

第一章 概率的基本概念

习题解析

第 1、2 题 随机试验、样本空间、随机事件

1. 写出下列随机试验的样本空间：

- (1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数（设以百分制记分）。
- (2) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数。
- (3) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果。
- (4) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标。

解 (1) 高该小班有 n 个人，每个人数学考试的分数可能取值为 $0, 1, 2, \dots, 100, n$ 个人分数之和的可能取值为 $0, 1, 2, \dots, 100n$ ，平均分数可能取值为 $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{100n}{n}$ ，则样本空间为

$$S = \left\{ \frac{k}{n} \mid k = 0, 1, 2, \dots, 100n \right\}$$

(2) 样本空间 $S = \{10, 11, \dots\}$ ， S 中含有可数无限多个样本点。

(3) 设 1 表示正品，0 表示次品，则样本空间为

$$S = \{ (0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) \}$$

例如 $(1, 1, 0, 0)$ 表示第一次与第二次检查到正品，而第三次与第四次检查到次品。

(4) 设任取一点的坐标为 (x, y) ，则样本空间为

$$S = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

2. 设 A, B, C 为三个事件，用 A, B, C 的运算关系表示下列事件。

- (1) A 发生， B 与 C 不发生；
- (2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；
- (3) A, B, C 中至少有一个发生；
- (4) A, B, C 都发生；
- (5) A, B, C 都不发生；
- (6) A, B, C 中不多于一个发生；
- (7) A, B, C 中不多于两个发生；
- (8) A, B, C 中至少有两个发生。

解 此题关键词：“与”，“而”，“都”表示事件的“交”；“至少”表示事件的“并”；“不多于”表示“交”和“并”的联合运算。

(1) \overline{ABC} 。

(2) $AB\bar{C}$ 或 $AB-C$ 。

(3) $A\cup B\cup C$ 。

(4) ABC 。

(5) \overline{ABC} 。

(6) A, B, C 中不多于一个发生为仅有一个发生或都不发生, 即 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, A, B, C 中不多于一个发生, 也表明 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 中至少有两个发生, 即 $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC} \cup \overline{ABC}$ 。

(7) A, B, C 中不多于两个发生, 为仅有两个发生或仅有一个发生, 或都不发生, 即表示为

$$ABC \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \overline{ABC}$$

而 ABC 表示三个事件都发生, 其对立事件为不多于两个事件发生, 因此又可以表示为 $\overline{ABC} = A \cup B \cup C$ 。

(8) A, B, C 中至少有两个发生为 A, B, C 中仅有两个发生或都发生, 即为

$$A\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup ABC$$

也可以表示为 $AB \cup BC \cup AC$ 。

第 3. (1)、6、8、9、10 题 概率的定义、概率的性质、古典概型

3. (1) 设 A, B, C 是三件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = \frac{1}{8}$, 求 A, B, C 至少有一个发生的概率。

解 利用概率的加法公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

其中由 $P(AB) = P(BC) = 0$, 而 $ABC \subset AB$ 得 $P(ABC) = 0$ 。

6. 在房间里有 10 个人, 分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章, 任选 3 人记录其纪念章的号码。求

(1) 最小号码为 5 的概率;

(2) 最大号码为 5 的概率。

解 利用组合法计数基本事件数。从 10 人中任取 3 人组合数为 C_{10}^3 , 即样本空间

$S = \{C_{10}^3 = 120 \text{ 个基本事件}\}$ 。

(1) 令事件 $A = \{\text{最小号码为 } 5\}$ 。最小号码为 5，意味着其余号码是从 6, 7, 8, 9, 10 的 5 个号码中取出的，有 C_5^2 种取法，故 $A = \{C_5^2 = 10 \text{ 个基本事件}\}$ ，所求概率为

$$P(A) = \frac{C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{2!3!}{10!} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

(2) 令事件 $B = \{\text{最大号码为 } 5\}$ ，最大号码为 5，其余两个号码是从 1, 2, 3, 4 的 4 个号码中取出的，有 C_4^2 种取法，即 $B = \{C_4^2 \text{ 个基本事件}\}$ ，则

$$P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{2!2!}{10!} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

8. 在 1 500 个产品中有 400 个次品，1 100 个正品。从中任取 200 个。求

- (1) 恰有 90 个次品的概率；
 (2) 至少有 2 个次品的概率。

解 (1) 利用组合法计数基本事件数。令事件 $A = \{\text{恰有 } 90 \text{ 个次品}\}$ ，则

$$P(A) = \frac{C_{400}^{90} C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$$

(2) 利用概率的性质。令事件 $B = \{\text{至少有 } 2 \text{ 个次品}\}$ ， $A_i = \{\text{恰有 } i \text{ 个次品}\}$ ，则

$$B = A_2 \cup A_3 \cup A_{200}, A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$$

所求概率为

$$P(B) = P(A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{200}) = \sum_{i=2}^{200} P(A_i)$$

显然，这种解法太麻烦，用对立事件求解就很简单。令事件 $\bar{B} = \{\text{恰有 } 0 \text{ 个次品或恰有 } 1 \text{ 个次品}\}$ ，即 $\bar{B} = A_0 \cup A_1$ ，而

$$P(\bar{B}) = P(A_0 \cup A_1) = P(A_0) + P(A_1) = \frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}} + \frac{C_{400}^1 C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

故

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}} - \frac{C_{400}^1 C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

解 令事件 $A=\{4 \text{ 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双}\}$ 。用 3 种方法求 $P(A)$ 。

① A 的对立事件 $\bar{A}=\{4 \text{ 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双}\}$ ，从 5 双鞋中任取 4 只，即从 10 只鞋中任取 4 只，所有可能组合数为 C_{10}^4 ，样本空间 $S=\{C_{10}^4 \text{ 个基本事件}\}$ ，现考虑有利于 \bar{A} 的基本事件数。从 5 双鞋中任取 4 双，再从每双中任取一只，有 $C_5^4 2^4$ 种取法，即 $\bar{A}=\{C_5^4 2^4 \text{ 个基本事件}\}$ ，则

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4}=1-\frac{5 \times 2^4}{210}=\frac{13}{21}$$

② 4 只鞋是不放回的一只接一只的取出，所有可能的排列数为 A_{10}^4 ，即样本空间 $S=\{A_{10}^4 \text{ 个基本事件}\}$ 。现考虑有利于 \bar{A} 的基本事件，从 10 只鞋中任取一只，与它配成双的一只不取，从其余 8 只鞋中任取一只，与它配成双的一只不取，依此类推，则 $\bar{A}=\{10 \times 8 \times 6 \times 4 \text{ 个基本事件}\}$ 。于是

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{A_{10}^4}=1-\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

③ 利用组合法计数基本事件数。考虑有利于事件 A 的基本事件数，任取的 4 只鞋配成一双的取法有 $C_5^1 C_2^2 C_4^2 2^2$ 种，能配成两双的取法有 $C_5^2 C_2^2$ 种，于是 $A=\{(C_5^1 C_2^2 C_4^2 2^2 + C_5^2 C_2^2) \text{ 个基本事件}\}$ ，则

$$P(A)=\frac{C_5^1 C_2^2 C_4^2 2^2 + C_5^2 C_2^2}{C_{10}^4}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}$$

此题的第 1 种方法和第 2 种方法是利用概率性质：

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

首先求 $P(\bar{A})$ ，然后求 $P(A)$ 。第 3 种方法是直接求 $P(A)$ 。读者还可以用更多方法求 $P(A)$ 。

10. 在 11 张卡片上分别写上 **Probability** 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 **ability** 的概率。

解 令事件 $A=\{\text{排列结果为 ability}\}$ ，利用排列法计数基本事件数。不放回的从中一次抽 1 张的连抽 7 张，要排成单词，因此用排列法。样本空间 $S=\{A_{11}^7 \text{ 个基本事件}\}$ 。排列结果

为 ability, 实际收入字母 b 的卡片有两张, 写字母 i 的卡片有两张, 取 b 有 C_2^1 种取法,

取 i 有 C_2^1 种取法, 其余字母都只有 1 种取法, 故 $A = \{C_2^1 C_2^1 \text{ 个基本事件}\}$, 于是

$$P(A) = \frac{C_2^1 C_2^1}{A_{11}^7} = \frac{4}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5} = 0.0000024$$

这是个小概率事件。

第 14. (2)、15、19、18 题 条件概率、概率的加法公式和乘法公式

14. (2) 已知 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(A \cup B)$ 。

解 利用概率加法公式和概率乘法公式。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

解此题的关键是求 $P(B)$ 和 $P(AB)$ 。由概率乘法公式, 得

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

又 $P(AB) = P(B)P(A|B)$, 解得

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

于是所求概率为

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

此题的关键是利用 $P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$, 求出 $P(AB)$ 和 $P(B)$, 再求

$P(A \cup B)$ 就迎刃而解了。

15. 掷两颗骰子, 已知两颗骰子点数和为 7, 求其中有一颗为 1 点的概率 (用两种方法)。

解 令事件 $A = \{\text{两颗骰子点数之和为 7}\}$, $B = \{\text{有一颗为 1 点}\}$ 。此题是求条件概率 $P(B|A)$ 。

两种方法如下:

① 考虑整个样本空间。随机试验: 掷两颗骰子, 每颗骰子可能出现的点数都是 6 个, 即样本空间 $S = \{6^2 \text{ 个基本事件}\}$ 。事件 $AB = \{\text{两颗骰子点数之和为 7, 且有一颗为 1 点}\}$, 两颗骰子点数之和为 7 的可能结果为 6 个, 即

$A = \{ (1, 6), (2, 5), (3, 4), (6, 1), (5, 2), (4, 3) \}$
 而 $AB = \{ (1, 6), (6, 1) \}$ 。由条件概率公式，得

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

②已知事件 A 发生后，将 A 作为样本空间，其中有两个结果 (1, 6) 和 (6, 1) 只有一颗骰子出现 1 点，则在缩减的样本空间中求事件 B 发生的条件概率为

$$P(B|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数，因而他随意地拨号。求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率。若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解 利用概率性质(有限可加性)和概率乘法公式。

令事件 $A_i = \{ \text{第 } i \text{ 次拨通电话} \}$ ，“到第 i 次拨通电话”这个事件为 $\overline{A_1} \overline{A_2} \cdots \overline{A_{i-1}} A_i$ ($i=1, 2, 3$)。事件 $B = \{ \text{不超过三次而拨通电话} \}$ ，则

$$B = A_1 \cup \overline{A_1} A_2 \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$$

该事件表示第一次拨通电话，或者第一次未拨通，第二拨通电话（到第二次拨通电话），或者第一、二次未拨通，第三次拨通电话（到第三次拨通电话）。右端是互不相容事件的并事件，所以用有限可加性计算，得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cup \overline{A_1} A_2 \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\ &= P(A_1) + P(\overline{A_1} A_2) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\ &= P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 | \overline{A_1}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} | \overline{A_1})P(A_3 | \overline{A_1} \overline{A_2}) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

拨号是从 0, 1, 2, ..., 9 的 10 个数字中任取一个，有 10 种取法，第一次拨通的概率是 $\frac{1}{10}$ ；

第一次未拨通的概率为 $\frac{9}{10}$ ，第二次拨号时，是从其余 9 个数字中任取一个，所以拨通的概

率为 $\frac{1}{9}$ ，到第二次拨通的概率为 $\frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$ ，依此类推，到第 n 次拨通电话的概率都是 $\frac{1}{10}$ ，

与顺序无关。

已知最后一个数字是奇数时，令事件 $C = \{ \text{拨号不超过三次而接通电话} \}$ 。拨号是从 1, 3, 5, 7, 9 的五个数字中任取一个，有 5 种取法，第一次拨通的概率为 $\frac{1}{5}$ ，到第二次拨通

的概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ ，到第三次拨通的概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ ，与上述分析方法和用的概率公式相同，所以

$$P(C) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

第 21、22、35、38 题 全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性

21. 已知男人中有 5% 是色盲患者，女人中有 0.25% 是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解 令事件 $A = \{\text{随机地选一人是女性}\}$ ，对立事件 $\bar{A} = \{\text{随机地选一人是男性}\}$ 。因为人群中男女人数相等，所以 $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ ，且 A, \bar{A} 是样本空间的一个划分。事件 $C = \{\text{随机地挑选一人恰好是色盲}\}$ 。已知

$$P(C|A) = \frac{0.25}{100}, P(C|\bar{A}) = \frac{5}{100}$$

由全概率公式，得

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A)P(C|A) + P(\bar{A})P(C|\bar{A}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{0.25}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{100} = 0.02625 \end{aligned}$$

