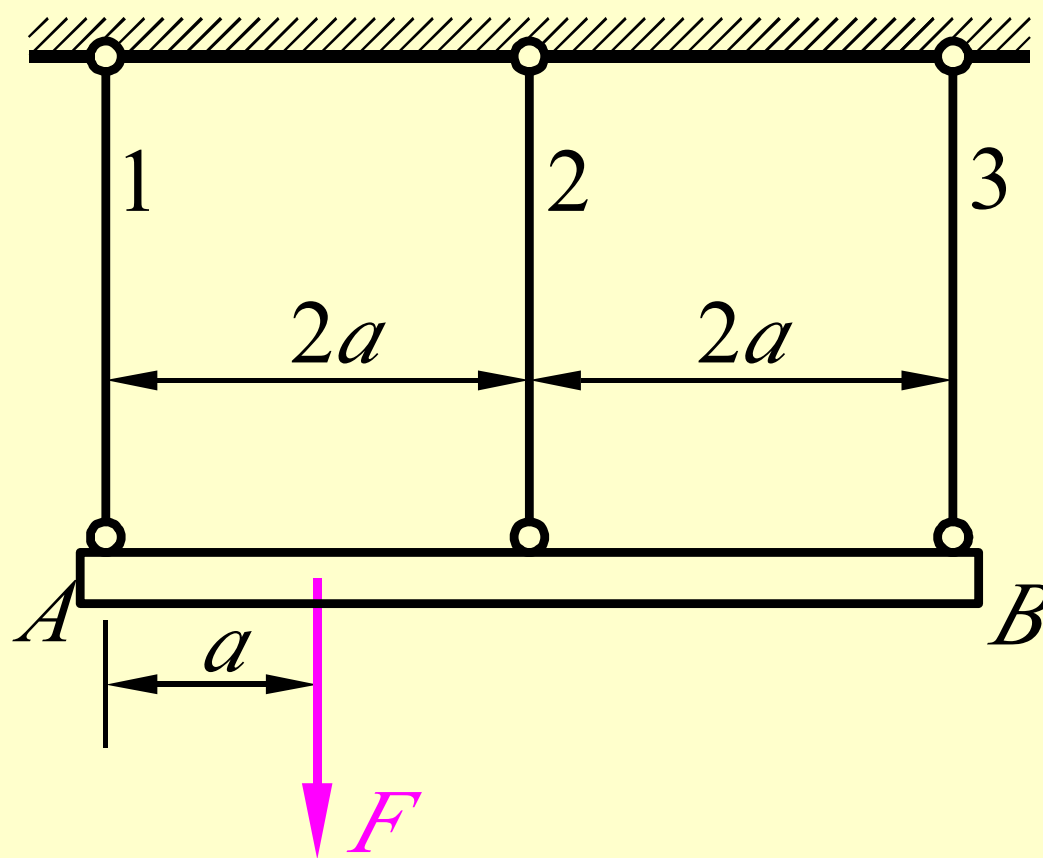


$$F_{N1} = \frac{F}{3} - \frac{F}{2} = -\frac{F}{6}$$

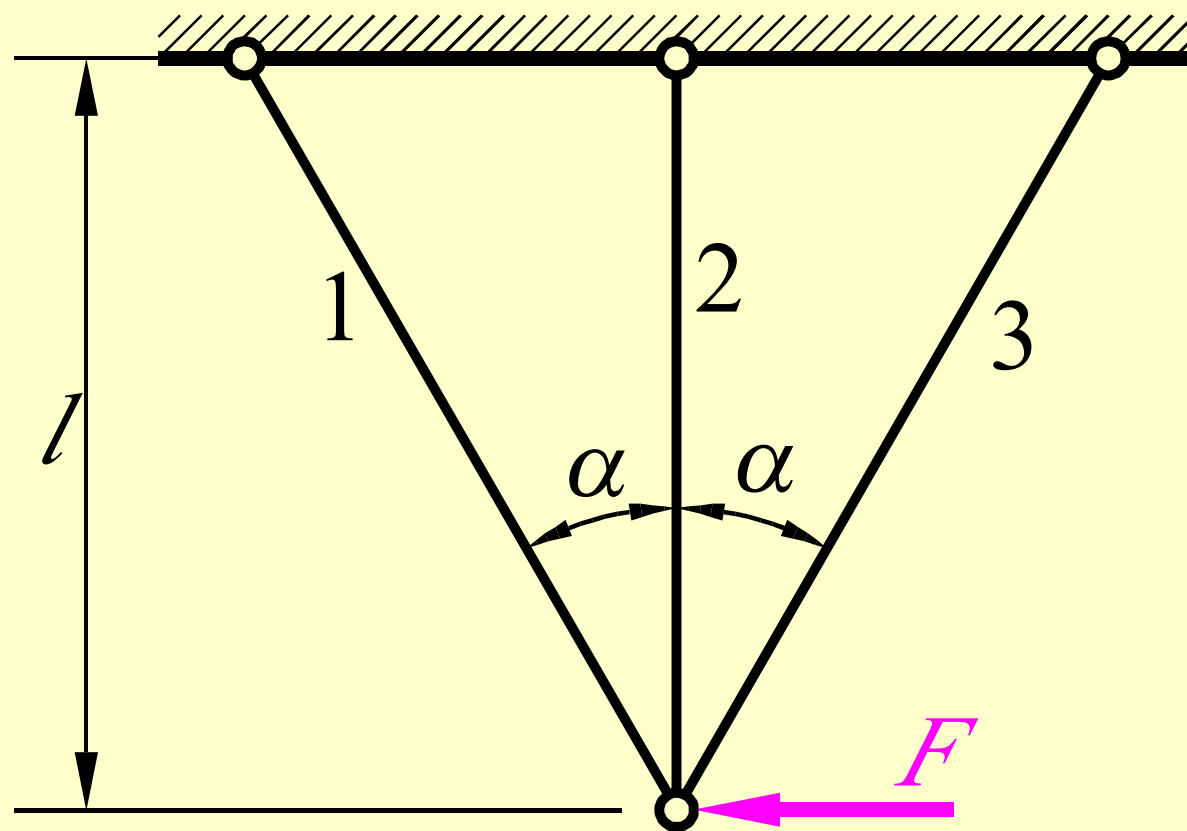
$$F_{N2} = \frac{F}{3} + 0 = \frac{F}{3}$$

$$F_{N3} = \frac{F}{3} + \frac{F}{2} = \frac{5F}{6}$$

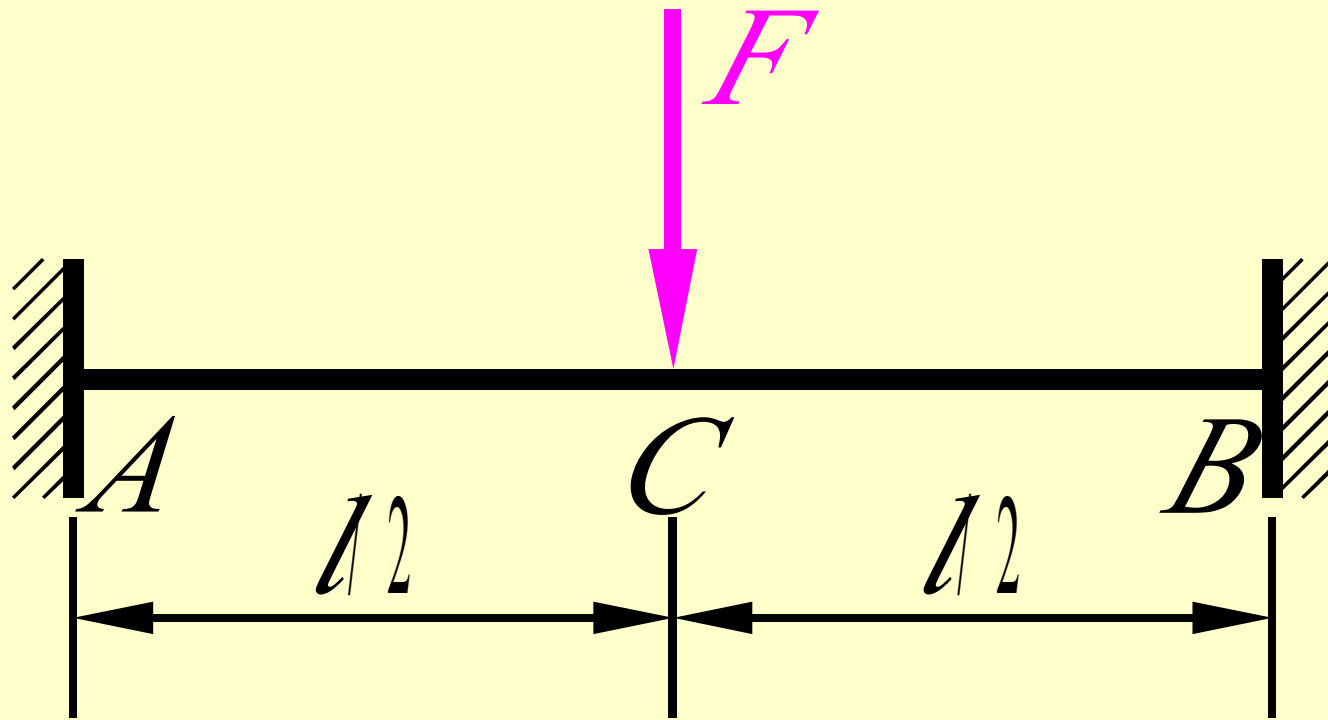
例31：如图所示， AB 为刚性杆，1、2、3杆 E 、 A 、 l 均相同，求三杆的轴力和变形。



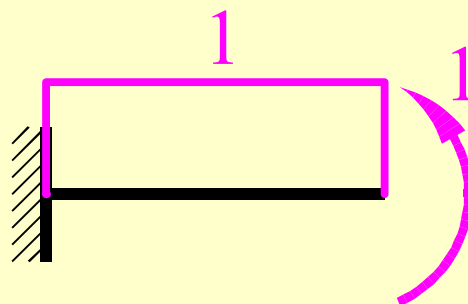
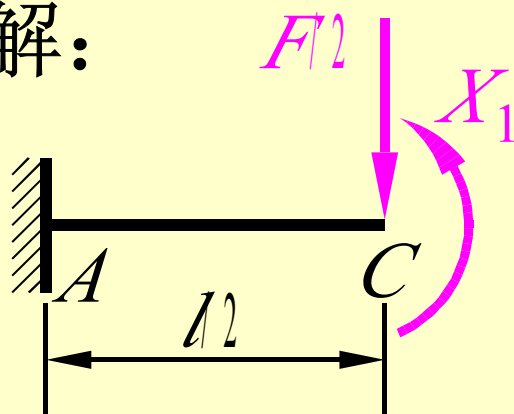
例**32**图示桁架结构，三杆拉压刚度 EA 相同,求杆**1**、**2**、**3**的内力。



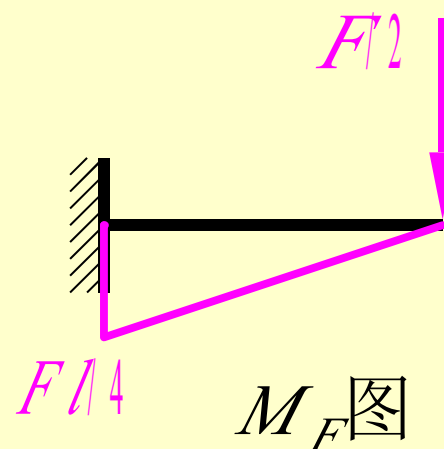
例**33**：两端固定的梁，跨中受集中力 F 作用,设梁的抗弯刚度为 EI ，不计轴力影响。求梁中点的挠度。



