

第 9 章 常微分方程初值问题数值方法 参考答案

一、选择题（15 分，每小题 3 分）

1、(2) 2、(3) 3、(4) 4、(2) 5、(3)

二、填空题（15 分，每小题 3 分）

1、 $\phi(x, y, 0) = f(x, y)$; 2、 $(-2, 0)$; 3、 $a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$;

4、 $\frac{dy}{dx} = \lambda y, \operatorname{Re} \lambda < 0$; 5、2

三、（10 分）

解：Euler 预报—校正法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + 0.2(2x_n - y_n) = 0.4x_n + 0.8y_n \\ y_{n+1} = y_n + 0.1(2x_n - y_n + 2x_{n+1} - y_{n+1}^{(0)}) = 0.16x_n + 0.2x_{n+1} + 0.82y_n \end{cases} \quad \text{----- (3 分)}$$

$$y(0.2) \approx y_1 = 0.2 \times 0.2 + 0.82 \times 1 = 0.86 \quad \text{----- (4 分)}$$

经典的四阶龙格—库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = 2x_n - y_n \\ k_2 = 2(x_n + 0.1) - (y_n + 0.1k_1) \\ k_3 = 2(x_n + 0.1) - (y_n + 0.1k_2) \\ k_4 = 2(x_n + 0.2) - (y_n + 0.2k_3) \end{cases} \quad \text{----- (8 分)}$$

$$k_1 = 1.5041; k_2 = 1.5537; k_3 = 1.5487; k_4 = 1.5943$$

$$y(0.2) \approx y_1 = 0.8562 \quad \text{----- (10 分)}$$

四、（12 分）

解：设阻力为 $f = kv$ ，由题意知 $k = \frac{353}{6} \approx 58.8$ ，-----（2 分）

根据力学知识建立其数学模型为

$$\begin{cases} 90 \frac{dv}{dt} = 90g - 58.8v & 0 \leq t \leq 5, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{9.8}{15}v \\ v(0) = 12 \end{cases} & 0 \leq t \leq 5, \text{ ----- (7 分)} \end{cases}$$

相应的欧拉公式为 $v_{n+1} = v_n + h(9.8 - \frac{9.8}{15}v_n), h = 1$ ，-----（9 分）

计算结果为

t	0	1	2
v	12	13.96	14.6395

----- (12 分)

五、 (12 分)

解：该初值问题的精确解为 $y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx$ ，只需证明每一步的迭代值等于对应的精确值

即 $y_n = y(x_n)$ 。----- (2 分)

由题意知 $f(x, y) = ax + b, x_0 = 0$ ，令 $x_n = nh$ ，则 $y(x_n) = \frac{1}{2}ax_n^2 + bx_n$ ，----- (5 分)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] = y_n + \frac{h}{2}[ax_n + b + ax_{n+1} + b],$$

$$= y_n + \frac{ah}{2}[x_n + x_{n+1}] + hb = y_n + \frac{ah^2}{2}[2n+1] + hb, \text{----- (8 分)}$$

由上式递推得到

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \frac{ah^2}{2}(2n-1) + hb = y_{n-2} + \frac{ah^2}{2}(2n-1+2n-3) + 2hb \\ &= \dots = y_0 + \frac{ah^2}{2}(2n-1+2n-3+\dots+3+1) + nhb \end{aligned} \text{, ----- (10 分)}$$

$$\text{即 } y_n = \frac{a(nh)^2}{2} + nhb = \frac{1}{2}x_n^2 + bx_n = y(x_n). \text{----- (12 分)}$$

六、 (12 分)

解：梯形公式为 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ ， $f(x, y) = -y$ ----- (2 分)

$$y_{n+1} = y_n - \frac{h}{2}[y_n + y_{n+1}] \Rightarrow y_n = y_{n-1} - \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n] \text{----- (5 分)}$$

$$\text{从而得到递推公式 } y_n = \frac{2-h}{2+h}y_{n-1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-2} = \dots = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n y_0, \quad y_0 = 1 \text{--- (7 分)}$$

$$\text{所以 } y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n, \text{----- (9 分)}$$

由题设知此处 $x = nh$

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2h}{2+h} \right)^{-\frac{2+h}{2h} \left(-\frac{2h}{2+h} \cdot \frac{x}{h} \right)} = e^{-x}。 -- (12 分)$$

七、 (14 分)

证明：局部截断误差为

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2} [\alpha f(x_n, y(x_n)) + \beta f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))] \text{ ----- (2 分)}$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + O(h^4) - y(x_n) - \frac{h}{2} [\alpha y'(x_n) + \beta y'(x_{n-1})] \text{ ----- (5 分)}$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + O(h^4) - y(x_n) - \frac{h}{2} \alpha y'(x_n) - \frac{h}{2} \beta [y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2!} y'''(x_n) + O(h^3)] \text{ ----- (8 分)}$$

$$= h(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} (1 + \beta) y''(x_n) + (\frac{h^3}{3!} - \frac{h^3}{4} \beta) y'''(x_n) + O(h^4) \text{ ----- (10 分)}$$

$$\text{因此有 } \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 0 \\ 1 + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \text{ ----- (12 分)}$$

$$\text{局部截断误差主项为 } \frac{5h^3}{12} y'''(x_n), \text{ 该方法是 2 阶的。} \text{ ----- (14 分)}$$

八、 (10 分)

$$\text{证明：记 } h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih, 0 \leq i \leq n$$

$$\text{将原方程两边在区间 } [x_n, x_{n+1}] \text{ 上积分得 } y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx, \text{ -- (2 分)}$$

以 x_n 和 x_{n-1} 为插值节点作 $f(x, y(x))$ 的一次插值多项式,

$$L_1(x) = f(x_n, y(x_n)) \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n} \text{ ----- (4 分)}$$

代入前式

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_1(x) dx$$

$$= y(x_n) + f(x_n, y(x_n)) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} dx + f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n} dx$$

$$= y(x_n) + \frac{h}{2} [3f(x_n, y(x_n)) - f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))] \text{----- (6 分)}$$

将 $y(x_n)$ 用 y_n 代替, “ $\approx$ ” 换为 “ $=$ ”, 即得 2 步 Adams 显式公式:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})] \text{。} \text{----- (8 分)}$$