

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

签名： 杨福如 日期： 2002 年 2 月
25日

关于论文使用授权的说明

本学位论文作者完全了解电子科技大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权电子科技大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

签名： 杨福如 导师签名： 王/华/四
日期： 2002 年 2 月
25日

摘要

最初，人们研究椭圆波导是为了能够定出圆波导的制造公差，即是说把椭圆波导作为圆波导的小变形后的波导，故所研究的椭圆波导都是属于小椭圆度的或小偏心率的。近年来电子工业的发展，要求有高性能的微波传输线，故出现非金属的波导及非圆形波导，椭圆波导作为长距离，可弯曲波导，应用于大天线，如卫星通讯的三十米天线中，作为主波导用，是属于大椭圆度的，故以前属于小椭圆度的理论计算不足以适应现在的应用了。到了八十年代以后，又出现了一些讨论椭圆波导文章，主要应用在天线系统中。

本文从椭圆空波导中电磁波的传输理论出发，较为全面的研究了椭圆柱坐标系下解亥姆霍兹方程出现的马丢函数的解的问题，用无穷级数的有限项来逼近马丢函数的解，研究了椭圆空波导中各种波型的波，并计算了归一化的截止波长，几种模式的归一化衰减曲线，及波的色散曲线，并与圆波导的色散曲线进行了比较。

在此基础上，又从导师的“磁化等离子体波导中电磁波传播理论”出发，并将其应用于椭圆波导中，研究了在外加无穷大磁场和零磁场时完全填充等离子体椭圆波导中波的传输理论，计算出了各种模式的波的色散曲线，又进行了部分填充的椭圆波导中的波传播理论的公式推导。

关键词： 椭圆波导， 等离子体， 色散特性， 马丢函数

Abstract

Based on the theory of electromagnetic waves in elliptical hollow pipes of metal and the Prof.Liu's theory on the wave propagation along magnetized plasma-filled waveguide, the dissertation presents the theory of the transmission of electromagnetic in hollow conducting pipes or tubes of elliptical cross section, in completely plasma-filled elliptical waveguide and in partly filled elliptical waveguide.

It's difficult to investigate the behavior of elliptical waveguide, one problem is the analysis of Mathieu function, another is manufacturing one. The results of numerical calculation of the cutoff wavelength of different successive modes are presented, the measured values of the cutoff wavelength of different modes agree very well with the theoretical calculated values. The dispersion relations of hollow and plasma-filled elliptical waveguide have been obtained. The dispersion curve of different successive modes is reported here. With the exact succession of the different modes it becomes possible to compare the bandwidth of an elliptical to the bandwidth of the rectangular and circular guide. The calculations were made by programs using VC++ to compute the Mathieu functions of the first kind and using Bessel function product series for the modified Mathieu functions of the first kind. The formulas of partly filled elliptical waveguide were derived. With these various difficulties in mind we could well ask whether, like a partly filled circular waveguide ,a partly filled elliptical waveguide is capable of supporting a balanced hybrid mode. It would probably be easier to manufacture than the corrugated waveguide and could offer th possibility of better bandwidth performance.

Key Word: elliptical waveguide, dispersion relation, Mathieu function.

第一章 引言

1.1 椭圆波导的研究进展及等离子体填充的微波器件的研究

1.1.1 椭圆波导的研究进展

在 30,40 年代, 椭圆波导的研究工作已经比较成熟, 出现了一些经典论文, 如 Massachusetts institute of technology, Cambridge, Massachusetts 的 Lan Jen Chu 的那篇《Electromagnetic Waves in Elliptical Hollow Pipes of Metal》^[1], 一直被奉为经典, 因为它是最早的一篇研究椭圆波导理论的文章, 他得到了六种不同模式的波导的截止频率和衰减常数的数值结果。1947 年 Kinzer 和 Wilson 第一次发表了 TE_{01}^c , TM_{01}^c 和 TM_{11}^s 这三种模式的截止频率的近似公式, 作者并没有提到他们公式的正确性。 TE_{11}^c 模式在 1960 年 Valenzuela 发表的论文中有过讨论, Piefke 用新的近似方法修正了马丢函数, 得到了十二中模式的衰减常数, 沿用到 70 年代初。1970 年, J.G.Kretzschmar 在 IEEE 上发表了《Propagation in Elliptical Waveguides》^[3]。但这期间内, 人们研究椭圆波导是为了能够定出圆波导的制造公差, 即是说把椭圆波导作为圆波导的小变形后的波导, 故所研究的椭圆波导都是属于小椭圆度的或小偏心率的。近年来电子工业的发展, 要求有高性能的微波传输线, 故出现非金属的波导及非圆形波导, 椭圆波导作为长距离, 可弯曲波导, 应用于大天线, 如卫星通讯的三十米天线中, 作为主波导用, 是属于大椭圆度的, 故以前属于小椭圆度的理论计算不足以适应现在的应用了。到了八十年代以后, 又出现了一些讨论椭圆波导的文章, 主要应用在天线系统中, 如 T.S.Bird 的《behavior of multiple elliptical waveguides opening into a ground plane》^[6], 文章中讨论了椭圆波导中波辐射至地面的问题。波导和椭圆截面的喇叭在圆极化源方面, 还有在反射器的反馈中需要成形束, 都有一定的实际用途。椭圆的, 波纹形的和介质线的喇叭辐射问题已经得到研究, 自从 MULLER 在此领域首开先河之后, 光滑椭圆波导的辐射问题几乎没有得到应有的研究。由于开放式末端, 现存文献

几乎没有达到在椭圆波导中研究反射这一层次的，主要是由于解马丢函数的困难，尽管 Chew 等人提供了一个近似公式。光滑的矩形和圆形喇叭辐射器的实验已经证明重要的反射已经能在中等尺寸的孔径中发生，为喇叭输入失配作出了很重要的贡献。Erik Lier 在《Application of Rectangular and elliptical Delcore Feed Horns to elliptical reflectors antennas》^[7]中谈到在一定的喇叭中，椭圆模式能达到最大限度辐射强度。这些用在雷达，地面站，还有在卫星通讯中，用在地球椭圆轨迹方面。对于双偏振来说，在两个正交的偏振之间，一个高频率的反馈系统必须获得很高的增益。在双反射系统中，主反射器用椭圆波导，副反射器用圆角型波导，这个反射器能提供低的正交偏振和高的孔径效益。在一个用椭圆作反射器的非成形双反射器中，角向椭圆电子注的馈电系统是需要。在只有一个反射器的反射系统中，主馈角用椭圆，馈角相对于双反射系统要小。相对于一个双反射器补偿天线，单反射器补偿天线要便宜，但这两种天线都需要椭圆模式和好的圆极化性能。F.A.Alhargan 和 S.R.Judah 在《Mode charts for confocal annular elliptical resonators》^[9]中讨论了共焦环形椭圆振荡器的一些有用的特性，主要用在面天线的设计和微带电路接口中，这篇文章主要用新的技巧，给出了 CAER 的几种模式，并给出了这几种模式的波数和椭圆环半径，偏心率及内外椭圆环椭圆度的比值的的关系。圆波导和矩形波导的波模式已经得到广泛研究，并在微波元器件的设计中有着不可估量的价值，但椭圆波导振荡器及共焦椭圆环形振荡器的研究还远远不够，Kretzschmar, Irish, Rembold 已经研究过椭圆盘振荡器，但这些研究仅是一些近似的，渐近线的或是实验的研究结果。另外，Alhargan 和 Judah 得到过不同椭圆度的 80 种模式的椭圆盘振荡器的图表。 TM_{12} 模式的环形椭圆面天线的带宽已经得到实验证明，在许多情况下，天线的设计者对 CEAR 的完全分析并不感兴趣，这主要是关系到马丢函数的事，一些图表提供了简单但行之有效的数据，尽管是近似的，但能绕过分析马丢函数的困难。但对于 CEAR 来说，还没有这些图表能够加以利用 Sharma 用频域分析的方法研究振荡器波数。K.L.Chan 和 S.R.Judah 在《Modal analysis at the junction formed by a circular or elliptical waveguide and a translated and rotated elliptical

waveguid 》^[9]文中阐述了椭圆谐振腔被用来作微波滤波器的元件，这样，接口特性在滤波器设计过程中是至关重要的，在诸多处理技巧中，模式匹配法来解决这个问题用的最广泛，因为椭圆波导中的场是用马丢函数来描述的。Matras 等人已经用模式匹配的方法研究了椭圆——椭圆的波导接口，并把其工作推广到了偏离圆心的更一般的情况，尽管他已得出耦合系数的计算结果，但也只是近似值。Gimeno 和 Guglielmi 也已研究过规则波导和小椭圆度的椭圆波导。Salvatore Caorsi 等在《Electromagnetic Scattering by weakly Lossy Multilayer Elliptical Cylinder》^[10]中利用一阶泰勒级数的有限项来近似马丢函数的解来处理用失真材料的多层圆柱中电磁场的散射问题。Yeh 已经根据马丢函数获得了单一均匀介质填充的椭圆波导的二维散射问题的解。Salvatore 等人已经拓展这个问题，得到了共焦的椭圆柱中散射问题的解，尽管这个问题被认为是很困难的，但 Salvatore 等得到了类似与 Yeh 的解法的更有计算效率的解。由于复宗量的马丢函数的解至今没有现成的软件可用，作者采用了泰勒级数的一阶近似。研究的焦点主要集中在椭圆波导中出现的马丢函数的处理，其次是在于如何用初等函数来逼近椭圆波导中的场结构，来求得简易的工程计算公式。有些文献中已经用贝塞尔函数的乘积级数来逼近椭圆波导中的马丢函数，并能得到很好的结果。研究这种波导有实际意义，因为从椭圆波导的分析可以估计圆波导小变形对电磁波传输所产生的影响。中科院院士林为干先生对椭圆直波导也进行了详细阐述^[21]。国内的中国工程物理研究院流体物理研究所的林其文在《椭圆波导的截止波长和衰减常数的理论计算》^[22]，这篇文章详细阐述了马丢函数实宗量的解的问题。

圆波导在平衡条件激励下的混合模式已经得到很广泛的研究，并在天线系统中天线的反馈部分广泛地作为高性能的反射器。当在自由空间中辐射时，它产生了一个理想的没有交叉的偏振成分的对称的辐射模式。在圆波导中为了支持一个平衡模式的混合模，要求满足各向异性的边界条件，如圆周方向和纵向的表面电抗 X_c 和 X_z 在圆周边界上需满足 $X_c X_z = -Z_1^2$ ，其中 Z_1 是波导内填充的介质的阻抗。最常用的产生满足边界条件方法是采用波纹波导，

这样的波纹波导近年来得到了广泛的研究，尤其用在天线的馈元部分。长久以来，部分填充的圆波导被看作是一种便宜的，有成本效益且具有足够带宽的带名词。圆对称的平衡混合模式的波导辐射出一对称的模式。在一些应用中需要非对称的电子束，这时采用椭圆波导较好，尽管它导致了线性的横向极化场。已经证实在椭圆波导中一种混合模式在圆周方向处处可以辐射出成形束。椭圆波导喇叭的特性还没有得到应有的研究，其中一个困难是制造工艺上的，另一个是分析上的。另外，一些研究表明，椭圆波导的混合模式一定程度上限制了带宽性能，这样，我们不免要问，象部分填充圆波导那样，椭圆波导能否也可以支持平衡混合模式的波型，它在工艺制造上比波纹波导容易，有可能具有很好的带宽特性。

已有文献均是研究椭圆空波导的传输特性，当等离子体填充后，能极大的提高微波器件的输出功率和效率。等离子体的出现，尤其是有磁场存在时，将导致波导中的波和场发生巨大的变化。TE 模和 TM 模将耦合在一起而不能单独存在，将产生混合模 HE 和 EH 模。磁化等离子体填充将产生各种各样的传输模式，而这些模式是在真空中或有等离子体但无磁场情况下不存在的。

1.1.2 等离子体填充的微波器件的研究

在二次世界大战中，对雷达的研究促进了微波技术的飞速发展，也为微波的广泛应用创造了条件。微波等离子体作为微波应用的一个重要方面，开始研究于四十年代末和五十年代初，当时，美国麻省理工学院 W.P.Allis,S.C.Brown,D.J.Rose 和 A.D.MacDonald 等科学家首先对微波气体放电的物理机制进行了详细研究，由于条件的限制，以及物理机制的复杂性，对微波等离子体研究的深度还不够，到六十年代末，由于微波等离子体在材料形成及处理，分析化学，光谱学，激光，火箭驱动等方面的广泛应用，使得微波等离子体的研究成为新的热点。当时，妨碍微波等离子体广泛应用的一个重要方面是只能在很小体积内得到微波等离子体，这是由于微波放电电路要求放电尺寸同微波的空间波长相同或更小。脉冲功

率技术和相对论电子束技术的长足进步和发展是人们又重新开始研究等离子体器件。与此同时，高能量的强流电子注被广泛应用到各种微波器件如相对论速调管，相对论返波管，相对论行波管等中，获得了更大功率的微波输出。等离子体的填充改变慢波结构的电动力学特性。首先是使色散曲线通常上移，从而使工作频率提高，这一点可从等离子体填充的光滑波导的截止频率上看出来： $\omega_c^2 = c^2 T^2 + \omega_p^2$ ，式中等号右边第一项为没有等离子体填充时波导的截止频率，此时 $T = k_c$ 。利用这一特性，可以通过改变等离子体密度来实现频率调谐。另外，等离子体的填充产生出频率非常丰富的低频等离子体振荡模式（TG 模式），尤其是周期性加载的波导如波纹波导，其周期性低频 TG 模为周期性光滑波导 TG 模式的叠加。实际上，波纹波导等周期性加载波导可近似看成由多个光滑波导组成的导波系统。最近，电子科技大学刘盛纲教授提出了电子注---电磁波---等离子体波导相互作用理论。

1.2 本论文的工作及论文组织

1.2.1 本论文的工作

1、首先对空波导进行了了解和必要的研究，为主要工作即填充等离子体后的椭圆波导的色散特性研究进行了铺垫。

2、对椭圆柱坐标系下解亥姆赫兹方程所出现的马丢函数进行了深入的了解和应用。

3、推导出等离子体填充的椭圆波导的波动方程及色散方程。

4、推导出了填充等离子体后的椭圆波导的色散方程，并对其进行了必要的数值计算，且把椭圆波导的色散曲线在偏心率取极限小时于相同条件下的圆波导进行了比较，用来验证椭圆波导的相关性质。

1.2.2 本论文的组织

第二章	椭圆空波导的理论
第三章	填充等离子体的椭圆波导理论研究
第四章	部分填充介质的椭圆波导理论研究
第五章	结束语

第二章 椭圆直波导中色散特性的研究

2.1 引言

1938年, Chu 发表了电磁波在椭圆空波导中传播的理论^[1], 他得到了六种不同模式的波导的截止频率和衰减常数的数值结果。1947年 Kinzer 和 Wilson^[23]第一次发表了 TE^c_{01} , TM^c 和 ${}_{01}TM^s_{11}$ 这三种模式的截止频率的近似公式。作者并没有提到他们公式的正确性。 TE^c_{11} 模式在 1960年 Valenzuela 发表的论文中有过讨论^[4], Piefke 用新的近似方法修正了马丢函数, 得到了十二中模式的衰减常数。本文采用无穷级数表达的马丢函数的有限项来进行数值计算, 得到了较好的结果。

2.2 椭圆空波导色散方程的推导

由麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \bar{B}$$

$$\nabla \times \bar{H} = J + j\omega \bar{D}$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

得到直角坐标系下波动方程:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -k^2 \Phi$$

椭圆柱坐标系下的拉梅系数为:

$$h_1 = h_2 = h \sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta} = \frac{h}{2} \sqrt{ch2\zeta - \cos 2\eta}, h = \sqrt{a^2 - b^2}, a, b \text{ 分别为椭圆的长}$$

短半轴。所以椭圆柱坐标系下, 波动方程为:

$$\frac{1}{h^2(ch^2\zeta - \cos^2\eta)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0$$

其中, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$.