解:



$\overline{M}_1$ 图

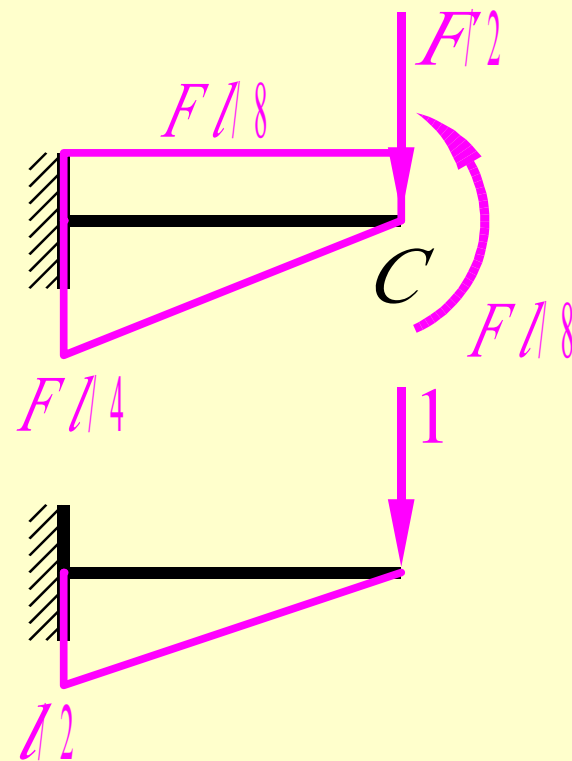


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{l}{2} \cdot 1 \right) = \frac{l}{2EI}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{Fl^2}{16} \cdot 1 \right) = -\frac{Fl^2}{16EI}$$

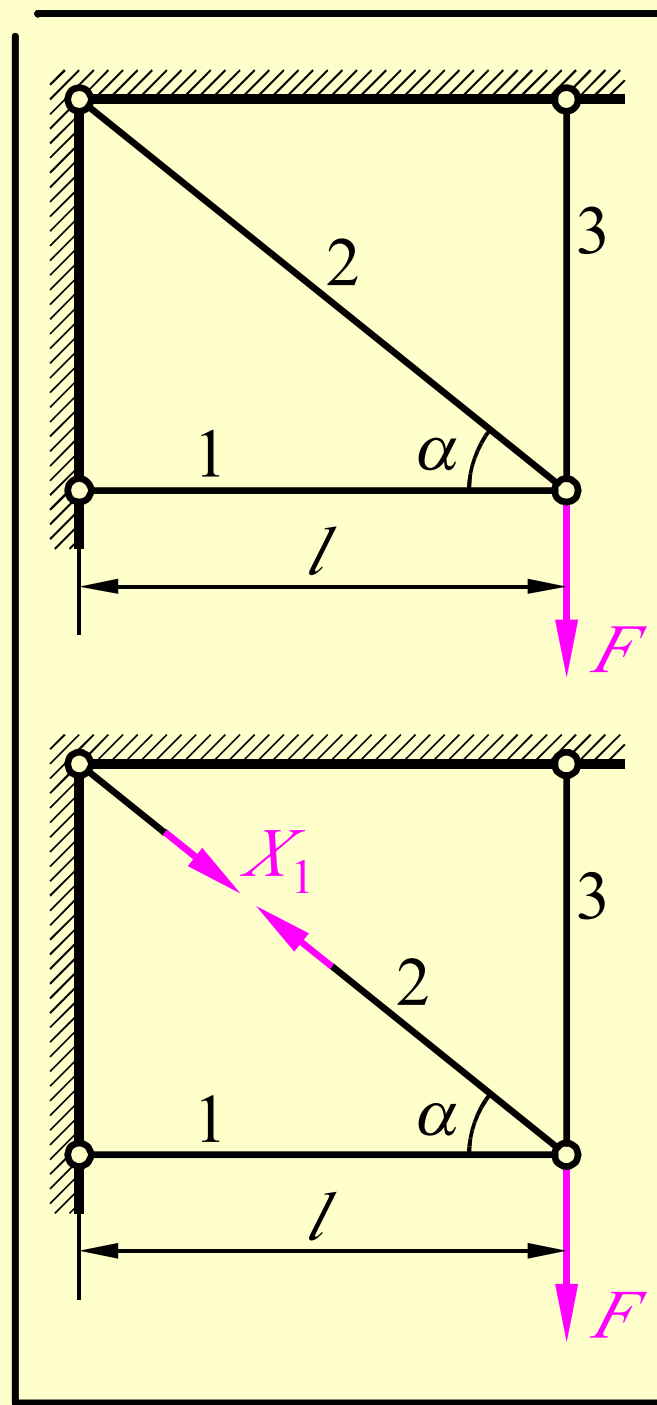
由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得 $X_1 = \frac{Fl}{8}$

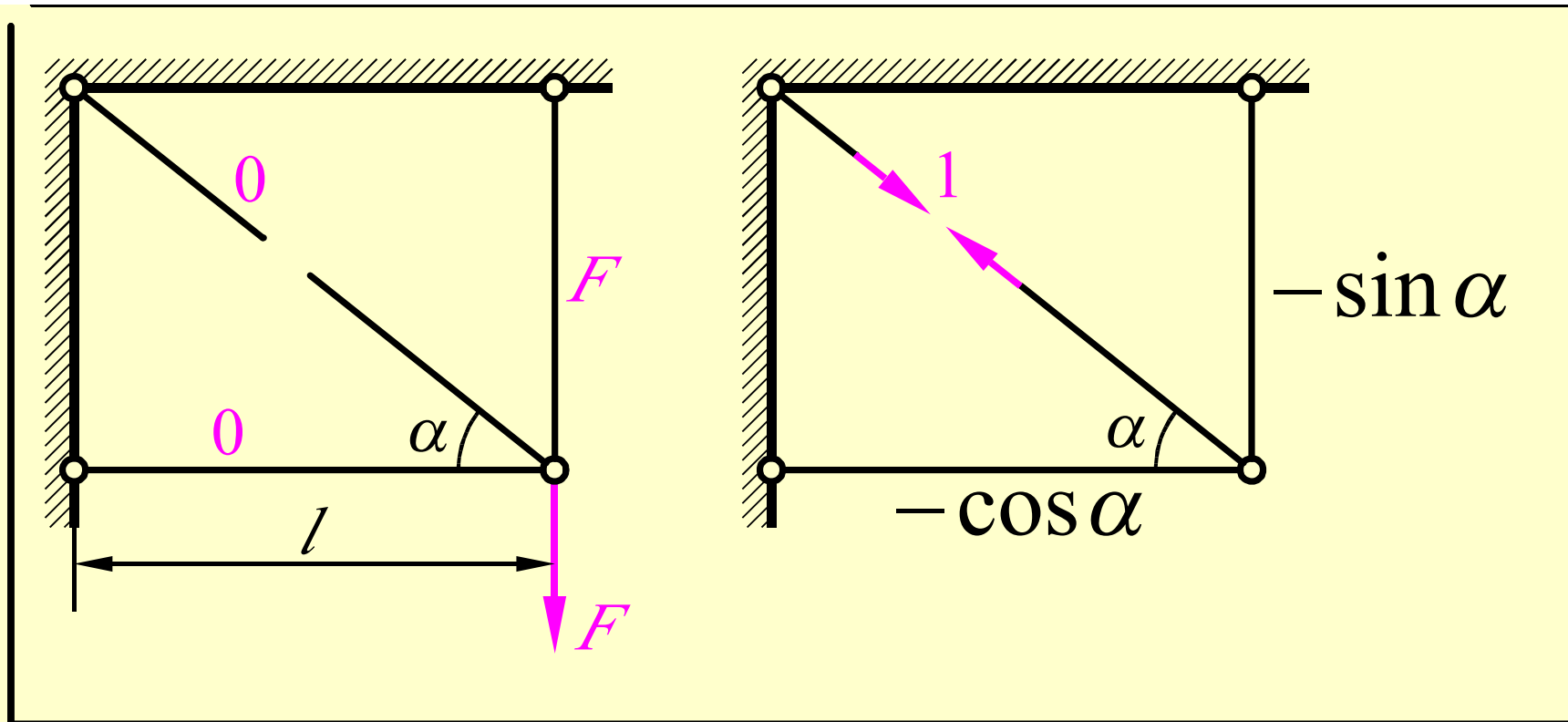
$$\Delta_C = \frac{Fl^3}{EI} \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{Fl^3}{192EI} (\downarrow)$$



例**34**： 已知桁架各杆的拉
压刚度为 **EA** ， 求各杆的轴
力。

解：





$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{F}_{Ni} \bar{F}_{Ni} l_i}{EA} = \frac{l}{EA} \frac{1 + \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA} = -\frac{Fl}{EA} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

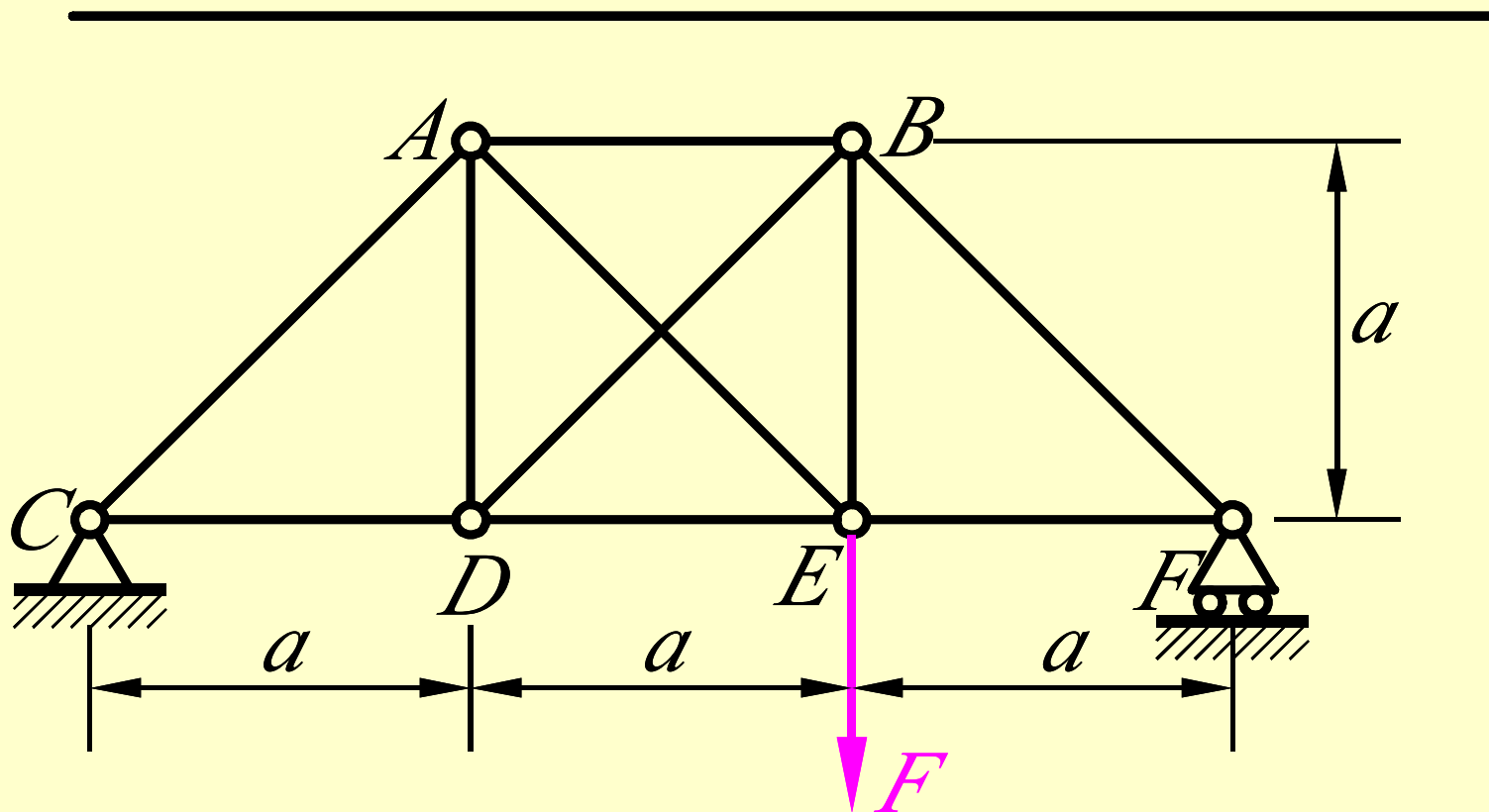
由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得

$$F_{N2} = X_1 = \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha} F$$

$$F_{N1} = -\frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha} F$$

$$F_{N3} = \frac{(1 + \cos^3 \alpha)}{1 + \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha} F$$