由贝叶斯公式，得

$$P(\bar{A}|C) = \frac{P(\bar{A}C)}{P(C)} = \frac{P(\bar{A})P(C|\bar{A})}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{100}}{0.02625} = 0.9524$$

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次合格的概率为 P ，若第一次合格则第二次合格的概率也为 P ；若第一次不合格则第二次合格的概率为 $\frac{P}{2}$ 。(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。(2) 若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解 令事件 $A_i = \{\text{一学生第 } i \text{ 次考试及格}\}$ ($i=1, 2$)，已知

$$P(A_1) = P, P(\bar{A}_1) = 1 - P, P(A_2|A_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{P}{2}$$

(1) 由概率加法公式，得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2|A_1) \end{aligned}$$

利用对立事件求概率

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2}) \\
&= 1 - P(A_1)P(A_2 | A_1) \\
&= 1 - P(\overline{A_1})[1 - P(A_2 | \overline{A_1})] \\
&= 1 - (1 - P)(1 - \frac{P}{2}) = \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}P^2
\end{aligned}$$

显然用后者求解简单。

(2) 利用条件概率公式。

$$\begin{aligned}
P(A_2 | A_1) &= \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1)P(A_2 | A_1)}{P(A_1)} \\
&= \frac{P^2}{P^2 + P(1 - P) / 2} = \frac{2P}{P + 1}
\end{aligned}$$

35. 如果一危险情况 C 发生时, 一电路闭合并发出警报, 我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性, 在 C 发生时这些开关每一个都应闭合, 且若至少一个开关闭合了, 警报就发出。如果两个这样的开关联联接, 它们每个具有 0.96 的可靠性 (即在情况 C 发生时闭合的概率), 问这时系统的可靠性 (即电路闭合的概率), 是多少? 如果需要有一个可靠性至少为 0.9999 的系统, 则至少需要用多少只开关并联? 设各开关闭合与否是相互独立的。

解 利用事件的独立性。

① 令事件 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 只开关闭合}\}$ 。已知 $P(A_1) = P(A_2) = 0.96$ 。令事件 $B = \{\text{电路闭合}\}$ 。

两只开关并联联接, 则 $B = A_1 \cup A_2$, 即至少有一只开关闭合, 电路就闭合。而 A_1 与 A_2 相互独立, 所以电路闭合的概率为

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\
&= 0.96 + 0.96 - (0.96)^2 = 0.9984
\end{aligned}$$

这种解题思路是读者容易想到的。另一种解法是利用对立事件, 计算比较简单。

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \\
&= 1 - 0.04^2 = 0.9984
\end{aligned}$$

② 设需要 n 只开关并联, 才保证系统可靠性为 0.9999。令事件 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 只开关闭合}\} (i=1, 2, \dots, n)$ 。令事件 $C = \{\text{电路闭合}\}$, 则 $C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 。如果用概率加法公式表示 $P = (C)$ 将是相当麻烦的, 不妨表示为

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\
&= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \\
&= 0.96n - C_n^2 (0.96)^2 + C_n^3 (0.96)^3 + \cdots + (-1)^{n-1} (0.96)^n
\end{aligned}$$

已知 $P(C) = 0.9999$ ，解 n 实际上是很难办到的。

如果用对立事件表示 $P(C)$ ，显然比较简单，即

$$\begin{aligned}
P(C) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) = 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n}) \\
&= 1 - (0.04)^n
\end{aligned}$$

已知 $1 - 0.04^n \geq 0.9999$ ，即 $1 - 0.04^n \leq 0.0001$ ，两边取以 e 为底的对数，得

$n \ln(0.04) \leq \ln(0.0001)$ ，则

$$n \geq \frac{\ln(0.0001)}{\ln(0.04)} = \frac{-9.2103}{-3.2189} \approx 2.86$$

故至少需要 3 只开关并联联接。

此题表明对立事件及德·莫根律对解决实际问题有多么重要。

36. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $1/5, 1/3, 1/4$ 。问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少？

解 ①令事件 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 人能译出密码}\} (i=1, 2, 3)$ ，且 $P(A_1) = \frac{1}{5}$ ， $P(A_2) = \frac{1}{3}$ ， $P(A_3) = \frac{1}{4}$ ，

$B = \{\text{三人中至少有一人能译出密码}\}$ 与事件“密码被译出”是相等事件。又 A_1, A_2, A_3 相互独立。

利用概率的加法公式和事件的独立性。

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = 0.6
\end{aligned}$$

②利用对立事件和事件的独立性。

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5} = 0.6
\end{aligned}$$

38. 袋中装 m 只正品硬币、 n 只次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽）。在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽。问这只硬币是正品的概率为多少？

解 令事件 $A = \{\text{任取一只硬币是正品}\}$ ，对立事件 $\bar{A} = \{\text{任取一只硬币是次品}\}$ ，且

$P(A) = \frac{m}{m+n}, P(\bar{A}) = \frac{n}{m+n}$ ， $B = \{\text{把硬币投掷 } r \text{ 次，每次都得到国徽面}\}$ ，令事件 $B_i = \{\text{把硬币投掷 } i \text{ 次，有 } i \text{ 次得到国徽}\}$ ($i=1, 2, \dots, r$)。如果硬币是正品，则投掷一次出现任何一面的概率都是 $\frac{1}{2}$ ；如果硬币是次品，则投掷一次出现国徽面的概率是 1。于是

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A)P(B_1|A) + P(\bar{A})P(B_1|\bar{A}) \\ &= \frac{m}{m+n} \times \frac{1}{2} + \frac{n}{m+n} \times 1 \\ P(B_2) &= P(A)P(B_2|A) + P(\bar{A})P(B_2|\bar{A}) \\ &= \frac{m}{m+n} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{n}{m+n} \times 1 \times 1 \\ &\vdots \\ P(B_i) &= \frac{m}{m+n} \times \frac{1}{2^i} + \frac{n}{m+n} \times 1^i \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B_r) = \frac{m}{m+n} \times \frac{1}{2^r} + \frac{n}{m+n} \times 1^r \\ &= \frac{m}{m+n} \times \frac{1}{2^r} + \frac{n}{m+n} \end{aligned}$$

所求概率为

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{m}{m+n} \times \frac{1}{2^r}}{\frac{m}{m+n} \times \frac{1}{2^r} + \frac{n}{m+n}} = \frac{m}{m+2^r n} \end{aligned}$$

第二章 随机变量及其分布

习题解析

第 2、(1)、3、6、7、12、17 题 离散型随机变量的分布律

2. (1) 一袋中装有 5 只球，编号为 1, 2, 3, 4, 5。在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，现实性出随机变量 X 的分布律。

解 随机变量 X 的所有可能取值为 3, 4, 5，求取各个值的概率用古典概型。

$$P\{X=3\} = \frac{C_2^2}{C_5^3} = \frac{1}{\frac{5!}{3!2!}} = \frac{1}{10}$$

$$P\{X=4\} = \frac{C_3^2}{C_5^3} = \frac{\frac{3!}{2!1!}}{\frac{5!}{3!2!}} = \frac{3}{10}$$

$$P\{X=5\} = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{5!}{3!2!}} = \frac{3}{5}$$

则随机变量 X 的分布律为

X	3	4	5
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

如果用概率函数表示, 则为

$$P\{X=k\} = \frac{C_{k-1}^2}{C_5^3} \quad (k=3,4,5)$$

3. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品, 在其中取 3 次, 每次任取 1 只, 作不放回抽样。以 X 表示取出的次品的只数。(1) 求 X 的分布律; (2) 画出分布律的图型。

解 随机变量 X 的所有可能值为 0, 1, 2, 求取各个值的概率用古典概型。

(1) X 取各个值的概率分别为

$$P\{X=0\} = \frac{C_2^0 C_{13}^3}{C_{15}^3} = \frac{\frac{13!}{3!10!}}{\frac{15!}{3!12!}} = \frac{22}{35}$$

$$P\{X=1\} = \frac{C_2^1 C_{13}^2}{C_{15}^3} = \frac{2 \times \frac{13!}{2!11!}}{\frac{15!}{3!12!}} = \frac{12}{35}$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_2^2 C_{13}^1}{C_{15}^3} = \frac{\frac{13!}{1!12!}}{\frac{15!}{3!12!}} = \frac{1}{35}$$

则 X 的分布律为

X	0	1	2
P_k	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

因为 $\sum P_{k=1}$, 所以只要求出 $P\{X=0\}, P\{X=1\}$ 则 $P\{X=2\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\}$ 。

X 的分布律用概率函数表示为

$$P\{X = k\} = \frac{C_2^k C_{13}^{3-k}}{C_{15}^3} \quad (k = 0, 1, 2)$$

6. 一大楼装有 5 个同类型的供水设备。调查表明在任一时刻 t 每个设备被使用的概率为 0.1, 问在同一时刻

- (1) 恰有 2 个设备被使用的概率是多少?
- (2) 至少有 3 个设备被使用的概率是多少?
- (3) 至多有 3 个设备被使用的概率是多少?
- (4) 至多有 1 个设备被使用的概率是多少?

解 5 个同类型的供水设备, 在任一时刻是否被使用相互独立, 而在同一时刻被使用的个数 X 服从二项分布 $b(5, 0.1)$, 故用二项分布求解 X 取各个值, 或在某个范围内取值的概率。

- (1) 因为 X 服从二项分布 $b(5, 0.1)$, 分布律为

$$P\{X = k\} = C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

于是

$$P\{X = 2\} = C_5^2 (0.1)^2 (0.9)^{5-2} = 10 \times 0.01 \times 0.729 = 0.0729$$

- (2)

$$\begin{aligned} P\{X \geq 3\} &= \sum_{k=3}^5 C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k} \\ &= C_5^3 (0.1)^3 (0.9)^{5-3} + C_5^4 (0.1)^4 (0.9)^{5-4} + C_5^5 (0.1)^5 (0.9)^{5-5} \\ &= 10 \times 0.001 \times 0.81 + 5 \times 0.0001 \times 0.9 + 0.00001 \\ &= 0.00856 \end{aligned}$$

- (3)

$$\begin{aligned} P\{X \leq 3\} &= \sum_{k=0}^3 C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k} \\ &= C_5^0 (0.1)^0 (0.9)^5 + C_5^1 (0.1) (0.9)^4 + C_5^2 (0.1)^2 (0.9)^3 + C_5^3 (0.1)^3 (0.9)^2 \\ &= 0.59049 + 0.32805 + 0.0729 + 0.0081 \\ &= 0.99954 \end{aligned}$$

或用对立事件求解。

$$\begin{aligned}
P\{X \leq 3\} &= 1 - P\{X > 3\} = 1 - P\{X \geq 4\} \\
&= 1 - \sum_{k=4}^5 C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k} \\
&= 1 - [C_5^4 (0.1)^4 (0.9)^5 + C_5^5 (0.1)^5 (0.9)^0] \\
&= 1 - [5 \times 0.1^4 \times 0.9 + 0.1^5] \\
&= 1 - [0.00045 + 0.0001] \\
&= 0.99954
\end{aligned}$$

后者计算比前者简单。

(4) $P\{X \geq 1\} = \sum_{k=1}^5 C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k}$ ，显然计算过程比较麻烦，但对立事件求解相当

简单。

$$\begin{aligned}
P\{X \geq 1\} &= 1 - P\{X < 1\} = 1 - P\{X = 0\} \\
&= 1 - C_5^0 (0.1)^0 (0.9)^5 = 1 - 0.9^5 \\
&= 1 - 0.59049 = 0.40951
\end{aligned}$$

7. 设事件 A 在每一次试验中发生的概率为 0.3，当 A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号。

(1) 进行了 5 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率；(2) 进行了 7 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率。

解 (1) 事件 A 在 n 次重复独立试验中发生的次数 X 服从二项分布 $b(n, 0.3)$ ，分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k (0.3)^k (0.7)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

