长沙理工大学

CHANGSHA UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

毕业设计（论文）

题目：　微分与积分中值定理“中间点”的渐近性探讨

学生姓名：谢松汕

学　　号：200664090225

班　　级：数学 06-02 班

专　　业：数学与应用数学

指导教师：王晓梅

2010 年 6 月

微分与积分中值定理“中间点”的渐近性探讨

学生姓名：谢松汕

学　　号：200664090225

班　　级：数学06-02班

所在院(系)：数学与计算科学学院

指导教师：王晓梅

完成日期：2010年6月

长沙理工大学

毕业设计（论文）任务书

数学与计算科学 学院 数学与应用数学 专业 06—02 班

题　目　微分与积分中值定理“中间点”的渐近性探讨

任务起止日期：2010 年 4 月 5 日——2010 年 6 月 25 日

学 生 姓 名　谢松汕　学 号　200664090225

指 导 教 师　王晓梅

教研室主任　　　　年　月　日审查

院　　长　　　　年　月　日批准

一、毕业设计（论文）任务

课题内容： （1） 研究微分中值定理中间点的单调性，连续性，可导性; （2） 研究微分中值定理中间点的渐近性; （3） 研究积分中值定理中间点的渐近性.
课题任务要求 1.目的：培养学生科学的思维方式，综合运用所学理论、知识和技能分析和解决实际问题的能力。 2.要求 （1）根据毕业论文任务书完成开题报告； （2）给出微分中值定理的中间点关于连续，单调，可导，渐近性的结论与证明； （3）给出微分与积分中值定理的中间点渐近性的结论与证明； （4）研究要系统、完整、科学、严谨； （5）按时完成毕业论文； （6）论文及相关材料符合“长沙理工大学毕业论文管理条例”和“数计学院毕业论文工作条例”..

课题完成后应提交的资料（或图表、设计图纸）

1. 规范的毕业设计（论文）一本（撰写规范见教务处网页）；

2. 任务书一份；

3. 开题报告（含文献综述）一份；

4. 译文（5000 字）及原文影印件各一份；

5. 论文电子文档[由学院收集保存]。

主要参考文献(≥12)

[1] 同济大学应用数学系，高等数学上册（第五版）[M]，北京，高等教育出版社，2002 年，223-266

[2] 同济大学应用数学系，高等数学下册（第五版）[M]，北京，高等教育出版社，2002 年，74-185

[3] 刘龙章等，再论微分中值定理“中间点”的性质[J]，大学数学，2007 年，Vol.23 No.4:163-166

[4] 胡晶地，中值定理“中间点”当 $x \to +\infty$ 时的渐进性态[J],张家口职业技术学院学报,2007 年, Vol.20 No.3:74-76

[5] 张小燕,王伟成,一类微分中值定理及其中间点的渐近性质[J],北京服装学院学报,2001 年, Vol.21 No.1:83-86

[6] 高国成，微分中值定理中间点的渐近性质[J],工科数学,2001 年, Vol.17 No.5:103-104

[7] 李文荣,关于中值定理中间点的渐近性质[J],数学的实践与认识,1985 年, Vol.2:53-57

[8] 刘昌盛，积分中值定理中间点的渐近性更一般结果[J],吉首大学学报,2006 年, Vol.27 No.3:8-11

[9] 方继光，积分中值定理中间点的渐近性[J],皖西学院学报,2003 年, Vol.19 No.2:19-21

[10]杨丽萍，关于积分中值定理的一个一般性结果[J], 数学的实践与认识,2002. Vol.4:698-700

[11] 张宝林,A Note On the Mean Value Theorem for Integrals[J],Amer.Math. Monthly,1997,Vol.104:561-562

[12] JACOBSON B. On the Mean Value Theorem for Integrals[J], Amer.Math. Monthly,1982,Vol.89:300-301

外文翻译文件（由指导教师选定）

Steven J.Leon, Linear Algebra with Applications 319-334

同组设计者

无

注：1. 此任务书由指导教师填写。如不够填写，可另加页。

2. 此任务书最迟必须在毕业设计（论文）开始前一周下达给学生。

3. 此任务书可从教务处网页表格下载区下载

二、毕业设计（论文）工作进度计划表

序号	毕业设计（论文）工作任务	工作进度日程安排																				
		周次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	搜集资料						一															
2	开题报告						一	一														
3	英文翻译						一	一														
4	撰写毕业论文								一	一	一	一	一	一	一	一	一					
5	中期检查												一									
6	毕业论文修改																	一				
7	毕业论文答辩																		一			
8	毕业论文资料整理																		一			
9																						
10																						

注：1. 此表由导师填写；
2. 此表每个学生人手一份，作为毕业设计（论文）检查工作进度之依据；
3. 进度安排请用“一”在相应位置画出。

三、学生完成毕业设计（论文）阶段任务情况检查表

时间	第　一　阶　段		第　二　阶　段		第　三　阶　段	
内容	组织纪律	完成任务情况	组织纪律	完成任务情况	组织纪律	完成任务情况
检查记录						
教师签字	签字　　　　日期		签字　　　　日期		签字　　　　日期	

注：1. 此表应由指导教师认真填写。阶段分布由各学院自行决定。

2. “组织纪律”一档应按《长沙理工大学学生学籍管理实施办法》精神，根据学生具体执行情况，如实填写。

3. “完成任务情况”一档应按学生是否按进度保质保量完成任务的情况填写。包括优点，存在的问题与建议

4. 对违纪和不能按时完成任务者，指导教师可根据情节轻重对该生提出忠告并督促其完成。

四、学生毕业设计（论文）装袋要求：

1. 毕业设计（论文）按以下排列顺序印刷与装订成一本（撰写规范见教务处网页）。

（1）封面	（2）扉 页
（3）毕业设计（论文）任务书	（4）中文摘要
（5）英文摘要	（6）目录
（7）正文	（8）参考文献
（9）致谢	（10）附录（公式的推演、图表、程序等）
（11）附件 1：开题报告（文献综述）	（12）附件 2：译文及原文影印件

2. 需单独装订的图纸（设计类）按顺序装订成一本。

3. 修改稿（经、管、文法类专业）按顺序装订成一本。

4.《毕业设计(论文)成绩评定册》一份。

5. 论文电子文档[由各学院收集保存]。

学生送交全部文件日期____________________

学生（签名）____________________

指导教师验收（签名）____________________

微分与积分中值定理“中间点”的渐近性探讨

摘要

关于微分与积分中值定理“中间点”的渐近性探讨，本论文先论述微分与积分中值定理的历史背景，再通过分析罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理以及第一积分中值定理和第二积分中值定理间各定理满足的的条件和结论。再总结其内在规律，并通过一些图形形象表达其几何意义。同时分析了微分与积分中值定理“中间点”单调性，连续性和可导性。然后由浅入深引出微分中值定理和积分中值定理的“中间点”的渐近性态。最后是结合例如李文荣《关于中值定理中间点的渐近性质》和高国成《微分中值定理中间点的渐近性质》等专家学者的著作做为基础，本论文主要分析了在区间长度趋于零时各类中值定理“中间点”的渐近性态。

关键词： 中值定理；中间点；渐近性态

PROBE THE MID-VALUE THEOREM AND INTEGRAL MEAN-VALUE THEOREM "HALF-WAY POINT" OF THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR

ABSTRACT

On differential and integral mean value theorem " half-way point " of the asymptotic nature, in this paper ， we first discusses the differential of mid-value theorem and the historical background of integral mean-value theorem, and then analyze the conditions and conclusions of Rolle's theorem, Lagrange's theorem, Cauchy's theorem，the first integral mean value theorem and the second integral mean value theorem.Furthermore,we summarize the law ,and according to some graphic images.We showed geometric significance.We also analyze the mid-value theorem and integral mean-value theorem " half-way point " of monotonicity, continuity and differentiability. Then we introduce the mid-value theorem and integral mean-value theorem " half-way point " of the asymptotic behavior. Finally, we mainly analyzed the various types of interval length tends to zero value theorem " half-way point " of the asymptotic behavior,these are based on a Search of Wen Rong Li’s "intermediate value theorem *half-way point* of the asymptotic behavior " and Guo Cheng Gao’s " mid-value theorem *half-way point* of the asymptotic behavior " and other experts

Key Words: median theorem; half-way point; asymptotic behavior

目录

1　绪论

由于解决实际问题的需要，人们引进了微分学和积分学的概念，并对它进行研究发展，使之成为一门系统化、全面化的理论。而且也随之成为解决实际问题中一种重要的工具之一，其应用也越来越广泛。

1.1 课题历史背景

微分中值定理，是微分学的核心定理，是研究函数的重要工具，是沟通函数与导数的桥梁，历来受到人们的重视。

微分中值定理有着明显的几何意义，以拉格朗日定理为例，它表明“一个可微函数的曲线段，必有一点的切线平行于曲线端点的弦。”从这个意义上来说，人们对微分中值定理的认识可以追溯到公元前古希腊时代，古希腊数学家在几何研究中，得到如下结论:“过抛物线弓形的顶点的切线必平行于抛物线弓形的底”。希腊著名数学家阿基米德（Archimedes，公元前 287—前 221）正是巧妙地利用这一结论，求出抛物线弓形的面积。意大利卡瓦列里（Cavalieri，1589—1674）在《不可分量几何学》（1635 年）的卷一中给出处理平面和立体图形切线的有趣引理，其中引理 3 用基于几何的观点也叙述了同样一个事实：曲线段上必有一点的切线平行于曲线的弦。这是几何形式的微分中值定理，被人们称为卡瓦列里定理。

人们对中值定理的研究，从微积分建立之始就开始了，按历史顺序：1637 年，著名法国数学家费马（Fermat，1601—1665）在《求最大值和最小值的方法》中给出了费马定理，在教科书中，人们通常将它作为微分中值定理的第一个定理。1691 年，法国数学家罗尔（Rolle，1652—1719）在《方程的解法》一文中给出多项式形式的罗尔定理。1797 年，法国数学家拉格朗日（Largrange，1736——1813）在《解析函数论》一书中给出拉格朗日定理，并给出最初的证明。对微分中值定理进行系统研究是法国数学家柯西（Cauchy，1789——1857）。他是数学分析严格化运动的推动者，他的三部巨著《分析教程》、《无穷小计算教程概论》、（1823 年）、《微分计算教程》（1829 年），以严格化为其主要目标，对微积分理论进行了重构。他首先赋予中值定理以重要作用，使其成为微分学的核心定理。在《无穷小计算教程概论》中，柯西首先严格的证明了拉格朗日定理。又在《微分计算教程》中将其推广为广义中值定理——柯西定理。从而发现了最后