例35：图示平面桁架，已知各杆的 E 皆相同， CA 、 AB 、 BF 三杆的横截面面积均为 30 cm^2 ，其余各杆面积均为 15 cm^2 ， $a=6\text{ m}$ ， $F=130\text{ kN}$ 。试求杆 AB 的轴力。



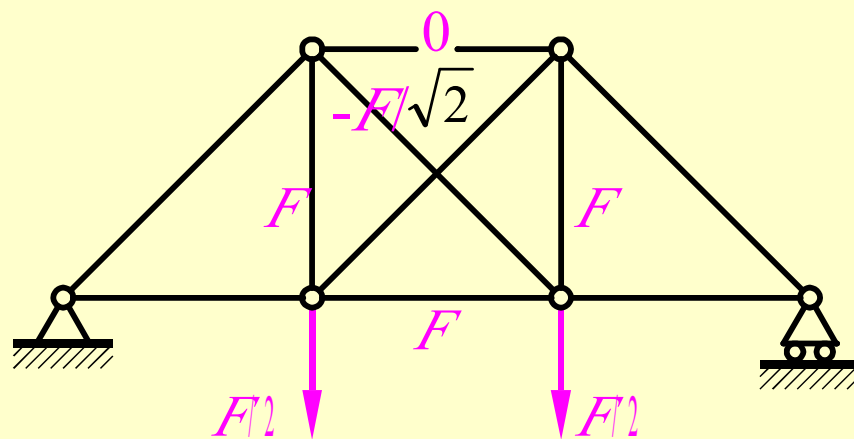
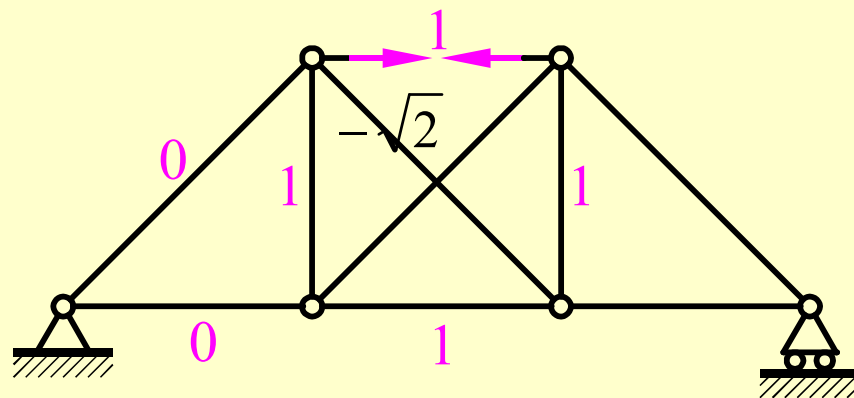
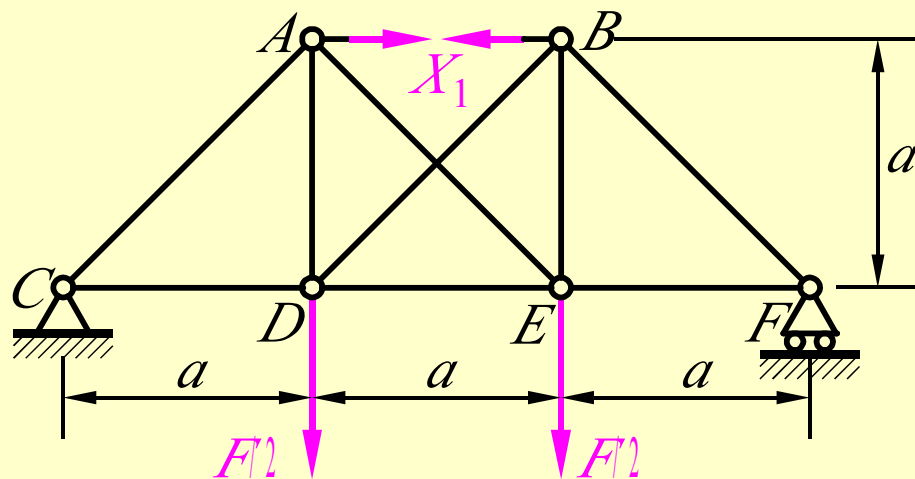
解:

$$\delta_{11} = \sum_i \frac{\bar{F}_{Ni} \bar{F}_{Ni} l_i}{EA_i} = \left(\frac{7}{2} + 4\sqrt{2} \right) \frac{a}{EA}$$

$$\Delta_{1F} = \sum_i \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA_i} = (3 + 2\sqrt{2}) \frac{Fa}{EA}$$

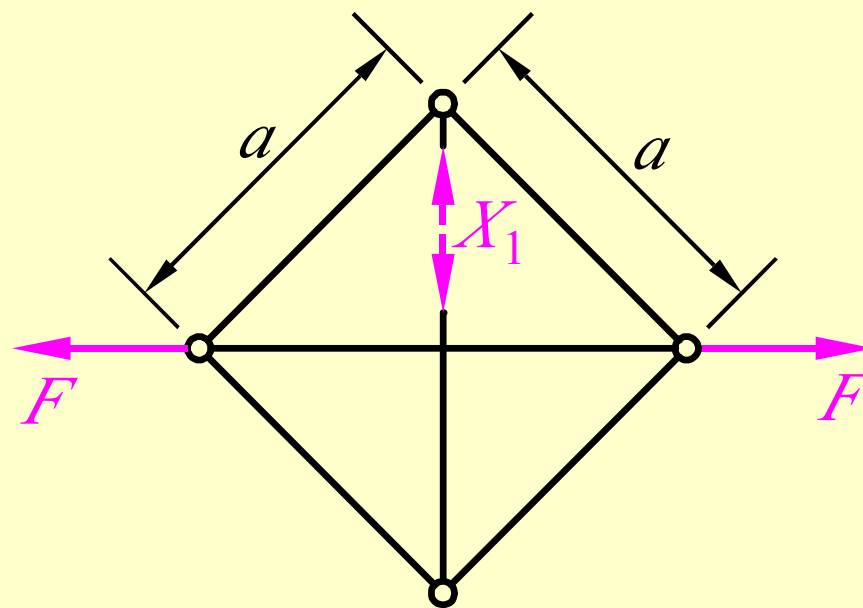
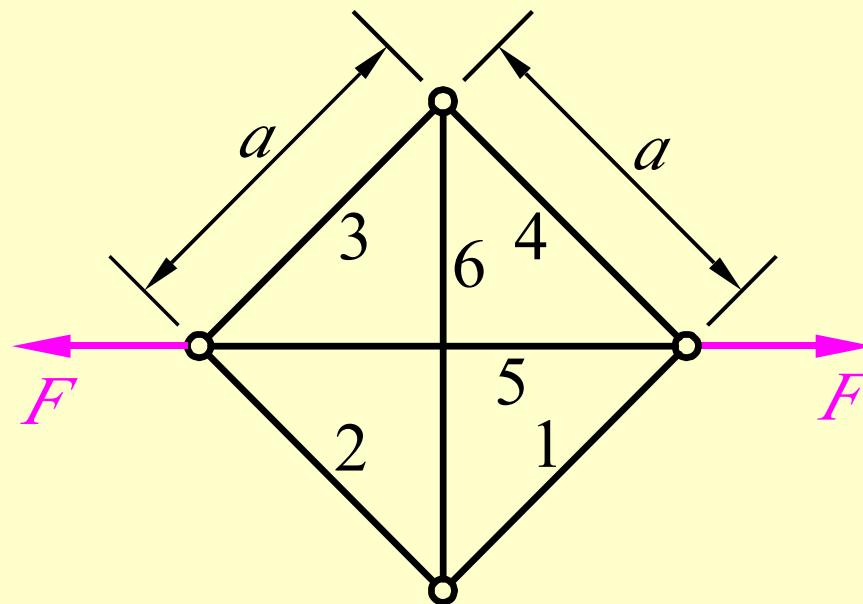
由 $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得

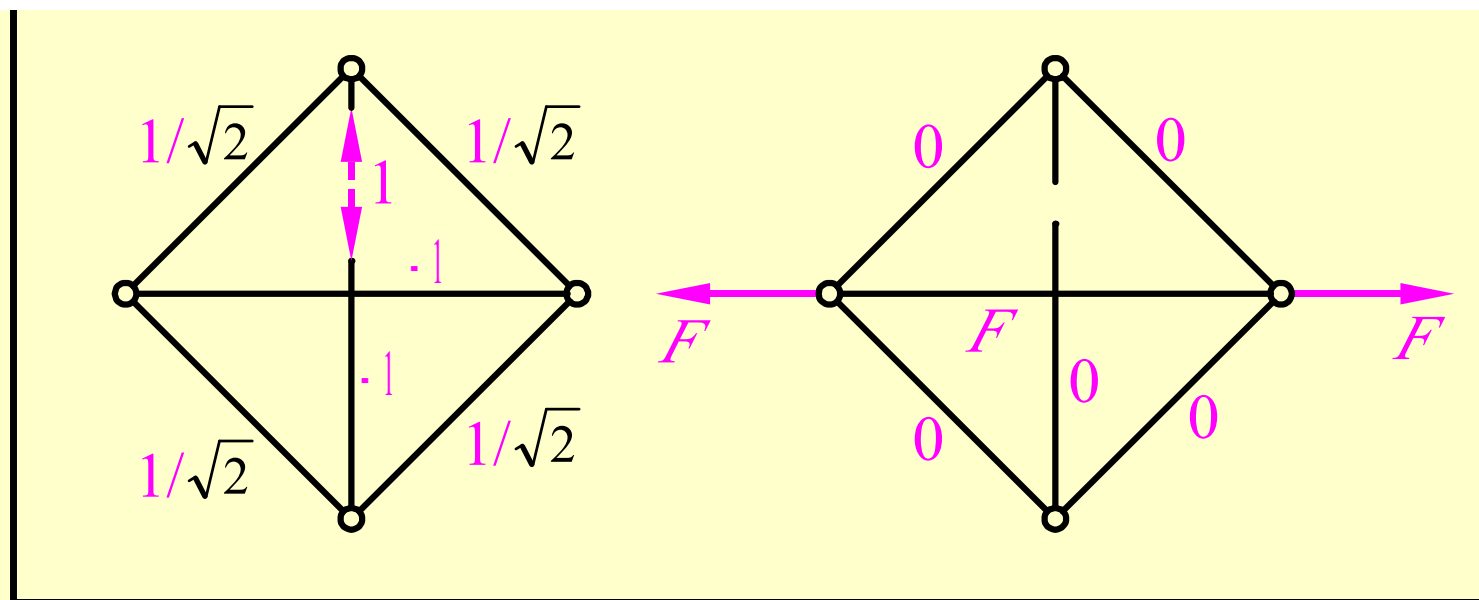
$$X_1 = -\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3.5 + 4\sqrt{2}} F = -82.7 \text{ kN}$$