当事件 $\{X \geq 3\}$ 发生时，指示灯发出信号。当 $n=5$ 时，则

$$\begin{aligned}
P\{X \geq 3\} &= \sum_{k=3}^5 C_5^k (0.3)^k (0.7)^{5-k} \\
&= C_5^3 (0.3)^3 (0.7)^2 + C_5^4 (0.3)^4 (0.7) + C_5^5 (0.3)^5 \\
&= 10 \times 0.027 \times 0.49 + 5 \times 0.0081 \times 0.7 + 0.00243 \\
&= 0.16308
\end{aligned}$$

(2) 事件 A 在 7 次重复独立试验中发生的次数 Y 服从二项分布 $b(7, 0.3)$ ，则

$$\begin{aligned}
P\{Y \geq 3\} &= 1 - P\{Y < 3\} = 1 - P\{Y \leq 2\} \\
&= 1 - [C_7^0 (0.3)^0 (0.7)^7 + C_7^1 (0.3)(0.7)^6 + C_7^2 (0.3)^2 (0.7)^5] \\
&= 1 - [0.7^7 + 7 \times 0.3 \times 0.7^6 + 21 \times 0.3^2 \times 0.7^5] \\
&= 0.353
\end{aligned}$$

12. 一电话交换台每分钟收到呼唤的次数服从参数为 4 的泊松分布。求 (1) 某一分钟恰有 8 次呼唤的概率；(2) 某一分钟的呼唤次数大于 3 的概率。

解 一电话交换台某一分钟收到呼唤的次数 X 服从泊松分布 $\pi(4)$ ，其分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{e^{-4} 4^k}{k!} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$(1) P\{X = 8\} = \frac{e^{-4} 4^8}{8!} = \frac{1200.33371}{40320} = 0.02977$$

$$(2) P\{X > 3\} = P\{X \geq 4\} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{e^{-4} 4^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^3 \frac{e^{-4} 4^k}{k!} = 0.5665$$

17. (1) 设 X 服从 (0-1) 分布, 其分布律为 $P\{X = k\} = P^k (1-P)^{1-k}, k = 0, 1$, 求 X 的分布函数, 并作出其图形;

(2) 求第 1 题中的随机变量的分布函数。

解 (1) X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k \leq x} P^k (1-P)^{1-k} \quad \begin{array}{l} x < 0 \\ 0 \leq x < 1 \\ x \geq 1 \end{array}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-P, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

(2) 第 1 题中随机变量 X 的分布律为

X	3	4	5
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

X 的分布函数为 $F(x) = P\{X \leq x\}$, 求法如下。

当 $x < 3$ 时, 则

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 0$$

当 $3 \leq x < 4$ 时, 则

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 3\} = 0.1$$

当 $4 \leq x < 5$ 时, 则

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 3\} + P\{X = 4\} = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

当 $x \geq 5$ 时, 则

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 3\} + P\{X = 4\} + P\{X = 5\} = 1$$

综合表示为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ \frac{1}{10}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{5} = 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

第 19、21、27、34、35、36 题 随机变量的分布函数、连续型随机变量的概率密度

19. 以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一个顾客到达的等待时间 (以分计), X 的分布函数是

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.4x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

求下述概率:

(1) $P\{\text{至多 3 分钟}\}$; (2) $P\{\text{至少 4 分钟}\}$; (3) $P\{\text{3 分钟至 4 分钟之间}\}$; (4) $P\{\text{至多 3 分钟或至少 4 分钟}\}$; (5) $P\{\text{恰好 2.5 分钟}\}$ 。

解 (1) $P\{X \leq 3\} = F_X(3) = 1 - e^{-0.4 \times 3} = 1 - e^{-1.2} = 0.6988$

(2) $P\{X \geq 4\} = 1 - P\{X < 4\} = 1 - F_X(4) = e^{-0.4 \times 4} = 0.2019$

(3)

$$\begin{aligned} P\{3 \leq X \leq 4\} &= P\{X \leq 4\} - P\{X < 3\} \\ &= F_X(4) - F_X(3) = 1 - e^{-0.4 \times 4} - (1 - e^{-0.4 \times 3}) \\ &= 0.0993 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} P\{X \leq 3\} + P\{X \geq 4\} &= 1 - e^{-0.4 \times 3} + (1 - e^{-0.4 \times 4}) \\ &= 0.6988 + 0.2019 = 0.9007 \end{aligned}$$

(5) $P\{X = 0.25\} = 0$ 。

21. 设随机变量 X 的概率密度为

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2(1 - 1/x^2), & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$ ，并画出 (2) 中的 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形。

解 (1) 当 $x < 1$ 时, $F(x) = 0$; 当 $1 \leq x < 2$ 时, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^1 0dt + \int_1^x 2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= 2 \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \Big|_1^x \\ &= 2x + \frac{2}{x} - 4 \end{aligned}$$

当 $x \geq 2$ 时, $F(x) = 1$ 。综合表示为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2x + \frac{2}{x} - 4, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

(2) 当 $x < 0$ 时, $F(x) = 0$; 当 $0 \leq x < 1$ 时, 则

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x tdt = \frac{1}{2}x^2$$

当 $1 \leq x < 2$ 时, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt \\ &= \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt = \frac{1}{2} + \left(2t - \frac{1}{2}t^2\right) \Big|_1^x \\ &= \frac{1}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

当 $x \geq 2$ 时, $F(x) = 1$ 。综合表示为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

27. 某地区 18 岁女青年的血压 (收缩压, 以 mmHg 计) 服从 $N(110, 12^2)$ 。在该地区任选一 18 岁的女青年, 测量她的血压 X 。

(1) 求 $P\{X \leq 105\}, P\{100 < X \leq 120\}$;

(2) 确定最小的 x , 使 $P\{X > x\} \leq 0.05$ 。

解 设女青年的血压为 X , 则 $X \sim N(110, 12^2)$, 由此得

$$\frac{X-110}{12} \sim N(0,1)$$

(1) ①

$$\begin{aligned} P\{X \leq 105\} &= P\left\{\frac{X-110}{12} \leq \frac{105-110}{12}\right\} \\ &= \Phi\left(-\frac{5}{12}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{12}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.4167) \\ &= 1 - 0.6628 = 0.3372 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} P\{100 < X \leq 120\} &= P\left\{\frac{100-110}{12} < \frac{X-110}{12} \leq \frac{120-110}{12}\right\} \\ &= P\left(-\frac{5}{6} < \frac{X-110}{12} \leq \frac{5}{6}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{6}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{6}\right) - 1 \\ &= 2\Phi(0.833) - 1 = 2 \times 0.7967 - 1 = 0.5934 \end{aligned}$$

(2) $P\{X > x\} \leq 0.05$, 用对立事件得

$$1 - P\{X \leq x\} \leq 0.05, P\{X \leq x\} \geq 0.95$$

$$P\left\{\frac{X-110}{12} \leq \frac{x-110}{12}\right\} \geq 0.95$$

查表得 $\frac{x-110}{12} \geq 1.645$, 解出 $x \geq 129.74$, 则 x 的最小值为 129.74。

第 33、题 随机变量的函数分布

33. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
P_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y = X^2$ 的分布律。

解 $Y = X^2$ 的所有可能取值为 0, 1, 4, 9, 取各个值的概率分别为

$$\begin{aligned}
P\{Y=0\} &= P\{X^2=0\} = P\{X=0\} = \frac{1}{5} \\
P\{Y=1\} &= P\{X^2=1\} = P\{X=-1\} + P\{X=1\} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30} \\
P\{Y=4\} &= P\{X^2=4\} = P\{X=-2\} + P\{X=2\} \\
&= P\{X=-2\} = \frac{1}{5} \\
P\{Y=9\} &= P\{X^2=9\} = P\{X=-3\} + P\{X=3\} \\
&= P\{X=3\} = \frac{11}{30}
\end{aligned}$$

于是 Y 的分布律为

Y	0	1	4	9
P_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

此题 Y 与 X 不是一一对应, X 取值为 -1, 1 对应 Y 取值为 1, 这时 $P\{Y=1\}$ 等于

$P\{X=-1\}$ 与 $P\{X=1\}$ 之和。

用表格表示 Y 在的分布律时, 通常 Y 取值从小到大排序, 看起来比较整齐。

34. 设随机变量 X 在 (0, 1) 上服从均匀分布。

- (1) 求 $Y = e^X$ 的概率密度;
- (2) 求 $Y = -21nX$ 的概率密度。

解 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

首先求 Y 的分布函数, 然后求 Y 的概率密度。(1) 设 $F_Y(y)$ 为 Y 的分布函数, $f_Y(y)$ 为 Y 的概率密度。

当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $1 \leq y < e$ 时, 则

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = \{e^X \leq y\} = P\{X \leq \ln y\} = \int_0^{\ln y} dx = \ln y$$

当 $y \geq e$ 时, $F_Y(y) = 1$ 。综合表示为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \ln y, & 1 \leq y < e \\ 1, & y \geq e \end{cases}$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 \leq y < e \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $y \geq 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{-2\ln X \leq y\} \\ &= P\{X \geq e^{\frac{y}{2}}\} \\ &= \int_{e^{\frac{y}{2}}}^1 dx = 1 - e^{-\frac{y}{2}} \end{aligned}$$

综合表示为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{2}}, & y \geq 0 \end{cases}$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

由此可见, Y 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布。

直接求 Y 的概率密度 $F_Y(y)$ 。

(1) 因为 $Y = e^X$ 对应的函数 $y = e^x$ 是严格单调增加函数, 可以应用教材中的定理求解。

$y = e^x$ 的反函数为 $x = \ln y$, 又 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, 当 $1 < y < e$ 时, 则

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{y}$$

综合表示为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 < y < e \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

随机变量 Y 的取值范围根据 X 的取值范围 ($0 < x < 1$) 和函数 $y = e^x$ 来确定。当 $a < y < \beta$,

则 $a = \min\{e^0, e\} = 1, \beta = \max\{e^0, e\} = e$ 。

(2) 因为 $Y = -21nX$ 对应的函数 $y = -21nx$ 是严格单调减少函数, 其反函数 $x = e^{-\frac{y}{2}}$, 又

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, \text{ 则}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left| -\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \right| \frac{1}{y}, = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

35. 设 $X \sim N(0, 1)$ 。(1) 求 $Y = e^X$ 的概率密度; (2) 求 $Y = 2X^2 + 1$ 的概率密度; (3) $Y = |X|$ 的概率密度。

解 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

首先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$, 然后求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

(1) 当 $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $y > 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{e^X \leq y\} \\ &= P\{X \leq \ln y\} = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(2) 当 $y \leq 1$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $y > 1$ 时, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{2X^2 + 1 \leq y\} \\ &= P\{X^2 \leq \frac{y-1}{2}\} = P\left\{|X| \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\} \\ &= \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$$

(3) 当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $y \geq 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} \\ &= \int_{-y}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

直接求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

(1) $Y = e^X$ 对应的函数 $y = e^x$ 是严格单调增加函数, 其反函数为 $x = \ln y$, 又 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, 则

Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(2) $Y = 2X^2 + 1$ 对应的函数 $y = 2x^2 + 1$ 是非单调函数, 分成两个单调区间, 当 $x < 0$ 时,

则 $x = -\sqrt{\frac{y-1}{2}}$, 当 $x \geq 0$ 时, $x = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$ 。于是当 $y > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= [f_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}) + f_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})] \left| \frac{dx}{dy} \right| \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y-1}{4}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y-1}{4}} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{y-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}} \end{aligned}$$

当 $y \leq 1$ 时, $f_Y(y) = 0$ 。综合表示为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$$

(3) $Y = |X|$ 对应的函数 $y = |x|$ 是非单调函数, 分成两个单调区间, 其反函数 $x = \pm y$, 又

$\frac{dx}{dy} = \pm 1$, 当 $y \leq 0$ 时, $f_Y(y) = 0$; 当 $y > 0$ 时, 则

$$f_Y(y) = \frac{2}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} |\pm 1| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

综合表示为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

36. (1) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ 。求 $Y = X^3$ 的概率密度。

(2) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Y = X^2$ 的概率密度。

解 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 概率密度为 $f_Y(y)$ 。

首先求 $F_Y(y)$, 然后求 $f_Y(y)$ 。

(1)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^3 \leq y\} \\ &= P\{-\infty < X \leq \sqrt[3]{y}\} \quad (-\infty < y < +\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f(x) dx \end{aligned}$$

则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = f(\sqrt[3]{y}) \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \quad (y \neq 0)$$