空心椭圆直波导中的场, 可分解为横磁场及横电场, 由 E_z 和 H_z 表示出:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{h^2 k_c}{2} (ch2\zeta - \cos 2\eta) \right]_{E_z} = 0$$

$$k_c = \gamma^2 + k^2, \quad k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

进行分离变量处理:

$$E_z = \Psi(\zeta)\Phi(\eta)$$

$$H_z = \Psi(\zeta)\Phi(\eta)$$

上式变为:

$$\Phi \frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} + \Psi \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \frac{1}{2} h^2 k_c (ch2\zeta - \cos 2\eta) \Psi \Phi = 0$$

以 $\Psi\Phi$ 除全式后移项即得

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} h^2 k_c^2 (ch2\zeta - \cos 2\eta) \Psi \Phi = 0$$

由于此式左边与 η 无关, 右边与 ζ 无关, 故左右两边应等于同一常数, 取 a 作为此常数, 即得到两个常微分方程:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \left(a - \frac{1}{2} k_c^2 h^2 \cos 2\eta \right) \Phi = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} - \left(a - \frac{1}{2} k_c^2 h^2 ch2\zeta \right) \Psi = 0 \quad (2-2)$$

此(2-1)、(2-2)两式是研究椭圆波导的基本方程, 即是马丢函数, 在(2-1)

中以 $\pm j\zeta$ 代 η 即得到(2---2)式; 同样在(2---2)中以 $\pm j\eta$ 代 ζ 即得到(2---1)式。在(2---1)、(2---2)中, a 是任意数, 在边值问题中, 它的取值应由边界条件来定出。在波导问题中, (2---1)式的解应为 η 的周期为 2π 的周期函数, 而(2---1)、(2---2)两式的解分别为是阶数为整数的马丢函数和变态马丢函数。此时 a 取特殊的值, $a = a_m, b_m, m$ 就是马丢函数的阶数, a_m, b_m 是 $k_c h$ 的函数, 现在的一个通用的记号是引入参数 q ,

$$q = \frac{k_c^2 h^2}{4} = \frac{1}{4}(k^2 + \gamma^2)h^2$$

而 E_z 或 $H_z = \psi(\zeta)\Phi(\eta)$ 中, 如 $a = a_m$, 则取如下记号: $\Phi(\eta) = ce_m(\eta, q)$, 若 $a = b_m$, 则取另一记号 $\phi(\eta) = se_m(\eta, q)$, a 和 q 的值取实值时, $\Phi(\eta) = ce_m(\eta, q)$ 或 $\Phi(\eta) = se_m(\eta, q)$ 是周期为 π 或 2π 的单值周期函数, 这样的单值周期函数才能把空心波导中的电磁场分量正确表示出来。对应于这样的 $\Phi(\eta)$ 函数, (2---2)式的解可以写成 $Ce_m(\zeta, q)$ 及 $Se_m(\zeta, q)$, (2---1)、(2---2)式是二阶线性方程, 故各有两个线性独立的解, 但它们都不是周期函数, 所以(2---1)和(2---2)式的解可记作:

$$E_z = \Psi(\zeta)\Phi(\eta)$$

$$H_z = \Psi(\zeta)\Phi(\eta)$$

所以, 当 $a = a_m$ 时,

$$\frac{E_z}{H_z} = Ce_m(\zeta, q)ce_m(\eta, q)$$

$a = b_m$ 时,

$$\frac{E_z}{H_z} = Se_m(\zeta, q)se_m(\eta, q)$$

把(2---1)式写成如下的形式:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)y = 0 \quad (2---3)$$

则(c)式的无穷级数形式的周期解表为:

$$a = a_{2n}, y = ce_{2n}(z, q) = \sum A_{2r}^{(2n)} \cos 2rz \quad (2---4)$$

$$a = a_{2n+1}, y = ce_{2n+1}(z, q) = \sum A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)z \quad (2---5)$$

$$a = b_{2n+1}, y = se_{2n+1}(z, q) = \sum B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)z \quad (2---6)$$

$$a = b_{2n+2}, y = se_{2n+2}(z, q) = \sum B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)z \quad (2---7)$$

归一化方法:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m^2(z, q) dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m^2(z, q) dz = 1$$

对于变态的马丢函数, 即式 (2---2) 的解, 在 (2---4)---(2---7) 式中, 以 jz 代 z 得到:

$$Ce_{2n}(z, q) = ce_{2n}(jz, q) = \sum A_{2r}^{(2n)} ch2rz \quad (a = a_{2n})$$

$$Ce_{2n+1}(z, q) = ce_{2n+1}(jz, q) = \sum A_{2r+1}^{(2n+1)} ch(2r+1)z \quad (a = a_{2n+1})$$

$$Se_{2n+1}(z, q) = se_{2n+1}(jz, q) = \sum B_{2r+1}^{(2n+1)} sh(2r+1)z \quad (a = b_{2n+1})$$

$$Se_{2n+2}(z, q) = se_{2n+2}(jz, q) = \sum B_{2r+2}^{(2n+2)} sh(2r+2)z \quad (a = b_{2n+2})$$

根据方程 (2---1)、(2---2) 的解得出椭圆波导内部的场结构:

先看 TM 场的场结构:

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} C_m Ce_m(\zeta, q) ce_m(\eta, q) + \sum_{m=1}^{\infty} S_m Se_m(\zeta, q) se_m(\eta, q) \quad (2---8)$$

此项中舍去了传播因子 $e^{j\omega t - \gamma z}$, C_m, S_m 是待定常数, (2---8) 式中, 对应于任一个 m 值存在着两种解, 把传播因子补进去, 取实部, 这两个解是:

$$E_{zc} = C_m Ce_m(\zeta, q) ce_m(\eta, q) \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_{zs} = S_m Se_m(\zeta, q) se_m(\eta, q) \cos(\omega t - \beta z)$$

其中, $q = \frac{1}{4} h^2 k_c^2, \lambda = j\beta, k_c = k^2 - \beta^2$

对于 TM 场, 边界条件是: 在 $\zeta = \zeta_0$ 上, $E_z = 0$, 故边界条件变为

$$Ce_m(\zeta_0, q) = 0$$

$$Se_m(\zeta_0, q) = 0$$

令 $\beta = k_z$, 把 $q = \frac{k_c^2 h^2}{4} = \frac{1}{4}(k^2 + \gamma^2)h^2 = \frac{1}{4}h^2(\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2)$ 代入上面的边界条件得到色散方程

$$Ce_m(\zeta_0, \frac{1}{4}h^2(\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2)) = 0$$

$$Se_m(\zeta_0, \frac{1}{4}h^2(\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2)) = 0$$

TE 场的场结构:

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} C_{mp} Ce_m(\zeta, q) ce_m(\eta, q) + \sum_{m=1}^{\infty} S_m Se_m(\zeta, q) se_m(\eta, q)$$

对于 TE 场, 在波导壁上即 $H_c = 0$, 故边界条件是: $\frac{\partial H_z}{\partial \zeta} |_{\zeta=\zeta_0} = 0$

$$C'e_m(\zeta_0, q) = 0$$

$$S'e_m(\zeta_0, q) = 0$$

把 q 代入边界条件得到色散方程:

$$C'e_m(\zeta_0, \frac{1}{4}h^2(\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2)) = 0$$

$$S'e_m(\zeta_0, \frac{1}{4}h^2(\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2)) = 0$$

2.3 马丢方程的解的探讨

因为本论文主要用取连分式的有项来逼近马丢函数的解的, 所以着重讨论与其有关的解的问题。

现在探讨马丢函数的 Floquet 解的问题。系数 $\varphi(z)$ 是周期函数的方程

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \{\alpha - \varphi(z)\}y = 0$$

的解 $y(z)$ ，如果具有如下性质：

$$y(z + \omega) = \sigma y(z)$$

其中 σ 是与 z 无关的常数， ω 是 $\varphi(z)$ 的周期，则 $y(z)$ 称为 Floquet 解。令 $y(z) = e^{i\nu z} u(z)$ ，其中 $u(z)$ 是以 π 为周期的函数，而且 $u(z)$ 在全 z 平面上是解析的，

因为马丢方程在有限区域内没有奇点，作变换 $z = \frac{1}{2i} \ln t$ ，则函数 $v(t) \equiv u(\frac{1}{2i} \ln t)$

是除了 $t=0$ 之外的全 t 平面上的单值解析函数，可以展开为泰勒级数：

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k t^k, \text{ 回到变数 } z, \text{ 得}$$

$$y(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i(\nu+2k)z}$$

这是 Floquet 解的傅氏展开；现在求展开系数 c_k ，把上面的级数代入马丢方程中，得

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \{[\alpha - (\nu + 2k)^2]c_k - q(c_{k-1} + c_{k+1})\} e^{i(\nu+2k)z} = 0$$

由此得系数之间的递推关系：

$$[\alpha - (\nu + 2k)^2]c_k - q(c_{k-1} + c_{k+1}) = 0 \quad (2-9)$$

若 $q \neq 0$ ，则上式可写为：

$$c_{k+1} - D_k c_k + c_{k-1} = 0$$

其中

$$D_k = [\alpha - (\nu + 2k)^2] / q \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

再对这些式子进行变换^[22]，得到如下计算马丢函数本征值的连分式计算公式。 α 是马丢函数的特征方程，阶数 $m=2n+p$ ，先计算低次模，即 $n=0, m=p$ 阶的特

征方程。

$$\alpha = \frac{2q^2}{D_1 - \frac{q^2}{D_2 - \frac{q^2}{D_3 - \frac{q^2}{D_4 - \dots}}}} \quad \text{C 型, } p=0 \quad (1)$$

$$\alpha = 1 + q + \frac{q^2}{D_1 - \frac{q^2}{D_2 - \frac{q^2}{D_3 - \dots}}} \quad \text{C 型, } p=1 \quad (2)$$

$$\alpha = 1 - q + \frac{q^2}{D_1 - \frac{q^2}{D_2 - \frac{q^2}{D_3 - \dots}}} \quad \text{S 型, } p=1 \quad (3)$$

$$\alpha = 4 + \frac{q^2}{D_1 - \frac{q^2}{D_2 - \frac{q^2}{D_3 - \dots}}} \quad \text{S 型, } p=2 \quad (4)$$

当 $n \neq 0$ 时, 用数学归纳法, 可得到 $m=2n+p$ 阶的四个相应的特征方程

$$\alpha = m^2 + \frac{q^2}{D_{n-1} - \frac{q^2}{D_{n-2} - \frac{q^2}{D_{n-3} \dots \frac{2q^2}{D_0}}}} + \frac{q^2}{D_{n+1} - \frac{q^2}{D_{n+2} - \dots}} \quad \text{C 型, } p=0 \quad (5)$$

$$\alpha = m^2 + \frac{q^2}{D_{n-1} - \frac{q^2}{D_{n-2} - \frac{q^2}{D_{n-3} \dots \frac{q^2}{D_0 - q}}}} + \frac{q^2}{D_{n+1} - \frac{q^2}{D_{n+2} - \dots}} \quad \text{C 型, } p=1 \quad (6)$$

$$\alpha = m^2 + \frac{q^2}{D_{n-1} - \frac{q^2}{D_{n-2} - \frac{q^2}{D_{n-3} \cdots \frac{q^2}{D_0 + q}}} + \frac{q^2}{D_{n+1} - \frac{q^2}{D_{n+2} - \cdots}} \quad \text{S 型, } p=1 \quad (7)$$

$$\alpha = m^2 + \frac{q^2}{D_{n-1} - \frac{q^2}{D_{n-2} - \frac{q^2}{D_{n-3} \cdots \frac{q^2}{D_0}}} + \frac{q^2}{D_{n+1} - \frac{q^2}{D_{n+2} - \cdots}} \quad \text{S 型, } p=2 \quad (8)$$

给定某种类型的马丢函数及阶 $m=2n+p$, 则可解出 $\alpha(q)$ 。马丢函数系数 C_k 由递推公式给出:

$$v_{k-1} = \frac{q}{D_k - \frac{q^2}{D_{k-1} - \frac{q^2}{D_{k-2} - \frac{q^2}{D_{k-3} - \cdots}}}}, \quad k = \begin{cases} 1, 2, 3, 4, \dots, p=1, 2 \\ 2, 3, 4, \dots, p=0 \end{cases}$$

$$v_0 = \frac{2q}{D_1 - \frac{q^2}{D_2 - \frac{q^2}{D_3 - \cdots}}}, \quad p=0$$

$$v_k = \frac{C_{2k+2+p}}{C_{2k+p}}, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots$$

其中 $D_k = \alpha - (2k + p)^2, k=0, 1, 2, \dots$

这里简要介绍特征方程 (1) 到 (8) 的解法。连分式的求和应从右向左逐项计算, 对无穷项 $D_{n+1}, D_{n+2}, D_{n+k}, \dots$ 求和时, 可取截止项 $k = k_0$ 。连分式的求和可分两段计算: S_{n-1} 和 S_{n+1} , 现以 C 型, $p=0$ 为例具体说明。预先给定 q 和 $\alpha(q)$,

令 $S_{n+k_0} = \frac{q^2}{D_{n+k_0}}$, 按如下递推公式计算连分式右端 k_0 项之和 S_{n+1} ,

$$S_{k-1} = \frac{q^2}{(D_{k-1} - S_k)}, k = n + k_0, n + k_0 - 1, \dots, n + 2$$

令 $S_0 = \frac{2q^2}{D_0}$, 左边连分式之和 S_{n-1} 按如下公式递推

$$S_k = \frac{q^2}{D_k - S_{k-1}}, k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

对 C 型, $p=0$ 的波模, 据方程(1)(8), 可得不同的 n 时相应的特征值

$$\alpha' = 2S_1, n = 0; \alpha' = 4n^2 + S_{n-1} + S_{n+1}, n \geq 1$$

给定误差 ε , 若条件 $|\alpha' - \alpha| / (1 + \alpha') \leq \varepsilon$ 不满足, 可令 $(\alpha + \alpha') / 2 \rightarrow 0$, 按上述步骤重新计算, 再得到新的 α' , 直到误差条件满足为止。截止项 k_0 的取值随 q 的增大而增大, 本论文取了 150 项, 误差 $\varepsilon = 10^{-5}$ 。给出满足误差条件的 $\alpha(q)$ 后, 即可由 (11) 式计算马丢函数的系数 C_k , 截止项仍为 k_0 。尚差一个待定因子由归一化条件确定。其余波型的计算方法完全类似。在给出马丢函数 $y_m(\eta, q)$ 和 $Y_m(\zeta, q)$ 。由边界条件解出其根 ζ_0 。

2.4 利用马丢函数连分式的解得到的数值计算结果

用上面得到的结论计算出的变型马丢函数及各种模式的色散曲线的图形如下:

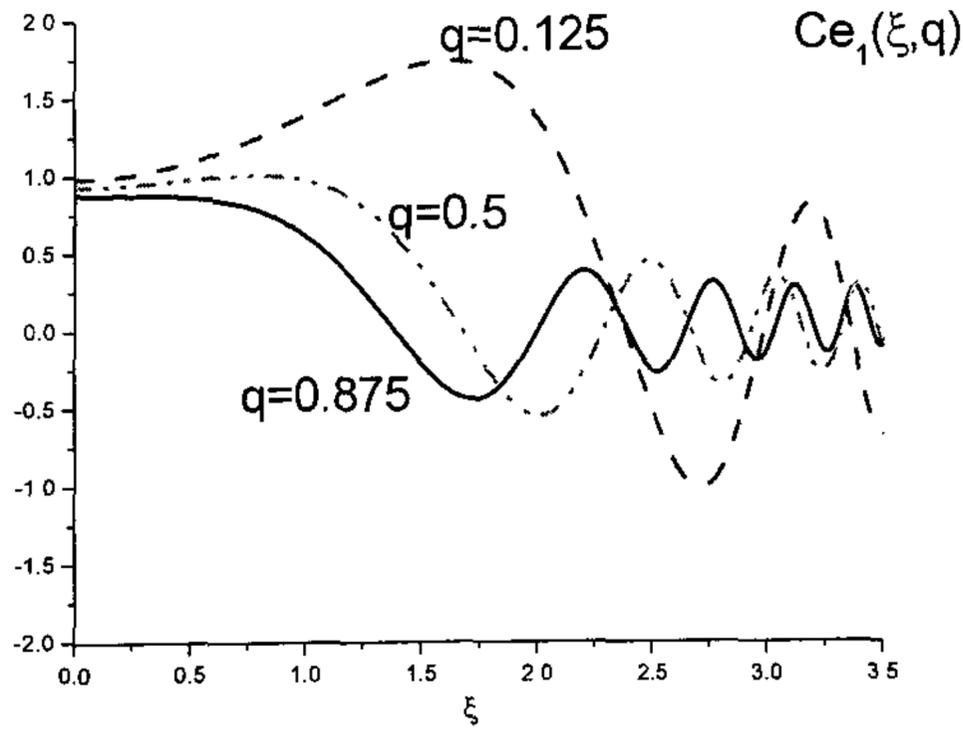


图 2.4-1 偶型变态的周期马丢函数图形

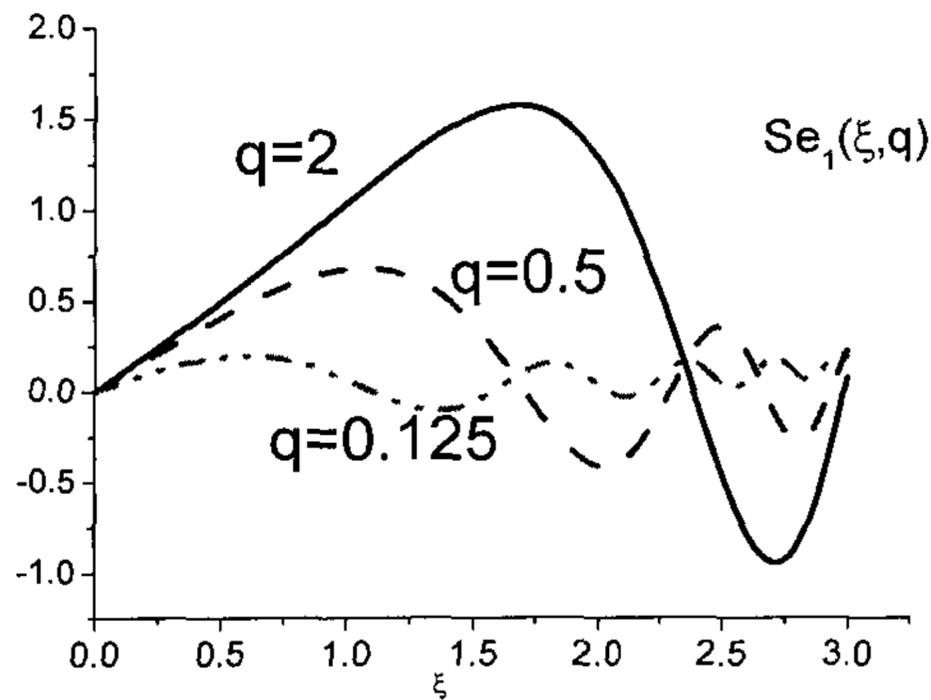


图 2.4-2 奇型变态的周期马丢函数

图 (2.4-1)、(2.4-2) 是偶型和奇型的变型周期马丢函数在 η 固定时随 ζ 的变化规律, 电磁场传播的波型变化规律在 η 固定时随 ζ 的变化规律与变型马丢函数的规律相一致。从图可以知道, 在微波源或谐振腔中, 电子注应加在越靠近管壁的地方, 这样波增长率也随之增加, 这是因为在此慢波结构中, 纵向电场在靠近管壁的地方分布最大, 所以当电子注靠近管壁时, 由于纵向电场的增加

而加强了其注波相互作用，故其波增长率增加。因此，在设计实际器件时，加载电子注应尽量靠近管壁。

只有工作波长 λ 小于截止波长 λ_c 时，电磁波才能在波导中传播，故 λ_c 是波导的重要参数。由 $q = k_c^2 h^2 / 4$ 和 $q(e)$ 的关系可得 λ_c 与波导横截面偏心率 e 的关系

$$\lambda_c / a = \pi e / \sqrt{q}$$

马丢函数的系数 C_k 用数值计算求出之后，就求出了电磁场的场结构。为了求其色散特性曲线，即 λ_c 和 q 的关系，而 $e = \frac{1}{\cosh(\zeta_0)}$ ，所以要求出 q 和 ζ_0 的关系。

由边界条件：

$$C e_m(\zeta_0, q) = 0, \quad S e_m(\zeta_0, q) = 0 \quad (\text{TM 场})$$

$$C' e_m(\zeta_0, q) = 0, \quad S' e_m(\zeta_0, q) = 0 \quad (\text{TE 场})$$

用求非线性方程实根的对分法来求出 q 和 ζ_0 的关系。波长与偏心率 e 有如下函数关系： $\lambda_c / a = f(e)$ 。下图是几个波形的归一化截止波长。

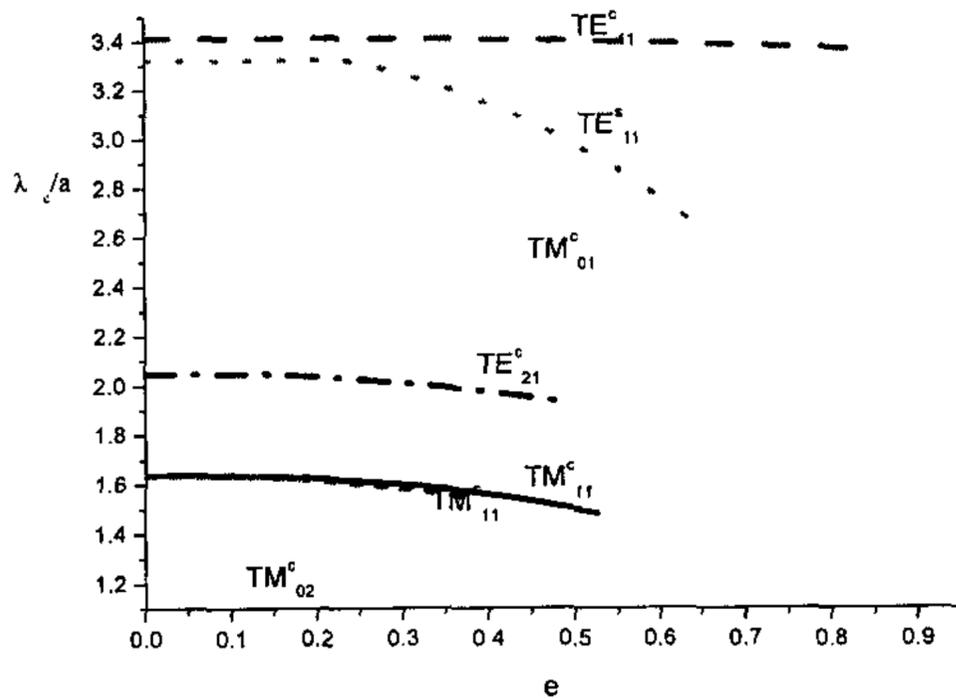


图 2.4-3 几种波型的归一化截止波长

图 (2.4-3) 是几种波型的归一化截止波长，偏心率范围 e 在 0.05 到 0.99 之间，从图中可以看出， TM_{11}^c ， TM_{11}^s 的截止波长靠得很近， TE_{11}^c ， TE_{21}^c 波型的

归一化截止波长随着偏心率的增加变化的很慢，且 TE_{11}^c 是最低模式。

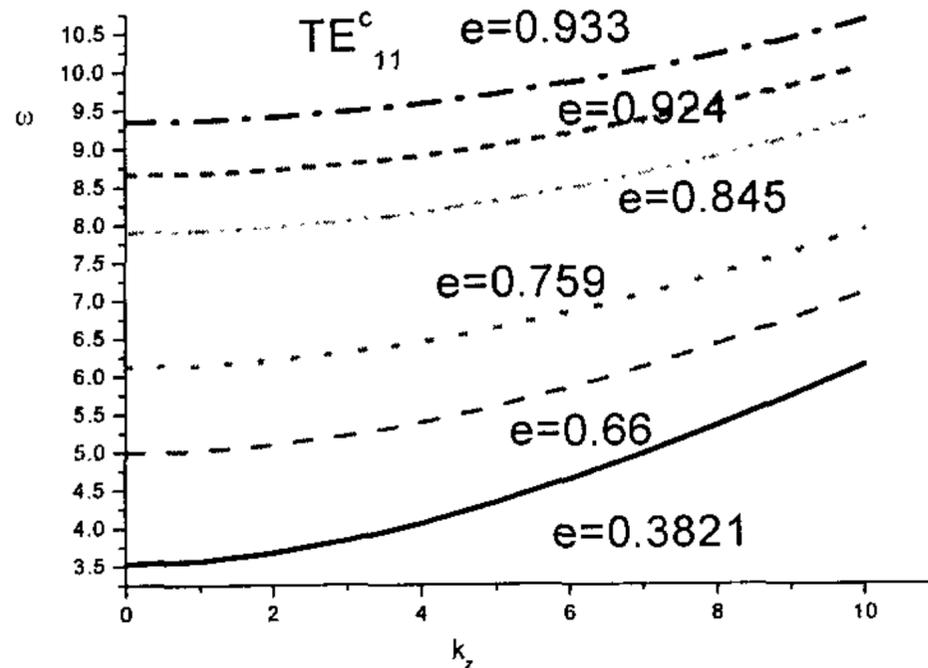


图 2.4-4 不同偏心率的 TE_{11}^c 模的归一化色散曲线

上图 (2.4-4) 是根据本征方程 $q = \frac{1}{4}h^2k_c^2 = \frac{1}{4}h^2(\omega^2 - k_z^2)$ 计算出的当偏心率变化时， ω 和 k_z 的色散曲线图。可以看出，当偏心率增加时，归一化的波截止频率也随之非线性的增加。由此可以推测椭圆度或偏心率减至 0 时，应该与圆波导吻合，下面加以验证。当偏心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \rightarrow 0$ 时，即近似于圆波导时，来验证椭圆波导的色散特性的正确性。

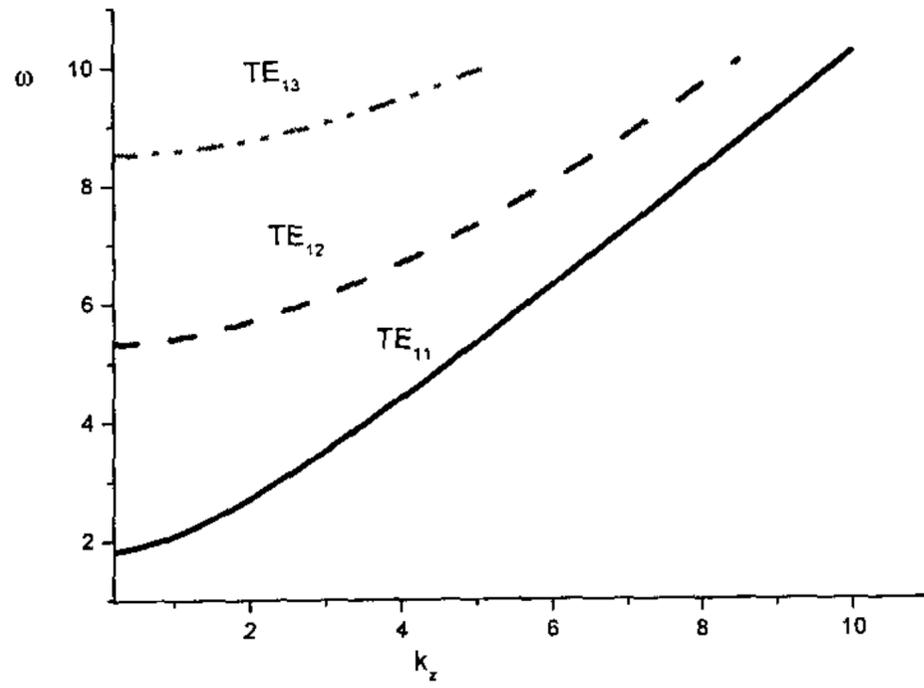


图 2.4-5 圆波导的归一化色散曲线

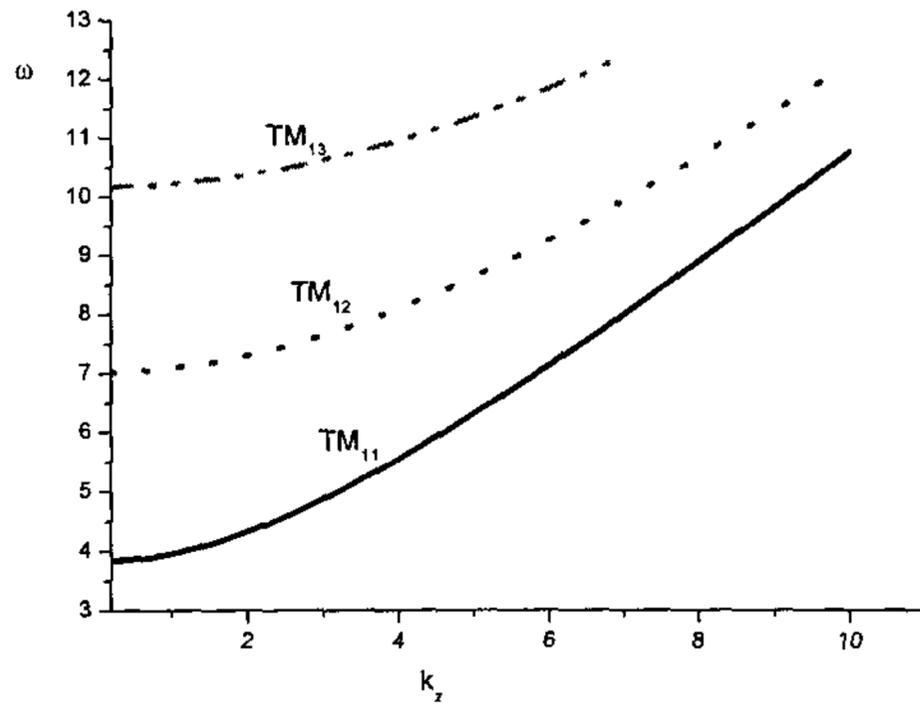


图 2.4-6 圆波导的归一化色散曲线

图 (2.4-5)、(2.4-6) 画出了 TE_{11}^0 和 TM_{11}^0 两种波型的圆波导的色散曲线，与前面的图 (2.4-4) 相比，可见，截止频率是要比椭圆波导有小偏心率的时候要小。

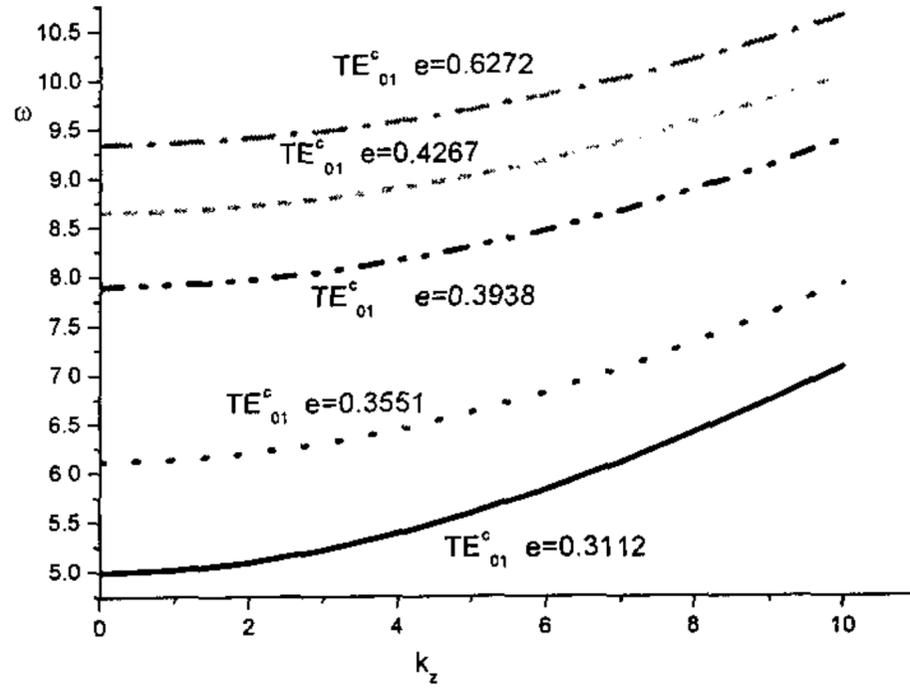


图 2.4-7 椭圆波导 TE_{01}^c 模式不同偏心率时的色散曲线

从图中可见，随着偏心率增加，截止频率随之增加。比较图 (2.4-4) 与图 (2.4-7)，同样波导尺寸的 TE_{11}^c 的截止频率要比 TE_{01}^c 的小，与图 (2.4-3) 的 TE_{11}^c 的归一化波长比 TE_{01}^c 大的结论相一致。