例**36**： 已知图示桁架
各杆的拉压刚度为 EA
， 试求各杆轴力。

解：





$$\delta_{11} = \frac{a}{EA} (2 + 2\sqrt{2}), \quad \Delta_{1F} = -\frac{\sqrt{2} Fa}{EA}$$

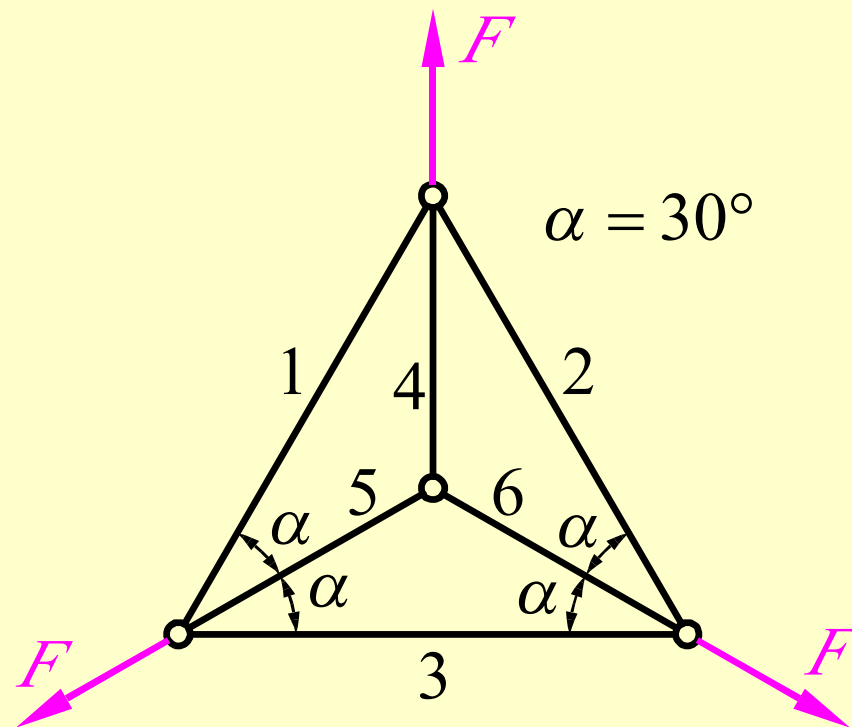
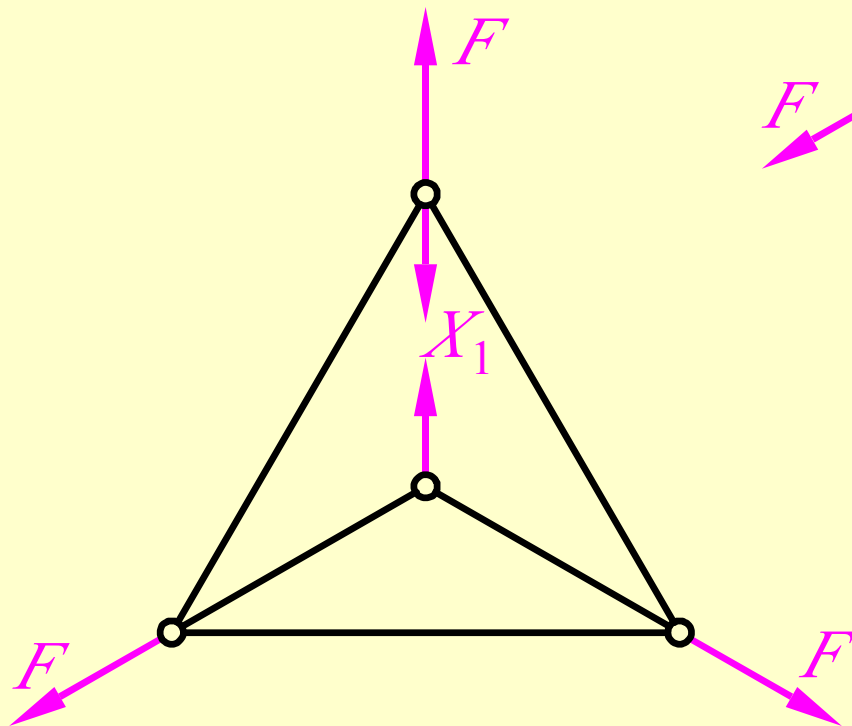
由 $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得 $X_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} F$

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = F_{N4} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} F$$

$$F_{N5} = \frac{F}{\sqrt{2}}, \quad F_{N6} = -\frac{2 - \sqrt{2}}{2} F$$

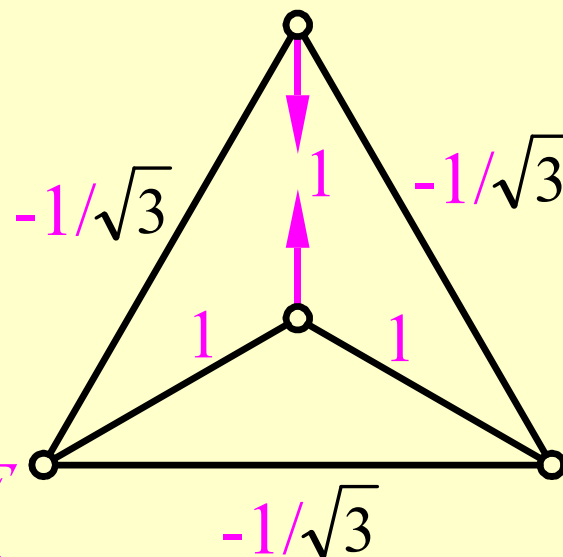
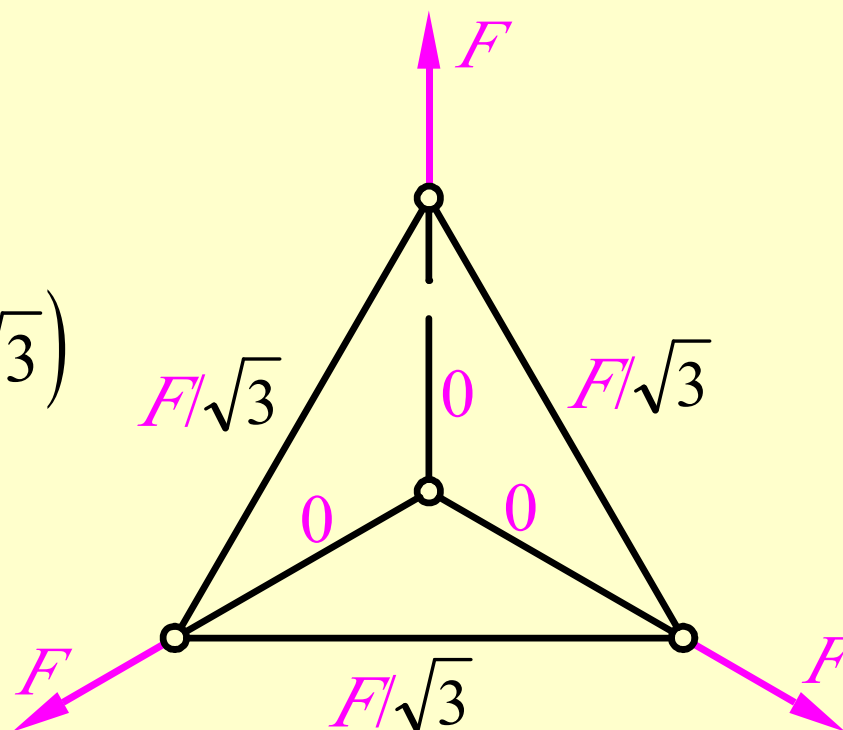
例**37**：已知图示桁架各杆的拉压刚度为 EA ，试求各杆轴力。

解：



$$\delta_{11} = \frac{a}{EA} (1 + \sqrt{3})$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{Fa}{EA}$$



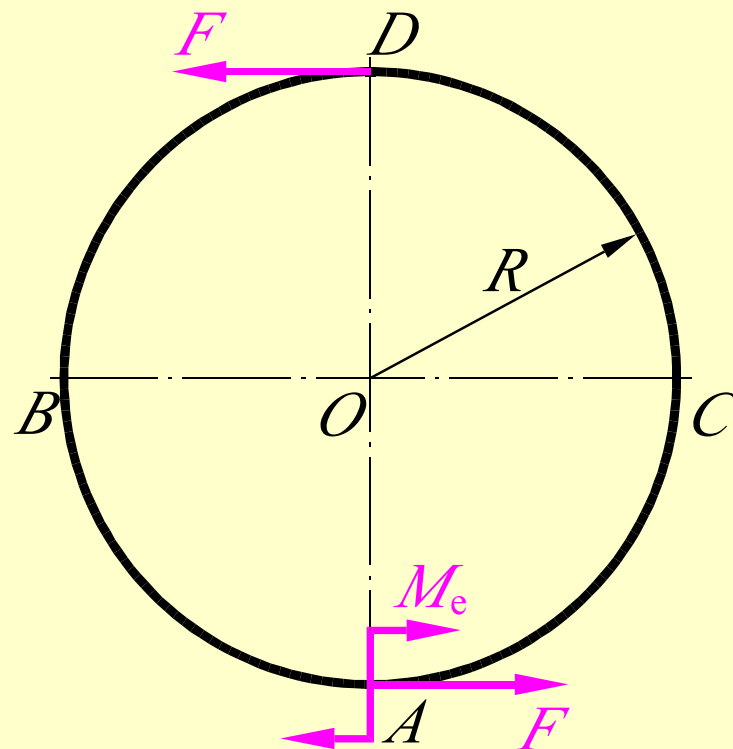
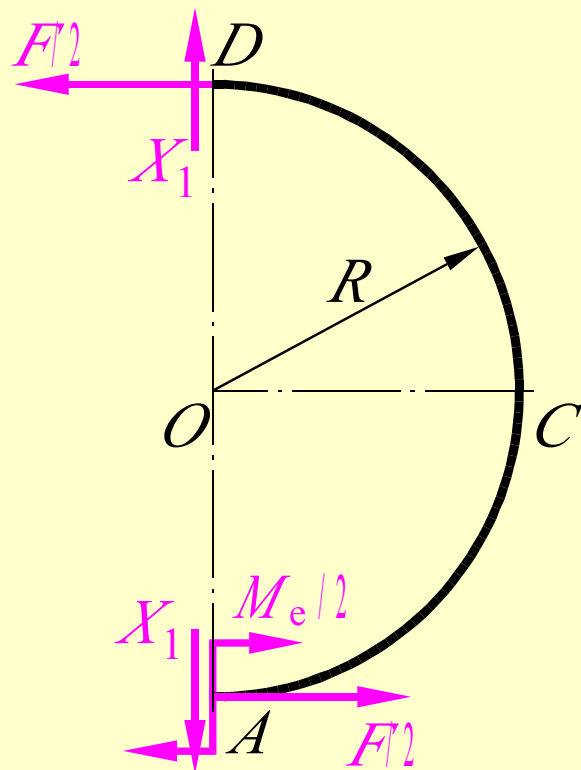
(a 为1、2、3杆的长度)