(2) 当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $y \geq 0$ 时, 则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{0 < X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx = (-e^{-x}) \Big|_0^{\sqrt{y}} = 1 - e^{-\sqrt{y}} \end{aligned}$$

综合表示为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}}, & y \geq 0 \end{cases}$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

直接求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

(1) $Y = X^3$ 对应的函数 $y = x^3$ 是严格单调增加函数, 其反函数 $x = \sqrt[3]{y}$, 又 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$,

则

$$f_Y(y) = f(\sqrt[3]{y}) \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \quad (y \neq 0)$$

(2) $Y = X^3$ 对应的函数 $y = x^2$ 是非单调函数, 便当 $x > 0$ 时, $y = x^2$ 是严格单调增加函数,

其反函数 $x = \sqrt{y}$, 又 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, 当 $y \leq 0$ 时, $f_Y(y) = 0$; 当 $y > 0$ 时, 则

$$f_Y(y) = f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}$$

综合表示为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

第三章 多维随机变量及其分布

习题解析

第 1、2、(1)、3、7、8、9、10、13、18、22 题 二维随机变量 (X, Y) 的联合分布、边缘分布、随机变量的独立性

1. 在一箱子中装有 12 只开关, 其中 2 只是次品, 在其中取两次, 每次任取一只, 考虑两种试验: (1) 放回抽样; (2) 不放回抽样。我们定义随机变量 X, Y 如下:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{若第一次取出的是正品} \\ 1, & \text{若第一次取出的是次品} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{若第二次取出的是正品} \\ 1, & \text{若第二次取出的是次品} \end{cases}$$

试分别就 (1)、(2) 两种情况, 写出 X 和 Y 的联合分布律。

解 (1) 放回抽样。X 的分布律为 $P\{X=0\}=\frac{10}{12}, P\{X=1\}=\frac{2}{12}$, 而两次试验的结果互不影响, 所以 Y 的分布律为 $P\{Y=0\}=\frac{10}{12}, P\{Y=1\}=\frac{2}{12}$ 。二维随机变量 (X, Y) 的所有可能取值为 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)。(X, Y) 取各个值的概率用古典概型计算, 得

$$P\{X=0, Y=0\}=\frac{10^2}{12^2}=\frac{25}{36}$$

$$P\{X=0, Y=1\}=\frac{10 \times 2}{12^2}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=0\}=\frac{2 \times 10}{12^2}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=1\}=\frac{2 \times 2}{12^2}=\frac{1}{36}$$

求二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律就是求积事件发生的概率。如 $\{X=0, Y=0\}$ 是表示 $\{(X=0) \cap (Y=0)\}$, 为简单起见, 将符号“ \cap ”用“,”代替, 是表示事件 $\{X=0\}$ 与 $\{Y=0\}$ 同时发生。因为是放回抽样, 所以事件 $\{X=i\}$ 与 $\{Y=j\}(i, j=0,1)$, 是相互独立的, 故也可以利用事件的独立性计算。如

$$P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{10}{12} \times \frac{10}{12}=\frac{25}{36}$$

其他类似。于是二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

	X		
Y		0	1
0		$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1		$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2) 不放回抽样。用古典概型计算, 则得

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{P_{10}^2}{P_{12}^2} = \frac{10 \times 9}{12 \times 11} = \frac{45}{66}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{P_{10}^1 P_2^1}{P_{12}^2} = \frac{10 \times 2}{12 \times 11} = \frac{10}{66}$$

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{P_2^1 P_{10}^1}{P_{12}^2} = \frac{2 \times 10}{12 \times 11} = \frac{10}{66}$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{P_2^2}{P_{12}^2} = \frac{2}{12 \times 11} = \frac{1}{66}$$

因为是不放回抽样，第一次试验结果影响第二次试验结果发生的概率。也可以用概率的乘法公式，则得

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\} = \frac{10}{12} \times \frac{9}{11} = \frac{45}{66}$$

其他类似，于是 (X, Y) 的分布律为

	X		
Y		0	1
0		$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1		$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

2. (1) 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球。以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数。求 X 和 Y 的联合分布律。

解 用古典概型。则 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X=i, Y=j\} = \frac{C_3^i C_2^j C_2^{4-(i+j)}}{C_7^4}$$

$$(i=0, 1, 2, 3; j=0, 1, 2; 2 \leq i+j \leq 4)$$

其中

$$P\{X = 0, Y = 0\} = 0$$

$$P\{X = 0, Y = 1\} = 0$$

$$P\{X = 0, Y = 2\} = \frac{C_3^0 C_2^2 C_2^2}{C_7^4} = \frac{1}{35}$$

$$P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{C_3^1 C_2^0 C_2^3}{C_7^4} = 0$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{C_3^1 C_2^1 C_2^2}{C_7^4} = \frac{6}{35}$$

$$P\{X = 1, Y = 2\} = \frac{C_3^1 C_2^2 C_2^1}{C_7^4} = \frac{6}{35}$$

$$P\{X = 2, Y = 0\} = \frac{C_3^2 C_2^0 C_2^1}{C_7^4} = \frac{3}{35}$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{C_3^2 C_2^1 C_2^1}{C_7^4} = \frac{12}{35}$$

$$P\{X = 2, Y = 2\} = \frac{C_3^2 C_2^2 C_2^0}{C_7^4} = \frac{3}{35}$$

$$P\{X = 3, Y = 0\} = \frac{C_3^3 C_2^0 C_2^1}{C_7^4} = \frac{2}{35}$$

$$P\{X = 3, Y = 1\} = \frac{C_3^3 C_2^1 C_2^0}{C_7^4} = \frac{2}{35}$$

$$P\{X = 3, Y = 3\} = 0$$

二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

X \ Y	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

3. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f_Y(x, y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ;

(2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}$;

(3) 求 $P\{X < 1.5\}$;

(4) 求 $P\{X + Y \leq 4\}$ 。

解 (1) 利用概率密度性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ 。有

$$\int_0^2 dx \int_2^4 k(6-x-y) dy = 1$$

等式左端为

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_2^4 k(6-x-y) dy &= k \int_0^2 (6y - xy - \frac{1}{2}y^2) \Big|_2^4 dx = k \int_0^2 (6-2x) dx \\ &= k(6x - 2 \times \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^2) \\ &= 8k \end{aligned}$$

由 $8k=1$, 得常数 $k=\frac{1}{8}$ 。

(2)

$$\begin{aligned} P\{X < 1, Y < 3\} &= \int_0^1 dx \int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 (6y - xy - \frac{1}{2}y^2) \Big|_2^3 dx = \frac{1}{8} \int_0^1 (\frac{7}{2} - x) dx \\ &= \frac{1}{8} (\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \times \frac{6}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P\{X < 1.5\} &= \int_0^{1.5} dx \int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{1.5} (6-2x) dx = \frac{1}{8} \times 6.75 = \frac{27}{32} \end{aligned}$$

(4) 可知, 积分域为三角域, 所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X < 1, Y \leq 4\} &= \int_0^2 dx \int_2^{4-x} \frac{1}{8}(6-x-y) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 (6y - xy - \frac{1}{2}y^2) \Big|_2^{4-x} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 (6-4x + \frac{1}{2}x^2) dx = \frac{1}{8} (6x - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3) \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{8} \times (12 - 8 + \frac{8}{6}) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘概率密度。

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 关于 X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \int_0^x 4.8y(2-x)dy \\ &= 4.8(2-x) \int_0^x ydy \\ &= 4.8(2-x) \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^x \\ &= 2.4x^2(2-x) \end{aligned}$$

综合表示为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.4x^2(2-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $0 \leq y \leq 1$ 时, 关于 Y 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \int_y^1 4.8y(2-x)dx = 4.8y \int_y^1 (2-x)dx \\ &= 4.8y \left(2x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_y^1 = 4.8y \left(\frac{3}{2} - 2y + \frac{1}{2} y^2 \right) \\ &= 2.4y(3-4y+y^2) \end{aligned}$$

综合表示为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2.4y(3-4y+y^2), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求关于 X, Y 的边缘概率密度时, 首先画出 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y) \neq 0$ 的区域, 以帮助正确确定积分上、下限。

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘概率密度。

解 当 $x > 0$ 时, 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}$$

综合表示为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

当 $y > 0$ 时, 关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}$$

综合表示为

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^{2y}, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 试确定常数 C ;
- (2) 求边缘概率密度。

解 (1) 利用概率密度 $f(x, y)$ 的性质确定常数 C 。即

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 cx^2 y dy = 1$$

计算等式端积分得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 cx^2 y dy &= c \int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{x^2}^1 dx = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^4) dx \\ &= \frac{c}{2} \left(\frac{c}{2} \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 x^6 dx \right) = c \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \frac{4}{21} c \end{aligned}$$

同 $\frac{4}{21} = 1$ 得, $c = \frac{21}{4}$ 。

(2) 当 $-1 < x < 1$ 时, 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{x^2}^1 \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4)$$

综合表示为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $0 < y < 1$ 时, 关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx = \frac{21}{4} y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 dx = \frac{7}{2} y^{5/2}$$

综合表示为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{2} y^{5/2}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

10. 将某一医药公司 9 月份和 8 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y 。据以往

积累的资料知 X 和 Y 联合分布律为

	Y					
X		51	52	53	54	55
51		0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52		0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53		0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54		0.05	0.05	0.02	0.01	0.03
55		0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

(1) 求边缘分布律

(2) 求 8 月份的订单数 51 时, 9 月份的订单数的条件分布律.

解 (1) 关于 X 的边缘分布律为

X	51	52	53	54	55
Pk	0.28	0.28	0.22	0.12	0.20

其中 $P\{X = 51\} = 0.06 + 0.05 + 0.05 + 0.01 + 0.01 = 0.18$ (按行相加), 其他类似.

关于 Y 的边缘分布律为

X	51	52	53	54	55
Pk	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13

其中 $P\{Y = 51\} = 0.06 + 0.07 + 0.05 + 0.05 + 0.05 = 0.28$ (按行相加), 其他类似.

(2) 求条件分布律其中 $P\{X = k|Y = 51\}, k = 51, 52, 53, 54, 55$ 。

$$P\{X = 51|Y = 51\} = \frac{P\{X = 51, Y = 51\}}{P\{Y = 51\}} = \frac{0.06}{0.28} = \frac{6}{28}$$

$$P\{X = 52|Y = 51\} = \frac{P\{X = 52, Y = 51\}}{P\{Y = 51\}} = \frac{0.07}{0.28} = \frac{7}{28}$$

$$P\{X = 53|Y = 51\} = \frac{P\{X = 53, Y = 51\}}{P\{Y = 51\}} = \frac{0.05}{0.28} = \frac{5}{28}$$

$$P\{X = 54|Y = 51\} = \frac{P\{X = 54, Y = 51\}}{P\{Y = 51\}} = \frac{0.06}{0.28} = \frac{6}{28}$$

$$P\{X = 55|Y = 51\} = \frac{P\{X = 55, Y = 51\}}{P\{Y = 51\}} = \frac{0.05}{0.28} = \frac{5}{28}$$

条件分布律为

X	51	52	53	54	55
$P\{X = k Y = 51\}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$

13. 在第9题中 (1) 求条件概率密度 $f_{x|y}(x|y)$, 特别, 写出当 $Y = \frac{1}{2}$ 时 X 的条件概率密度。(2) 求条件概率密度 $f_{y|x}(y|x)$, 特别, 分别写出当 $X = \frac{1}{3}, X = \frac{1}{2}$ 时 Y 的条件概率密度。(3) 求条件概率 $P\{Y \geq \frac{1}{4} | X = \frac{1}{2}\}, P\{Y \geq \frac{3}{4} | X = \frac{1}{2}\}$ 。

解 关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{21}{2}x^2(1-x^4), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{2}y^{5/2}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 当 $0 < y \leq 1$ 时

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{7}{2}y^{5/2}} = \frac{2}{3}x^2y^{-3/2}, & -\sqrt{y} < x < \sqrt{y} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由此得

$$f_{x|y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^2(\frac{1}{2})^{-3/2} = 3\sqrt{2}x^2, & -\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 当 $-1 < x < 1$ 时, 则