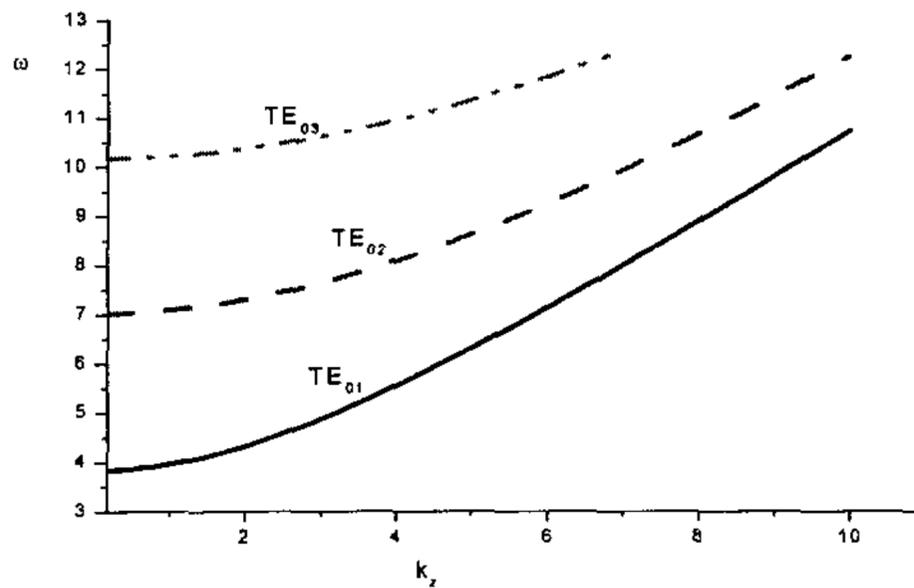


图 2.4-8 圆波导的归一化色散曲线

可以看出，随着椭圆度的减小，截止频率也随之减小，椭圆度减至 0 时，即为圆波导。比较图 (2.4-4)、(2.4-5) 可以清楚的知道，椭圆波导截止频率比

圆波导要高。圆波导不能单模传输，因为圆波导 TE_{11}^o 模不是圆对称模，存在极化简并，而圆波导在加工是产生的很小的椭圆度就会使 TE_{11}^o 的极化方向在传输中发生旋转。所以一般不用圆波导传输信号，而椭圆波导相对带宽较宽，适合作远距离传输线。 TE_{11}^o 是圆波导中的最低模式，而 TE_{11}^c 是椭圆波导中的最低模式。下图是偏心率固定， ω 随 k_z 变化的色散曲线图：

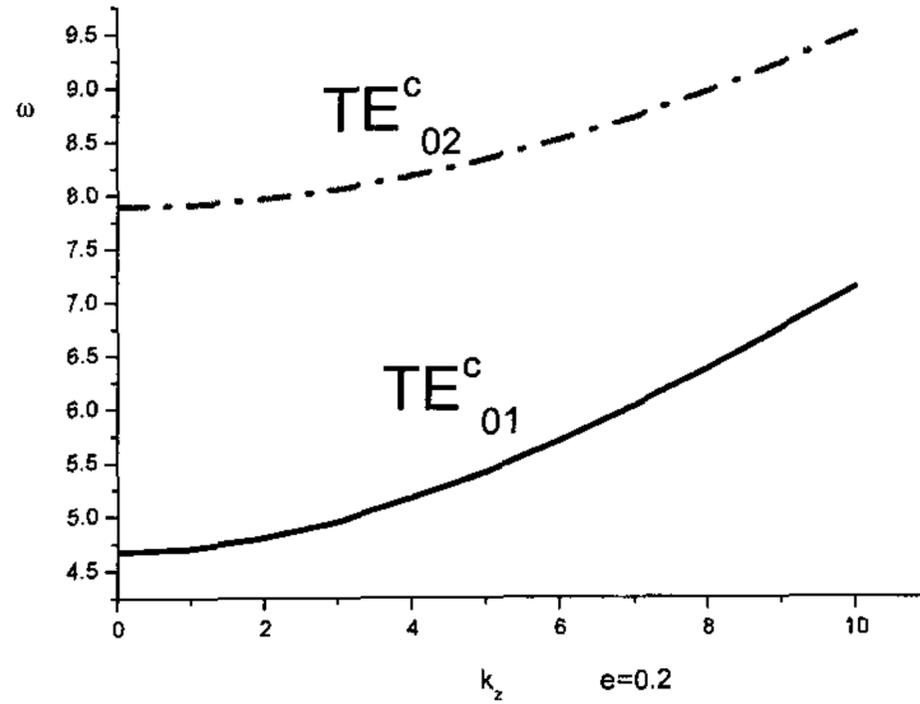


图 2.4-9 偏心率 $e=0.2$ 时椭圆波导不同模式的色散曲线

图 (2.4-9) 是椭圆波导 TE^c 波型的波在偏心率为 0.2 时的色散曲线。

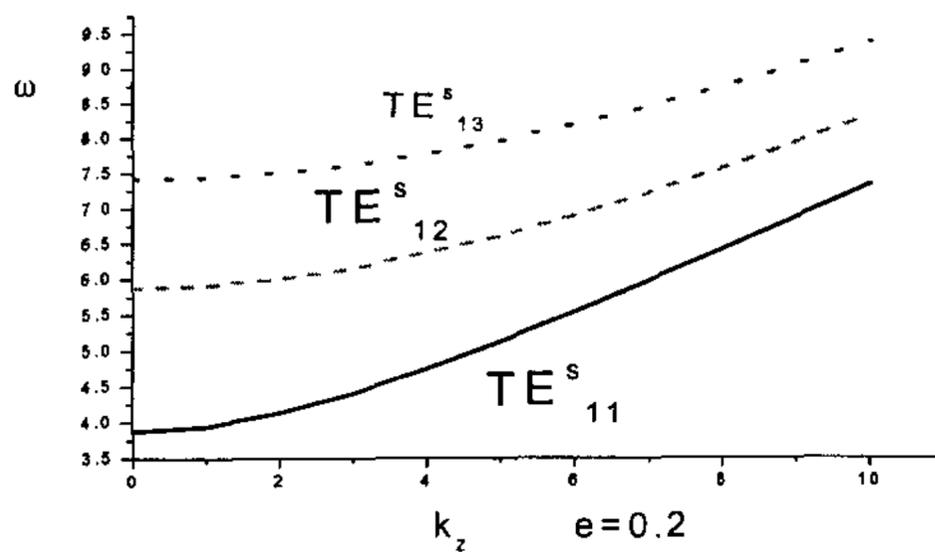


图 2.4-10 几种 TE^s 模式的色散曲线

图(2.4-10)是偏心率为 0.2 时的椭圆波导奇型 TE 波的色散曲线。图(2.4-9)、(2.4-10) 都是波导偏心率 e 一定时的色散曲线，从图可知， TE_{11}^c 的频率最低，是椭圆波导中的主模，与圆波导中的主模 TE_{11}^o 很类似。

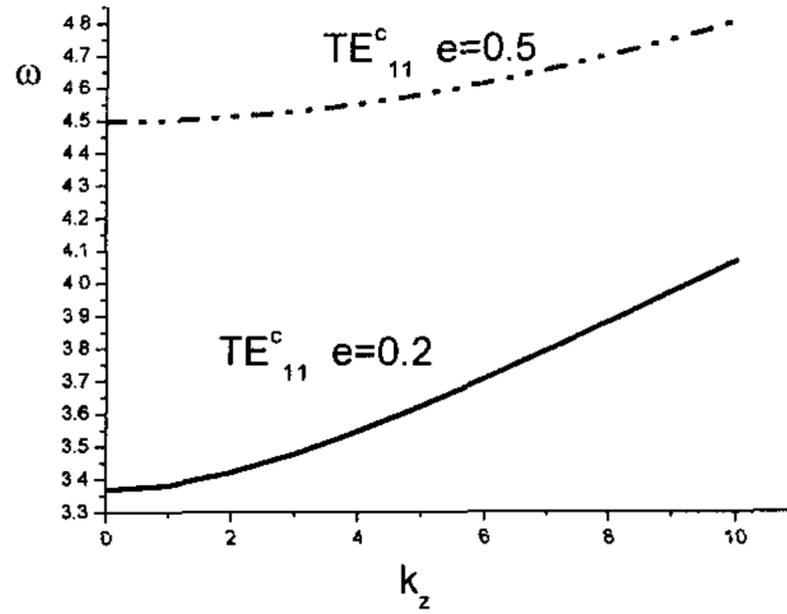


图 2.4-11 不同偏心率的 TE_{11}^c 模式的色散曲线

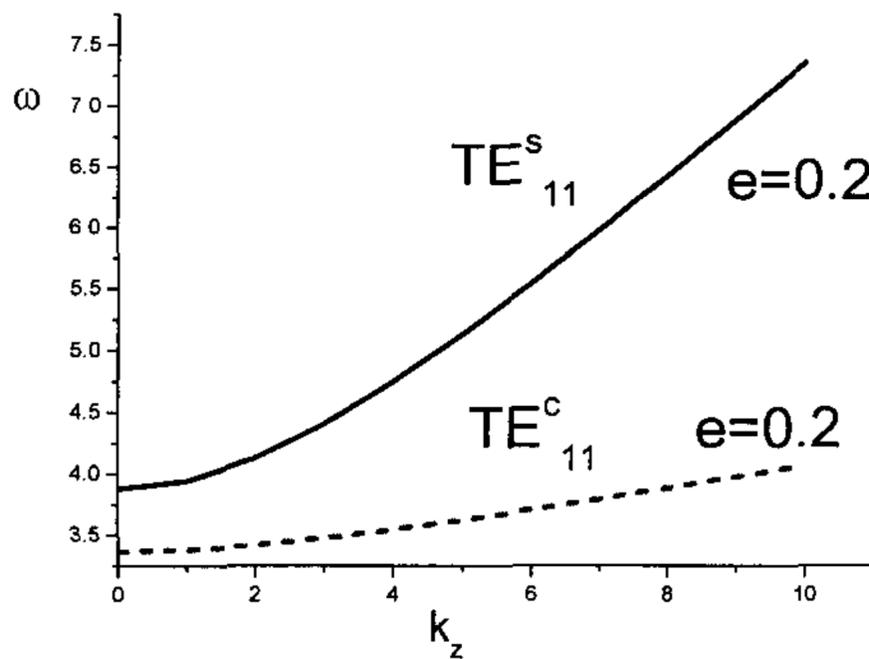


图 2.4-12 偏心率为 0.2 的不同模式的色散曲线

从图中可知， TE_{11}^c 模的色散曲线较 TE_{11}^s 的要下移，且其又是椭圆波导中的

主模。同样的波型模式，偏心率增大，截止频率也随之增大。

2.5 衰减常数的计算和衰减曲线

波导中任一截面上每单位面积沿 z 方向传播的功率可由乌莫夫---坡印亭矢量求出如下：

$$\vec{p} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$

$$p_z = \frac{1}{2} (E_\zeta H_\eta^* - E_\eta H_\zeta^*)$$

把各场分量及场分量的共轭值代入上式得到：

$$E_{cmr} \text{ 波: } p_z = \frac{\beta \omega \varepsilon}{2k_c^4 h_1^2} |C_m|^2 [C e_m'^2(\zeta, q) c e_m^2(\eta, q) + C e_m^2(\zeta, q) c e_m'^2(\eta, q)]$$

流经每一截面的总的平均功率则可由上式积分求出：

$$P_z = \iint p_z h_1^2 d\zeta d\eta = \frac{1}{2} \frac{|C_m|^2 \beta \omega \varepsilon}{k^4} \int_0^{\zeta_0} [C e_m'^2(\zeta) c e_m^2(\eta) + C e_m^2(\zeta) c e_m'^2(\eta)] d\zeta d\eta$$

由归一化条件：

$$\int_0^{2\pi} C e_m^2(\eta) d\eta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} C e_m'^2(\eta) d\eta = \vartheta_m \pi$$

所以，

$$P_z = \frac{|C_m|^2 \beta \omega \varepsilon}{(2/\pi)k^4} \int_0^{\zeta_0} [C e_m'^2(\zeta, q) + \vartheta_m C e_m^2(\zeta, q)] d\zeta$$

如果椭圆波导壁的导电率取大的但有限值时，在波导壁中即发生热损耗，故传输效率降低，一般把这种现象叫做衰减。传播常数 $\gamma = \alpha + j\beta$ ，故电磁场分

量的振幅按 $C_m e^{-2\alpha z}$ 衰减, 衰减常数可由下式给出:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial P_z}{\partial z}}{P_z} = \frac{L}{2P_z}$$

经过推导得归一化的衰减常数表达式:

$$\tilde{\alpha}_{TM} = (\pi \sqrt{\epsilon/\mu})^{1/2} Y_m'^2(\zeta_0, q) N_m \left[\frac{a/\lambda}{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} \right]^{1/2} / [I_m e^{\sqrt{2 \cosh(2\zeta_0)}}]$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{TE} = & (\pi \sqrt{\epsilon/\mu})^{1/2} Y_m^2(\zeta_0, q) N_m \left[\frac{a/\lambda}{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} \right]^{1/2} / \{2q \cosh(2\zeta_0) (\lambda/\lambda_c)^2 N_m \\ & + [1 - (\lambda/\lambda_c)^2] N_m'\} / [I_m e^{\sqrt{2 \cosh(2\zeta_0)}}] \end{aligned}$$

其中, λ 为工作波长, y_m, Y_m, y_m', Y_m' 分别表示任一种 m 阶马丢函数和变型马丢函数及其导数。

$$\begin{aligned} N_m &= \int_0^{2\pi} y_m^2(\eta, q) d\eta, N_m' = \int_0^{2\pi} y_m'^2(\eta, q) d\eta, \\ I_m &= \int_0^{\zeta_0} [Y_m^2(\zeta, q) N_m' + Y_m'^2(\zeta, q) N_m] d\zeta \end{aligned}$$

实际衰减常数 α 与归一化衰减常数 $\tilde{\alpha}$ 的关系为 $\alpha = [\mu/(\mu' \sigma a^3)]^{1/2} \tilde{\alpha}$, μ' 为导体壁的导磁率。

计算方法和步骤是: 给定波模和偏心率, 计算出满足边界条件的马丢函数 q 和 λ_c/a , 再计算 $\tilde{\alpha}$ 和 a/λ 的关系。 $\lambda/\lambda_c = f_c/f = \frac{\sqrt{q} \cosh \zeta_0}{\pi a/\lambda}$ 。定积分采用变步长辛卜森求积法。误差 10^{-5} 。计算出的一系列衰减曲线如下:

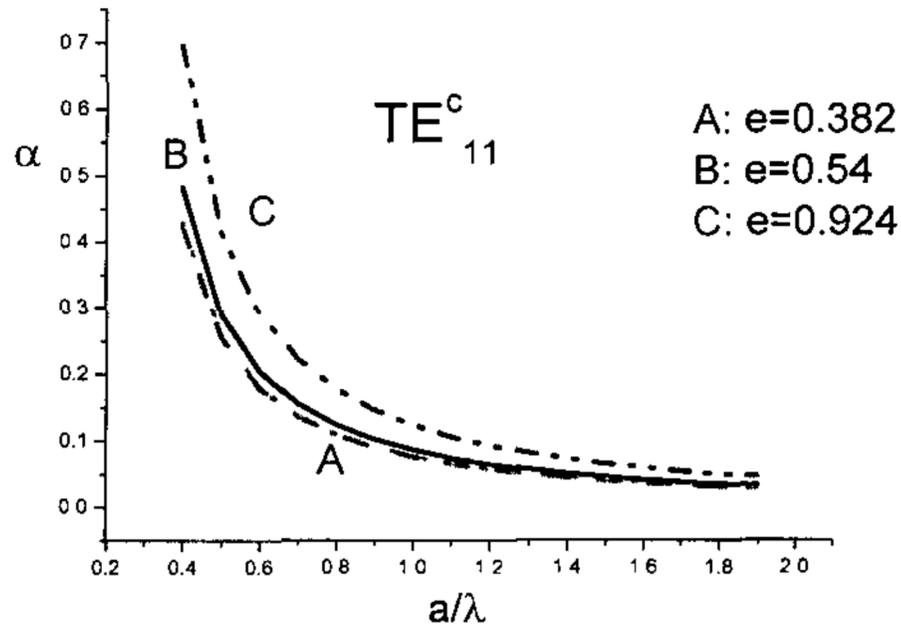


图 2.5-1 TE_{11}^c 模的归一化衰减曲线

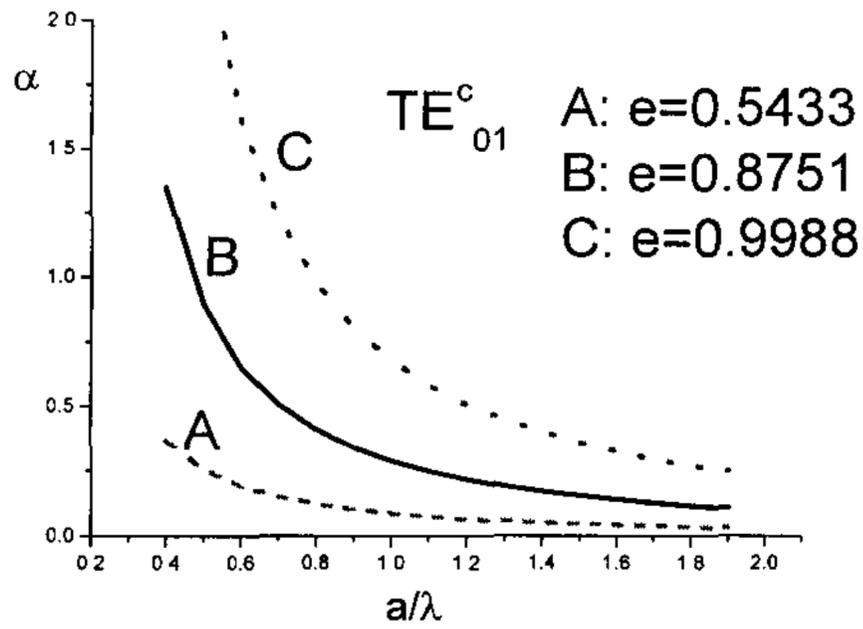


图 2.5-2 TE_{01}^c 模的归一化衰减曲线

从图中看出，归一化衰减特性在 $a/\lambda=0.8$ 以后有缓慢衰减到最小值的趋势，所以，这一范围应取作椭圆波导的工作范围。当椭圆度不大时，椭圆波导的衰减特性与圆波导的相差不大，故一般应尽量取小的偏心率 e 的值。再计算以 a/b 为参数的衰减曲线图。