一个微分中值定理。

1.2 目前国内外研究状况

目前关于微分与积分中值定理“中间点”的渐近性，已经有很多著名专家学者做了许多深入研究。例如在 1982 年 Azpeitja 研究了泰勒定理“中间点”的渐近性以及同年中著名数学家 JACOBSON B.撰写了《 On the Mean Value Theorem for Integrals. 》一书。在国内，对于微分与积分中值定理“中间点”的渐近性研究，也有非常多专家进行过研究。例如 1985 年，李文荣得到了柯西中值定理的“中间点”的渐近性，2001 年高国成分析了微分中值定理中间点的渐近性质，以及 2007 年胡晶地发表了关于中值定理“中间点”当 $x\to+\infty$ 时的渐近性态等等。

2 微分中值定理“中间点”渐近性分析

本章是要讨论微分中值定理及其“中间点”渐近性相关内容。主要讲了两个方面：第一节主要是讲述微分中值定理以及其单调性，连续性和可导性，然后由浅入深引出微分中值定理“中间点”的渐近性态的各种形式，第二节分析了各类微分中值定理“中间点”的渐近性态，并给出它们各自的证明方法。

2.1 微分中值定理基础知识[1]

微分中值定理是罗尔中值定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理的总称。不过微分中值定理不是一下子全部被人类认知，它的出现经历了一个过程，是众多数学家共同研究的成果。从费马定理到柯西中值定理，是一个逐步完善、不断向前发展的过程，而且随着相关数学理论知识的不断完善，微分中值定理也随之得以完整起来，证明方法也出现了多样化。这一节主要是讲述微分中值定理的三个公式及其几何意义，并且分析了微分中值定理“中间点”的单调性，连续性和可导性。

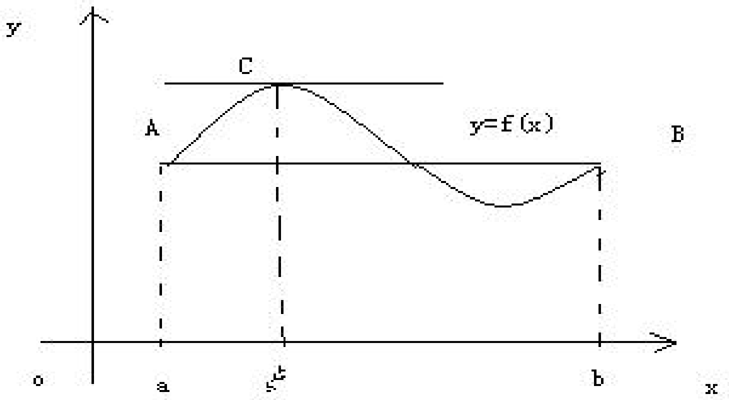
2.1.1 罗尔定理介绍[1]

定理 2.1（罗尔定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$f'(\xi)=0$$

在几何上，罗尔定理的条件表示，曲线弧 AB（方程为 $y=f(x)$）是一条连续的曲线弧，除端点外，处处有不垂直于 x 轴的切线，且两端点的纵坐标相等。而定理结论表明，AB 弧上至少有一点 C，曲线在该点切线是水平的，

几何意义如图【2.1.1】所示：



图【2.1.1】

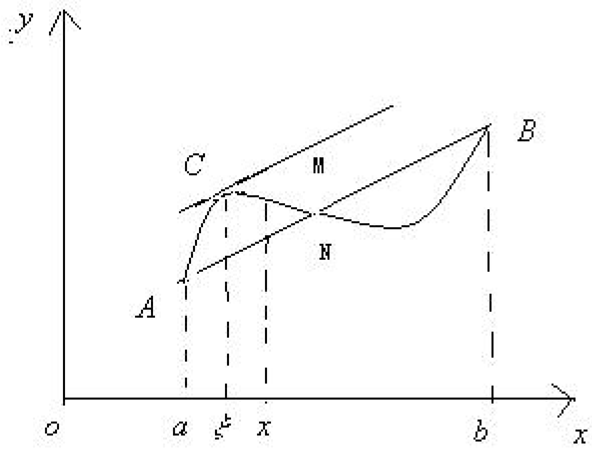
2.1.2 拉格朗日微分中值定理介绍[1]

在罗尔定理中，若取消 $f(a)=f(b)$ 这个条件，但仍保留其余两个条件，就得到微分学中十分重要的拉格朗日中值定理。

定理 2.2（拉格朗日中值定理） 如果函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，有

$$F(x)-F(a)=F'(\xi)(x-a) \tag{2-1}$$

定理的几何意义，如图【2.1.2】：



图【2.1.2】

2.1.3 柯西中值定理介绍[1]

定理 2.3（柯西中值定理） 若函数 $G(x)$、$F(x)$ 满足下述三个条件：

(i) $G(x)$、$F(x)$在 $[a,b]$ 连续；

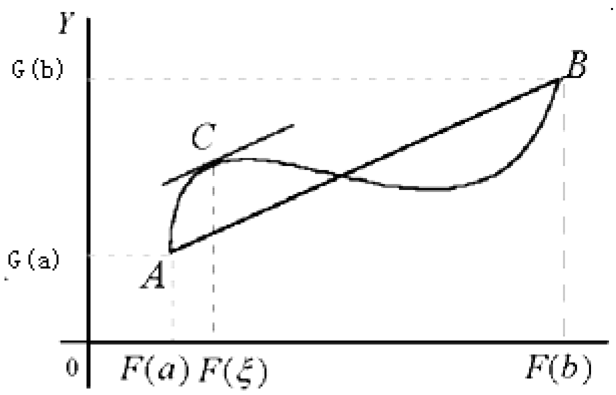
(ii) $G(x)$、$F(x)$在 (a,b) 可导；

(iii) $F'(x)\neq 0 \quad x\in(a,b)$，

则至少存在一点$\xi(a<\xi<b)$，有

$$\frac{G(b)-G(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{G'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{2-2}$$

柯西中值定理的几何意义如图【2.1.3】



图【2.1.3】

因为曲线上点(X,Y)处的切线斜率为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{G'(x)}{F'(x)}$$

弦AB的斜率为

$$\frac{G(b)-G(a)}{F(b)-F(a)}$$

假定点C对应于参数$x=\xi$，那么曲线C点处切线平行于弦AB，

于是得 $$\frac{G(b)-G(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{G'(\xi)}{F'(\xi)}$$

2.1.4 微分中值定理“中间点”的单调性，连续性与可导性

设函数$f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日微分中值定理中的条件，对于任意$x\in[a,b]$，则当a固定时．满足(2-1)式的“中间点”ξ随x而变化，并且具有下述性质．

定理2.4　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$f'(x)$在(a,b)内严格单调，则满足(2-1)式的点$\xi=\xi(x)$是x的单调增加的函数．

证：设$f'(x)$在(a,b)内单调增加(若$f'(x)$为单调减少类似可证)，对于任意$x_1,x_2\in(a,b)$且$x_1<x_2$有

$$f(x_2)-f(a)=f'(\xi(x_2))(x_2-a),$$

$$f(x_1)-f(a)=f'(\xi(x_1))(x_1-a),$$

所以有$f(x_2)-f(x_1)=[f'(\xi(x_2))-f'(\xi(x_1))](x_1-a)+f'(\xi(x_2))(x_2-x_1).$

又因为

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\eta)(x_2-x_1).,$$

由上两式得

$$[f'(\eta)-f'(\xi(x_2))](x_2-x_1)=[f'(\xi(x_2))-f'(\xi(x_1))](x_1-a) \tag{2-3}$$

其中

$$x_1<\eta<x_2,a<\xi(x_1)<x_1,a<\xi(x_2)<x_2,a<x_1<x_2<b$$

因为$f'(x)$单调增加，所以，$f'(\eta)>f'(\xi(x_1))$，则

$$[f'(\eta)-f'(\xi(x_2))](x_2-a)=f'(\eta)(x_2-x_1)+f'(\eta)(x_1-a)-f'(\xi(x_2))(x_2-a)$$

$$>f'(\eta)(x_2-x_1)+f'(\xi(x_1))(x_1-a)-f'(\xi(x_2))(x_2-a) \tag{2-4}$$

又因为
$$f'(\eta)(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1), \tag{2-5}$$

$$f'(\xi(x_1))(x_1-a)=f(x_1)-f(a) \tag{2-6}$$

$$f'(\xi(x_2))(x_2-a)=f(x_2)-f(a) \qquad (2-7)$$

所以将$(2-5)$ $(2-6)$ $(2-7)$代入$(2-4)$中可得

$$[f'(\eta)-f'(\xi(x_2))](x_2-a)>0$$

由于$(x_2-a)>0$，得$f'(\eta)-f'(\xi(x_2))>0$

再对比$(2-3)$可得到

$$f'(\xi(x_2))-f'(\xi(x_1))>0$$

由$f'(x)$的单调增加性可知，$\xi(x_2)>\xi(x_1)$.即定理得证。

定理 2.5　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，又设$f(x)$在(a,b)内具有二阶连续导数，且$f''(x)$在(a,b)内不变号，则

(i)　满足(2-1)式的点$\xi=\xi(x)$是x的连续函数；

(ii)　满足(2-1)式的点$\xi=\xi(x)$是x的可导函数，其导数为

$$\xi'(x)=\frac{f'(x)-f'(\xi(x))}{(x-a)f''(\xi(x))}$$

证：(i)由已知条件可得

$$f'(\xi(x))=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$f'(\xi(x+h))=\frac{f(x+h)-f(a)}{x+h-a}$$
$$f'(\xi(x+h))-f'(\xi(x))=\frac{(x-a)[f(x+h)-f(x)]-h[f(x)-f(a)]}{(x+h-a)(x-a)}$$

由定理 2.4 知$\xi=\xi(x)$为x的单调函数．当$h\neq0$时，有

$$f'(\xi(x+h))-f'(\xi(x))=f''(\eta)[\xi(x+h)-\xi(x)]$$

其中η介于$\xi=\xi(x+h)$与$\xi=\xi(x)$之间，从而有

$$\xi(x+h)-\xi(x)=\frac{(x-a)[f(x+h)-f(x)]-h[f(x)-f(a)]}{f''(\eta)(x+h-a)(x-a)}\to0 \qquad (h\to0).$$

故$\xi=\xi(x)$在(a,b)内连续.

(ii) $\xi'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\xi(x+h)-\xi(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x-a)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-[f(x)-f(a)]}{f''(\eta)(x+h-a)(x-a)}$

$$=\frac{(x-a)f'(x)-f(x)+f(a)}{f''(\xi(x))(x-a)^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi(x))}{(x-a)f''(\xi(x))}.$$

证明完毕。

例 2.1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二次可微分，且 $f''(x)>0$, 试证明函数

$$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi(x))$$

在开区间 (a,b) 内是单调增加的函数.