由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得 $X_1 = \frac{F}{1 + \sqrt{3}}$

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = F_{N4} = F_{N5} = F_{N6} = \frac{F}{1 + \sqrt{3}}$$

例38：半径为 R 的小曲率圆环受力如图，已知圆环的弯曲刚度为 EI ， $M_e=2FR$ ，试求圆环 D 截面处的内力。

解：



$$\bar{M} = -R \sin \theta$$

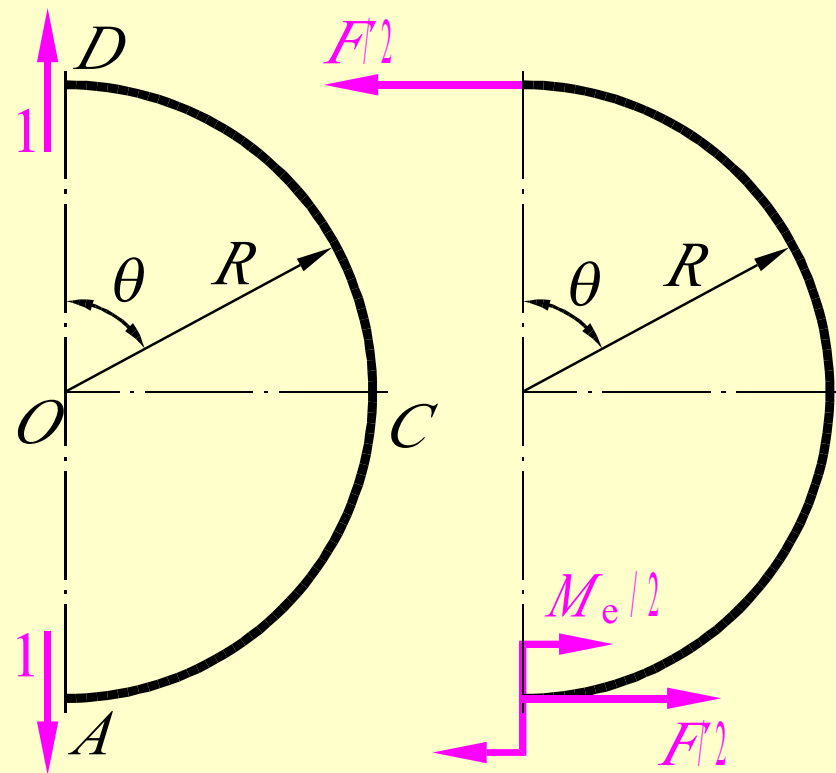
$$M = \frac{FR}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$\delta_{11} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta R d\theta}{EI} = \frac{\pi R^3}{2EI}$$

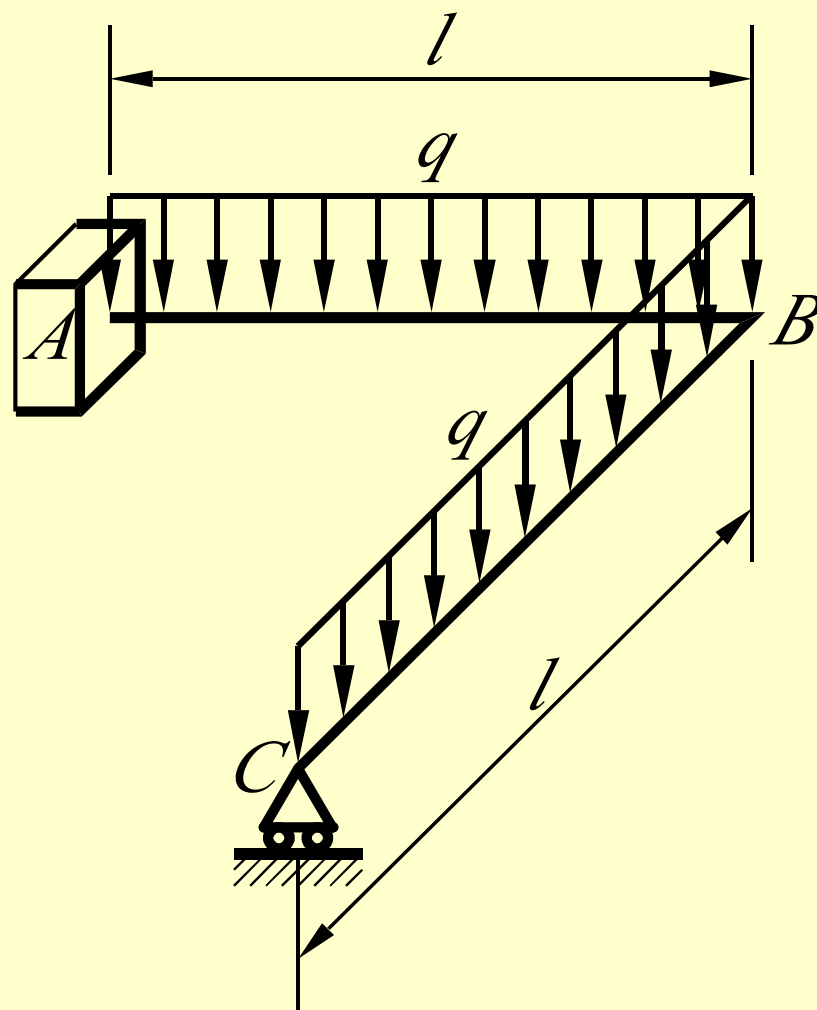
$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \int_0^\pi \frac{-\frac{1}{2} FR^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta R d\theta}{EI} \\ &= -\frac{FR^3}{EI} \end{aligned}$$

由 $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ 得 $X_1 = \frac{2F}{\pi}$

$$F_{ND} = 0, \quad F_{SD} = \frac{2F}{\pi}, \quad M_D = 0$$



例**39**：图示直角折杆水平放置，已知折杆的弯曲刚度为 EI ，扭转刚度为 GI_p 。试求支座 C 的反力。



$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \int_0^l x^2 dx + \frac{1}{GI_p} \int_0^l l^2 dx$$

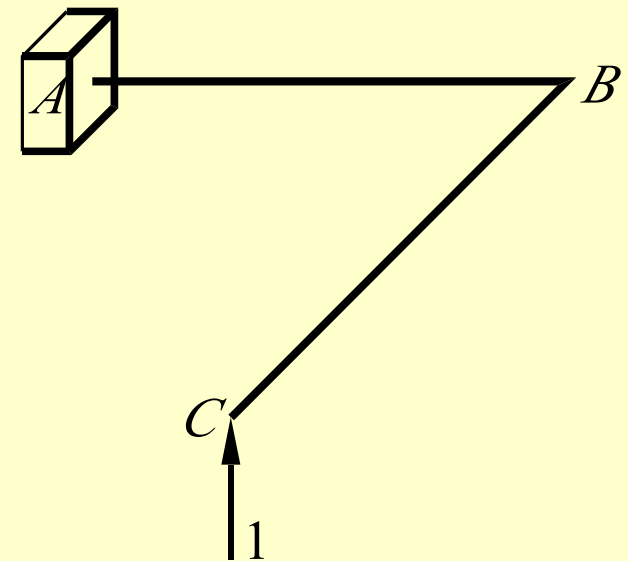
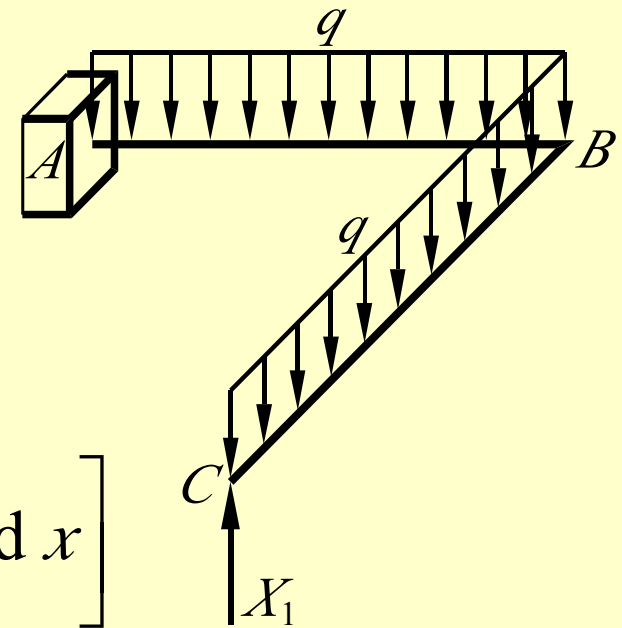
$$= \frac{2GI_p + 3EI}{3EIGI_p} l^3$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \left[\int_0^l \frac{q}{2} x^3 dx + \int_0^l \frac{q}{2} x^3 dx + \int_0^l qlx^2 dx \right]$$

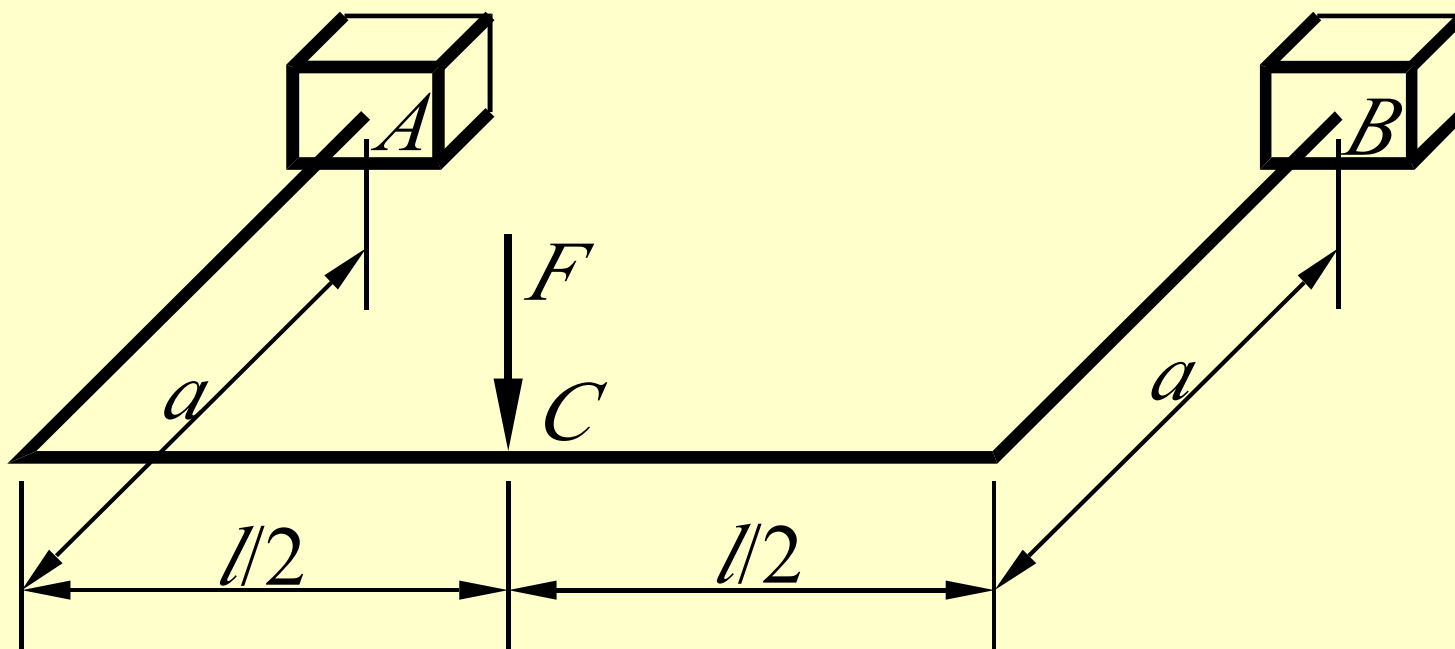
$$+ \frac{1}{GI_p} \int_0^l -\frac{ql^2}{2} l dx$$