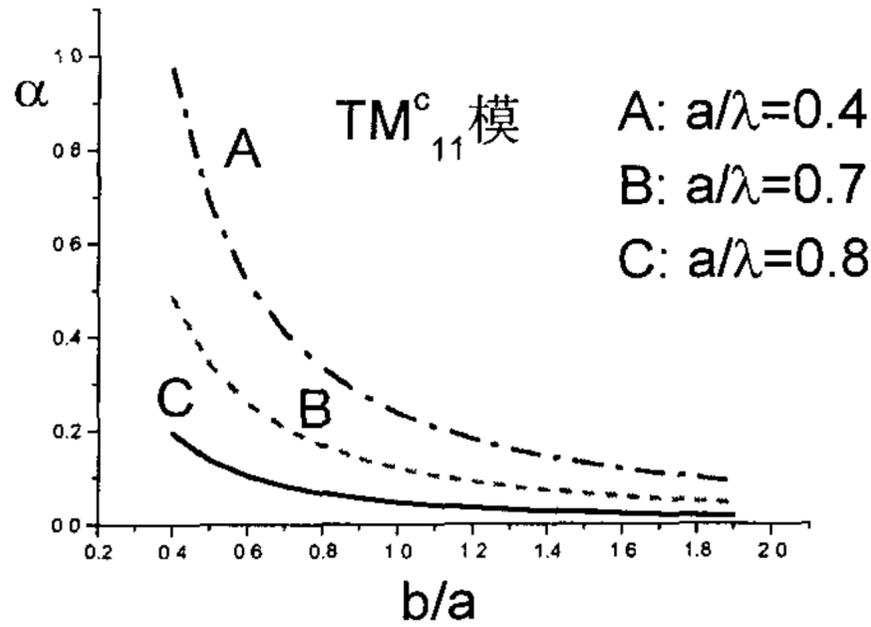


图 2.5-3 a/λ 为参数的归一化衰减曲线

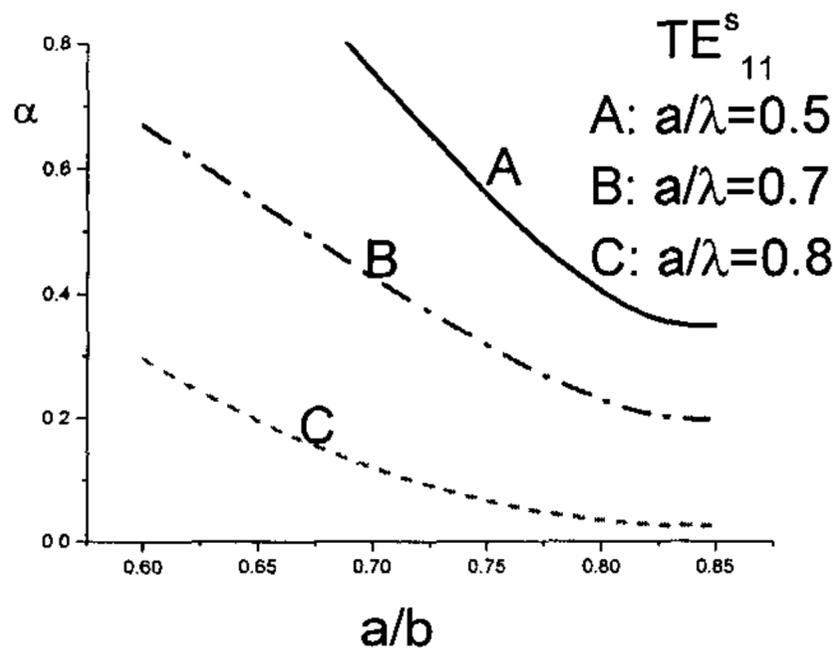


图 2.5-4 a/λ 为参数的归一化衰减曲线

上图中看出，短半轴于长半轴之比增加，即偏心率减小，归一化衰减减小，对于小波导，如 $a/\lambda = 0.4$ 的波导减小的速度较大。

加大波导的截面自然可以减归一化的衰减值，当 a/λ 大于 0.8 以后，这个减小的速度就很小了。加大 a 的值是减小归一化衰减的有效方法，不一定要求有大的

b/a 的值即小的偏心率。此处 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 。

2.6 贝塞尔函数级数解

在 (2---2) 式

$$\frac{d^2\Psi}{d\zeta^2} - (a - \frac{1}{2}k_c^2 h^2 \text{ch}2\zeta)\Psi = 0$$

中, 设 $q > 0$, 令 $u = 2k_1 \cosh z, k_1^2 = q$

则 (2---2) 式变为:

$$(u^2 - 4k_1^2)y'' + uy' + (u^2 - p^2)y = 0 \quad (2.6---1)$$

其中 $p^2 = a + 2k_1^2 = a + 2q$, (2.6---1) 式除第一个因子外, 与贝塞尔方程一样, 当 $u \geq k_1$ 时, 则 (2.6---1) 式与贝塞尔方程完全一样, 故可设如下形式的解

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c_{2r} J_{2r}(u) \quad (2.6---2)$$

代入 (2.6---1) 式后, 得到

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c_{2r} [(u^2 - 4k_1^2)J_{2r}'' + uJ_{2r}' + (u^2 - p^2)J_{2r}] = 0 \quad (2.6---3)$$

但贝塞尔方程为

$$u^2 J_{2r}'' + uJ_{2r}' + u^2 J_{2r} = 4r^2 J_{2r} \quad (2.6---4)$$

及其迭代公式

$$4J_{2r}'' = J_{2r-2} - 2J_{2r} + J_{2r+2} \quad (2.6---5)$$

将 (2.6---4)、(2.6---5) 两式代入 (2.6---3) 得到:

$$\sum (-1)^r c_{2r} [(4r^2 - a)J_{2r} - k_1^2 (J_{2r-2} + J_{2r+2})] = 0$$

然后令 J_{2r} 的系数等于零, $r=0,1,2,\dots$ 即得到

$$J_0 \quad ac_0 - k_1^2 c_2 = 0 \quad (2.6---6)$$

$$J_2 \quad (a-4)c_2 - k_1^2(c_4 + 2c_0) = 0 \quad (2.6-7)$$

$$J_{2r} \quad (a-4r^2)c_{2r} - k_1^2(c_{2r+2} + c_{2r-2}) = 0 \quad (r \geq 2) \quad (2.6-8)$$

由于(2.6-8)式是一个二阶的线性差分方程, 应有两个解, 现以 $(r+1)$ 代替 r , 即得

$$[a-4(r+1)^2]C_{2r+2} - q(C_{2r+4} + C_{2r}) = 0$$

现引入一个新记号 $v_{2r} = C_{2r+2} / C_{2r}$, 则此式给出

$$v_{2r+2} + \frac{1}{v_{2r}} = [a-4(r+1)^2]q^{-1} \quad (2.6-9)$$

故当 $r \rightarrow \infty$ 时, $v_{2r+2} + \frac{1}{v_{2r}}$ 单调下降 $\rightarrow -\infty$, 可见 v_{2r} 既不能在两个有限的界

内振荡, 也不能趋于不为零的有限值, 故式(2.6-8)的两个解中一个为零, 一个为无限大。为了使 C_{2r} 随 $r \rightarrow \infty$ 而趋于零以使式(2.6-1)收敛, 所以只能取 $v_{2r} \rightarrow 0$ 的解, 故在(2.6-2)式中, 当 $r \geq 1$ 时, $v_{2r+2} \cdot v_{2r} \leq 1$, 如 a, q 取有限值, $a \leq 4(r+1)^2$, 故(2.6-9)给出

$$|v_{2r}| = \left| \frac{C_{2r+2}}{C_{2r}} \right| \rightarrow \frac{|q|}{4(r+1)^2}, \quad r \rightarrow +\infty \quad (2.6-10)$$

如果取展式

$$C_{e_{2n}}(z, q) = c_{e_{2n}}(jz, q) = \sum A_{2r}^{(2n)} \cosh(2rz) \quad (2.6-11)$$

代入原微分方程, 则得到与式(2.6-6)---(2.6-8)一样的关系, 可见 C_{2r} 是 $A_{2r}^{(2n)}$ 乘以一常数因子, 故首先有(2.6-10)这样的关系, 即

$$\left| \frac{A_{2r+2}^{(2n)}}{A_{2r}^{(2n)}} \right| \rightarrow \frac{|q|}{4(r+1)^2}$$

又可见

$$K \sum (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2k_1 \cosh z) \quad (2.6---12)$$

由于 (2---4) 与 (2.6---12) 两式同为马丢方程 (2---2) 式的解, 不难定出常数 K, 故最后得到:

$$Ce_{2n}(z, q) = \frac{ce_{2n}(\frac{\pi}{2})}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2k_1 \cosh z)$$

同理可得:

$$Ce_{2n+1}(z, q) = \frac{ce_{2n+1}(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{q} A_1^{(2n+1)}} \sum (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2\sqrt{q} \cosh z)$$

当 n=0 时, 用贝塞尔函数乘积级数表示的偶型 1 阶马丢函数为:

$$Ce_1(\zeta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1} ch(2j+1)\zeta$$

$$Ce_1(\zeta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} D_{2j+1} J_{2j+1}(2\sqrt{q} ch \zeta)$$

$$Ce_1(\zeta, q) = \sum C_{2j+1} [J_j(\sqrt{q} e^{-\zeta}) J_{j+1}(\sqrt{q} e^{\zeta}) + J_j(\sqrt{q} e^{\zeta}) J_{j+1}(\sqrt{q} e^{-\zeta})]$$

其中,

$$D_{2j+1} = (-1)^{j+1} \frac{ce_1(\frac{\pi}{2}, q)}{\sqrt{q} A_1} A_{2j+1}$$

$$C_{2j+1} = (-1)^{j+1} \frac{ce_1(0, q) ce_1(\pi/2, q)}{\sqrt{q} A_1^2} A_{2j+1}$$

$$ce_1(0, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}$$

$$ce_1\left(\frac{\pi}{2}, q\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} (2j+1) A_{2j+1}$$

用此三种贝塞尔函数级数解的结果与马丢函数相同，只是这种表示法收敛速度快，易于数值计算。下图为用贝塞尔函数级数解来计算的衰减曲线图。

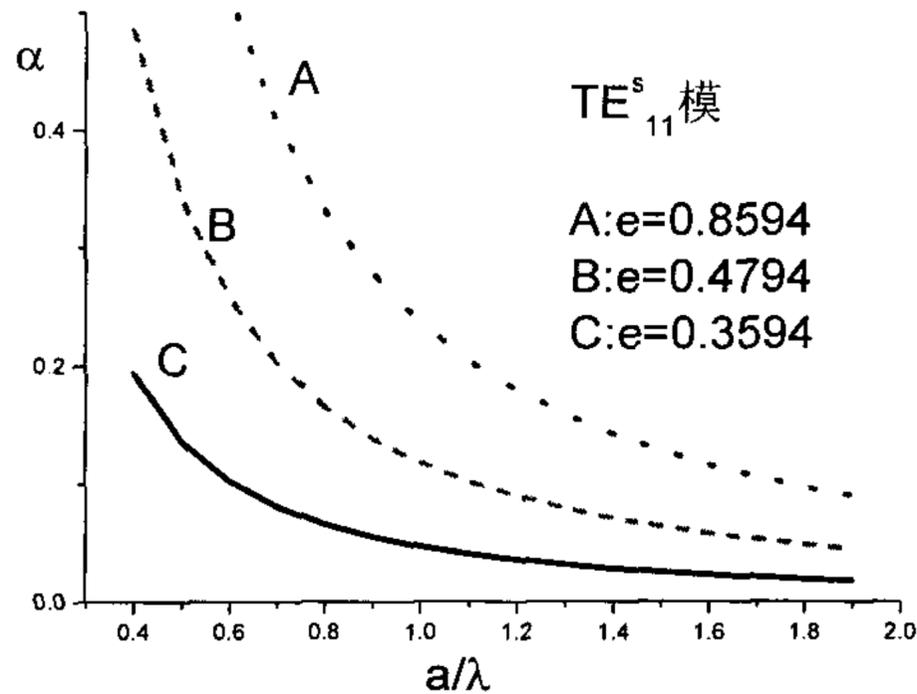


图 2.6-1 TE_{11}^s 模式的归一化衰减曲线

从图中可见，归一化衰减常数随着偏心率的增大而增大， TE_{11}^s 波型当 $e=0.3594$ 时， $a/\lambda=0.8$ 以后慢慢趋于常数，而当 $e=0.8594$ 时， $a/\lambda=1.2$ 以后才慢慢趋于常数。

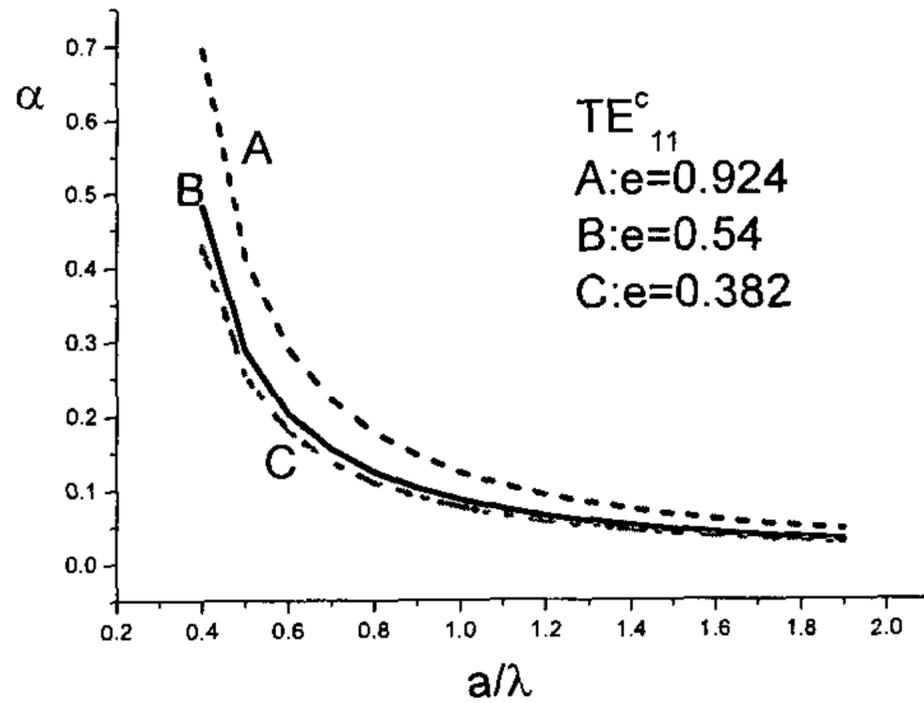


图 2.6-2 TE_{11}^c 模的归一化衰减曲线

图(2.6-2)中显示出 TE_{11}^c 波型的归一化衰减常数随偏心率的变化特性。可以看出，偏心率的变化对衰减常数的影响不如 TE_{11}^s 模那么显著，无论偏心率取多大， TE_{11}^c 波型的衰减常数几乎都是从 $a/\lambda=0.8$ 以后慢慢趋于常数的。