证：因为 $f(x)-f(a)=f'(\xi(x))(x-a) \quad (a<\xi(x)<x\le b)$, 于是

$$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi(x))$$

由定理 2.4 和定理 2.5 得知 $\xi=\xi(x)$ 是开区间 (a,b) 内的单调增加可导函数，即 $\xi'(x)>0$. 由复合函数求导法则，有

$$g'(x)=f''(\xi(x))\xi'(x).$$

又因为 $f''(x)>0, \xi'(x)>0$. 所以 $g'(x)=f''(\xi(x))\xi'(x)>0$,

故函数 $g'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在开区间 (a,b) 内单调增加.

证明完毕。

2.2 微分中值定理“中间点”的渐近性态分析

本文主要分析当区间长度趋于零时微分中值定理中间点的渐近性问题。

2.2.1 拉格朗日中值定理“中间点”的渐近性态[6]

定理 2.6 设 $F''(t)$ 在 $[a,x]$ 上存在，$F''(t)$ 在 a 点连续，而且 $F''(a)\neq 0$，$F'(a)=0$，则对于拉格朗日中值定理中的 $\xi\in(a,x)$，有

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

证明：令 $F'(x)=f(x)$，$x\geq a$，作辅助函数 $h(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$

一方面，由已知条件以及洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}h(x)&=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{2(x-a)}\\&=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to a}f'(x)\\&=\frac{1}{2}\cdot f'(a)\end{aligned}$$

另一方面，因为 $\xi\in(a,x)$，所以当 $x\to a$ 时，$\xi\to a$，由拉格朗日中值定理 $F(x)-F(a)=F'(\xi)(x-a)$ 以及洛必达法则，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}h(x)&=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}\\&=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{(x-a)^2}\\&=\lim_{x\to a}\frac{F'(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(\xi)}{x-a}\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}f'(\xi)\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}$$

$$=f'(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}$$

由于$F'(t)$在$[a,x]$上存在，$F'(t)$在a点连续，且$F'(a)\neq 0$。故由上两式得

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

定理 2.7　设函数$F(x)$在区间$[a,x]$内有直到n阶导数，$F^{(i)}(a)=0$ $(i=1,2,\cdots,n,n\geq 1)$，$F^{(n+1)}(x)$在点a处连续，$F^{(n+1)}(a)\neq 0$，则对于拉格朗日中值定理确定的$\xi\in(a,x)$，有

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

证明：　令$F'(x)=f(x)$ 作辅助函数$h(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^{n+1}}$

一方面，由已知条件以及通过洛必达法则，有

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n}$$

$$=\frac{1}{(n+1)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

另一方面，因为$\xi\in(a,x)$，所以当$x\to a$时，有$\xi\to a$。

由拉格朗日中值定理$F(x)-F(a)=F'(\xi)(x-a)$以及洛必达法则，

得

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^{n+1}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{(x-a)^{n+1}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{F'(\xi)(x-a)}{(x-a)^{n+1}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(\xi)}{(x-a)^n}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^n} \cdot \lim_{x \to a} \frac{(\xi - a)^n}{(x-a)^n}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \lim_{x \to a} \left(\frac{\xi - a}{x-a} \right)^n$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \lim_{x \to a} \left(\frac{\xi - a}{x-a} \right)^n$$

由于 $F^{(n+1)}(x)$ 在点 a 处连续， $F^{(n+1)}(a) \neq 0$。故由上两式得

$$\lim_{x \to a} \frac{\xi - a}{x-a} = \left(\frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

2.2.2 柯西中值定理“中间点”的渐近性态[6]

由柯西中值定理公式 $(2-2)$ 变形可得

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \qquad (2-8)$$

定理 2.8　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 的某邻域内有直到 n 阶导数,

（i）在点 a 的某去心邻域内 $g(x) \neq 0$；

（ii） $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) = 0$， $(i = 1, 2, \cdots, n-1, n \geq 1)$；

（iii） $f^{(n)}(x)$ 与 $g^{(n)}(x)$ 在点 a 处连续，且 $f^{(n)}(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g^{(n)}(a) \neq 0$，则对于柯西中值定理确定的数 $\xi \in (a, x)$，有

$$\lim_{x \to a} \frac{\xi - a}{x-a} = \left(\frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

证：由已知条件，我们可写 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的泰勒展开式

$$f(t) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + \theta_1(t)(t-a)^n,$$

$$g(t)=g(a)+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n+\theta_2(t)(t-a)^n$$

其中$\theta_1(t)$，$\theta_2(t)$在$[a,b]$上连续，且$\lim_{t\to a}\theta_{(i)}(t)=0 \quad (i=1,2).$

所以由上两式可得

$$f(\xi)=f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\xi-a)^n+\theta_1(\xi)(\xi-a)^n, \tag{2-9}$$

$$g(\xi)=g(a)+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(\xi-a)^n+\theta_2(\xi)(\xi-a)^n \tag{2-10}$$

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt&=\int_a^x f(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n+\theta_1(t)(t-a)^n dt\\&=f(a)(x-a)+\frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\int_a^x\theta_1(t)(t-a)^n dt\end{aligned} \tag{2-11}$$

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt&=\int_a^x g(a)+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n+\theta_2(t)(t-a)^n dt\\&=g(a)(x-a)+\frac{g^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\int_a^x\theta_2(t)(t-a)^n dt\end{aligned} \tag{2-12}$$

将式$(2-9)$—$(2-12)$代入$(2-8)$式，并化简，得

$$\begin{aligned}&f(a)[g(a)(x-a)+\frac{g^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\int_a^x\theta_2(t)(t-a)^n dt]\\&+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\xi-a)^n[g(a)(x-a)+\frac{g^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\int_a^x\theta_2(t)(t-a)^n dt]\\&+\theta_1(\xi)(\xi-a)^n[g(a)(x-a)+\frac{g^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\int_a^x\theta_2(t)(t-a)^n dt]\\&=g(a)[f(a)(x-a)+\frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\int_a^x\theta_1(t)(t-a)^n dt]\\&+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(\xi-a)^n[f(a)(x-a)+\frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\int_a^x\theta_1(t)(t-a)^n dt]\\&+\theta_2(\xi)(\xi-a)^n[f(a)(x-a)+\frac{f^{(n)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\int_a^x\theta_1(t)(t-a)^n dt]\end{aligned}$$

先将两边同时积分后，再将上式两边同除以$(x-a)^{n+1}$，并令$x\to a$，利用洛必达法则可推出

$$\frac{f^{(n)}(a)g\ (a)-f(a)g^{(n)}(a)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n)}(a)g(a)-f(a)g^{(n)}(a)}{(n)!}\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^n$$

因为

$$f^{(n)}(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g^{(n)}(a)\neq 0,$$

由此可得

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

定理 2.9 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 的某邻域内分别有直到 n 阶导数和 m 阶导数,

（i）在点 a 的某去心邻域内 $g(x)\neq 0$；

（ii）$f^{(i)}(a)=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1,n\geq 1)$ $g^{(j)}(a)=0\quad(j=1,2,\cdots,m-1,m\geq 1)$；

（iii）$f^{(n)}(x)$ 与 $g^{(m)}(x)$ 在点 a 处连续，且 $f^{(n)}(a)\cdot g^{(m)}(a)\neq 0$，

则当 $m\neq n$ 时，对于柯西中值定理确定的数 $\xi\in(a,x)$, 有

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

证明：作辅助函数 $h(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt}(x-a)^{m-n}$ 由已知条件以及洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}h(x)&=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt}(x-a)^{m-n}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^{n+1}}\cdot\frac{(x-a)^{m+1}}{\int_a^x g(t)dt}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n}\cdot\frac{(m+1)(x-a)^m}{g(x)}\\&=\frac{m+1}{n+1}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to a}f^{(n)}(x)}{n!}\cdot\frac{m!}{\lim\limits_{x\to a}g^{(m)}(x)}\\&=\frac{m+1}{n+1}\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{m!}{\lim\limits_{x\to a}g^{(m)}(x)}\\&=\frac{m+1}{n+1}\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{m!}{g^{(m)}(a)}\end{aligned}$$

因为 $\xi\in(a,x)$，所以当 $x\to a$ 时，$\xi\to a$，由柯西中值定理以及洛必达法则，

得

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{\int_a^x g(t)dt}(x-a)^{m-n}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}\cdot(x-a)^{m-n}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\cdot(x-a)^{m-n}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to a} f(\xi)}{(\xi-a)^n}\cdot\frac{(\xi-a)^m}{\lim\limits_{\xi\to a} g(\xi)}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n-m}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to a} f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{m!}{\lim\limits_{\xi\to a} g^{(m)}(\xi)}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n-m}$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{m!}{\lim\limits_{x\to a} g^{(m)}(\xi)}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n-m}$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\frac{m!}{g^{(m)}(a)}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n-m}$$

由于 $f^{(n)}(x), g^{(m)}(x)$ 分别在点 a 处连续，且 $f^{(n)}(a)\cdot g^{(m)}(a)\neq 0$。

故由上两式比较可得

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a} = \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

3 积分中值定理“中间点”渐近性分析

随着微分学的不断完善，与之相逆的积分学也开始发展起来，这也是为了解决实际问题的需要。而定积分最初的出现就是为了解决实际中那些计算一种和式极限的问题。与微分中值定理相对应，积分学中也相应有一套较为完善的积分中值定理理论，而且积分中值定理在积分学的地位与微分中值定理在微分学的地位应该是旗鼓相当的。

这一章本论文主要是探讨积分学中值定理的相关问题。主要讲述了四个方面的问题：本论文需要的有关积分中值定理的基本知识及其证明过程；推广的积分中值定理的研究；积分中值定理关于“中间点”的连续性和可导性；当区间长度趋于零情况下积分中值定理“中间点”的渐近性。

3.1 积分中值定理基础知识

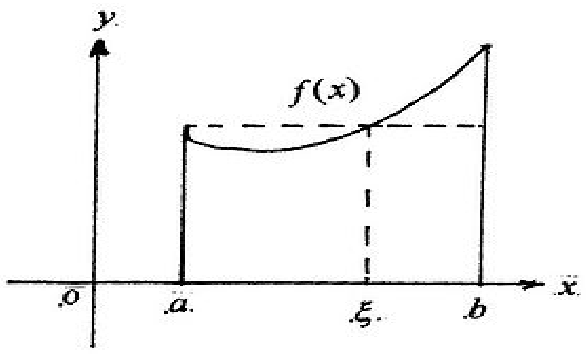
积分中值定理分为积分第一中值定理和积分第二中值定理，它们各包含两个公式。其退化状态均指在ξ的变化过程中存在一个时刻使两个图形的面积相等。

3.1.1 积分第一中值定理介绍[1]

定理 3.1（积分第一中值定理） 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

几何意义如图【3.11】所示



图【3.1.1】

证明：

由定积分性质知

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a) \qquad (3-1)$$

其中M,m分别是函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最大值和最小值。

把$(3-1)$式各除以$b-a$，得

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

这表明，确定的数值$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$介于函数$f(x)$的最小值$m$和最大值$M$之间。根据闭区间上连续函数的介值定理，在$[a,b]$上至少存在着一点$\xi$，使得函数$f(x)$在点$\xi$处的值与这个确定的数值相等，即有：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\xi) \qquad （a\le\xi\le b）$$