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4}, & x^2 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由此得

$$f_{y|x}(y|\frac{1}{3}) = \begin{cases} \frac{2y}{1-(\frac{1}{3})^4} = \frac{81}{40}y, & \frac{1}{9} < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}\left(y\left|\frac{1}{2}\right.\right) = \begin{cases} \frac{2y}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{32}{15}y, & \frac{1}{4} < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned} P\left\{Y \geq \frac{1}{4} \mid X = \frac{1}{2}\right\} &= \int_{\frac{1}{4}}^1 f_{Y|X}\left(y\left|\frac{1}{2}\right.\right) dy \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{32}{15} y dy = \left(\frac{32}{15} \times \frac{1}{2} y^2\right) \Big|_{\frac{1}{4}}^1 \\ &= \frac{16}{15} - \frac{16}{15} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \\ P\left\{Y \geq \frac{3}{4} \mid X = \frac{1}{2}\right\} &= \int_{\frac{3}{4}}^1 f_{Y|X}\left(y\left|\frac{1}{2}\right.\right) dy \\ &= \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{32}{15} y dy = \left(\frac{32}{15} \times \frac{1}{2} y^2\right) \Big|_{\frac{3}{4}}^1 \\ &= \frac{16}{15} - \frac{16}{15} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

18. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度;

(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2 + 2Xa + Y = 0$, 试求 a 有实根的概率。

解 X 概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 因为 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 所以 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2}, & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 方程 $a^2 + 2Xa + Y = 0$ 有实根的充要条件为 $4X^2 - 4Y \geq 0$, 即 $X^2 - Y \geq 0$, 所求概率为

$$\begin{aligned}
P\{X^2 - Y \geq 0\} &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{1}{2} e^{-y/2} = \int_0^1 (-e^{-y/2}) \Big|_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 (1 - e^{-x^2/2}) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 e^{-x^2/2} dx \\
&= 1 - \int_0^1 e^{-x^2/2} dx
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2/2} dx &= \sqrt{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} [\Phi(1) - \Phi(0)] \\
&= \sqrt{2\pi} (0.8413 - 0.5) = 0.3413\sqrt{2\pi} = 0.8555
\end{aligned}$$

则得

$$P\{X^2 - Y \geq 0\} = 1 - 0.8555 = 0.1445$$

此题求积分 $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$ 的技巧是将被积函数配成标准正态概率密度，即

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \text{ 然后查标准正态分布表得积分值。}$$

22. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解 由于 X 和 Y 相互独立, 因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设 $F_Z(z)$ 和 $f_Z(z)$ 分别表示 Z 的分布函数和概率密度。

首先求 $Z=X+Y$ 的分布函数, 然后求 $Z=X+Y$ 的概率密度, 这是基础方法。

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$; $0 \leq z < 1$ 时, 则

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} e^{-y} dx dy \\
&= \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = \int_0^z (-e^{-y}) \Big|_0^{z-x} dx \\
&= \int_0^z [(1 - e^{-(z-x)})] dx = \int_0^z 1 dx - \int_0^z e^{-y} e^x dx \\
&= z - e^{-z}(e^z - 1) = z - 1 + e^{-z}
\end{aligned}$$

当 $z \geq 1$ 时, 则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{x+y \leq z} e^{-y} dx dy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy \\ &= \int_0^z [(1 - e^{-(z-x)})] dx = 1 - e^{-z}(e-1) \end{aligned}$$

综合表示为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z - 1 + e^{-z}, & 0 \leq z < 1 \\ 1 - e^{-z}(e-1), & z \geq 1 \end{cases}$$

则 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ e^{-z}(e-1), & z \geq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

直接求 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

当 $0 < z < 1$ 时, 由 $0 \leq x \leq 1, z-x > 0 (y > 0)$, 使被积函数不等于零, 得 $0 \leq x \leq 1$ 和 $x < z$ 的交集为 $0 \leq x < z$, 则

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = 1 - e^{-z}$$

当 $z \geq 1$ 时, $0 \leq x \leq 1$ 和 $x < z$ 的交集为 $0 \leq x \leq 1$, 则

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e-1)$$

其他, $f_Z(z) = 0$ 。综合表示为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ e^{-z}(e-1), & z \geq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

用雅可比变换法。

令 $Z = X + Y, U = X$ 其反变换为 $Y = Z - U, X = U$, 变换的雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

则 (U, Z) 的概率密度为

$$\begin{aligned} g(u, z) &= f(u, z-u) |J| \\ &= \begin{cases} e^{-(z-u)}, & 0 \leq u \leq 1, z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度, 等价求关于 Z 的边缘概率密度。即

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, z) du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-u)} du$$

当 $0 < z < 1$ 时, 由 $0 \leq u \leq 1$ 和 $u < z$, 得交集 $0 \leq u < z$, 于是

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-u)} du = 1 - e^{-z}$$

当 $x \geq 1$ 时, 由 $0 \leq u \leq 1$ 和 $u < z$, 得交集 $0 \leq u < 1$, 于是

$$f_Z(z) = \int_0^1 e^{-(z-u)} du = e^{-z} (e - 1)$$

其他, $f_Z(z) = 0$ 。综合表示为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ e^{-z} (e - 1), & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

经常用到的是前两种求解方法。

第四章 随机变量的数字特征

习题解析

第 2、5、6、(1)、7、12、13、15、21、23、29、31、题 随机变量的数学期望和方差

2. 某产品的次品率为 0.1, 检验员每检验 4 次, 每次随机地取 10 件产品进行检验, 如发现其中的次品数多于 1, 就去调整设备. 以 X 表示一天中调整设备的次数, 试求 $E(X)$. (设诸产品是否为次品是相互独立的。)

解 每天检验 4 次, 一天中调整设备次数 X 服从二项分布 $b(4, p)$, p 表示每次检验需调整的概率. 从一批产品中随机地取 10 件, 近似放回抽样, 即 10 件中次品的个数 Y 服从二项分布 $b(10, 0.1)$, 其分布律为

$$P\{Y = k\} = C_{10}^k (0.1)^k (0.9)^{10-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 10)$$

而

$$\begin{aligned} p &= P\{Y > 1\} = 1 - P\{Y = 0\} \\ &= 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} \\ &= 1 - (0.9)^{10} - C_{10}^1 (0.1) \times (0.9)^9 \\ &= 1 - (0.9)^{10} - (0.9)^9 \\ &= 1 - 0.736 = 0.264 \end{aligned}$$

于是 $X \sim b(4, 0.264)$, 其分布律为

$$P\{Y = i\} = C_4^i (0.264)^i (0.736)^{4-i} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

所求数学期望为

$$E(X) = np = 4 \times 0.264 = 1.056$$

5. 设在某一规定的时间间隔里, 某电气设备用于最大负荷的时间 X (以分计) 是一个随机变量, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1500^2} x, & 0 \leq x \leq 1500 \\ \frac{-1}{1500^2} (x - 3000), & 1500 < x \leq 3000 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X)$ 。

解 所求数学期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{1500} x \frac{1}{1500^2} x dx + \int_{1500}^{3000} x \left[\frac{-1}{1500^2} (x - 3000) \right] dx \\ &= \frac{1}{1500^2} \int_0^{1500} x^2 dx - \frac{1}{1500^2} \int_{1500}^{3000} x^2 dx + \frac{1}{1500^2} \int_{1500}^{3000} 3000x dx \\ &= \frac{1}{1500^2} \left[\left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{1500} - \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{1500}^{3000} + (1500x^2) \Big|_{1500}^{3000} \right] \\ &= \frac{1}{1500^2} \left[\frac{1500^3}{3} - \frac{3000^3 - 1500^3}{3} + 1500x(3000^2 - 1500^2) \right] \\ &= \frac{1}{1500^2} \left[\frac{2 \times 1500^3}{3} - \frac{3000^3}{3} + 1500 \times 3000^2 - 1500^2 \right] \\ &= \frac{1500}{3} - \frac{3000^3}{3 \times 1500^2} + \frac{3000^2}{1500} \\ &= -500 - 4000 + 6000 = 1500 \end{aligned}$$

6. (1) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X), E(X^2), E(3X^2 + 5)$ 。

解 ① $E(X) = \sum_{k=1}^3 x_k p_k = (-2) \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2$

②求 $E(X^2)$ 有两种方法。一种方法是先求 $Y = X^2$ 分布律, 然后利用 Y 的分布律求 Y 的数学期望。 Y 的分布律为

X	0	4
p_k	0.3	0.7

则

$$E(Y) = E(X^2) = 0 \times 0.3 + 4 \times 0.7 = 2.8$$

另一种方法是直接利用 X 的分布律求 Y 的数学期望。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^3 x_k^2 p_k = (-2)^2 \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 \\ &= 4 \times 0.4 + 4 \times 0.3 = 2.8 \end{aligned}$$

③与②类似. 一种方法是先求 $Z = 3X^2 + 5$ 的分布律, 然后求数学期望. Z 的分律为

X	5	17
pk	0.3	0.7

则

$$E(Z) = E(3X^2 + 5) = 5 \times 0.3 + 17 \times 0.7 = 13.4$$

另一种方法是直接利用 X 的分布律求 Z 的数学期望。

$$E(Z) = E(3X^2 + 5) = [3 \times (-2)^2 + 5] \times 0.4 + (3 \times 0 + 5) \times 0.3 + (3 \times 2^2 + 5) \times 0.3 = 13.4$$

7. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 (1) $Y = 2X$; (2) $Y = e^{-2x}$ 的数学期望。

解 (1) 首先求 $Y = 2X$ 的概率密度, 然后求数学期望. 因为 $Y = 2X$ 对应的函数 $y = 2x$

是严格单调函数, 其反函数 $x = \frac{y}{2}$, 又 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$, 则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = f\left(\frac{y}{2}\right) \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

所求数学期望为

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2X) = \int_0^{+\infty} y \frac{1}{2} e^{-y/2} dy \\ &= (-ye^{-y/2}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y/2} dy \\ &= (-2e^{-y/2}) \Big|_0^{+\infty} = 2 \end{aligned}$$

利用 X 的概率密度直接求数学期望。

$$E(Y) = E(2X) = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x} dx = 2$$

(2) 首先求 $Y = e^{-2x}$ 的概率密度, 然后求数学期望。

$Y = e^{-2x}$ 对应的函数 $Y = e^{-2x}$ 是严格单调减少函数, 其反函数为 $x = -\frac{1}{2} \ln y$, 又 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}$,

则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = f\left(-\frac{1}{2} \ln y\right) \left| -\frac{1}{2y} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所求数学期望为

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(e^{-2x}) = \int_0^{+\infty} y \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{1/2} dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} y^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

利用 X 的概率密度, 直接求数学期望。

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(e^{-2x}) = \int_0^{+\infty} e^{-2x} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

12. 某车间生产的圆盘其直径在区间 (a, b) 上服从均匀分布。试求圆盘面积的数学期望。

解 设圆盘直径为 X , 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设圆盘面积为 Y , 而 $Y = \pi \left(\frac{X}{2} \right)^2 = \frac{\pi X^2}{4}$, 则得

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_a^b \frac{\pi x^2}{4} \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{\pi}{4(b-a)} \int_a^b x^2 dx = \frac{\pi}{4(b-a)} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{\pi(b^2 + ab + a^2)}{12} \end{aligned}$$

13. 设电压 (以 V 计) $X \sim N(0, 9)$ 。将电压施加于一检波器, 其输出电压为, 求输出的电压 Y 的均值。

解 由 $X \sim N(0,9)$, 得 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{18}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

求电压 Y 的均值, 即是求数学期望 $E(Y)$ 。

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(5X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} 5x^2 \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{18}} dx = \frac{10}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{18}} dx \\ \text{令 } t &= \frac{x^2}{18} \quad \frac{10}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} 18te^{-t} \sqrt{18} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{90}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{90}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{90}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

其中 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, 代入 $E(Y)$, 得

$$E(Y) = \frac{90}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 45V$$

另一方法。由 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$, 得

$$E(Y) = 5E(X^2) = 5(9+0) = 45V$$

15. 将 n 只球 ($1-n$ 号) 随机地放进 n 只盒子 ($1-n$ 号) 中去, 一只盒子只装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中, 称为一个配对。记 X 为总的配对数, 求 $E(X)$ 。

解 引进随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号球放进第 } i \text{ 号盒子} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号球未放进第 } i \text{ 号盒子} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ 。因为将 n 只球随机地放进 n 只盒子, 看做把 n 只球进行全排列, 有 $n!$ 排列

数。第 i 号盒子, 剩余的 $(n-1)$ 只球进行全排列, 有 $(n-1)!$ 种排列数。由此得 X_i 的分布律为

$$P\{X_i = 1\} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$P\{X_i = 0\} = 1 - \frac{1}{n}$$