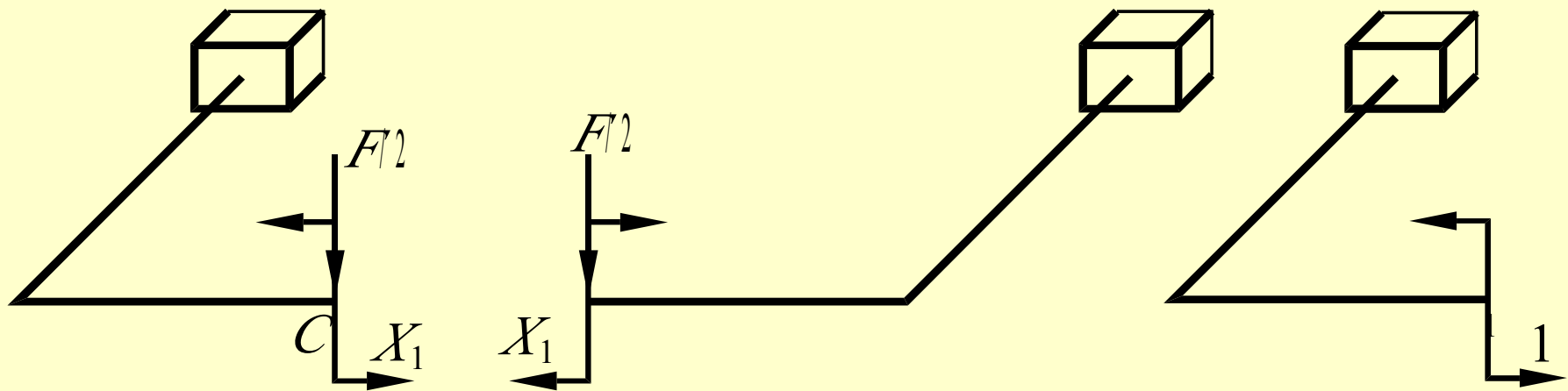
$$= -\frac{7GI_p + 6EI}{12EIGI_p} ql^4$$

$$X_1 = F_{Cy} = \frac{7GI_p + 6EI}{4(2GI_p + 3EI)} ql$$



例40：图示刚架水平放置，已知刚架的弯曲刚度为 EI ，扭转刚度为 GI_p 。试求支座 A 的反力。（设 $GI_p = \frac{4}{5}EI$ ）



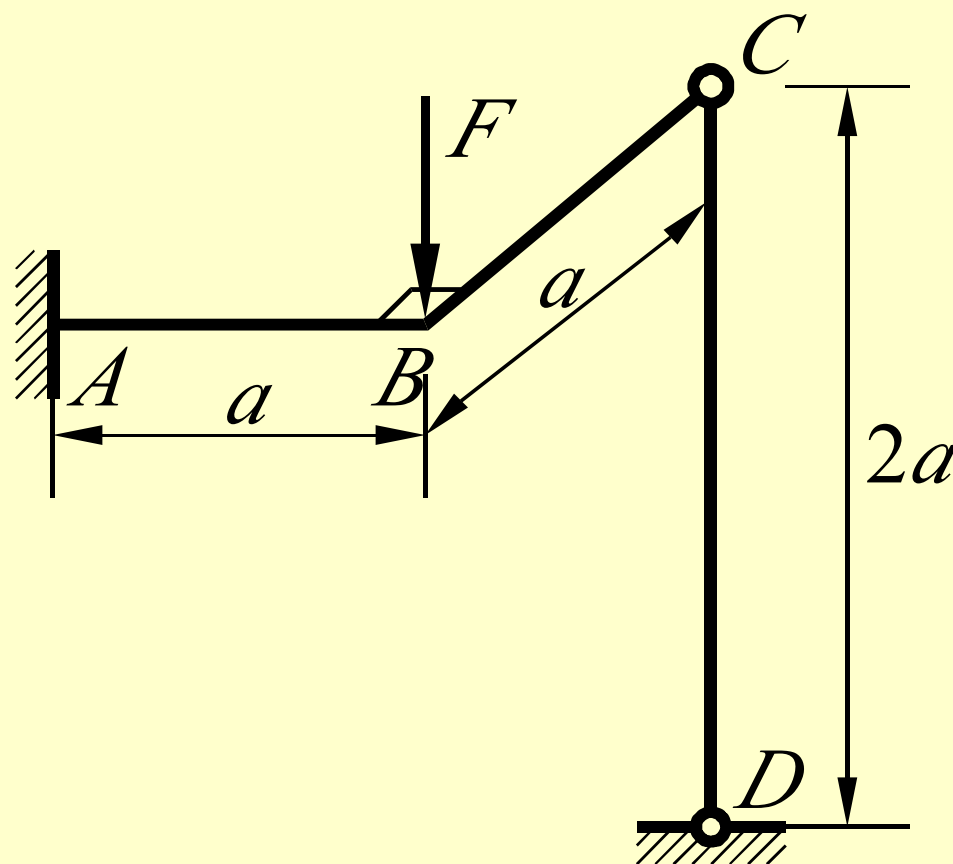


$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} 1^2 dx + \frac{1}{GI_p} \int_0^a 1^2 dx = \frac{2l+5a}{4EI}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{Fx}{2} dx + \frac{1}{GI_p} \int_0^a -\frac{Fl}{4} dx = -\frac{(l+5a)}{16EI} Fl$$

$$X_1 = \frac{l+5a}{8l+20a} Fl$$

例**41**：正交折杆***ABC***放置于水平面内，已知折杆***ABC***的弯曲刚度为***EI***、扭转刚度为***GI_p***及杆***CD***的拉压刚度为***EA***。试求杆***CD***的轴力。
(不考试压杆稳定性)

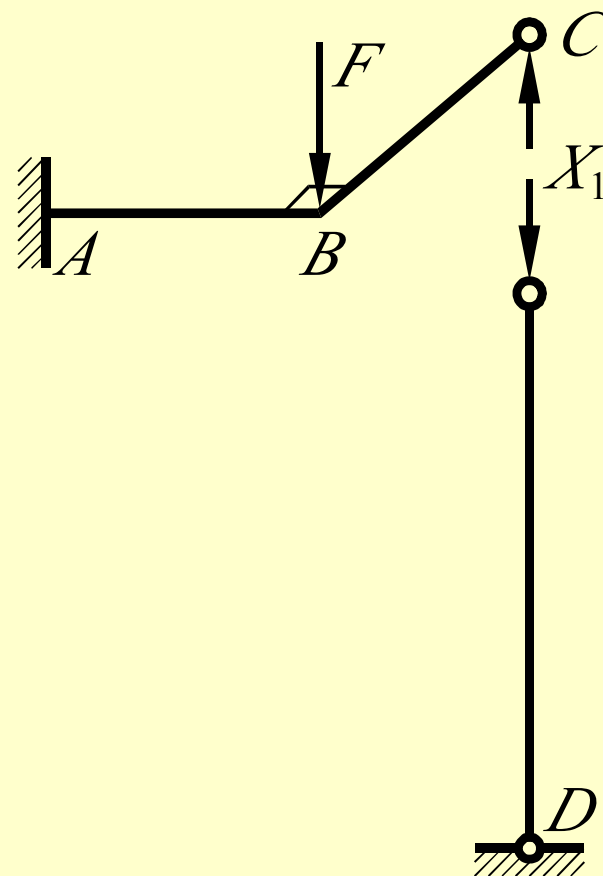


解:
$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \int_0^a x^2 dx + \frac{1}{GI_p} \int_0^a a^2 dx + \frac{1 \cdot a}{EA}$$

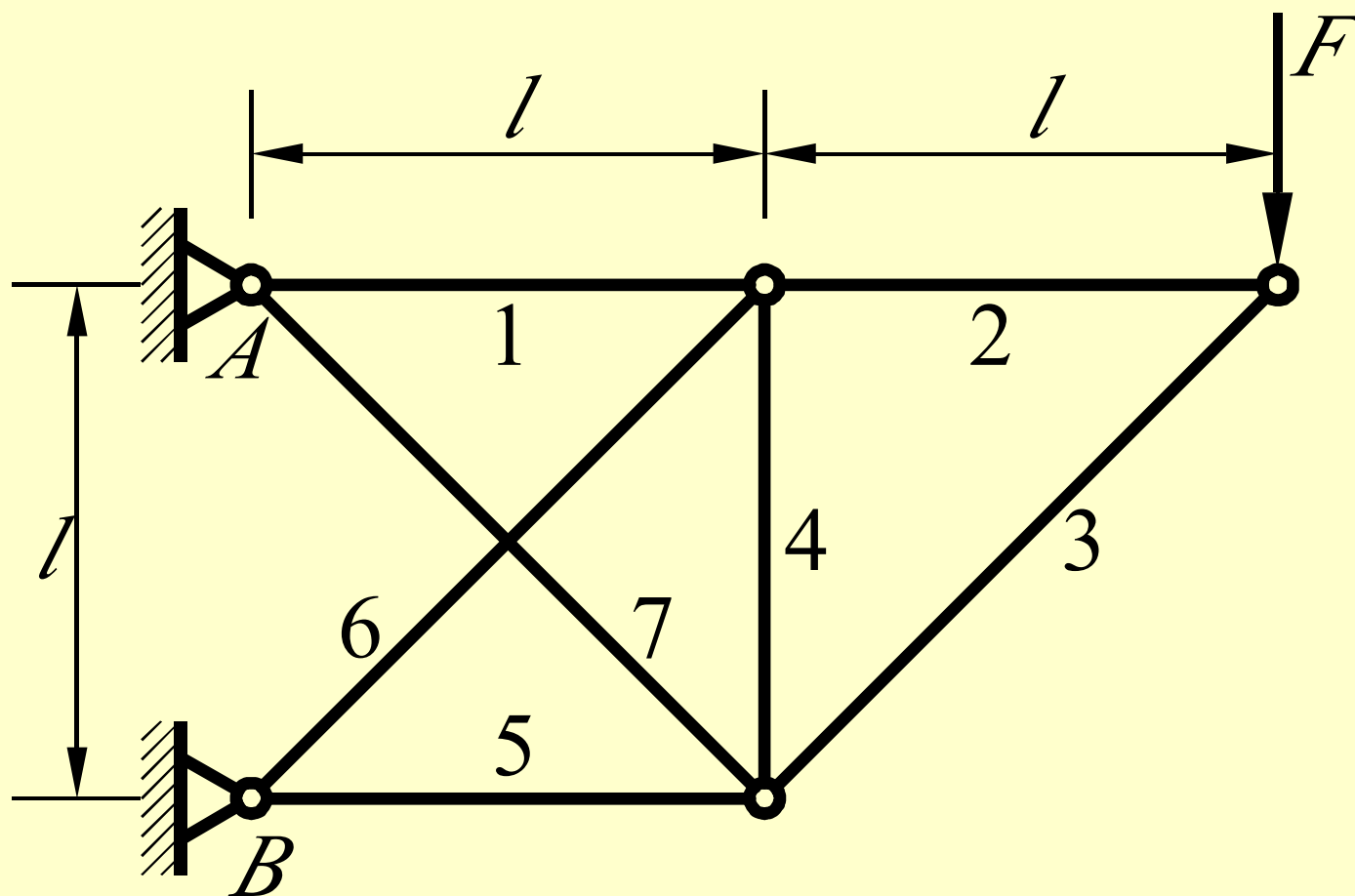
$$= \frac{2a^3}{3EI} + \frac{a^3}{GI_p} + \frac{a}{EA}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \int_0^a Fx(-x) dx = -\frac{Fa^3}{3EI}$$