两端乘以$b-a$，即得所要证的等式。

说明：这里的ξ是在$[a,b]$上取值，实际上，也可以在开区间(a,b)的，即$\xi\in(a,b)$时，定理同样成立。现证明如下：

记$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\mu$，则$\int_a^b (f(x)-\mu)dx=0$

若$a<x<b$时$f(x)-\mu>(<)0$，则，$\int_a^b (f(x)-\mu)dx>(<)0$，均矛盾。

故有，$a<x_1,x_2<b$使，$f(x_1)\le\mu,f(x_2)\ge\mu$

故存在$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=\mu$。即$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

证明完毕。

定理 3.2（推广的积分第一中值定理）若函数$f(x)$与$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$g(x)$在$[a,b]$上不变号，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \qquad （a\le\xi\le b）$$

证明：因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)$在$[a,b]$上必有最大值M和最小值m，又由于$g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号，不妨设$g(x)\ge0$，$I=\int_a^b g(x)dx$，于是

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$$

从而

$$mI\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le MI \qquad (3-2)$$

若 I＝0，则由 $(3-2)$ 式知 $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，从而任取 $\xi\in(a,b)$ 均可以使等式成立。

现设 I>0，将 $(3-2)$ 式改为 $m\le\mu\le M$，其中

$$\mu=\frac{1}{I}\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{3-3}$$

如果 $\mu\in(m,M)$，则由连续函数的介值性必存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\mu$，从而等式得证。如果 $\mu=m$，则由于 $I=\int_a^b g(x)dx>0$，必存在 $[a_1,b_1]\subset(a,b)$ 使得恒有 $g(x)>0$，若不然，则在 (a,b) 的任何闭子区间上都有 ξ_i 使得 $g(\xi_i)=0$，依定积分定义便有 $I=\int_a^b g(x)dx=0$，这与 I>0 矛盾，由于 $\mu=m$，今改 $(3-3)$ 为

$$\int_a^b [f(x)-m]g(x)dx=0 \tag{3-4}$$

注意到 $[f(x)-m]g(x)\ge0$，必有

$$\int_{a_1}^{b_1}[f(x)-m]g(x)dx=0 \tag{3-5}$$

否则由 $\int_a^{a_1} g(x)dx>0$，$\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx>0$ 及 $\int_{b_1}^{b} g(x)dx>0$，

就有 $\int_a^b g(x)dx=\int_a^{a_1} g(x)dx+\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx+\int_{b_1}^{b} g(x)dx>0$，矛盾。

所以证得存在 $\xi\in[a_1,b_1]\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=m=\mu$。

若不然，则在 $[a_1,b_1]$ 上恒有 $f(x)-m>0$ 及 $g(x)>0$，从而 $[f(x)-m]g(x)>0$。故 $\int_{a_1}^{b_1}[f(x)-m]g(x)dx>0$，这与 $(3-5)$ 式矛盾。

同理可证 $\mu=M$ 的情形。总之，存在 $\xi\in(a,b)$ 使等式成立。

2.2.2 积分第二中值定理

定理 3.3（积分第二中值定理）若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 单调，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx+g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx$$

（i）若函数 $g(x)$ 单调递增，且不为负，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx \qquad \xi\in[a,b]$$

（ii）若函数 $g(x)$ 单调递减，且不为负，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx \qquad \xi \in [a,b]$$

证明：$\int_a^b f(x)g(x)dx = -g(x)\int_a^b f(\mu)\mu dx\Big|_a^b + \int_a^b g(x)dx\int_a^b f(\mu)\mu dx$

先假定 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，用分部积分公式，得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = -g(x)\int_a^b f(\mu)\mu dx\Big|_a^b + \int_a^b g(x)dx\int_a^b f(\mu)\mu dx$$

$$= \left(-g(b)+g(a)\right)\int_a^b f(\mu)\mu dx + \int_a^b g(x)dx\int_a^b f(\mu)\mu dx \qquad (3-6)$$

考虑到 $g(a)$，$g'(x)\geq 0$，$(3-6)$ 式右边不大于 $\left[g(a)+\int_a^b g(x)dx\right]M - g(b)M$

但也不小于 $\left[g(a)+\int_a^b g(x)dx\right]m - g(b)m$，因此可以找到 $\xi \in [a,b]$ 使得等式

$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx$ 成立；

现在，如果 $g(x)$ 是非负不减函数，一般说来它是间断的，那么它在 $[a,b]$ 上可积，并且存在着连续可导的非负不减函数序列 $\Re_n(x)$，有

$$\int_a^b |g(x)-\Re(x)|dx \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

根据已证明的事实，对任一 n，可以找到 $\xi_n \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\Re_n(x)dx = g(b)\int_{\xi_n}^b f(x)dx \qquad (3-7)$$

在序列 $\{\xi_n\}$ 的子列，但由于 $(3-7)$ 式右边的积分关于下限的连续性和下面事实成立：

$$\left|\int_a^b f(x)\Re_n(x)dx - \int_a^b g(x)f(x)dx\right| \leq K\int_a^b |\Re_n(x)-g(x)|dx \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

$|f(x)|\leq K$，令 $n\to\infty$，对 $(3-7)$ 式取极限即可，则定理得证。

3.1.3 积分中值定理“中间点”的连续性和可导性

设 $f(x)$，$g(x)$ 满足定理 3.2 的条件，$f'(x)$ 存在且不变号，当固定 a 时，ξ 的取值与 x 有关，记为：$\xi = \xi(x)$.

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,x]$ 上连续，$f(x)$ 在 $[a,x]$ 上存在一阶导数，且 $f(x)$ 的一阶导数不变号，$f(x)$ 在 $[a,x]$ 上不变号，则推广的积分中值定理中的“中间点”$\xi(x)$ 有如下性质

（i） $\xi(x)$ 在 (a,x) 上是连续；

（ii）$\xi(x)$在(a,x)上是x得可导函数，且其导函数为

$$\xi'(x)=\frac{f(x)g(x)-f(\xi(x))g(x)}{f'(\xi(x))\int_a^x g(t)dt}$$

证明： （i）由$f'(x)$在(a,b)不变号，知$f(x)$是(a,b)上的单值函数，$\xi(x)$也是单值函数。由条件知

$$\int_a^x f(t)g(t)dt=f(\xi(x))\int_a^x g(t)dt$$

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)g(t)dt=f(\xi(x+\Delta x)\int_a^{x+\Delta x} g(t)dt$$

两式相减得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)g(t)dt=(f(\xi(x+\Delta x)-f(\xi(x)))\int_a^{x+\Delta x} g(t)dt+f(\xi(x))\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt$$

由拉格朗日中值定理知

$$f(\xi(x+\Delta x)-f(\xi(x))=f'(\eta)(\xi(x+\Delta x)-\xi(x))$$

其中η位于$\xi(x)$和$\xi(x+\Delta x)$之间，则有

$$\xi(x+\Delta x)-\xi(x)=\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)g(t)dt-f(\xi(x))\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt}{f'(\eta)\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt} \qquad (3-8)$$

当$\Delta x\to 0,\xi(x+\Delta x)-\xi(x)\to 0$，从而$\xi(x)$是连续的。

（i）得证。

证明：（ii）由式$(3-8)$可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\xi(x+\Delta x)-\xi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)g(t)dt-f(\xi(x))\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt}{\Delta x f'(\eta)\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{f'(\eta)\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt}\left(\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)g(t)dt}{\Delta x}-f(\xi(x))\frac{\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt}{\Delta x}\right)$$

$$=\frac{f(x)g(x)-f(\xi(x))g(x)}{f'(\xi(x))\int_a^x g(t)dt}$$

结论（ii）得证。

注：由结论（i）可知，当$g(x)=1$时，即为第一积分中值定理的形式，此时

的ξ不仅连续而且可导，且其导数为

$$\xi'(x)=\frac{f(x)-f(\xi(x))}{f'(\xi(x))}$$

所以由上可得，在第一积分中值定理中，当$f(x)$存在一阶导，且一阶导在(a,x)上不变号，其他的条件保持不变时，其“中间点”$\xi=\xi(x)$是连续的和可导的。

3.2 积分中值定理“中间点”的渐近性态分析

在积分中值定理中，“中间点”的渐近性一般是因区间长度的不同而不同，不过主要是有两种情况，本节讨论当区间长度趋于零时情况下的积分中值定理“中间点”的渐近性。

3.2.1 积分中值定理中间点的渐近性分析

定理 3.4 （积分第一中值定理）如果$f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数，那么对于$\forall x\in(a,b)$，必存在$\xi_x\in(a,x)$使得

$$\int_a^x f(t)dt=f(\xi_x)(b-a) \tag{3-9}$$

定理 3.5 （推广的积分第一中值）设$f(x)$与$g(x)$是区间$[a,x]$上的连续函数，且对于$\forall t\in[a,x]$，$g(t)\geq 0$或$g(t)\leq 0$成立，那么必存在$\xi_x\in(a,x)$使得

$$\int_a^x f(t)g(t)dt=f(\xi_x)\int_a^x g(t)dt \tag{3-10}$$

定理 3.6[8] 设函数$f(x)$与$g(x)$满足推广的积分第一中值定理 3.5 的条件，$g(a)\neq 0$，且$g(x)$在(a,x)上不变号，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A$，这里$a>0$且$A\neq 0$，A 是常数。那么，公式$(3-10)$中的$\xi_x\in(a,x)$必然满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi_x-a}{x-a}=\frac{1}{2} \tag{3-11}$$

证明 ：假定$g(a)>0$且$g(t)\geq 0$，显然$\int_a^x g(t)dt>0$，作辅助函数有

$$h(x)=\frac{\int_a^x f(t)g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt}{(\int_a^x g(t)dt)^2}$$

根据洛必达法则，并对函数 $g(x)$ 使用公式 $(3-9)$，即由积分第一中值定理，有

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x)}{2\int_a^x g(t)dt \cdot g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{2g(\eta_x)} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}$$

$$= \frac{A}{2g(a)} \qquad (3-12)$$

另一方面，由定理 3.5，先对 $f(x)$ 使用公式 $(3-10)$ 以及对函数 $g(x)$ 使用公式 $(3-9)$，我们又得到

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)g(t)dt - f(a)\int_a^x g(t)dt}{(\int_a^x g(t)dt)^2}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(\xi_x)\int_a^x g(t)dt - f(a)\int_a^x g(t)dt}{(\int_a^x g(t)dt)^2}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(\xi_x) - f(a)}{\int_a^x g(t)dt}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{g(\eta_x)} \frac{f(\xi_x) - f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(\xi_x) - f(a)}{(\xi_x - a)g(\eta_x)} \frac{(\xi_x - a)}{(x-a)}$$

$$= \frac{A}{g(a)} \lim_{x\to a} \frac{(\xi_x - a)}{(x-a)} \qquad (3-13)$$

注：其中 $\eta_x \in (a,x)$，所以当 $x \to a$ 时，也有 $\eta_x \to a$。

比较 $(3-12)$ 和 $(3-13)$，我们有

$$\lim_{x\to a} \frac{\xi_x - a}{x-a} = \frac{1}{2}$$

从而公式 $(3-11)$ 成立。

定理 3.7[9] 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足推广的积分第一中值定理 3.5 的条件，且