所以 $E(X_i) = 1 \times \frac{1}{n} + 0 \times (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ 。由数学期望性质得

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \times \frac{1}{n} = 1$$

21. 设长方形的高（以 m 计） $X \sim U(0, 2)$ ，已知长方形的周长（以 m 计）为 20，求长方形面积 A 的数学期望和方差。

解 设长方形的长为 Y，有 $20 = 2Y + 2X$ ，由 $10 = Y + X$ ，得 $Y = 10 - X$ ，则长方形面积 $A = (10 - X)X$ ，X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所求数学期望为

$$\begin{aligned} E(A) &= E[(10 - X)X] = \int_0^2 (10 - x)x \frac{1}{2} dx \\ &= 5 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 \\ &= 10 - \frac{3}{4} = \frac{26}{3} = 8.667 \end{aligned}$$

又

$$E(A^2) = E[((10 - X)X)^2] = \int_0^2 (10 - x)^2 x^2 \frac{1}{2} dx$$

所求方差为

$$D(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = 96.533 - (8.667)^2 = 21.42$$

23. 五家商店联营，它们每两周售出的某种农产品的数量（以 kg 计）分别为 $X_1, X_2, X_3,$

X_4, X_5 。已知 $X_1 \sim N(200, 225)$ ， $X_2 \sim N(240, 240)$ ， $X_3 \sim N(180, 225)$ ，

$X_4 \sim N(260, 265)$ ， $X_5 \sim N(327, 270)$ ， X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立。

(1) 求五家商店两周的总销售量均值和方差；

(2) 商店每隔两周进贷一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存多少公斤该产品？

解 (1) 与第 21 题类似。利用服从正态分布的独立变量的线性组合仍然服从正态分布这

一重要结论。设 $\sum_{i=1}^5 X_i$ 表示 5 家商店两周的总销售量，则有 $\sum_{i=1}^5 X_i$ 服从正态分布，且

$$E\left(\sum_{i=1}^5 X_i\right) = \sum_{i=1}^5 E(X_i) = 200 + 240 + 180 + 260 + 320 = 1200$$

$$D\left(\sum_{i=1}^5 X_i\right) = \sum_{i=1}^5 D(X_i) = 225 + 240 + 225 + 265 + 270 = 1225$$

故 5 家商店两周的总销售量 $\sum_{i=1}^5 X_i$ 的均值为 1200，方差为 1225。

(2) 设 $Y = \sum_{i=1}^5 X_i$ ，S 表示仓库存量，根据题意得

$$P\{Y \leq S\} > 0.99$$

由 (1) 知 $Y \sim N(1200, 1225)$ ，所以

$$P\left\{\frac{Y-1200}{35} \leq \frac{S-1200}{35}\right\} > 0.99, \Phi\left(\frac{S-1200}{35}\right) > 0.99$$

查表得 $\Phi\left(\frac{S-1200}{35}\right) > 2.33$ ，解出 $S > 2.33 \times 35 + 1200 = 1281.55$ ，因此商店的仓库应至少储存 1282kg 该产品。

29. 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的。

证明 第 24 题是二维连续型随机变量，此题是二维离散型随机变量，但它们都有相同的结果。

关于 X 的边缘分布律为

X	-1	0	1
$P\{X = X_i\}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

关于 Y 的边缘分布律为

Y	-1	0	1
$P\{Y = y_j\}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

因为 $P\{X=0, Y=0\}=0$, 而 $P\{X=0\}=\frac{2}{8}, P\{Y=0\}=\frac{2}{8}$,

故 $P\{X=0, Y=0\} \neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$, 所以 X 和 Y 不相互独立。

下面求 X, Y 的数字特征。

$$E(X) = (-1) \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

$$E(Y) = (-1) \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

$$D(X) = D(X^2) = (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

$$D(Y) = D(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

关于 XY 的分布律为

XY	-1	0	1
P_k	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

其中

$$P\{XY = -1\} = P\{X = -1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$P\{XY = 1\} = P\{X = -1, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 1\}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$P\{XY = 0\} = 1 - P\{XY = -1\} - P\{XY = 1\}$$

$$= 1 - \frac{2}{8} - \frac{2}{8} = \frac{4}{8}$$

由此得

$$E(XY) = (-1) \times \frac{2}{8} + 0 \times \frac{4}{8} + 1 \times \frac{2}{8} = 0$$

则 X 和 Y 的相关系数为

$$\rho_{XY} = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0$$

故 X 和 Y 不相关。

31. 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), COV(X, Y)$ 。

解 下面是直接利用二维随机量 (X, Y) 的概率密度求随机变量的数字特征。

$$E(X) = \int_0^1 dx \int_{-x}^x x dy = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_0^1 dx \int_{-x}^x y dy = 0$$

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_{-x}^x xy dy = \int_0^1 x dx \int_{-x}^x y dy = 0$$

则 X 和 Y 的协方差为

$$COV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

第五章 大数定律及中心极限定理

习题解析

1. 据以往经验, 某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布。现随机地取 16 只, 设它们的寿命是相互独立的。求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率。

解 利用独立同分布中心极限定理。设 X 表示电器元件的寿命, 则 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

随机取出 16 只元件, 其寿命分别用 X_1, X_2, \dots, X_{16} 表示, 且它们相互独立, 同服从均值为

100 的指数分布, 则 16 只元件的寿命的总和近似服从正态分布。设寿命总和为 $Y = \sum_{i=1}^{16} X_i$,

其中 $E(X_i) = 100, D(X_i) = 100^2$, 由此得

$E(Y) = \sum_{i=1}^{16} E(X_i) = 16 \times 100 = 1600, D(Y) = \sum_{i=1}^{16} D(X_i) = 16 \times 100^2$ 。由独立同分布中心极限

定理知, Y 近似服从正态分布 $N(1600, 16 \times 100^2)$, 于是

$$\begin{aligned} P\{Y > 1920\} &= 1 - P\{Y \leq 1920\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{Y - 1600}{\sqrt{16 \times 100^2}} \leq \frac{1920 - 1600}{\sqrt{16 \times 100^2}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{Y - 1600}{\sqrt{16 \times 100^2}} \leq \frac{320}{400}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119 \end{aligned}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数。

4. 设各零件的重量都是随机变量, 它们相互独立, 且服从相同的分布, 其数学期望为 0.5kg, 均方差为 0.1kg, 问 5000 只零件的总重量超过 2510kg 概率是多少?

解 利用独立同分布中心极限定理. 设 X_i 表示第 i 只零件的重量 ($i=1, 2, \dots, 5000$), 且

$$E(X_i) = 0.5, D(X_i) = 0.1^2. \quad \text{设总重量为 } Y = \sum_{i=1}^{5000} X_i, \quad \text{则有}$$

$E(Y) = 5000 \times 0.5 = 2500, DY = 5000 \times 0.1^2 = 50$. 由独立同分布中心极限定理知 Y 近似服

从正态分布 $N(2500, 50)$, 而 $\frac{Y-2500}{\sqrt{50}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 所求概率为

$$\begin{aligned} P\{Y > 2510\} &= P\left\{\frac{Y-2500}{\sqrt{50}} > \frac{2510-2500}{\sqrt{50}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{Y-2500}{\sqrt{50}} > 1.4142\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(1.4142) \\ &= 1 - 0.9207 = 0.0793 \end{aligned}$$

第六章 样本及抽样分布

习题解析

1. 在总体 $N(52, 6.3^2)$ 中随机抽一容量为 36 的样本, 求样本均值 \bar{X} 落在 50.8 到 53.8 之间的概率。

解 样本均值 \bar{X} 服从正态分布 $N(52, 6.3^2)$, 由此得 $\frac{\bar{X}-52}{6.3/6} \sim N(0, 1)$. 所求概率为

$$\begin{aligned} P\{50.8 < \bar{X} < 53.8\} &= P\left\{\frac{50.8-52}{6.3/6} < \frac{\bar{X}-52}{6.3/6}\right\} \\ &= \Phi(1.714) - \Phi(-1.143) \\ &= 0.9564 - (1 - 0.8729) \\ &= 0.8293 \end{aligned}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数。

3. 在总体 $N(20, 3)$ 的容量分别为 10, 15 的两独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率。

解 设 $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1,10}$ 与 $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2,15}$ 是从总体 $N(20, 3)$ 中抽取的两个独立样本,

$\bar{X}_1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_{1i}, \bar{X}_2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} X_{2i}$ 分别表示两个样本均值, 因为 \bar{X}_1 与 \bar{X}_2 独立, 所以

$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ 服从正态分布 $N(0, \frac{3}{10} + \frac{3}{15})$, 即 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(0, \frac{1}{2})$ 。所求概率为

$$\begin{aligned} P\{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 0.3\} &= \{P\left\{\frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{1/2}} > \frac{0.3}{\sqrt{1/2}}\right\}\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{1/2}} \leq 0.3\sqrt{1/2}\right\} \\ &= 2 - 2\Phi(0.424) \\ &= 2 - 2 \times 0.6628 = 0.6744 \end{aligned}$$

6. 设总体 $X \sim b(1, p), X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本。

(1) 求 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布律;

(2) 求 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的分布律;

(3) 求 $E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$ 。

解 (1) 由 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立及与总体同分布, 得 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布律为

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \quad (x_i = 0, 1; i=1, 2, \dots, n)$$

(2) 样本 X_1, X_2, \dots, X_n 来自伯努得分布总体, 可以理解为将伯努利试验重复独立地做 n 次, 令随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次试验事件 } A \text{ 发生} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次试验事件 } \bar{A} \text{ 发生} \end{cases}$$

而 n 次试验中事件 A 发生的次数为 $X = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 X 服从二项分布 $b(n, p)$, 其分布律为

$$P\{X = x\} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

(3)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = p, \text{ 而}$$

$$\begin{aligned} D(\bar{X}) &= D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p(1-p) = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

为了求 $E(S^2)$, 首先将 S^2 整理为

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + (\bar{X})^2) \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n (\bar{X})^2 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n(\bar{X})^2 + n(\bar{X})^2 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{X})^2 \right] \end{aligned}$$

则得

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE((\bar{X})^2) \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (p(1-p) + p^2) - n\left(\frac{p(1-p)}{n} + p^2\right) \right] \\ &= \frac{1}{n-1} [np(1-p) + np^2 - p(1-p) - np^2] \\ &= \frac{1}{n-1} (n-1)p(1-p) = p(1-p) \end{aligned}$$

第(3)小题求解过程中, 主要用到样本的独立性及与总体同分布性, 即 $E(X_i) = E(X) = p, D(X_i) = D(X) = p(1-p) (i=1, 2, \dots, n)$; 又用到数学期望和方差的性

质, 即 $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i), D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$ 。实际上, 此题是验证了重要的结论:

样本均值的数学期望等于总体的数学期望; 样本均值的方差等于总体方差除以样本容量; 样本方差的数学期望等于总体方差。即 $E(\bar{X}) = E(X), D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}, E(S^2) = D(X)$ 。

7. 设总体 $X \sim x^2(n), X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 是来自 X 的样本, 求 $E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$ 。

解 首先求总体 X 的数学期望和方差, 再利用第6题的重要结果。总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

X 的数字特征求解如下:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n+2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})2^{\frac{n+2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})2^{\frac{n+2}{2}}} x^{\frac{n+2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n+2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

其中积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})2^{\frac{n+2}{2}}} x^{\frac{n+2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

中的被积函数是服从自由度为 $(n+2)$ 的 X^2 分布的概率密度, 因此积分值是 1。同理得

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+4}{2})2^{\frac{n+4}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2})2^{\frac{n+4}{2}}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\
&= \frac{\Gamma(\frac{n+4}{2})2^{\frac{n+4}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{\frac{n+2}{2} \cdot \frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n+4}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} = n(n+2)
\end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n(n+2) - n^2 = 2n$$

由此可见， X^2 分布的数学期望等于自由度，方差等于 2 倍的自由度。于是

$$E(\bar{X}) = E(X) = n$$

$$D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{2n}{10} = \frac{n}{5}$$

$$E(S^2) = D(X) = 2n$$

9. 设在总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取一容量为 16 的样本。这里 μ, σ^2 均为未知。

(1) 求 $P\{S^2/\sigma^2 \leq 2.041\}$ ，其中 S^2 为样本方差；

(2) 求 $D(S^2)$ 。

解 (1) 由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ，得 $\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$ 。所求概率为

$$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.041\right\} = P\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2} \leq 15 \times 2.041\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2} > 30.615\right\}$$

$$= 1 - 0.01 = 0.99$$

根据自由度 15 和上侧分位点 30.615 (表中为 30.578) 查 X^2 分布表得概率为 0.01.