计算结果与马丢函数的无穷级数表示取有限项相吻合，只不过用贝塞尔函数乘积级数表示法计算，级数收敛速度最快，易于计算。

第三章 填充等离子体的椭圆波导的色散分析

3.1 引言

椭圆空波导的传输特性诸如几种波型截止频率，衰减常数，波阻抗等问题已得到广泛研究，并出现了很多经典论文，但填充等离子体的椭圆波导的一些特性并没有得到足够的研究，本文就外加无穷大磁场和无外加磁场的等离子体填充的椭圆波导的色散特性进行了分析。

3.2 磁化等离子体填充的椭圆波导的马丢方程的解

对于外加纵向磁场的等离子体，其电介质特性为各向异性，从流体理论可知，磁化等离子体的介电张量为

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\zeta^2(1-j\delta)}{(1-j\delta)^2 - \tau^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{j\tau\zeta^2}{(1-j\delta)^2 - \tau^2}$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\zeta^2}{1-j\delta}$$

$$\zeta = \frac{\omega_{pe}}{\omega}$$

$$\tau = \frac{\omega_{ce}}{\omega}$$

$$\delta = \frac{\gamma_{eff}}{\omega}$$

$$\omega_{pe} = \left(\frac{Ne^2}{m_e \varepsilon_0} \right) \text{ 为电子等离子体频率, } \omega_{ce} = \frac{e}{m_e} B_0 \text{ 为电子回旋频率, } \gamma_{eff} \text{ 为电}$$

子有效碰撞频率，j 为单位虚数， m_e 为电子质量，N 为电子密度， B_0 为纵向磁

场的大小, e 为电子的电荷量, ε_0 为自由空间的介电常数, ω 为电磁波的角频率。用纵向场表示横向场法解出磁化等离子体中的电磁波的波动方程:

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + aE_z = bH_z \quad (3-1)$$

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + cH_z = dE_z \quad (3-2)$$

其中,

$$a = (\gamma^2 + k^2 \varepsilon_1) \varepsilon_3 / \varepsilon_1$$

$$b = j\omega\mu_0\gamma\varepsilon_2 / \varepsilon_1$$

$$c = \gamma^2 + k^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) / \varepsilon_1$$

$$d = -j\omega\varepsilon_0\gamma\varepsilon_2\varepsilon_3 / \varepsilon_1$$

$$k = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \omega^2 / c^2$$

$$\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

在椭圆柱坐标系下, 得到填充等离子体的马丢方程的解。

$$a = a_{2n}, y = ce_{2n}(z, Q) = \sum A_{2r}^{(2n)} \cos 2rz \quad (3.2-1)$$

$$a = a_{2n+1}, y = ce_{2n+1}(z, Q) = \sum A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)z \quad (3.2-2)$$

$$a = b_{2n+1}, y = se_{2n+1}(z, Q) = \sum B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)z \quad (3.2-3)$$

$$a = b_{2n+2}, y = se_{2n+2}(z, Q) = \sum B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)z \quad (3.2-4)$$

归一化方法:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m^2(z, Q) dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m^2(z, Q) dz = 1$$

其中, Q 是有等离子体填充的波动方程的本征值, $Q=a$ 或 $Q=c$ 。对于变态的马丢函数, 即式 (2-2) 的解, 在 (2-4) — (2-7) 中, 以 jz 代 z 得到:

$$Ce_{2n}(z, Q) = ce_{2n}(jz, Q) = \sum A_{2r}^{(2n)} ch 2rz \quad (a = a_{2n})$$

$$Ce_{2n+1}(z, Q) = ce_{2n+1}(jz, Q) = \sum A_{2r+1}^{(2n+1)} ch(2r+1)z \quad (a = a_{2n+1})$$

$$Se_{2n+1}(z, Q) = se_{2n+1}(jz, Q) = \sum B_{2r+1}^{(2n+1)} sh(2r+1)z \quad (a=b_{2n+1})$$

$$Se_{2n+2}(z, Q) = se_{2n+1}(jz, Q) = \sum B_{2r+2}^{(2n+2)} sh(2r+2)z \quad (a=b_{2n+2})$$

3.3 外加无穷大磁场的等离子体填充的椭圆波导色散分析

外加无穷大磁场且忽略碰撞效应的等离子体填充的波动方程形式不同, TM 模式和 TE 模式的本征值形式不同, 且此两模式的波动方程不再耦合。

3.3.1 TM 波型的色散分析

在此条件下, 电导率张量的各元素可简化为:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 1 \\ \epsilon_2 = 0 \\ \epsilon_3 = 1 - \zeta^2 \end{cases}$$

得到 $b=d=0$, 所以波动方程去耦合, 且

$$a = (\gamma^2 + k^2)(1 - \zeta^2)$$

$$c = \gamma^2 + k^2$$

E_z (TM 模) 的波动方程与 H_z (TE 模式) 的波动方程形式不同。

先计算 TM 模的色散特性, 本征值

$$a = Q = \frac{h^2}{4} (-k_z^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + k_z^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \omega_p^2 \mu_0 \epsilon_0)$$

对上式进行归一化:

$$Q' = (-k_z'^2 + \omega'^2 + k_z'^2 \frac{\omega_p'^2}{\omega'^2} - \omega_p'^2)$$

根据方程 (2---1)、(2---2) 的解得出椭圆波导 TM 波型内部的场结构:

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} C_m Ce_m(\zeta, Q) ce_m(\eta, Q) + \sum_{m=1}^{\infty} S_m Se_m(\zeta, Q) se_m(\eta, Q) \quad (3.2---5)$$

此项中舍去了传播因子 $e^{j\omega t - \beta z}$ ， C_m, S_m 是待定常数，(3.2---5) 式中，对应于任一个 m 值存在着两种解，把传播因子补进去，取实部，这两个解是：

$$E_{zc} = C_m Ce_m(\zeta, Q) ce_m(\eta, Q) \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_{zs} = S_m Se_m(\zeta, Q) se_m(\eta, Q) \cos(\omega t - \beta z)$$

其中， $Q = \frac{1}{4} h^2 a$ ， $\lambda = j\beta$ ， $k_c = k^2 - \beta^2$

对于 TM 场，边界条件是：在 $\zeta = \zeta_0$ 上， $E_z = 0$ ，故边界条件变为：

$$Ce_m(\zeta_0, Q) = 0$$

$$Se_m(\zeta_0, Q) = 0$$

则色散方程为：

$$\text{偶模: } Ce_m(\zeta, (-k_z'^2 + \omega'^2 + k_z'^2 \frac{\omega'^2}{\omega_p'^2} - \omega_p'^2)) = 0$$

$$\text{奇模: } Se_m(\zeta, (-k_z'^2 + \omega'^2 + k_z'^2 \frac{\omega'^2}{\omega_p'^2} - \omega_p'^2)) = 0$$

下图是归一化的截止波长：

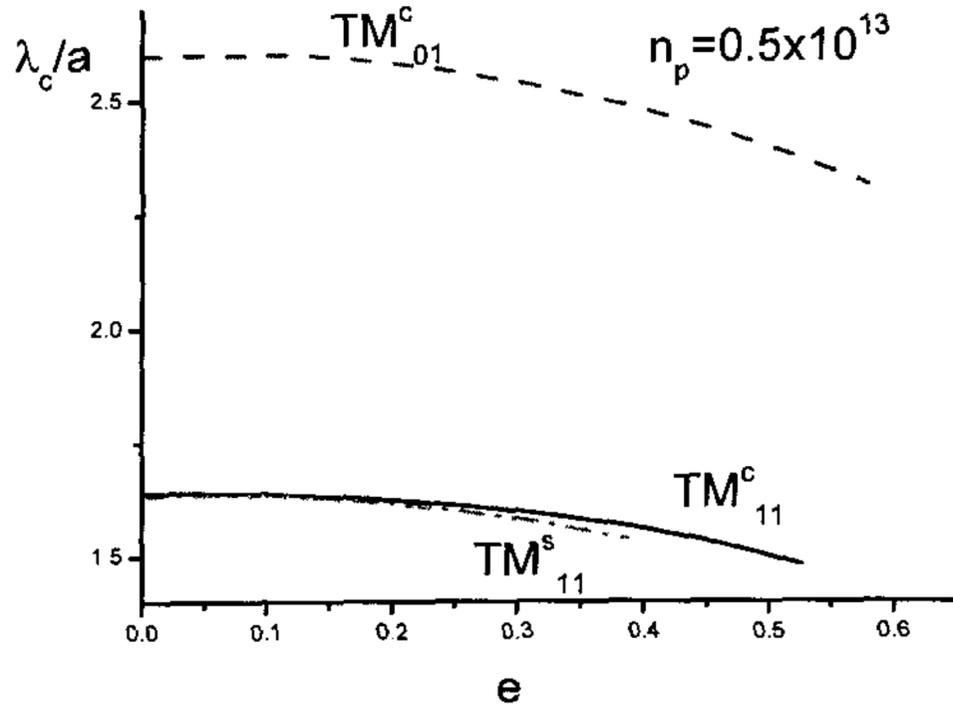


图 3.3-1 椭圆波导几种波型的归一化截止波长

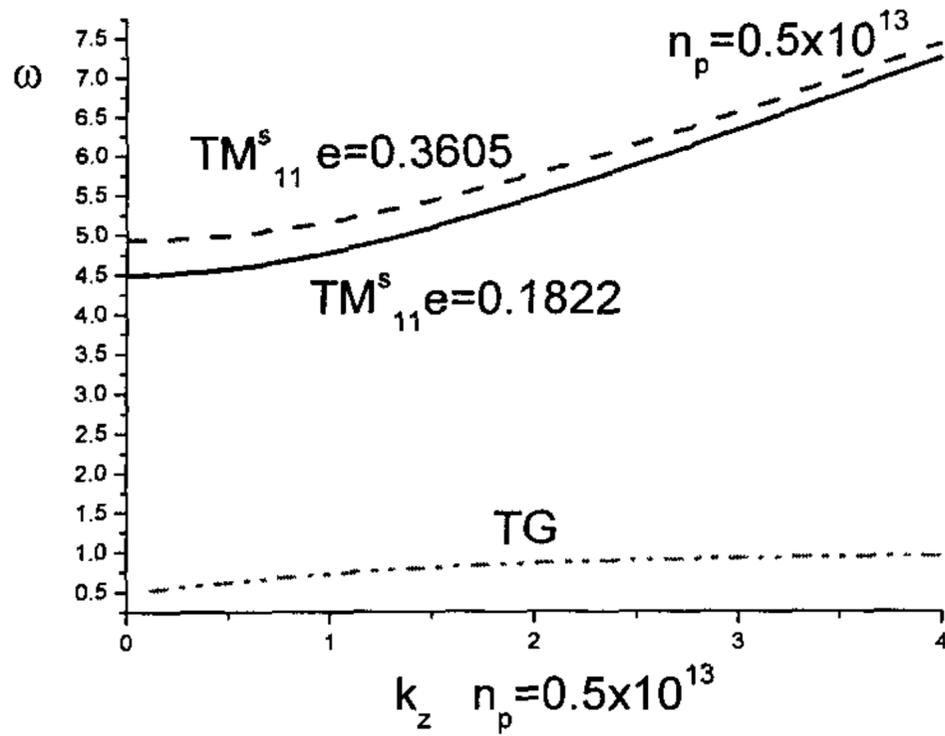


图 3.3-2 等离子体浓度为 0.5×10^{13} 时 TM_{11}^s 模的色散曲线

从上图 (3.3-1) 可以看出, TM_{11}^c 和 TM_{11}^s 的截止频率很接近, 若工作频率在 $\lambda_c = 1.6a$ 附近, 单模传输几乎不可能。图(3.3-2)是等离子体浓度 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$ 时, 偏心率分别为 0.1822, 0.3605 时的色散曲线, 可见等离子体浓度相同, 偏心率增大, 色散曲线有上移趋势, 但上移幅度不大。且产生很丰富的 TG 模, 图中

仅示出了一条。

与相同等离子体浓度的圆柱波导即当椭圆波导的偏心率取零时比较。

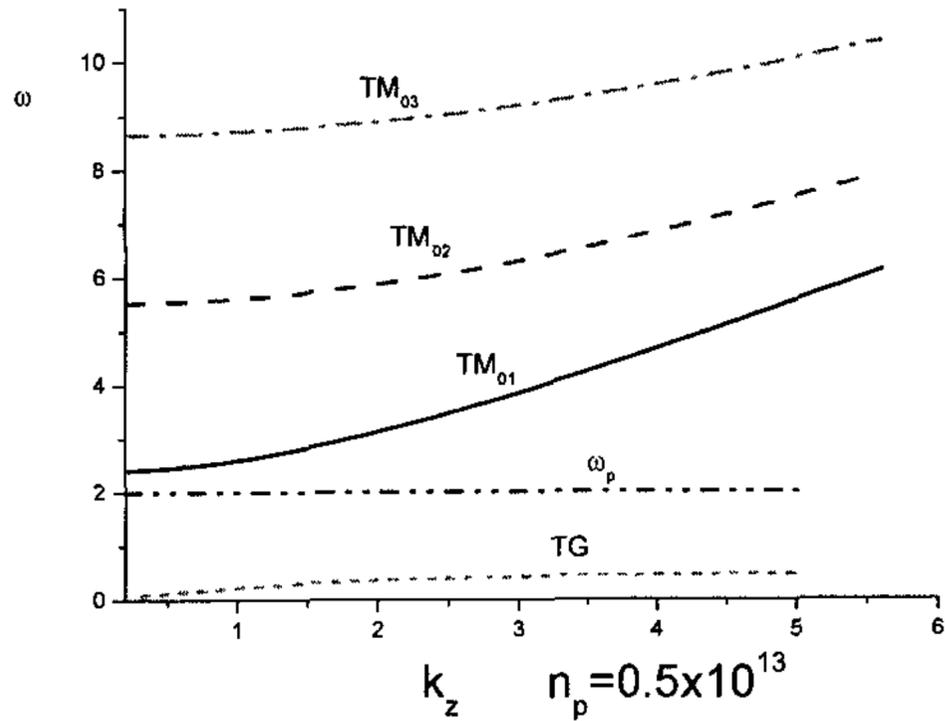


图 3.3-3 等离子体浓度为 0.5×10^{13} 时的圆波导的归一化色散曲线

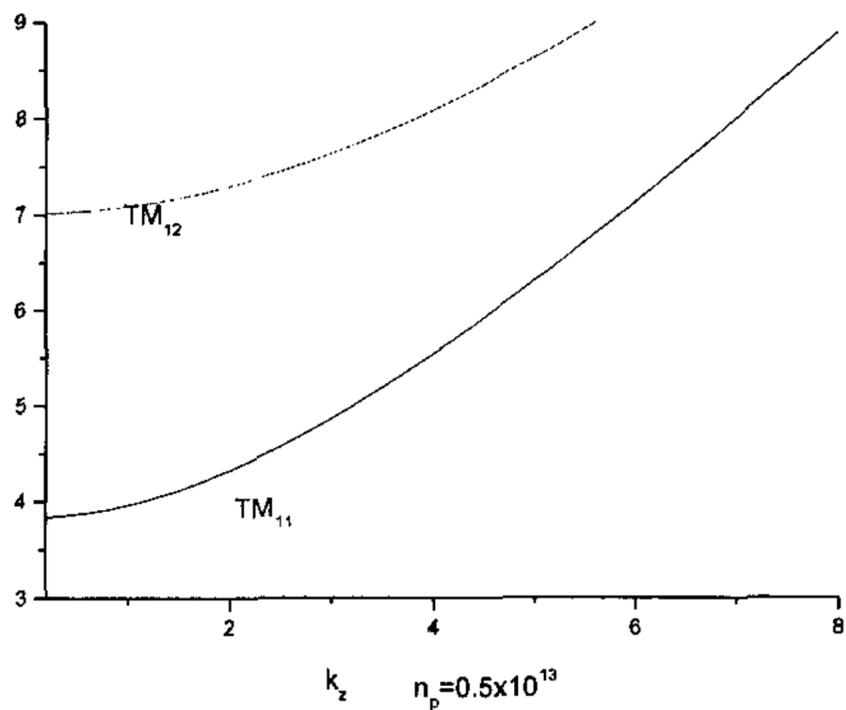


图 3.3-4 圆波导的色散曲线

图 (3.3-3)、(3.3-4) 是等离子体浓度 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$ 时的圆波导的几种归一化色散曲线，与已有的文献相吻合。 TM_{01}^o 比 TM_{11}^o 的色散曲线有所下降，这与椭圆波导的趋势相一致。