$g(a)\neq 0$，$g(x)$ 在 (a,x) 上不变号，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=A$，这里 $a>0$ 且 $A\neq 0$，A 是常数。

那么，公式 $(3-10)$ 中的 $\xi_x\in(a,x)$ 必然满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \qquad (3-14)$$

证明 ：不失一般性，我们假定 $g(a)>0$ 且 $g(t)\geq 0$，显然 $\int_a^x g(t)dt>0$。

作辅助函数有

$$h(x)=\frac{\int_a^x f(t)g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt}{(\int_a^x g(t)dt)^{1+k}}$$

根据洛必达法则，并对函数 $g(x)$ 使用公式 $(3-9)$，我们有

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)}{(1+k)(\int_a^x g(t)dt)^k g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{(1+k)[g(\eta_x)]^k}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$$

$$=\frac{A}{(1+k)[g(a)]^k} \qquad (3-15)$$

另一方面，由定理 3.5，先对 $f(x)$ 使用公式 $(3-10)$ 并对函数 $g(x)$ 使用公式 $(3-9)$，我们又得到

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt}{(\int_a^x g(t)dt)^{k+1}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)\int_a^x g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt}{(\int_a^x g(t)dt)^{k+1}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{(\int_a^x g(t)dt)^k}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{[g(\eta_x)]^k}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{(x-a)^k}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{(\xi_x-a)^k[g(\eta_x)]^k}\frac{(\xi_x-a)^k}{(x-a)^k}$$

$$=\frac{A}{[g(a)]^k}\lim_{x\to a}\frac{(\xi_x-a)^k}{(x-a)^k} \tag{3-16}$$

注：其中$\eta_x\in(a,x)$，所以当$x\to a$时，也有$\eta_x\to a$。

比较$(3-15)$和$(3-16)$，同时因为$g(a)\neq 0$，我们有

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}$$

从而公式$(3-14)$成立。

定理 3.8 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在$x=a$处k阶可微，而且$f^{(i)}(a)=0$ $(i=1,2,\cdots,k-1,k\geq 1)$，$f^{(k)}(a)\neq 0$。如果$g(x)$满足定理 3.7 的条件，那么公式$(3-10)$中的$\xi_x$必满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}$$

证明：多次利用洛必达法则，我们有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{k(x-a)^{k-1}}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(k-1)}(x)-f^{(k-1)}(a)}{k!(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\neq 0$$

从而由定理 3.8 可得结论成立。

显然，定理 3.7 和定理 3.8 是比定理 3.5 更一般的结论。此外，定理 3.8 对在$x=a$处不可微的函数仍然有效。

例如，设$f(x)=(x-a)^{\alpha}$， $x\in[a,b],0<\alpha<1$，$g(x)$满足定理 3.8 的条件，那么公式$(3-14)$仍然成立。

结束语

各类中值定理是数学分析的核心之一，对其“中间点”的渐近性态的研究，问题虽然古老，但由于其对于数学和生活等各个方面都有其很重要的意义。

特别是微分中值定理，是沟通导数值与函数值之间的桥梁。以罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理组成的一组中值定理是一整个微分学的理论基础。拉格朗日中值定理，建立了函数值与导数值之间的定量联系，因而可用中值定理通过导数去研究函数的性态；中值定理的主要作用在于理论分析和证明；同时由柯西中值定理还可导出一个求极限的洛必达法则。中值定理的应用主要是以中值定理为基础，应用导数判断函数上升，下降，取极值，凹形，凸形和拐点等项的重要性态。从而能把握住函数图象的各种几何特征。而积分中值定理也是定积分的一个重要性质， 分为积分第一中值定理和积分第二中值定理，它们各包含两个公式。其退化状态均指在“中间点”的变化过程中存在一个时刻使两个图形的面积相等。其中积分第二中值定理与积分第一中值定理相互独立，却又是更精细的积分中值定理。它可以用来证明 Dirichlet-Abel 反常 Rieman 积分判别。积分中值定理建立了定积分与被积函数之间的关系， 从而使我们可以通过被积函数的性质来研究积分的性质， 有较高的理论价值和广泛的应用性。

人们对微分中值定理的研究,大约经历了二百多年的时间.从费马定理开始,经历了从特殊到一般,从直观到抽象,从强条件到弱条件的发展阶段.人们正是在这一发展的过程中,逐渐认识到微分中值定理的普遍性.微分中值定理的形成历史和发展过程深刻的揭示了数学发展是一个推陈出新,吐故纳新的过程,是一些新的有力工具和更简单方法的发现与一些陈旧的,复杂的东西被抛弃统一的过程.正像龚异先生指出的:″数学中每一步真正的发展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着,这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论并把陈旧,复杂的东西抛到一边.数学科学发展的这种特点是根深蒂固的.″

参 考 文 献

[1] 同济大学应用数学系，高等数学上册（第五版）[M]，北京，高等教育出版社，2002年，223-266

[2] 同济大学应用数学系，高等数学下册（第五版）[M]，北京，高等教育出版社，2002年，74-185

[3] 刘龙章等，再论微分中值定理“中间点”的性质[J]，大学数学，2007年，Vol.23 No.4:163-166

[4] 胡晶地，中值定理“中间点”当$x\to+\infty$时的渐近性态[J],张家口职业技术学院学报,2007年, Vol.20 No.3:74-76

[5] 张小燕，王伟成,一类微分中值定理及其中间点的渐近性质[J],北京服装学院学报,2001年, Vol.21 No.1:83-86

[6] 高国成，微分中值定理中间点的渐近性质[J],工科数学,2001年, Vol.17 No.5:103-104

[7] 李文荣，关于中值定理中间点的渐近性质[J],数学的实践与认识,1985年, Vol.2:53-57

[8] 刘昌盛，积分中值定理中间点的渐近性更一般结果[J],吉首大学学报,2006年, Vol.27 No.3:8-11

[9] 方继光，积分中值定理中间点的渐近性[J],皖西学院学报,2003年, Vol.19 No.2:19-21

[10]杨丽萍，关于积分中值定理的一个一般性结果[J], 数学的实践与认识,2002. Vol.4:698-700

[11] 张宝林,A Note On the Mean Value Theorem for Integrals[J],Amer.Math. Monthly,1997,Vol.104:561-562

[12] JACOBSON B. On the Mean Value Theorem for Integrals[J], Amer.Math. Monthly,1982,Vol.89:300-301

致　　谢

首先，感谢我含辛茹苦的父母，没有他们支持，我不可能完成大学的学业。

本论文是在我的导师王晓梅老师的精心指导和悉心关怀下完成的，在这份毕业论文中无不倾注着导师辛勤的汗水和心血。在我写毕业论文的整个过程中，导师不时的对我进行认真指导，细细讲解，并给出了相当多的建议。导师的严谨治学态度、渊博的知识、无私的奉献精神、孜孜不倦的教诲使我深受的启迪。从尊敬的导师身上，我不仅学到了扎实、宽广的专业知识，也学会了怎样去查阅资料、充分利用文献，以及怎么组织资料的能力，同时也充分感受到了导师那种严谨治学、一丝不苟的钻研态度，这种态度对我的日常生活也有很大的启示。在此我要向我的导师致以最衷心的感谢和深深的敬意。

并且，向所有在毕业设计过程中关心和帮助过我的老师、同学表示由衷的谢意！没有你们无私的帮助，我也不可能完成整个毕业设计以及论文的写作。真心谢谢你们。

衷心地感谢在百忙之中评阅论文和参加答辩的各位老师、教授！

谢松汕

2010 年 6 月

长沙理工大学

毕业设计(论文)开题报告

题目： 微分与积分中值定理“中间点”的渐近性探讨

课 题 类 别： 设计 □ 论文 □

学 生 姓 名： 谢松汕

学 号： **200660090225**

班 级： 数学 **06-2** 班

专业（全称）： 数学与应用数学

指 导 教 师： 王晓梅

2010 年 **4** 月

一、本课题设计（研究）的目的：

培养学生科学的思维方式，综合运用所学理论、知识和技能分析和解决实际问题的能力，是学生毕业前全面素质教育的重要实践训练。

二、设计（研究）现状和发展趋势（文献综述）：

微分中值定理有着明显的几何意义，以拉格朗日定理为例，它表明“一个可微函数的曲线段，必有一点的切线平行于曲线端点的弦。”从这个意义上来说，人们对微分中值定理的认识可以上溯导公元前古希腊时代，古希腊数学家在几何研究中，得到如下结论：“过抛物线弓形的顶点的切线必平行于抛物线弓形的底”。希腊著名数学家阿基米德（Archimedes，公元前 287—前 221）正是巧妙地利用这一结论，求出抛物线弓形的面积。意大利卡瓦列里（Cavalieri，1589—1674）在《不可分量几何学》（1635 年）的卷一中给出处理平面和立体图形切线的有趣引理，其中引理 3 用基于几何的观点也叙述了同样一个事实：曲线段上必有一点的切线平行于曲线的弦。这是几何形式的微分中值定理，被人们称为卡瓦列里定理。

人们对微分中值定理的研究，从微积分建立之始就开始了，按历史顺序：1637 年，著名法国数学家费马（Fermat，1601—1665）在《求最大值和最小值的方法》中给出了费马定理，在教科书中，人们通常将它作为微分中值定理的第一个定理。1691 年，法国数学家罗尔（Rolle，1652—1719）在《方程的解法》一文中给出多项式形式的罗尔定理。1797 年，法国数

学家拉格朗日（Largrange，1736——1813）在《解析函数论》一书中给出拉格朗日定理，并给出最初的证明。对微分中值定理进行系统研究是法国数学家柯西（Cauchy，1789——1857）。他是数学分析严格化运动的推动者，他的三部巨著《分析教程》、《无穷小计算教程概论》、（1823 年）、《微分计算教程》（1829 年），以严格化为其主要目标，对微积分理论进行了重构。他首先赋予中值定理以重要作用，使其成为微分学的核心定理。在《无穷小计算教程概论》中，柯西首先严格的证明了拉格朗日定理。又在《微分计算教程》中将其推广为广义中值定理——柯西定理。从而发现了最后一个微分中值定理。