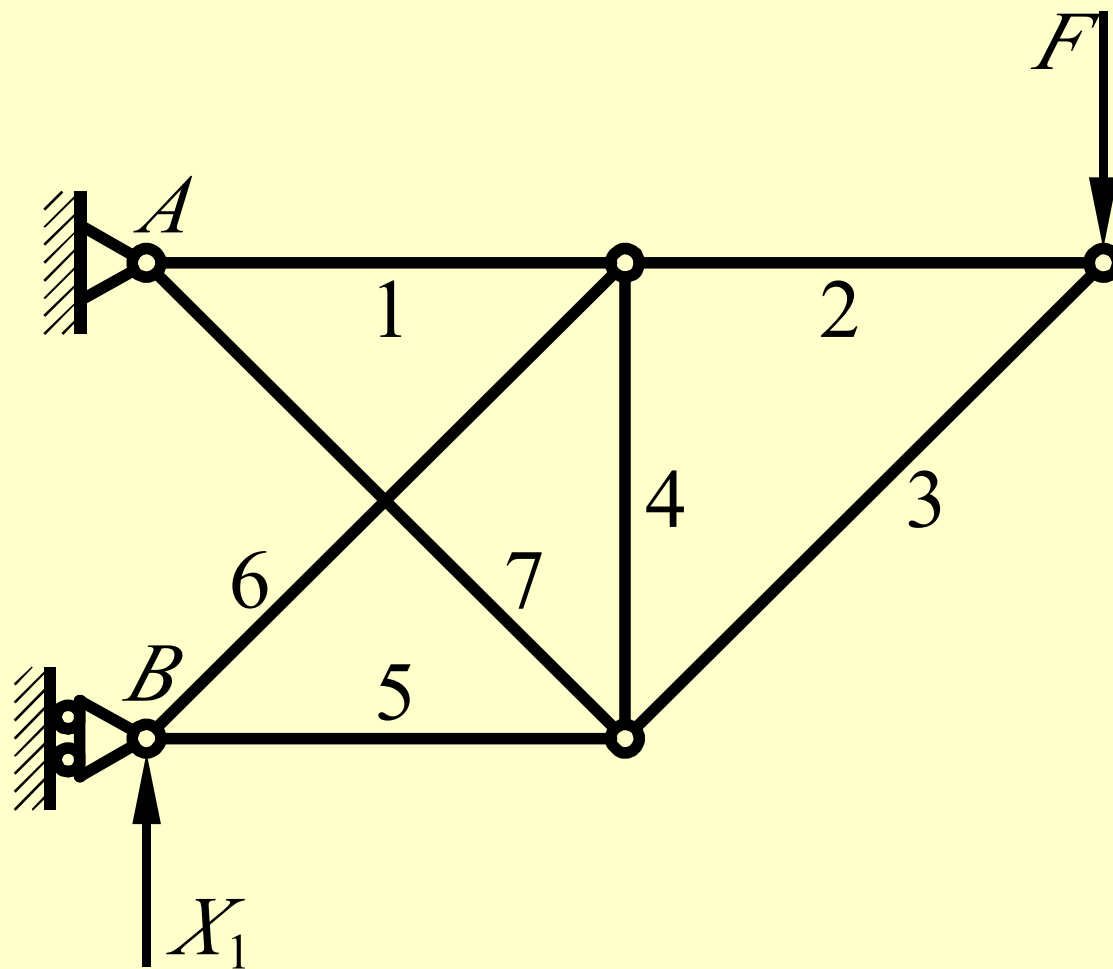
$$X_1 = F_N = \frac{\frac{Fa^3}{3EI}}{\frac{2a^3}{3EI} + \frac{a^3}{GI_p} + \frac{a}{EA}}$$



例42：图示桁架， A 、 B 处为固定铰链。已知各杆的拉压刚度为 EA ，试求支反力。

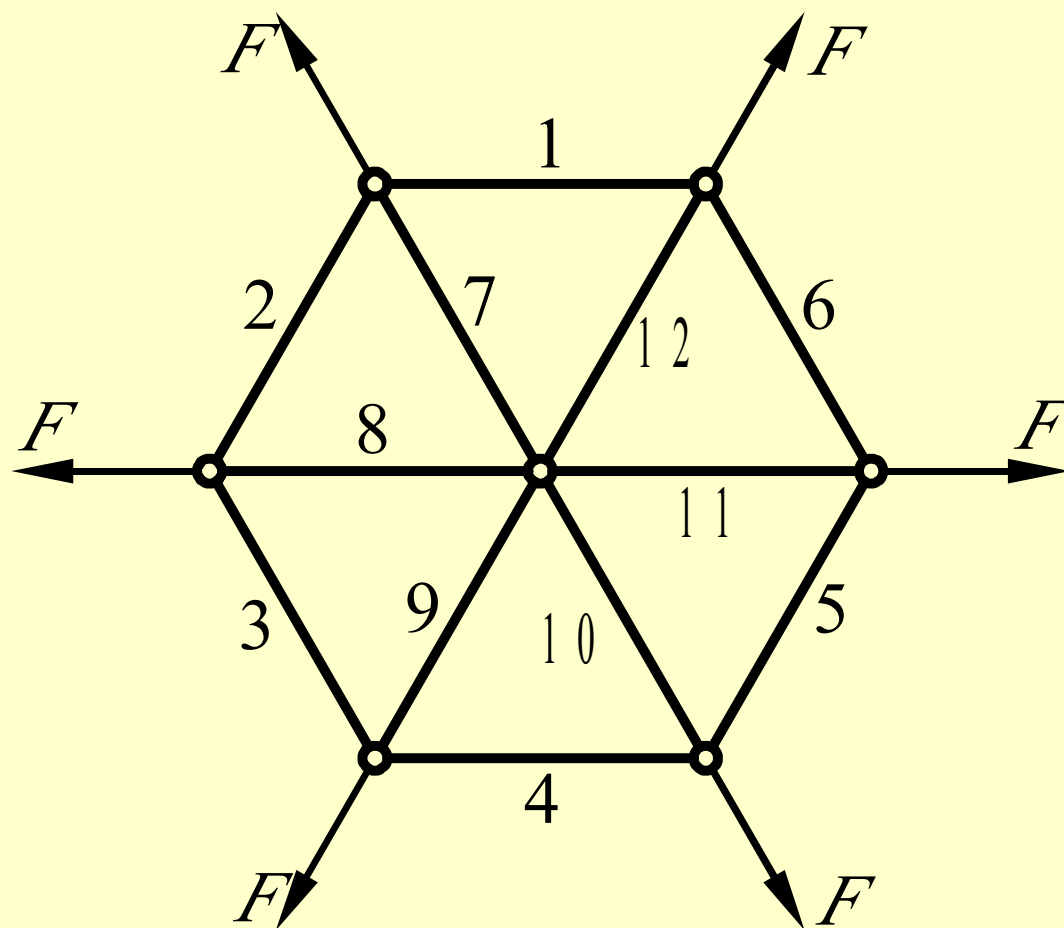


解：



$$X_1 = \frac{(1 + 2\sqrt{2})}{3 + 4\sqrt{2}} F$$

例**43**：图示桁架，各杆长度均为 a ，拉压刚度均为 EA ，试求各杆轴力。



解：单位力作用下各杆轴力

$$\bar{F}_{Ni} = 1 \quad (i=1,2,\dots,6)$$

$$\bar{F}_{Ni} = -1 \quad (i=7,8,\dots,12)$$

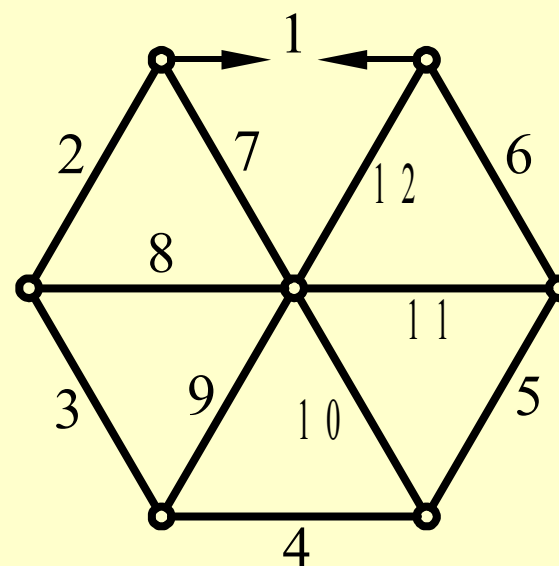
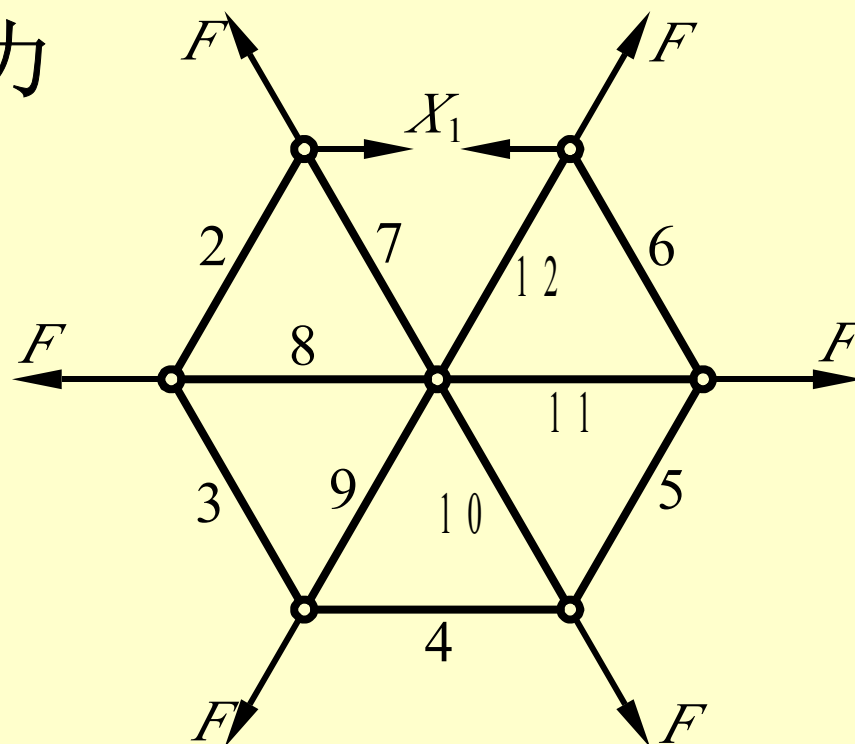
静定基各杆轴力