(2) 由 $\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim X^2$ 有

$$D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right) = 2 \times 15 = 30, \frac{15S^2}{\sigma^4} D(S^2) = 30$$

由此得

$$D(S^2) = \frac{30\sigma^4}{15^2} = \frac{2}{15}\sigma^4$$

第七章 参数估计

习题解析

第 1~13 题 求参数点估计的方法和估计量评选的标准

1. 随机地取 8 只活塞环, 测得它们的直径为 (以 mm 计) 74.001 74.005 74.003 74.001 74.000 73.998 74.006 74.002 试求总体均值 φ 及方差 σ 的矩估计值, 并求样本方差 S^2 。

解 不论总体 X 服从任何分布, 只要 X 的数学期望和方差存在, 则总体均值 $E(X) = \mu$ 和方差 $D(X) = \sigma^2$ 的矩估计值分别为样本均值和样本二阶中心矩, 即

$$\mu = \bar{x}, \sigma^2 = B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2。$$

根据已知数据, 经计算得

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = 74.002$$

$$B_2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 6 \times 10^{-6}$$

于是 φ 和 σ^2 的矩估计值分别为 $\varphi = 74.002, \sigma^2 = 6 \times 10^{-6}$ 。样本方差为

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 6.86 \times 10^{-6}$$

计算 \bar{x}, B_2, s^2 都比较麻烦, 借助计算器, 在统计状态下, 按相应的键就可以得到所需要的结果。

2. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体的一个样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为一相应的样本值。求下述各总体的

密度函数或分布律中的未知参数的矩估计量和估计值。

$$(1) f(x) = \begin{cases} \theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, & x > c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $c > 0$ 为已知参数, $\theta > 1, \theta$ 为未知参数。

$$(2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 1, \theta$ 为未知参数。

$$(3) P\{X = x\} = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} (x=0,1,2,\dots), m, \text{ 其中 } 0 < p < 1, p \text{ 为未知参数。}$$

解 求一个未知参数的矩估计量, 首先求总体 X 的数学期望, 然后令总体数学期望等于样本均值, 解此方程, 得未知参数的矩估计量。

(1)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_c^{+\infty} x \theta c^\theta x^{-(\theta+1)} dx = \theta c^\theta \int_c^{+\infty} x^{-\theta} dx \\ &= \theta c^\theta \left(\frac{1}{1-\theta} x^{-(\theta+1)} \right) \Big|_c^{+\infty} \\ &= \theta c^\theta \left(\frac{-c^{1-\theta}}{1-\theta} \right) = \frac{\theta c}{\theta-1} \end{aligned}$$

对样本的一组观察值 x_1, x_2, \dots, x_n , 得样本均值为 \bar{x} 。

$$\text{令 } \frac{\theta c}{\theta-1} = \bar{x}, \text{ 解得 } \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{x-c}, \text{ 则 } \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{x-c} \text{ 为 } \theta \text{ 的矩估计值, 相就的 } \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{X-c} \text{ 为 } \theta \text{ 的}$$

矩估计量。其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是随机变量, 表示对样本的不同观察值, 它取值不同, 所以

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{X-c} \text{ 是随机变量。}$$

(2)

$$E(X) = \int_0^1 x \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} dx = \sqrt{\theta} \int_0^1 x^{\sqrt{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}$$

对样本的一组观察值 x_1, x_2, \dots, x_n , 令 $\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}} = \bar{x}$, 得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}} \right)^2$, θ 的

矩估计值为 $\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \right)^2$ 。

(3) 总体 X 服从二项分布 $b(m, p)$, 由此得 $E(X) = mp$, 对样本的一组观察值 x_1, x_2, \dots, x_n ,

令 $m\bar{p} = \bar{x}$, 得 p 的矩估计值为 $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{m}$, p 的矩估计量为 $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$ 。

4. (1) 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0 < \theta < 1)$ 为未知参数。已知取得了样本值 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$ 。试求 θ 的矩估计值和最大似然估计量。

(2) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的一个样本, 试求 λ 的最大似然估计量及矩估计量。

解 (1) $E(X) = 1 \times \theta^2 + 2 \times 2\theta(1-\theta) + 3 \times (1-\theta)^2 = 3 - 2\theta$ 。

样本均值 $\bar{x} = \frac{1+2+1}{3} = \frac{4}{3}$, 令 $3 - 2\theta = \bar{x}$, 得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta} = \frac{5}{6}$ 。

似然函数为

$$L(\theta) = \theta^4 2\theta(1-\theta) = 2\theta^5(1-\theta)$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = \ln 2 + 5 \ln \theta + \ln(1-\theta)$$

似然方程为

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{5}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{5}{6}$ 。

(2) 总体 X 服从泊松分布, 其分布律为

$$P\{X = x\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

而 $E(X) = \lambda$, 令 $\lambda = \bar{X}$, 得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 。

似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!} \right) \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i! + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda$$

似然方程为

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = 0$$

得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$, λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 。 λ 的矩估计量和最大似然估计量相等。

16. 设某种清漆的 9 个样品, 其干燥时间 (以小时计) 分别为

6.0 5.7 5.8 6.5 7.0 6.3 5.6 6.1 5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

(1) 若由以往经验知 $\sigma = 0.6$ (小时); (2) 若 σ 为未知。

解 (1) 若 σ 为已知, 求 μ 的置信区间, 选取服从标准正态分布的随机变量 (样本的函数)。具体步骤如下:

① 随机变量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ 。

② 给定置信水平 $1 - \alpha = 0.95$, 使

$$P\left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < z_{0.025} \right\} = 0.95$$

查标准正态分布表得分位点为 $z_{0.025} = 1.96$ 。等价于

$$P\left\{ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times 1.96 < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times 1.96 \right\} = 0.95$$

③ μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times 1.96, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times 1.96 \right)$$

④ 由样本数据, 经计算得样本均值为 $\bar{x} = 6$, 已知 $\sigma = 0.6, n = 9$, 于是 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(6 - \frac{0.6}{3} \times 1.96, 6 + \frac{0.6}{3} \times 1.96 \right) = (5.608, 6.392)$$

实际上这是 μ 的一个确定的置信区间。

(2) 若 σ 未知, 求 μ 的置信区间, 先取服从 t 分布的随机变量, 具体步骤如下:

① 随机变量 (样本的函数) 为 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 。

② 给定置信水平 $1-a=0.95$ ，使 $P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{0.025}(8)\right\} = 0.95$

查 t 分布表得分位点为 $t_{0.025}(8) = 2.3060$ 。等价于

$$P\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \times 2.3060 < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \times 2.3060\right\} = 0.95$$

③ μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \times 2.3060, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \times 2.3060\right)$$

④ 由样本数据, 经计算得样本均值为 $\bar{x} = 6$, 样本标准差为 $s = 0.5745$. 于是 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(6 - \frac{0.5745}{3} \times 2.3060, 6 + \frac{0.5745}{3} \times 2.3060\right) = (5.558, 6.442)$$

不论标准正态分布, 还是 t 分布, 查分位点时, 都与任何未知参数无关。选取的样本的函数, 含有待估的参数 μ , 不含其他的未知参数。

18. 随机地取某种炮弹 9 发做试验, 得炮口速度的样本标准差 $s = 11m/s$ 。设炮口速度服从正态分布。求这种炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解 求标准差 σ 的置信区间时, 首先求方差 σ^2 的置信区间。选取的随机变量 (样本的函数) 为

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2(n-1)$$

给定置信水平 $1-a=0.95$ ，使

$$P\left\{X_{0.975}^2(8) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < X_{0.025}^2(8)\right\} = 0.95$$

查 X^2 分布表得分位点为 $X_{0.975}^2(8) = 2.180, X_{0.025}^2(8) = 17.535$ 。等价于

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{17.535} < \sigma < \frac{(n-1)S^2}{2.180}\right\} = 0.95$$

于是 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{17.535}, \frac{(n-1)S^2}{2.180}\right)$$

将 $n=9, s=11$ 代入, 得 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{8 \times 11^2}{17.535}, \frac{8 \times 11^2}{2.180}\right) = (55.2, 444.0)$$

由此得 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\sqrt{55.2}, \sqrt{444.0}) = (7.43, 21.07)$$

23. 设两位化验员 A, B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各作 10 次测定, 其测定值的样本方差依次为 $s_A^2 = 0.5419, s_B^2 = 0.6065$ 。设 σ_A^2, σ_B^2 分别为 A, B 所测定的测定值总体的方差, 设总体均为正态的, 且两样本独立。求方差比 σ_A^2 / σ_B^2 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解 选取随机变量 (样本的函数) 服从 F 分布, 即

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

给定置信水平 $1 - \alpha = 0.95$, 使

$$P = \{F_{0.975}(9, 9) < \frac{S_A^2}{S_B^2} \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < F_{0.975}(9, 9)\} = 0.95$$

查 F 分布表得分位点为 $F_{0.025}(9, 9) = 4.03$ 。等价于

$$P\left\{\frac{S_A^2}{S_B^2 F_{0.025}(9, 9)} < \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} < \frac{S_A^2}{S_B^2 F_{0.975}(9, 9)}\right\} = 0.95$$

其中 $F_{0.975}(9, 9) = \frac{1}{F_{0.025}(9, 9)}$ 。于是 $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{0.5419}{4.03 \times 0.6065}, \frac{0.5419 \times 4.03}{0.6065}\right) = (0.222, 3.601)$$

24. 在一批货物的容量为 100 的样本中, 经检验发现有 16 只次品, 试求这批货物次品率的置信水平为 0.95 的置信区间。

解 大样本时, 求非正态总体未知参数的置信区间, 利用中心极限定理。设总体 X 服从 (0-1) 分布, 其分布律为

$$P\{X = x\} = p(1-p)^{1-x} \quad (x = 0, 1)$$

其中参数 p 未知。从该总体抽取容量为 100 的样本 X_1, X_2, \dots, X_{100} , 设 $\sum_{i=1}^{100} X_i$ 表示样本

中的次品数, $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ 表示样本的次品率, 由棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{100} X_i$

近似服从正态分布 $N(100p, 100p(1-p))$, 而 $Z = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}$ 近似服从标准正态分布。

给定置信水平 $1-a = 0.95$, 使

$$P = \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} \right| < z_{0.025} \right\} \approx 0.95$$

也可以写为

$$P = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/100}} \right| < z_{0.025} \right\} \approx 0.95$$

解绝对值不等式 $\left| \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/100}} \right| < z_{0.025}$, 等价于解

$$(100 + z_{0.025}^2)p^2 - (2 \times 100\bar{X} + z_{0.025}^2)p + 100(\bar{X})^2 < 0$$

则得

$$p_1 = \frac{200\bar{X} + z_{0.025}^2 - \sqrt{(200\bar{X} + z_{0.025}^2)^2 - 400(100 + z_{0.025}^2)(\bar{X})^2}}{2(100 + z_{0.025}^2)}$$

$$p_2 = \frac{200\bar{X} + z_{0.025}^2 + \sqrt{(200\bar{X} + z_{0.025}^2)^2 - 400(100 + z_{0.025}^2)(\bar{X})^2}}{2(100 + z_{0.025}^2)}$$

于是 p 的近似置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(p_1, p_2)$$

查标准正态分布表得分位点为 $z_{0.025} = 1.96$, 将样本均值 $\bar{x} = \frac{16}{100} = 0.16$ 代入 p_1, p_2 的表达式, 得

$$p_1 = \frac{200 \times 0.16 + 1.96^2 - \sqrt{(200 \times 0.16 + 1.96^2)^2 - 400(100 + 1.96^2) \times 0.16^2}}{2 \times (100 + 1.96^2)}$$

$$= 0.102$$

$$p_2 = \frac{200 \times 0.16 + 1.96^2 + \sqrt{(200 \times 0.16 + 1.96^2)^2 - 400(100 + 1.96^2) \times 0.16^2}}{2 \times (100 + 1.96^2)}$$

$$= 0.244$$

由此得 p 的近似置信水平为 0.95 的置信区间为

(0.102, 0.244)