目前关于微分与积分中值定理“中间点”的渐近性，已经有很多著名专家学者做了许多深入研究。例如在1982年Azpeitja研究了泰勒定理“中间点”的渐近性．1985年，李文荣得到了柯西中值定理的“中间点”的渐近性，2001年高国成分析了微分中值定理中间点的渐近性质，以及2007年胡晶地发表了关于中值定理“中间点”当$x \to +\infty$时的渐进性态等等。而关于一元函数微分中值定理“中间点”的渐近性问题已有诸多结论，但对多元函数中值定理“中间点”的渐近性研究相对较少。近年来，人们不断深入研究它的逆问题及其“中间点”的渐近性，例如中值定理的中间点在积分区间长度趋于零和趋于无穷大时的渐近性等。

三、设计（研究）的重点与难点，拟采用的途径（研究手段）：

本设计研究的重点主要给出微分与积分中值定理的中间点关于连续，单调，可导，渐近性的结论与证明。难点是关于多元函数中值定理“中间点”的渐近性研究，以及关于区间长度趋于零和长度趋于无穷大时各类中值定理“中间点”的渐近性态的研究。并且在最后对中值定理中间点的渐近性质进行推广。

采用的途径可以先提出一些预备知识及历史背景。总结微分与积分中值定理的中间点的联系。通过分析罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理、泰勒定理以及第一积分中值定理和第二积分中值定理间各定理满足的的条件和结论总结其内在规律，还可以通过引用一些经典例题和图形使论文更为形象清晰。最后是结合例如李文荣《关于中值定理中间点的渐近性质》和胡晶地《中值定理“中间点”当$x\to+\infty$时的渐进性态》等专家学者的著作来论述在区间长度趋于零和长度趋于无穷大时各类中值定理“中间点”的渐近性态，以及结合其专家的结论对中值定理中间点的渐近性质进行推广。

四、设计（研究）进度计划：

本次毕业论文设计将从本学期第5周开始。

第5周：搜集资料。

第5，6周：英文翻译，写出开题报告。

第7周 至 第15周：撰写毕业论文。

第11周：进行毕业论文中期检查。

第16周：毕业论文修改。

第17周：进行毕业论文答辩，毕业论文资料整理。

主要参考文献(≥12)

[1] 同济大学应用数学系，高等数学上册（第五版）[M]，北京，高等教育出版社，2002年，223-266

[2] 同济大学应用数学系，高等数学下册（第五版）[M]，北京，高等教育出版社，2002年，74-185

[3] 刘龙章等，再论微分中值定理“中间点”的性质[J]，大学数学，2007年，Vol.23 No.4:163-166

[4] 胡晶地，中值定理“中间点”当$x\to+\infty$时的渐进性态[J],张家口职业技术学院学报,2007年, Vol.20 No.3:74-76

[5] 张小燕，王伟成,一类微分中值定理及其中间点的渐近性质[J],北京服装学院学报,2001年, Vol.21 No.1:83-86

[6] 高国成，微分中值定理中间点的渐近性质[J],工科数学,2001年, Vol.17 No.5:103-104

[7] 李文荣，关于中值定理中间点的渐近性质[J],数学的实践与认识,1985年, Vol.2:53-57

[8] 刘昌盛，积分中值定理中间点的渐近性更一般结果[J],吉首大学学报,2006年, Vol.27 No.3:8-11

[9] 方继光，积分中值定理中间点的渐近性[J],皖西学院学报,2003年, Vol.19 No.2:19-21

[10]杨丽萍，关于积分中值定理的一个一般性结果[J]，数学的实践与认识,2002. Vol.4

:698-700

[11] 张宝林,A Note On the Mean Value Theorem for Integrals[J],Amer.Math. Monthly,1997,Vol.104:561-562

[12] JACOBSON B. On the Mean Value Theorem for Integrals[J], Amer.Math. Monthly,1982,Vol.89:300-301

指导教师意见   签名：＿＿＿＿＿＿＿＿ 月　　日
教研室（学术小组）意见   教研室主任（学术小组长）（签章）： 月 日

应用 1 结构学——梁的弯曲

对于物理中特征值问题的例子，考虑一个梁的问题，如果在梁的一段施加一个外力或荷载，当我们增加荷载使得它达到临界值时，梁将会弯曲，如果继续增加荷载，使得它超过这个临界值并到达第二个临界值，这梁将再次弯曲，依此类推，假设梁的长度为 L,并将它放置在一个左端固定在 $x=0$ 点的平面上，

令 $y(x)$ 表示梁上任意点 x 处的垂直位移，并假设梁仅受支撑力；也就是说，

$$y(0)=y(L)=0 \quad \text{(见图 6.1.1)。}$$

这个梁的物理系统模型，可以化为边值问题

$$R\frac{d^2y}{dx^2}=-Py \qquad y(0)=y(L)=0 \tag{3}$$

其中 R 为梁的抗弯刚度，P 为梁上的荷载。求解 $y(x)$ 的标准方法是使用有限差分法逼近微分方程。特别的，将区间 $[0,L]$ 划分为 n 个相等的子区间

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=L \quad (x_j=\frac{jL}{n}, j=0,\cdots,n)$$

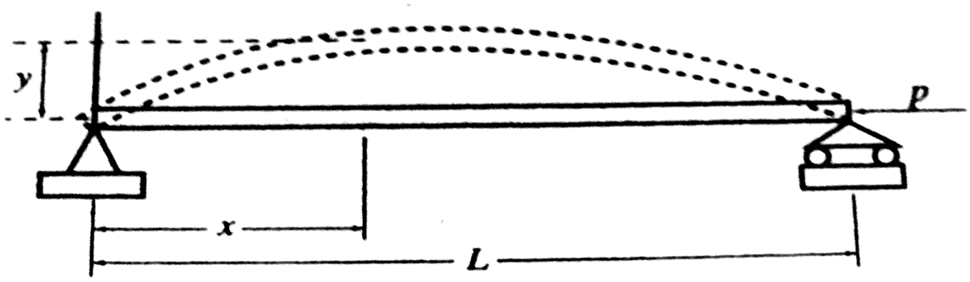


图 6.1.1

且对每一 j，我们用差商近似。若令 $h=\frac{L}{n}$，且使用记号 y_k,简记 $y(x_k)$，则标准差分逼近为

$$y''(x_j)\approx\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}, j=1,\cdots,n$$

将它们代人方程(3),最终可以得到一个有 n 个线性方程的方程组，若将每一方程乘以 $-\frac{h^2}{R}$，并令 $\lambda=\frac{Ph^2}{R}$，则方程组可以写为形如 Ay=λy 的矩阵方程，

其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

这个矩阵的特征值将为实的，且为正的。（见本章最后的 MATLAB 练习 24.）对充分大的n，A的每一特征值λ可用于逼近出现弯曲的临界荷载$p=\frac{P\lambda}{h^2}$。对应于最小特征值的临界荷载是一个最重要的荷载，因为事实上当荷载超过这个值时，梁将折断。

复特征值λ

如果A为一实元素的$n\times n$矩阵，则A的特征多项式将有实系数，因此它所有的复根必然为共轭对。于是，若$\lambda=a+bi(b\neq 0)$为A的一个特征值，则 $\bar{\lambda}=a-bi$必然也是A的一个特征值。此处$\bar{\lambda}$用来表示λ的复共轭，一个类似的符号可以用于矩阵。若$A=(a_{ij})$为一个有复元素的矩阵则$\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$是对A的每一元素取共轭的符号构成的矩阵。我们定义，一个实矩阵满足性质$\bar{A}=A$的矩阵。一般的，若A和B为有复元素的矩阵，且乘法AB是可行的，则$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$（见练习 17）

不仅仅一个实矩阵的复特征值成对出现，它的特征向量也是如此。事实上，若$\bar{A}$为一实的$n\times n$矩阵A的复特征值，且 z 为对应于λ的一个特征向量，则

$$A\bar{z}=\bar{A}\bar{z}=\overline{Az}=\overline{\lambda z}=\bar{\lambda}\bar{z}$$

因此，$\bar{z}$为A的对应于$\bar{\lambda}$的特征向量。例 5 中求得特征值$\lambda=1-2i$的特征向量$z=(1,i)^T$且求得$\bar{\lambda}=1-2i$的特征向量为$\bar{z}=(1,i)^T$ 。

特征值的乘积与和

容易求得一个$n\times n$矩阵 A 的特征值的和与乘积。若$p(\lambda)$为A的特征多项式，则

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{4}$$

按照第一列进行展开，我们得到

$$\det(A-\lambda I)=(a_{11}-\lambda)\det(M_{11})+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1})$$

其中子式$M_{i1}(i=2,\cdots,n)$不包含两个对角元素$(a_{11}-\lambda)$及$(a_{ii}-\lambda)$。将$\det(M_{11})$采用相同的方法展开，我们得到

$$(a_{11}-\lambda)\,(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{ii}-\lambda) \tag{5}$$

是$\det(A-\lambda I)$的展开式中唯一包含多于的对角元素的项。当(5)展开后,λ^{n}的系数将为$(-1)^{n}$，因此，$p=(\lambda)$的首系数为$(-1)^{n}$，若$\lambda_{1,}\lambda_{2}\cdots\lambda_{n}$为$A$的特征值，则$p(\lambda)=(-1)^{n}(\lambda-\lambda_{1})(\lambda-\lambda_{2})\cdots(\lambda-\lambda_{n})$

利用(4)和(6)可得

$$\lambda_{1,}\lambda_{2}\cdots\lambda_{n}=P(0)=\det(A) \tag{6}$$

由(5)还可以看到的$(-\lambda)^{n-1}$系数为$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$。若用(6)求相同的系数，可得到$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}$。由此

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}=\sum_{i=i}^{n}a_{ii}$$

A的对角线元素的和称为A的迹，并记为$tr(A)$。

例 6 若

$$A=\begin{bmatrix}5 & -18\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

则有

$$Det(A)=5+18=13\text{ 和 }tr(A)=5-1=4$$

A 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -18\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^{2}-4\lambda+13$$

由此有 A 的特征值为$\lambda_{1}=2+3i$和$\lambda_{2}=2-3i$。注意

$$\lambda_{1}+\lambda_{2}=4=tr(A)$$

且

$$\lambda_1\lambda_2 = 13 = \det(A)$$

在前面介绍的例子中，n总是不超过 4.对较大的n，求特征多项式的根很困难。在第七章中，我们将学习求特征值的数值方法。(这些方法实际上不使用特征多项式）若A的特征值已经通过使用某数值方法求得，则验证它们的精确度的方法就是计算它们的和，并与A的迹进行比较。

相似矩阵

我们将用一个有关相似矩阵特征值的重要结论来结束本节。回顾一下，对矩阵A和B，若存在一个非奇异矩阵 S,使得$B = S^{-1}AS$，则称矩阵B相似于矩阵A

定理 6.1.1 令A和B为$n\times n$矩阵，若B和A相似，则这两个矩阵有相同的特征多项式，且相应的它们有相同的特征值。

证：令$p_A(\lambda)$和$p_B(\lambda)$分别表示A和B的特征多项式。若B相似于A,则存在一个非奇异矩阵 S 使得$B = S^{-1}AS$。因此

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(b-\lambda I) \\ &= \det(S^{-1}AS-\lambda I) \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

一个矩阵的特征值的特征多项式的根。因为两个矩阵有相同的特征多项式，所以它们必有相同的特征值。

给定

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{和} S = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

容易看到 T 的特征值为$\lambda_1 = 2$和$\lambda_2 = 3$。若令$A = S^{-1}TS$，则A的特征值应当和T的特征值相等。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

我们留给读者验证这个矩阵的特征值为$\lambda_1 = 2$和$\lambda_2 = 3$.