$$F_{Ni} = 0 \quad (i=1,2,\dots,6)$$

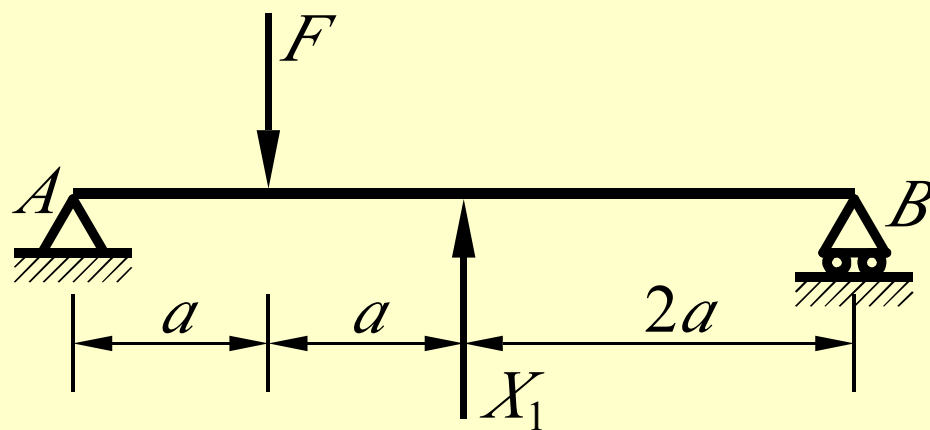
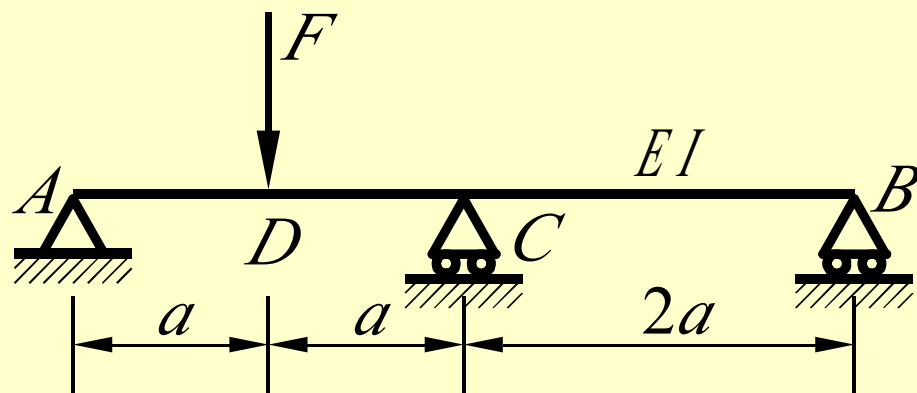
$$F_{Ni} = F \quad (i=7,8,\dots,12)$$

$$\delta_{11} = \frac{12a}{EA}, \quad \Delta_{1F} = -\frac{6Fa}{EA}$$

$$X_1 = \frac{F}{2}, \text{ 各杆轴力均为 } \frac{F}{2}$$

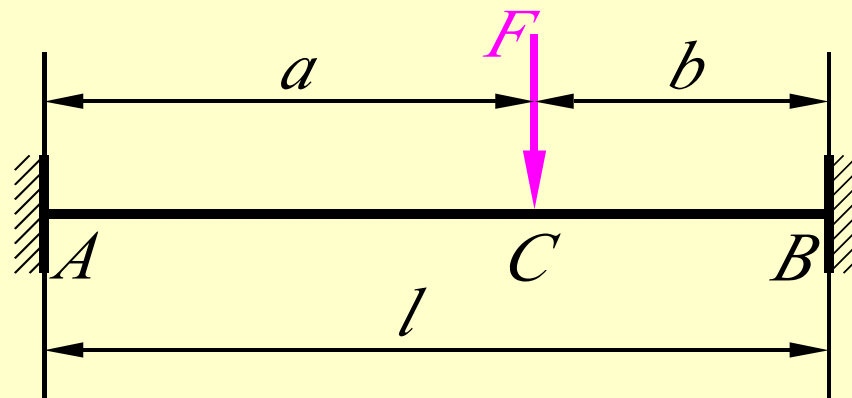


例44: 已知图示梁的弯曲刚度为 EI ，用力法求支反力。

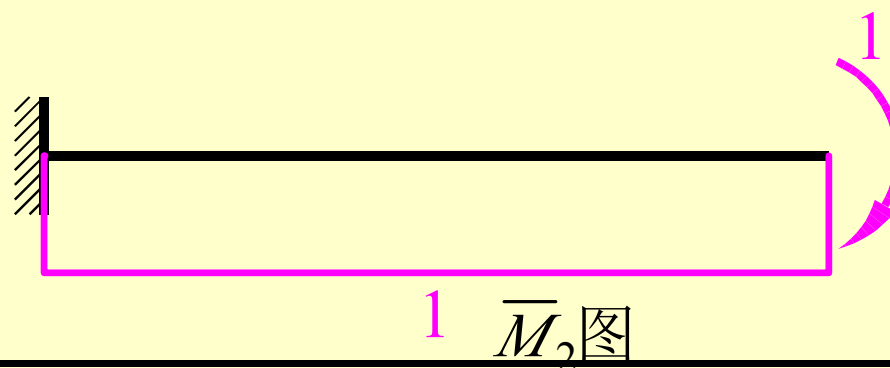
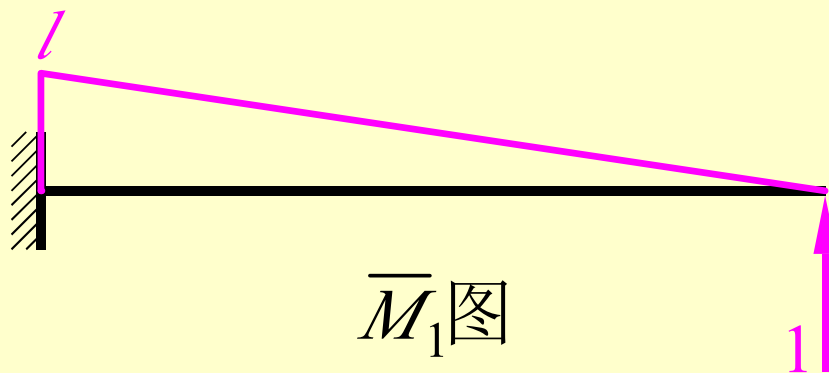
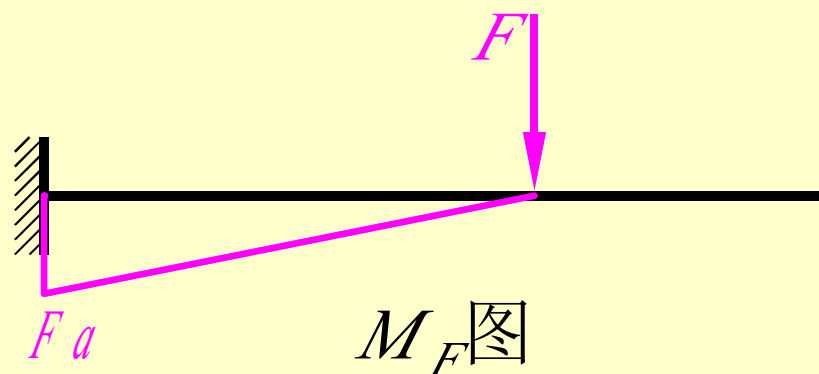
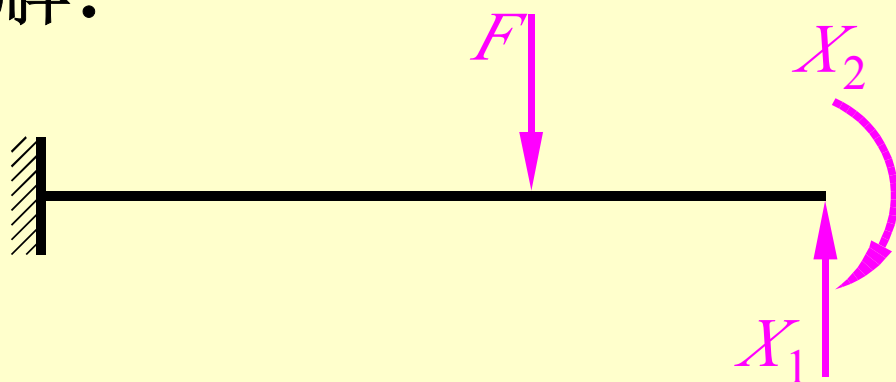


应将支座 **B** 看成多余约束！

例45： 已知梁的抗弯刚度为 EI ，不计轴力影响。求梁的支反力。



解：



$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} \quad , \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^2}{2EI} \quad , \quad \delta_{22} = \frac{l}{EI}$$

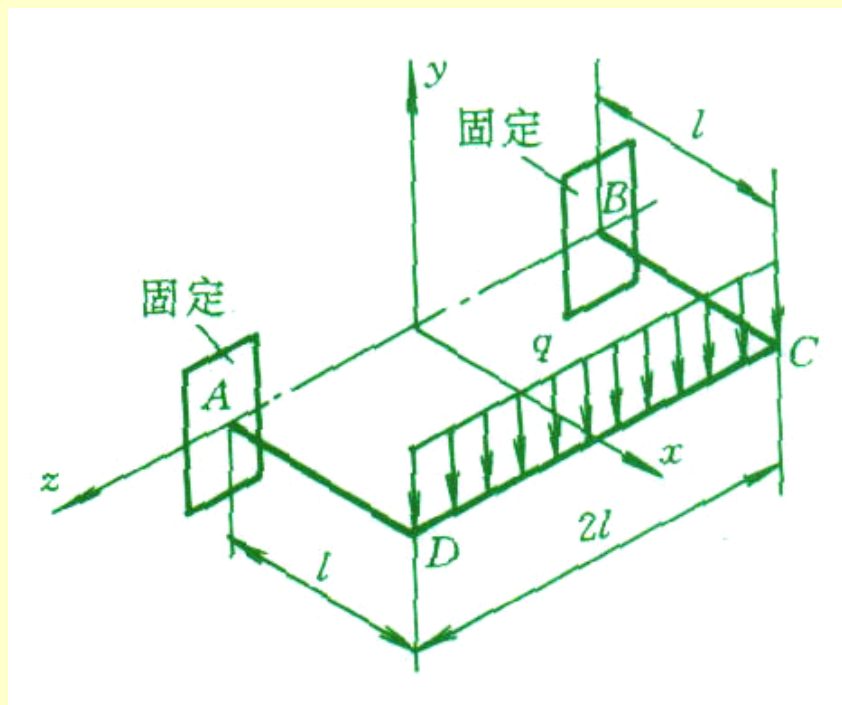
$$\Delta_{1F} = -\frac{Fa^2(2a+3b)}{6EI} \quad , \quad \Delta_{2F} = \frac{Fa^2}{2EI}$$

$$\text{由} \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} X_1 = \frac{Fa^2(a+3b)}{l^3} \\ X_2 = \frac{Fa^2b}{l^2} \end{cases}$$

$$F_{Ay} = \frac{Fb^2}{l^3}(3a+b) (\uparrow), \quad F_{By} = \frac{Fa^2}{l^3}(a+3b) (\uparrow)$$

$$M_A = \frac{Fab^2}{l^2} (\text{逆时针}), \quad M_B = \frac{Fa^2b}{l^2} (\text{顺时针})$$

例24、求图示结构的约束反力.



习题

14-25, 14-26

本章结束