另一种方法。p 的近似置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100}} \times 1.96, \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100}} \times 1.96\right)$$

将 $\bar{x} = 0.16$ 代入，得 p 的近似置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(0.16 - \sqrt{\frac{0.16 \times 0.84}{100}} \times 1.96, 0.16 + \sqrt{\frac{0.16 \times 0.84}{100}} \times 1.96\right) = (0.088, 0.232)$$

前种方法，p 的近似置信区间的长度 $L = 0.142$ ；后种方法，p 的近似置信区间的长度 $L = 0.144$ 。由此可见，前种方法比后种方法精度高。后种方法是把 $D(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n}$ 中的

p 用无偏估计量 \bar{X} 代入，因此增加了误差。

第八章 假设检验

习题解析

正态总体均值的假设检验

1. 某批矿砂的 5 个样品中的镍含量，经测定这 (%)

3.25 3.27 3.24 3.26 3.24

没测定值总体服从正态分布，但参数均未知。问在 $\alpha = 0.01$ 下能否接受假设：这批矿砂的镍含量的均值为 3.25。

解 测定值 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知，关于均值 μ 的假设检验，用 t 检验法。检验过程如下：

① 提出原假设和备择假设

$$H_0: \mu = 3.25 \quad H_1: \mu \neq 3.25$$

② 选取检验统计量

当原假设为真时，检验统计量为

$$t = \frac{\bar{X} - 3.25}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

因为总体方差 σ^2 未知，故选取服从 t 分布的检验统计量。

③ 确定拒绝原假设的域

给定显著性水平 $\alpha = 0.01$ ，使

$$P\{|t| \geq t_{0.005}(4)\} = 0.01$$

查 t 分布表得临界值为 $t_{0.005}(4) = 4.6041$ ，则拒绝域为

$(-\infty, -4.6041]$ 或 $[4.6041, +\infty)$

④计算检验统计量的观察值

根据给定的样本观察值，经计算得样本均值为 $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = 3.252$ ，样本标准差为

$$s = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = 0.013。则 t 的观察值为$$

$$t = \frac{3.252 - 3.25}{0.013/\sqrt{5}} = \frac{0.002 \times \sqrt{5}}{0.013} = 0.344$$

⑤作推断

因为 $|t| = 0.344 < 4.6041$ ，即 t 的观察值不落在拒绝域中，所以接受原假设，或说不拒绝原假设。可以认为这批矿砂的镍含量的均值为 3.25。

检验统计量 t 是样本的函数，当原假设为真时，不含任何未知参数。今后说确定拒绝域，就是指确定拒绝原假设的域。对于样本的一组观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n, (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 维空间的一个点，也冰是一次试验的结果。此题 $|t| = 0.344 < 4.6041$ ，说明根据一次试验结果 $\bar{x} = 3.252$ ，未导致小概率事件发生，所以接受原假设。

3. 要求一种元件平均使用寿命不得低于 1000 小时，生产者从一批这种元件中随机抽取 25 件，测得其寿命的平均值为 950 小时。已知该种元件寿命服从标准差为 $\sigma = 100$ 小时的正态分布。试在显著性水平 $\sigma = 0.05$ 下确定这批元件是否合格？设总体均值为 μ ， μ 未知。即需检验假设

$$H_0 : \mu \geq 1000, H_1 : \mu < 1000$$

解 元件寿命 $X \sim N(\mu, 100^2)$ ，总体方差 σ^2 已知，关于总体均值 μ 的假设检验，用正态检查法。

①检验假设

$$H_0 : \mu \geq 1000, H_1 : \mu < 1000 \text{ (是单边检验问题)}$$

②选取检验统计量

当原假设为真时，检验统计量为

$$Z = \frac{\bar{X} - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

因为总体方差 σ^2 已知，故选取服从标准正态分布的检验统计量。

③确定拒绝域

显然, $Z = \frac{\bar{X} - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 偏小到一定程度, 有可能拒绝原假设, 给定显著性水平

$\alpha = 0.05$, 使

$$P\{Z \leq -z_{0.05}\} = 0.05 \quad (z_{0.05} > 0)$$

查标准正态分布表得临界值为 $z_{0.05} = 1.645$, 则拒绝域为

$$(-\infty, -1.645]$$

④计算检验统计量的观察值

$$z = \frac{950 - 1000}{100/\sqrt{25}} = \frac{5 \times (-50)}{100} = -2.5$$

⑤作推断

由于 z 的值落在拒绝域中, 所以拒绝原假设。可以认为这批元件不合格。

当假设检验是单边检验时, 其拒绝域方向的确定是沿着备择假设的不等号方向。

此题原假设 $H_0: \mu \geq 1000$, 全部 μ 都比 H_1 中的要大。当 H_1 为真时, \bar{X} 观察值 \bar{x} 往往偏小,

对于某一正常驻机构数 c , 拒绝域为 $\bar{x} \leq c$, 则

$$\begin{aligned} P\{\text{拒绝}H_0 | H_0 \text{为真}\} &= P_{\mu \in H_0}\{\bar{X} \leq c\} \\ &= P_{\mu \geq 1000}\left\{\frac{\bar{X} - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c - 1000}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} \\ &\leq P_{\mu \geq 1000}\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c - 1000}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} \end{aligned}$$

因为 $\mu \geq 1000$, 所以

$$\left\{\frac{\bar{X} - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c - 1000}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} \subset \left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c - 1000}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}$$

故上式不等式成立。要控制

$$P\{\text{拒绝}H_0 | H_0 \text{为真}\} \leq \alpha$$

只需令

$$P_{\mu \geq 1000}\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c - 1000}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \alpha$$

由于 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 临界值 $\frac{c - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} = -z_\alpha (z_\alpha > 0)$, 解得 $c = 1000 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$, 即

$\bar{x} \leq 1000 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a$, 拒绝域为

$$z = \frac{\bar{x} - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_a$$

给定 $a = 0.05$, 则拒绝域为 $z = \frac{\bar{x} - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_{0.05}$ 。由此得检验假设

$H_0: \mu \geq 1000, H_1: \mu < 1000$ 与检验假设 $H_0: \mu \geq 1000, H_1: \mu < 1000$ 的拒绝域相同。

一般地, 单边假设检验为

$$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0 (\mu_0 \text{ 为已知常数})$$

与单边假设检验为 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 类似。拒绝域为

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_a$$

单边假设检验为 $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$

与单边假设检验为 $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ 类似。拒绝域为

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_a$$

4. 下面列出的是某工厂随机选取的 20 只部件的装配时间 (min):
9.8, 10.4, 10.6, 9.6, 9.7, 9.9, 10.9, 11.1, 9.6, 10.2, 10.3, 9.6, 9.9, 11.2, 10.6, 9.8, 10.5, 10.1, 10.5, 9.7。

设装配时间的总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知。是否可以认为装配时间的均值显著地大于 10 (取 $a = 0.05$) ?

解 设装配时间 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, 关于 μ 的假设检验, 用 t 检验法。

检验假设

$$H_0: \mu \leq 10, H_1: \mu > 10$$

与第 3 题分析类似。当原假设为真时, 选取检验统计量为

$$t = \frac{\bar{X} - 10}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

给定显著性水平 $a = 0.05$, 使

$$P\{t \geq t_{0.05}(19)\} = 0.05$$

查 t 分布表得临界值为 $t_{0.05}(19) = 1.7291$ ，则得拒绝域为

$$[1.7291, +\infty)$$

根据样本观察值，经计算得样本均值为 $\bar{x} = 10.2$ ，样本标准差为 $s = 0.5099$ ，则 t 的观察值为

$$t = \frac{10.2 - 10}{0.5099 / \sqrt{20}} = \frac{0.2 \times \sqrt{20}}{0.5099} = 1.754$$

由于 $t = 1.754 > 1.7291$ ，即 t 的观察值落在拒绝域中，所以拒绝原假设，可以认为装配时间的均值显著地大于 10。

正态总体方差的假设检验

12. 某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005（欧姆）。今在生产的一批导线中取样品 9 跟，测得 $s = 0.007$ （欧姆），设总体为正态分布，参数均未知。问在水平 $\alpha = 0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

解 关于正态总体方差的假设检验。检验假设

$$H_0: \sigma \leq \sigma_0 = 0.005, H_1: \sigma > \sigma_0 = 0.005$$

因为样本提供的信息为 $s = 0.007$ ，强有力的支持备择假设，它的对立是原假设。用 X^2 检验法。

当原假设为真时，选取检验统计量服从 X^2 分布，即

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim X^2(n-1)$$

该统计量是样本的函数，不含任何未知参数。

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$ ，使

$$P\{X^2 \geq X_{0.05}^2(8)\} = 0.05$$

查 X^2 分布表得临界值为 $X_{0.05}^2(8) = 15.507$ ，则拒绝域为

$$[15.507, +\infty)$$

根据样本标准差 $s = 0.007, n = 9$ ，得 X^2 的观察值为

$$X^2 = \frac{8 \times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68$$

由于 $X^2 = 15.68$ 落在拒绝域中，所以拒绝原假设，可以认为这批导线的标准显著偏大。

关于总体标准差的假设检验，转化为方差的假设检验，得用 X^2 分布查表，其结论相同。

此题原假设 $H_0: \sigma \leq 0.005$ ，说明全部 σ 都比 H_1 中的要小，当 H_1 为真时 S^2 的观察值 s^2 往往偏大，对于某一常数 c ，拒绝为 $s^2 \geq c$ ，则

$$\begin{aligned} P\{\text{拒绝}H_0 | H_0 \text{为真}\} &= P_{\sigma \leq 0.005}\{S^2 \geq c\} \\ &= P_{\sigma \leq 0.005}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{(n-1)c}{\sigma_0^2}\right\} \\ &\leq P_{\sigma \leq 0.005}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)c}{\sigma_0^2}\right\} \end{aligned}$$

为了使

$$P\{\text{拒绝}H_0 | H_0 \text{为真}\} \leq a$$

只需令

$$P_{\sigma \leq 0.005}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)c}{\sigma_0^2}\right\} = a$$

而 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 服从 X^2 分布，查 X^2 分布表得 $\frac{(n-1)c}{0.005^2} = X_a^2(n-1)$ ，解出

$$c = \frac{0.005^2 X_a^2(n-1)}{(n-1)}, \text{ 即 } S^2 \geq \frac{0.005^2 X_a^2(n-1)}{(n-1)}. \text{ 拒绝域为}$$

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{0.005^2} \geq X_a^2(n-1)$$

给定显著性水平 $a = 0.05$ ，则拒绝域为 $\frac{(n-1)s^2}{0.005^2} \geq X_{0.05}^2(n-1)$ 。由此可见，检验假设

$H_0: \sigma \leq 0.005, H_1: \sigma > 0.005$ 与检验假设 $H_0: \sigma \leq 0.005, H_1: \sigma > 0.005$ 类似，有相同的拒绝域。

14. 测定某种溶液中的水份，它的 10 个测定值给出 $s = 0.037\%$ ，设测定值决体为正态分布， σ^2 为总体方差， σ^2 未知。试在水平 $a = 0.05$ 下检验假设

$$H_0: \sigma \geq 0.04\%, H_1: \sigma < 0.04\%$$

解 检验假设 $H_0: \sigma \geq 0.04\%, H_1: \sigma < 0.04\%$ 是单边假设检验问题，并与检验假设

$H_0: \sigma \geq 0.04\%, H_1: \sigma < 0.04\%$ 类似。用 X^2 检验法。检验假设

$$H_0: \sigma \geq \sigma_0 = 0.04\%, H_1: \sigma < \sigma_0 = 0.04\%$$

当原假设为真时，选取检验统计量为

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim X^2(n-1)$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$ ，使

$$P\{X^2 \leq X_{0.95}^2(9)\} = 0.05$$

查 X^2 分布表得临界值为 $X_{0.95}^2(9) = 3.325$ ，则拒绝域为 $(0, 3.325]$ 。

根据 $s = 0.037\%$ ， $n = 10$ ，计算检验统计量 X^2 的观察值为

$$X^2 = \frac{9 \times (0.037\%)^2}{(0.04\%)^2} = 7.701$$

由于 $X^2 = 7.701$ 不落在拒绝域中，所以接受原假设，可以认为 $\sigma \geq 0.04\%$ 。