练习

1. 求下列的矩阵的特征值和对应的特征空间。

$(a)\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}$　$(b)\begin{bmatrix}6 & -4\\3 & -1\end{bmatrix}$　$(c)\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$

$(d)\begin{bmatrix}3 & -8\\2 & 3\end{bmatrix}$　$(e)\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{bmatrix}$　$(f)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$(g)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　$(h)\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 5 & -1\end{bmatrix}$　$(i)\begin{bmatrix}4 & -5 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

$(j)\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$　$(k)\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$　$(l)\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\4 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

2. 证明三角形矩阵的特征值为矩阵的对角元素。
3. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵。证明 A 为奇异的，当且仅当 $\lambda = 0$ 为 A 的一个特征值。
4. 令 A 为一非奇异的矩阵，并令 λ 为 A 的特征值。证明 $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的 特征值。
5. 令 λ 为 A 为一非奇异的矩阵，并令 x 为对应于的特征向量。用数学归纳法证明，对 $m=1,2,\cdots n$，λ^m 为 A^m 的一个特征值，且 x 为 A^m 的一个对应于 λ^m 的特征向量。
6. 若一个 $n\times n$ 矩阵 A 满足 $A^2 = A$，则称它为幂等的。证明:若 λ 为一幂等矩阵的特征值，则 λ 必为 0 或 1.
7. 若一个 $n\times n$ 矩阵 A 满足，对某正整数 k，$A^k = 0$,则称它为幂零的，证明一个幂零矩阵的所有特征值均为 0.
8. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵并令 $B = A - aI$，其中 a 为标量。比较 A 和 B 的特征值有什么结论？试说明。
9. 证明 A 和 λ 有相同的特征值。它们是否有相同的特征向量？试说明。
10. 证明矩阵 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 在 θ 不是 π 的倍数时，将有复特征值，给出结果的几何解释。

11. 令 A 为一 2×2 矩阵。若 $tr(A)=8$,且 $\det(A)=12$ ， A 的特征值是什么？

12. 令 $A=(a_{ij})$ 为一 $n\times n$ 矩阵，其特征值为 $\lambda_{1,}\lambda_2\cdots.\lambda_n$ 。证明

$$\lambda_j = a_{jj} + \sum_{i\neq j}(a_{ii}-\lambda_i), \qquad j=1,2,\cdots n$$

13. 令 A 为一 2×2 矩阵。并令 $p(\lambda)=\lambda^2+b\lambda+c$ 为 A 的特征多项式。

证明 $b=tr(A)$ 和 $c=\det(A)$

14. 令 λ 为 A 的一个非零特征值，并令 X 为 一对应于 λ 的特征向量，证明:

$M=1,2\cdots m$ ， A^m 也是对应于 λ 的特征向量。

15. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，并令 λ 为 A 的一个特征值。若 $A-\lambda I$ 的秩为 k ，则相应于 λ 的特征空间的维数是多少？试说明。

16. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵,证明一个 R^n 中的向量 x 为对应于 A 的特征向量，当且仅当有 x 和 Ax 张成的 R^n 的子空间 S 的维数为 1

17. 令 $\alpha=a+bi$ 和 $\beta=c+di$ 为复标量，并令 A 和 B 为有复元素的矩阵。

(a) 证明 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 和 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$;

(b) 证明 $\overline{AB}$ 的第 (i,j) 元素和 $\overline{A}\,\overline{B}$ 的第 (i,j) 元素相等，且因此

$$\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$$

18.令 $\chi_1\cdots\chi_2$ 为一 $n\times n$ 矩阵 A 的特征向量，并令 S 为由 $\chi_1\cdots\chi_2$ 张成的 R^n 的子空间。证明 S 在 A 下是不变的（也就是说，证明：若 $x\in S$ 则 $Aa\in S$ ）

19.令 $B=S^{-1}AS$ ，并令 x 为 B 的一个对应于 λ 特征值的特征向量。证明 S 为 A 的一个对应于 λ 的特征向量。

20.证明：若两个 $n\times n$ 矩阵 A 和 B 由一公共的特征向量 x ,(但不一定由公共的特征值),则 x 将是任何形如 $C=\alpha A+\beta B$ 的矩阵的一个特征向量。

21.令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，并令 A 的非零特征值。证明：若 x 为一对应于 λ
的特征向量，则 x 在 A 的列空间中。因此，对应于 λ 的特征空间为 A 的列空间的一个子空间。

22.令 $\{u_{1,}u_2.....u_n\}$ 为 R^n 的一组规范正交基，并令 A 是秩为 1 的矩阵 $u_1u_1^Tu_2u_2^T\cdots u_nu_n^T$ 的一

个线性组合。若 $A=C_1u_1u_1^T+C_2u_2u_2^T+\cdots+C_nu_nu_n^T$

证明：A为一对称矩阵，其特征值为$c_1,c_2,\cdots,c_n$，且对每一i，u_i是一个对应于c_i的特征向量。

23.令A为一矩阵，其各列元素之和等于一个固定常数δ。证明$c_1,c_2\cdots,c_n$为A的一个特征值。

24.令λ_1和λ_2为A的不同特征值。令x为A的一个对应于λ_1的特征向量，并令y为A^T的一个对应于λ_2的特征向量。证明x和y是正交的。

25.令A和B为$n\times n$矩阵。

证明:

（a）若λ为AB的一个非零特征值，则它也是AB的一个特征值；

（b）若$\lambda=0$为AB的一个特征值，则$\lambda=0$也是BA的一个特征值。

26.证明不存在$n\times n$矩阵A和B,使得

$$AB-BA=I$$

(提示：见练习 8 和 25.)

27.令为次数$n\geq1$的多项式，并令$c=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

（a）证明；若λ_i为$p(\lambda)=0$的一个根，则λ为一对应于C的特征向量$p(\lambda)$的特征值。

（b）用(a)的结论证明；若$p(\lambda)$由n个不同的根，则λ是 C 的特征多项式。矩阵 C 称为$P(\lambda)$的友矩阵。

28.练习 27(b)中的结论即使在$P(\lambda)$的所有特征值并非全不同的情况下也是成立的。证明如下；

（a）令 $D_m(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

使用数学归纳法证明

$$\det(D_m(\lambda))=(-1)^m(a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda\ +a_0)$$

（b）证明

$$\det(D-\lambda I)=(a_{n-1}-\lambda)(-\lambda)^{n-1}-\det(D_{n-2})=p(\lambda)$$

2 线性代数方程组

特征值在求解线性微分方程组的过程中扮演了一个重要的角色。本节将讨论它们是如何用于解常系数的线性微分方程组的。首先考虑一阶方程组。

$$y'_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n$$

$$y'_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$y'_n=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n$$

其中对每一i，$y_i=f_i(t)$为一个$C^1[a,b]$的函数，若令

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad 且\ Y'=\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$$

则方程组可写为 $Y'=AY$

Y和Y'均为t的函数，我们首先考虑最简单的情况。当$n=1$时，方程组简化为$y'=ay$

显然，任何形如

$$y(t)=ce^{at} \qquad （c为任意常数）$$

的函数均满足方程(1) 当 n>1 时，一个自然的推广是取

$$Y=\begin{bmatrix} x_1e^{\lambda t} \\ x_2e^{\lambda t} \\ \vdots \\ x_ne^{\lambda t} \end{bmatrix}=xe^{\lambda t} \tag{1}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$。为验证这种形式的向量函数是可行的，

我们计算导数

$$Y'=x\lambda e^{\lambda t}=\lambda Y$$

现在，如果我们选择 λ 为 A 的一个特征值，且 x 为对应于 λ 的特征向量，则 $xe^{\lambda t}$ 为方程组 $Y'=AY$ 的一个解，

因为

$$\begin{aligned}(aY_1+\beta Y_2)' &= aY'_1+\beta Y'_2 \\ &= aAY_1+\beta AY_2 \\ &= A(aY_1+\beta Y_2)\end{aligned}$$

利用归纳法可得,若 $Y_1\cdots Y_n$ 为 $Y'=AY$ 的解,则任意线性组合 $c_1Y_1+\cdots+c_nY_n$ 也将是一个解。

一般的，形如 $Y'=AY$ 的 $n\times n$ 一阶方程组的解，将构成所有连续向量值函数的向量空间的一个子空间。此外，如果我们要求 $Y(t)$ 在 $t=0$ 时取预先给定的值 Y_0，则一个经典的微分方程定理保证了这个问题将有一个惟一解，形如

$$Y'=AY,\quad Y(0)=Y_0$$

的问题称为初值问题。

a) 解方程组

$$y_1'=3y_1+4y_2$$

$$y'_2=3y_1+2y_2$$

解：

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

的特征值为 λ_1=1 及 $\lambda_2=-1$，分别取 $\lambda=\lambda_1$ 和 $\lambda=\lambda_2$

求解 $(A-\lambda I)=0$ 得到 $x_1=(4,3)^T$ 为对应于 λ_1 的一个特征向量，且 $x_2=(1,-1)^T$ 为对应

于λ_2的一个特征向量。因此，任何形如

$$Y = c_1 x_1 \lambda e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2 = \begin{bmatrix} 4c_1 e^{6t} + c_2 e^{-t} \\ 3c_1 e^{6t} - c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

的向量函数均为方程组的一个解。

在例 1 中，假设我们要求当$t=0$时。y_1=6 和$y_2=1$,则

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 4c_1 + c_2 \\ 3c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此可得$c_1 = 1$和$c_2 = 2$。于是，初值问题的解为

$$Y = x_1 \lambda e^{\lambda_1 t} + 2e^{\lambda_2 t} x_2 = \begin{bmatrix} 4c_1 e^{6t} + 2e^{-t} \\ 3c_1 e^{6t} - 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

应用 1：混合物

两个桶如图 6.2.1 所示连接在一起，初始时，桶 A 中有 200 升溶解了 60 克盐的水，桶 B 中有 200 升纯水，液体一如图所示的速度流入和流出两个桶，求每一时刻 t，每个桶中盐的含量，

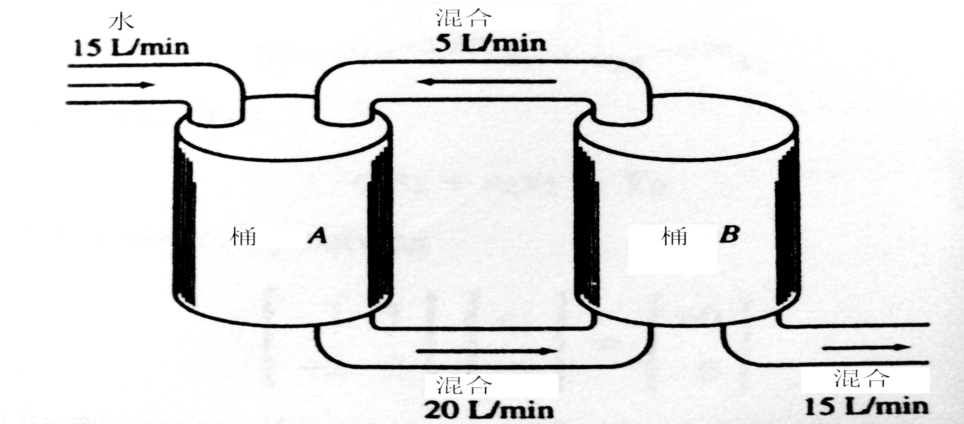


图 6.2.1

解：令$y_1(t)$和$y_2(t)$分别为时刻t时，桶 A 和桶 B 中含盐的克数，初始时

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于流入流出的速度时相同的，所以每一个桶中液体的总量降保持 200 升，每一个桶中盐量的变化速度等于流入的速度取盐流出的速度，对桶 A，盐流入的速度为

$$(5\,{}^{L}\!/_{\min})\cdot(\frac{y_2(t)}{200}\,{}^{g}\!/_{L})=\frac{y_2(t)}{40}\,{}^{g}\!/_{\min}$$

盐流出的速度为

$$(20\,{}^{L}\!/_{\min})\cdot(\frac{y_1(t)}{200}\,{}^{g}\!/_{L})=\frac{y_1(t)}{10}\,{}^{g}\!/_{\min}$$

因此，桶 A 中盐的变化速度为

$$y'_1(t)=\frac{y_2(t)}{40}-\frac{y_1(t)}{10}$$

类似地，对桶 B，盐的变化速度为

$$y'_2(t)=\frac{20y_1(t)}{200}-\frac{20y_2(t)}{200}=\frac{y_1(t)}{10}-\frac{y_2(t)}{10}$$

为求得 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 需要求解初值问题

$$Y'=AY \qquad Y(0)=Y_0$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{10} & \frac{1}{40}\\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\end{bmatrix}, \qquad Y_0=\begin{bmatrix}60\\0\end{bmatrix}$$

A 的特征值为 $\lambda_1=-\frac{3}{20}$ 和 $\lambda_1=-\frac{1}{20}$，相应的特征向量为

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} \text{ 和 } X_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

它的解必为如下形式

$$Y=c_1e^{-3t/20}x_1+c_2e^{-t/20}x_2$$

当 $t=0$ 时，$Y=Y_0$ 因此

$$c_1x_1+c_2x_2=Y_0$$

我们可以通过解 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\0\end{pmatrix}$

求得这个方程组的解为 $c_1=c_2=30$。因此，初值问题的解为

$$Y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30e^{-3t/20}+30e^{-t/20} \\ -600e^{-3t/20}+60e^{-t/20} \end{bmatrix}$$

复特征值

令 A 为一 $n\times n$ 实矩阵，它有一个复特征值 $\lambda=a+bi$，并令 x 为对应于 $\lambda=a+bi$ 的一个特征向量。向量 x 可以分解为实部和虚部。

$$x=\begin{pmatrix} \operatorname{Re}x_1+i\operatorname{Im}x_1 \\ \operatorname{Re}x_2+i\operatorname{Im}x_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Re}x_n+i\operatorname{Im}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \operatorname{Re}x_1 \\ \operatorname{Re}x_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Re}x_n \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} \operatorname{Im}x_1 \\ \operatorname{Im}x_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Im}x_n \end{pmatrix}=\operatorname{Re}x+i\operatorname{Im}x$$

由于 A 的元素均为实的，可得 $\bar{\lambda}=a-bi$ 也是 A 的一个特征值，它相应的特征向量为

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} \operatorname{Re}x_1-i\operatorname{Im}x_1 \\ \operatorname{Re}x_2-i\operatorname{Im}x_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Re}x_n-i\operatorname{Im}x_n \end{pmatrix}=\operatorname{Re}x-i\operatorname{Im}x$$

且 $e^{\lambda t}x$ 和 $e^{\lambda t}\bar{x}$ 均为一阶方程组 $Y'=AY$ 的解，这两个解的任意线性组合也将是一个解。因此，若令

$$Y_1=\frac{1}{2}(x_1\lambda e^{\lambda_1 t}+e^{\bar{\lambda}_2 t}\bar{x}_2)=\operatorname{Re}(e^{\lambda t}x)$$

且

$$Y_2=\frac{1}{2i}(x_1\lambda e^{\lambda_1 t}-e^{\bar{\lambda}_2 t}\bar{x}_2)=\operatorname{Im}(e^{\lambda t}x)$$

则向量函数 Y_1 和 Y_2 为 $Y'=AY$ 的实值解。取

$$e^{\lambda t}x=e^{(a+bi)t}x=e^{at}(\cos bt+i\sin bt)(\operatorname{Re}x+i\operatorname{Im}x)$$

的实部和虚部，我们得到

$$Y_1=e^{at}\left[(\cos bt)\operatorname{Re}x-(\sin bt)\operatorname{Im}x\right]$$

$$Y_2=e^{at}\left[(\cos bt)\operatorname{Im}x+(\sin bt)\operatorname{Re}x\right]$$

b) 解方程组

$$y_1'=y_1+y_2$$

$$y'_2=-2y_1+3y_2$$

解： 令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

A 的特征值为$\lambda=2+i$和$\overline{\lambda}=2-i$，相应的特征向量分别为

$$x=(1,1+i)^T \text{和} \overline{x}=(1,1-i)^T$$

令

$$e^{\lambda t}x=\begin{pmatrix}e^{2t}(\cos t+i\sin t)\\ e^{2t}(\cos t+i\sin t)(1+i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}\cos t+ie^{2t}\sin t\\ e^{2t}(\cos t-\sin t)+ie^{2t}(\cos+\sin t)\end{pmatrix}$$

及

$$Y_1=\mathrm{Re}(e^{\lambda t}x)=\begin{pmatrix}e^{2t}\cos t\\ e^{2t}(\cos t-\sin t)\end{pmatrix}$$

和

$$Y_2=\mathrm{Im}(e^{\lambda t}x)=\begin{pmatrix}e^{2t}\cos t\\ e^{2t}(\cos t+\sin t)\end{pmatrix}$$

则任何线性组合

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2$$

将为方程组的一个解。

若方程组$Y'=AY$的$n\times n$系数矩阵 A 由n个线性无关的特征向量，则它的通解可利用我们已经给出的方法求得。当 A 的线性无关特征向量数少于n个时，这个问题非常复杂，所以在这本书中将不再叙述。

高阶方程组

给定形如 $$Y''=A_1Y_1+A_2Y_2'$$

的二阶方程组，可以令

$$Y_{n+1}(t)=y_1'(t)$$

$$Y_{n+2}(t)=y_2'(t)$$

.

.

$$Y_{2n}(t)=y_n'(t)$$

将其转化为一阶方程组。若令

$$Y_1(t)=Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$$

及

$$Y_2(t)=Y'=(y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_{2n})^T$$

则

$$Y_1'=OY_1+IY_2$$

且 $$Y_2'=A_1Y_1+A_2Y_2$$

这些方程组合成$2n\times 2n$一阶方程组。

$$\begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & I \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

若当$t=0$时，$Y_1=Y$和$Y_2=Y'$，则初值问题将有惟一解。

c) 求初值问题

$$y_1''=2y_1+y_2+y_1'+y_2'$$

$$y_2''=-5y_1+2y_2+5y_1'-y_2'$$

$$y_1(0)=y_2(0)=y_1'(0)=4\quad,\quad y_2'(0)=-4$$

解：令$y_3=y_1'$且$y_4=y_2'$则可得一阶方程组

$$y_1'=y_3$$

$$y_2'=y_4$$

$$y_3'=3y_1+y_2+y_3+y_4$$

$$y_4'=-5y_1+2y_2+5y_3-y_4$$

这个方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=3,\lambda_4=-3$

对应这些特征值的特征向量为

$$x_1=(1,-1,1,-1)^T,\ x_2=(1,5,-1,-5)^T$$
$$x_3=(1,1,3,3)^T,\quad x_4=(1,-5,-3,15)^T$$

因此其解将形如 $c_1x_1e^t+c_2x_2e^{-t}+c_3x_3e^{3t}+c_4x_4e^{-3t}$

可以使用初始条件求得 c_1,c_2,c_3 和 c_4 当 $t=0$ 时，我们有

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=(4,4,4-4)^T$$

或等价地。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&5&1&-5\\1&-1&3&-3\\-1&-5&3&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\-4\end{pmatrix}$$

这个方程组的解为 $c=(2,1,1,0)^T$，因此初值问题的解为

$$Y=2x_1e^t+x_2e^{-t}+x_3e^{3t}$$

于是，

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^t+e^{-t}+e^{3t}\\-2e^t+5e^{-t}+e^{3t}\\2e^t-e^{-t}+3e^{3t}\\-2e^t-5e^{-t}+3e^{3t}\end{pmatrix}$$

一般地，如果有形如

$$Y^{(m)}=A_1Y+A_2Y'+\cdots+A_mY^{(m-1)}$$

的 m 阶方程组，其中为一 $n\times n$ 矩阵，可令

$$Y_1=Y,Y_2=Y_1',\cdots,Y_m=Y_{m-1}'$$

将其转化为一个一阶方程组，最终我们得到一个方程组

$$\begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ Y_3' \\ \vdots \\ Y_{m-1}' \\ Y_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_{m-1} \\ Y_m \end{pmatrix}$$

另外，若要求当$t=0$时，$Y, Y', \cdots, Y^{(m-1)}$ 取给定的值，则此问题将仅有一个解。

若方程组仅形如$Y^{(m)} = AY$，通常无需引入新的变量，在这种情形，只需计算A的特征值的m次方根，若λ为A的一个特征值，x为对应于λ的一个特征向量，δ为λ的一个m次方根，且$Y = e^{\sigma t}x$，则

$$Y^{(m)} = \sigma^m e^{\sigma t} x = \lambda Y$$

且

$$AY = e^{\sigma t} Ax = \lambda e^{\sigma t} x = \lambda Y$$

因此，$Y = e^{\sigma t} x$为方程组的一个解。