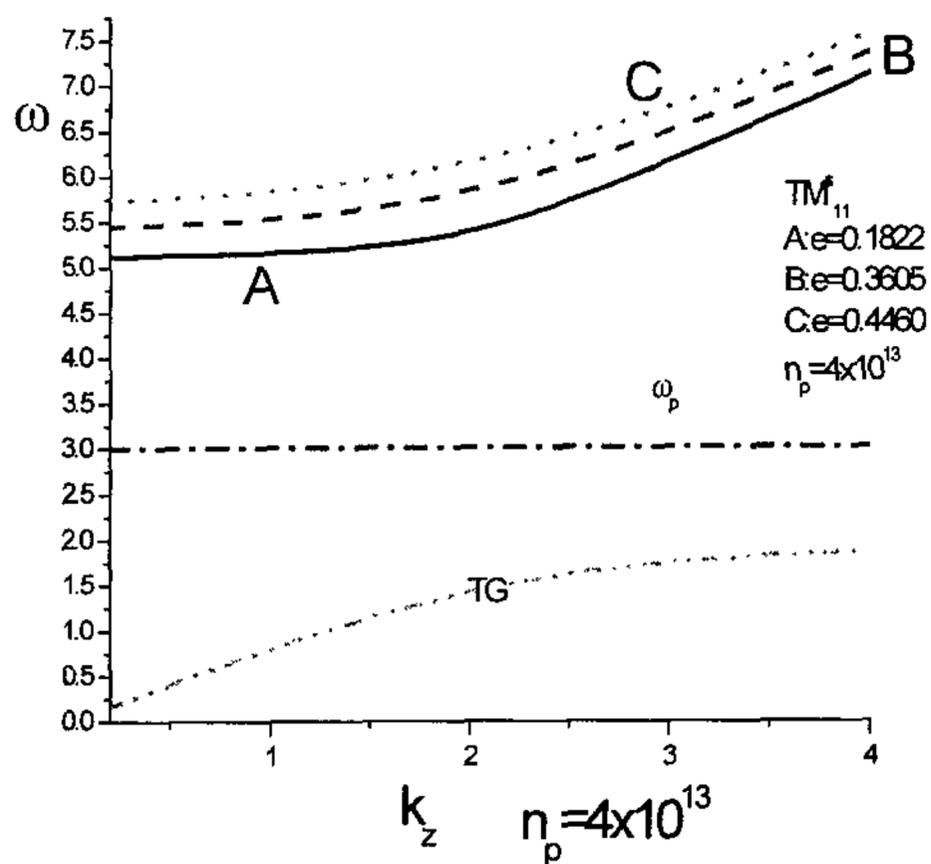


图 3.3-5 同等离子体浓度不同偏心率的 TM_{11}^s 波型的色散曲线

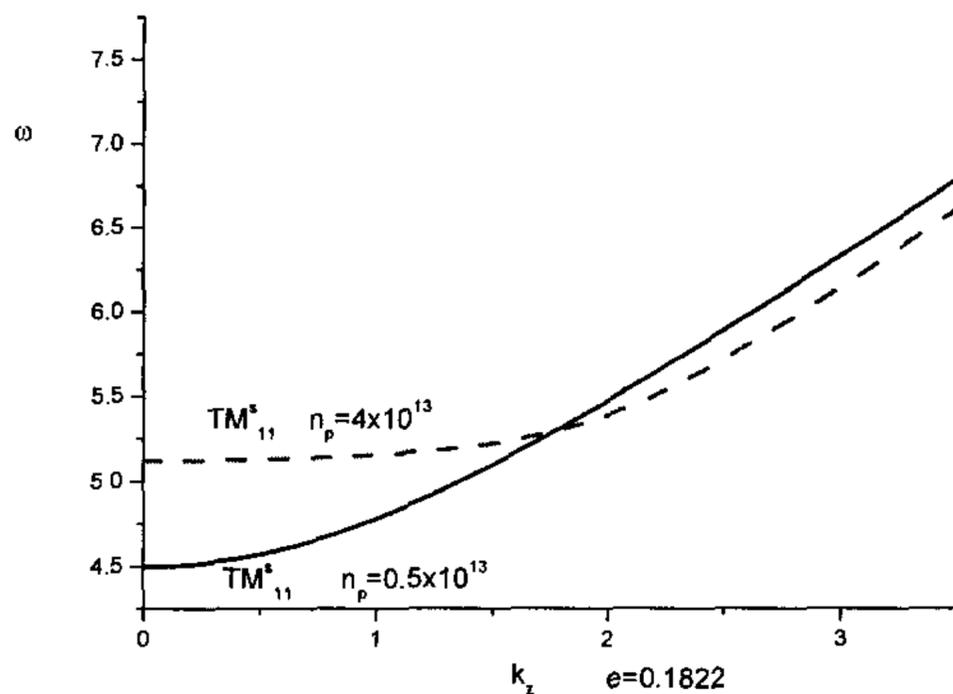


图 3.3-6 等偏心率不同等离子体浓度的 TM_{11}^s 的色散曲线

图 (3.3-6) 是不同等离子体浓度相同偏心率的 TM_{11}^s 波型的 $\omega - k_z$ 的曲线图。

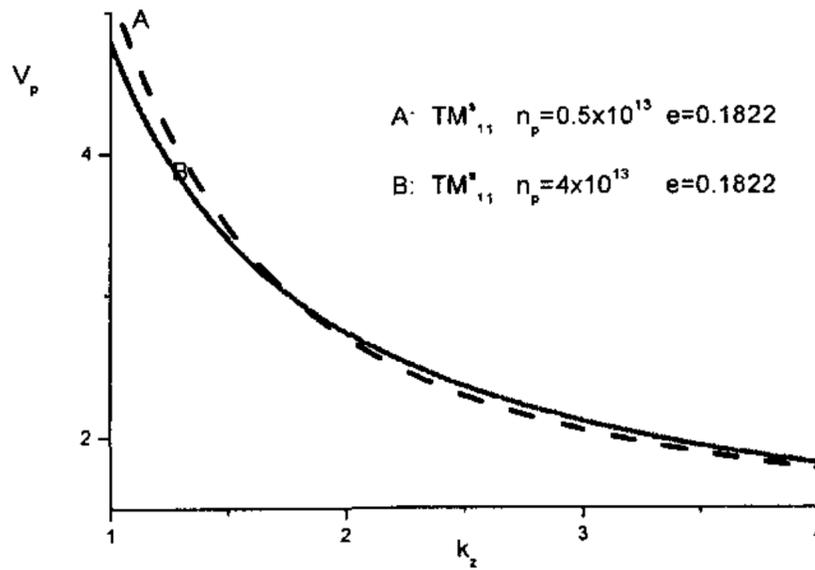


图 3.3-7 相同偏心率不同等离子体浓度的色散曲线

图(3.3-7)是不同等离子体浓度同偏心率的 TM_{11}^s 波型的 V_p-k_z 的色散曲线,可知等离子体浓度 $n_p = 4 \times 10^{13}$ 时的色散曲线比 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$ 时要平坦,所以可以通过改变等离子体的浓度来改变椭圆波导的色散平坦度。下图是偏心率固定时, k_z 和 ω 变化的色散曲线。

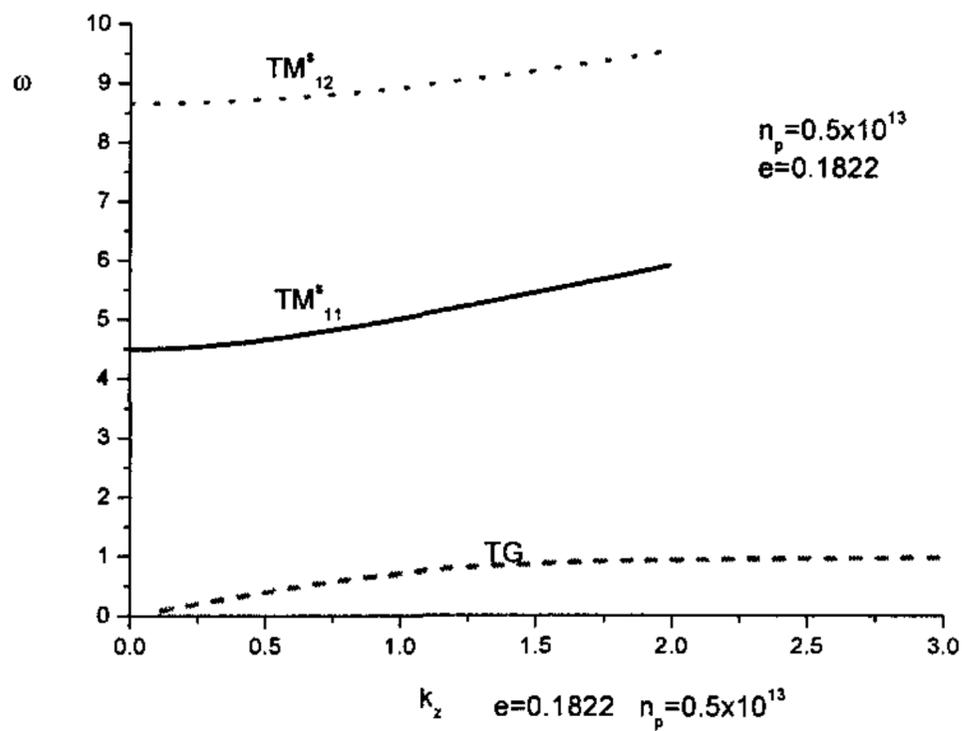


图 3.3-8 同等离子体浓度同偏心率的 TM^s 模式的色散曲线

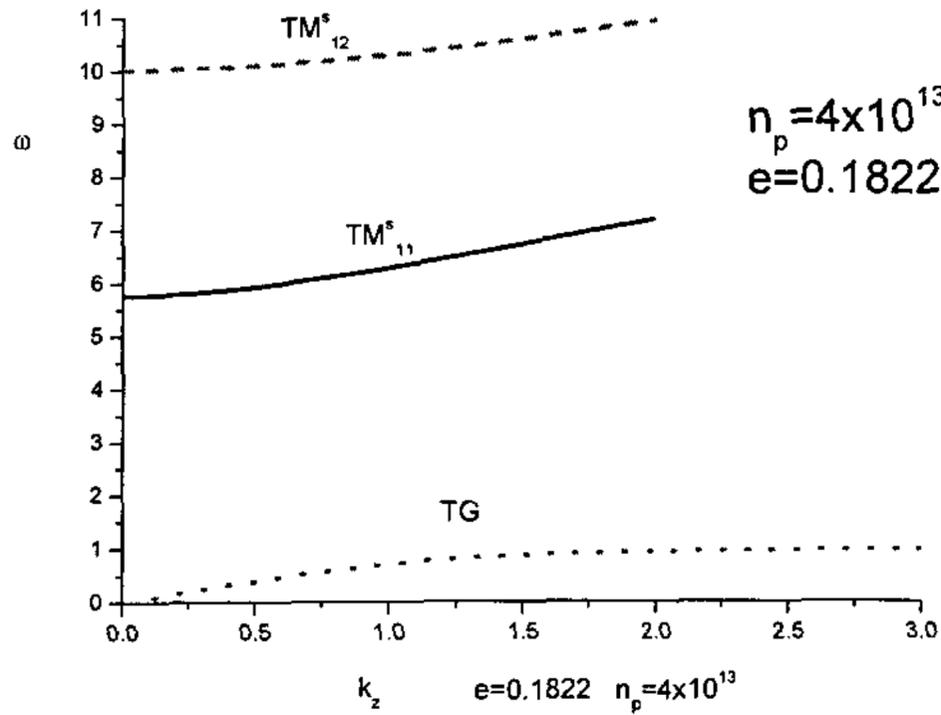


图 3.3-9 TM^s 波型的色散曲线

图 (3.3-8)、(3.3-9) 是椭圆波导偏心率相同，等离子体浓度分别为 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$ ， 4×10^{13} 时的色散曲线，电磁波传播的频率随着填充等离子体浓度的变化而改变，这样改变等离子体浓度，从而改变波传播的频率范围，起到频率调谐的作用。

3.3.2 TE 波型的色散分析

外加无穷大磁场时的等离子体填充的椭圆波导 TE 模式与等离子体浓度无关，其波动方程的本征值与 TM 波型的不同，它的本征值和没填充等离子体的空波导相同。如前所述，椭圆波导 TM 波型的波动方程的本征值与等离子体密度有很大关联，这样可以通过改变与等离子体相关的参量来改变 TM 波型的传输特性。

TE 场的场结构：

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty} C_{mp} C e_m(\zeta, Q) c e_m(\eta, Q) + \sum_{m=1}^{\infty} S_m S e_m(\zeta, Q) s e_m(\eta, Q)$$

其中，

$$Q = \frac{1}{4}h^2b, \lambda = j\beta, k_c = k^2 - \beta^2$$

对于 TE 场，在波导壁上即 $H_z = 0$ ，故边界条件是： $\frac{\partial H_z}{\partial \zeta} |_{\zeta=\zeta_0} = 0$

$$C'e_m(\zeta_0, Q) = 0$$

$$S'e_m(\zeta_0, Q) = 0$$

计算 TE 模的色散特性：

$$a = Q = \frac{h^2}{4}(-k_z^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0)$$

对上式进行归一化：

$$Q' = -k_z'^2 + \omega'^2$$

可以看出，外加无穷大磁场的 TE 波型与空波导的 TE 波型具有相同的特性。

3.4 无外加磁场的等离子体填充的椭圆波导色散分析

无外加磁场的等离子体填充时，波导中电磁波的 TE 波型与 TM 波型的波动方程其本征值形式相同。

在此条件下， $\delta = 0, \tau = 0$ ($B_0 = 0, \omega_{ce} = 0$)，电导率张量各元素可简化为：
有：

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 1 - \zeta^2 \\ \epsilon_2 = 0, \epsilon_g = 0 \\ \epsilon_3 = 1 - \zeta^2 = \epsilon_1 \end{cases}$$

可得 $b=0, d=0$;

波动方程变为：

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + aE_z = 0$$

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + cH_z = 0$$

$$a = \gamma^2 + k^2 \varepsilon_1 \quad c = \gamma^2 + k^2 \varepsilon_1$$

因此, E_z 和 H_z 的波动方程具有相同的形式, 特征值:

$$a = c = Q = \frac{1}{4} (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \omega_p^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2)$$

归一化后得:

$$Q' = \omega'^2 - \omega_p'^2 - k_z'^2$$

则 TM 波型色散方程为:

$$\text{偶模: } Ce_m(\zeta, (-k_z'^2 + \omega'^2 - \omega_p'^2)) = 0$$

$$\text{奇模: } Se_m(\zeta, (-k_z'^2 + \omega'^2 - \omega_p'^2)) = 0$$

TE 波型的色散方程为:

$$\text{偶模: } Ce'_m(\zeta, (-k_z'^2 + \omega'^2 + k_z'^2 \frac{\omega'^2}{\omega_p'^2} - \omega_p'^2)) = 0$$

$$\text{奇模: } Se'_m(\zeta, (-k_z'^2 + \omega'^2 + k_z'^2 \frac{\omega'^2}{\omega_p'^2} - \omega_p'^2)) = 0$$

用马丢函数无穷级数表示的有限项来计算出的 TM_{11}^c 在 $\eta = \cos\theta = 1$ 时随 ζ 变化的场结构如图:

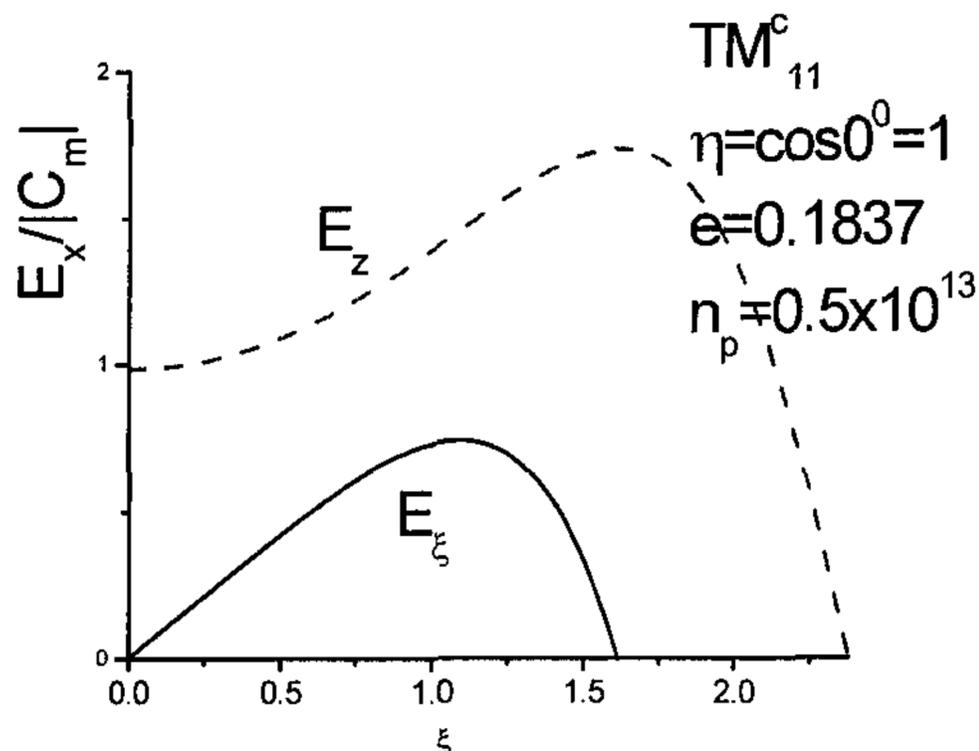


图 3.4-1 TM_{11}^c 模式的场结构

图 (3.4-1) 是电磁场在 ζ 方向的场结构, 填充的等离子体浓度为 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$, 偏心率 e 为 0.1837 的情况下, 可见, 电场在坐标原点不为零, 在椭圆两个焦点处最大, 在边界为零。

分别采用马丢函数的级数有限项和三种马丢函数的贝塞尔函数的乘积级数解解得的色散曲线图如下:

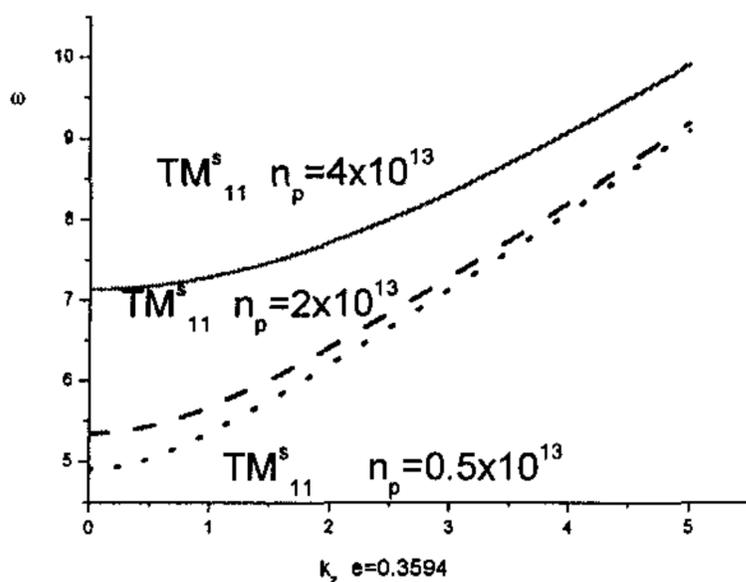


图 3.4-2 椭圆波导 TM_{11}^s 模式的色散曲线

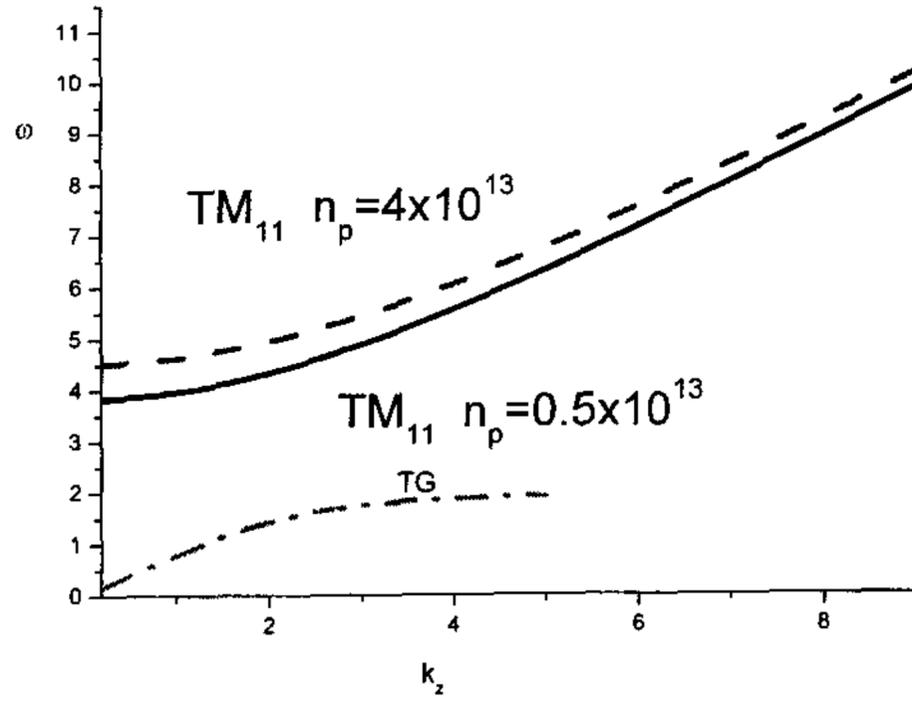


图 3.4-3 圆波导的归一化色散曲线

图 (3.4-2) 是当外加的引导磁场为零时, 且椭圆波导偏心率 $e=0.3594$ 时, 不同等离子体浓度的椭圆波导 TM_{11}^s 波型的色散曲线图。而图 (3.4-3) 是为了对比椭圆波导而计算的相同条件下的圆波导的色散曲线, 比较两图中的当等离子体浓度 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$, $n_p = 4 \times 10^{13}$ 时的 4 条曲线即知, 当改变等离子体浓度时, 椭圆波导 TM_{11}^s 波型的色散曲线比圆波导 TM_{11}^o 波型的色散曲线改变的幅度大的多。

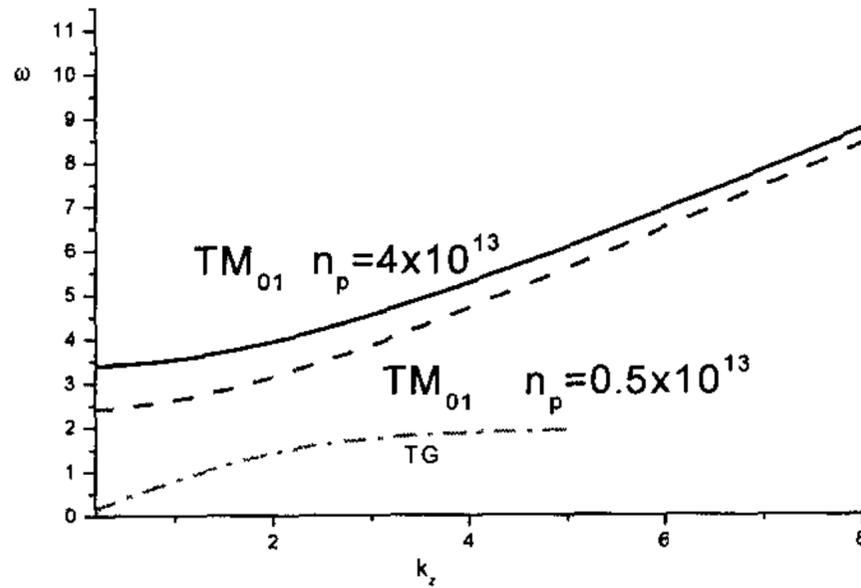


图 3.4-4 圆波导的归一化色散曲线

图 (3.4-3)、(3.4-4) 是圆波导在等离子体浓度 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$, $n_p = 4 \times 10^{13}$ 时

的色散曲线。图中表明，在同一等离子体浓度下， TM_{01}^o 波型的波导比 TM_{11}^o 的色散曲线要有所下移，这两种波型的色散曲线从浓度 $n_p = 4 \times 10^{13}$ 变化到浓度 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$ 时下移的幅度相近。但相较圆波导， TM_{11}^s 波型在偏心率 $e=0.3594$ 时，同一种波型，在等离子体浓度 $n_p = 4 \times 10^{13}$ 的色散曲线比浓度 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$ 的要下移的多，这样，椭圆波导在填充等离子体条件下，改变其浓度就能轻易的改变波的工作频率范围。

再分析椭圆波导在无外加磁场但填充等离子体条件下 TE 波型的色散特性。TE 波型的波动方程与 TM 波型的波动方程形式相同，不同的只是边界条件。下图是马丢函数 $ce_1(Q, \eta)$ 随 η 变化的曲线图：

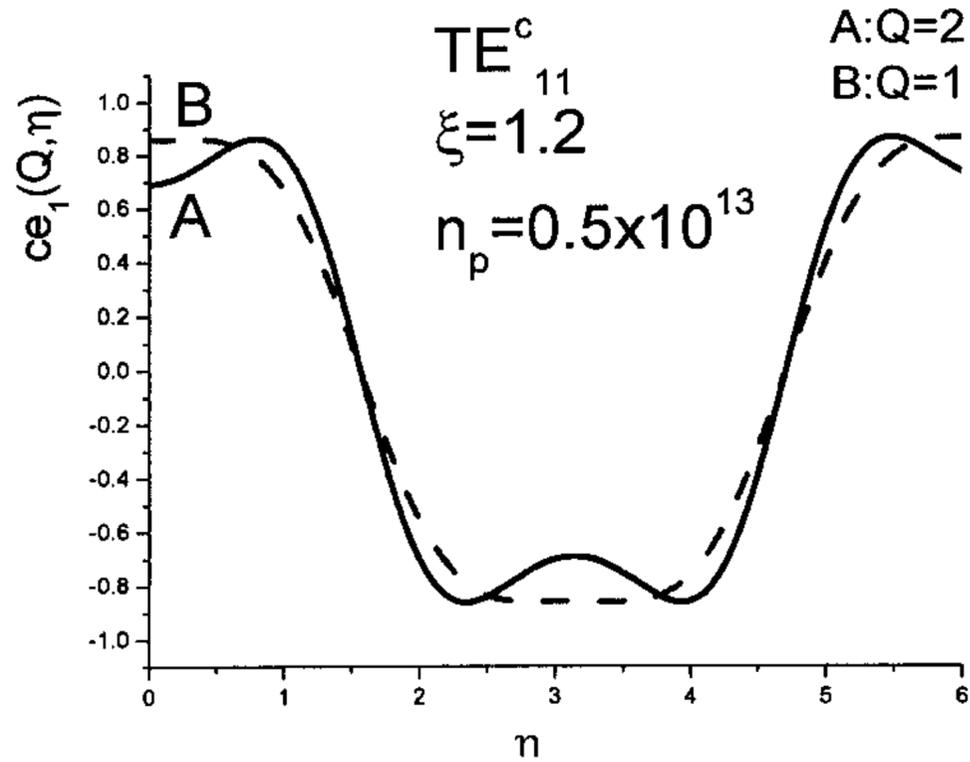


图 3.4-5 马丢函数 $ce_1(Q, \eta)$ 随 η 变化的曲线

下图是 ζ 固定 TE 波型的场随 η 变化的场结构图：

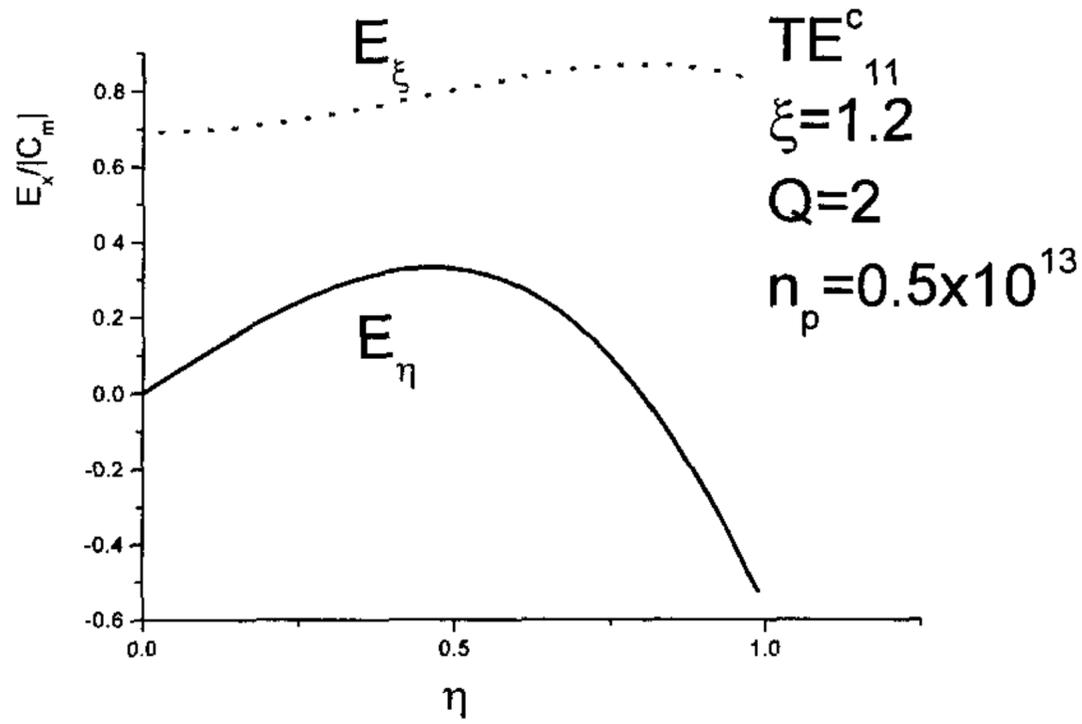


图 3.4-6 TE_{11}^c 波型的波在 ζ 固定时电磁场随 ζ 变化的曲线

图 (3.4-6) 是电磁场在 ζ 固定时, TE 波型的场随 η 变化的场结构, 填充的等离子体浓度为 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$ 。

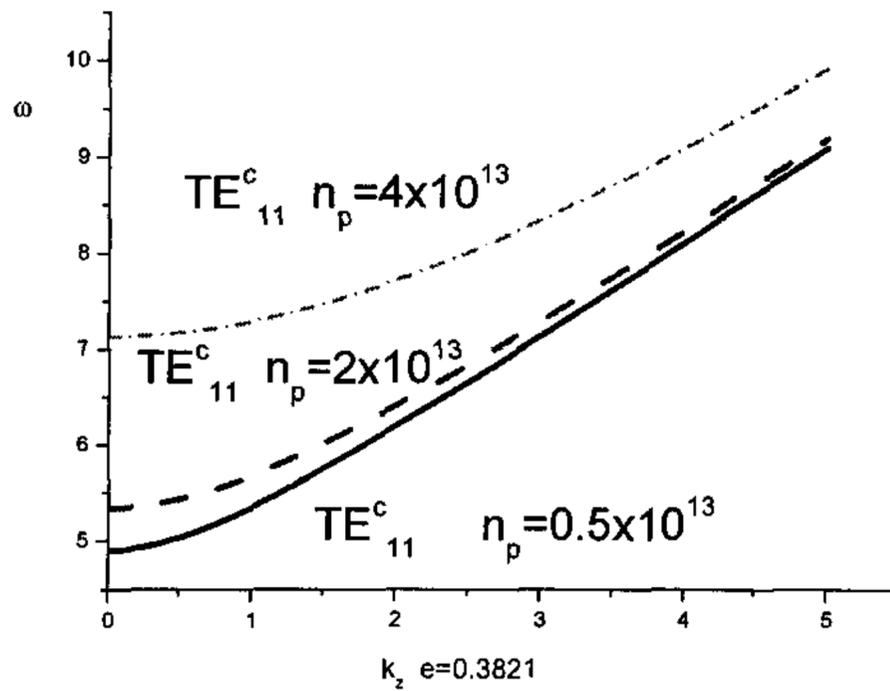


图 3.4-7 椭圆波导 TE_{11}^c 模不同等离子体浓度下的色散曲线

比较图 (3.4-2) 与图 (3.4-7), 两者在不同偏心率条件下得到同样的曲

线，只是 TM_{11}^s 波型的偏心率 $e=0.3594$ 比 TM_{11}^c 波型的 $e=0.3821$ 要小，可见，改变波导尺寸， TM_{11}^s 波型与 TM_{11}^c 波型可工作在相同的频率范围。

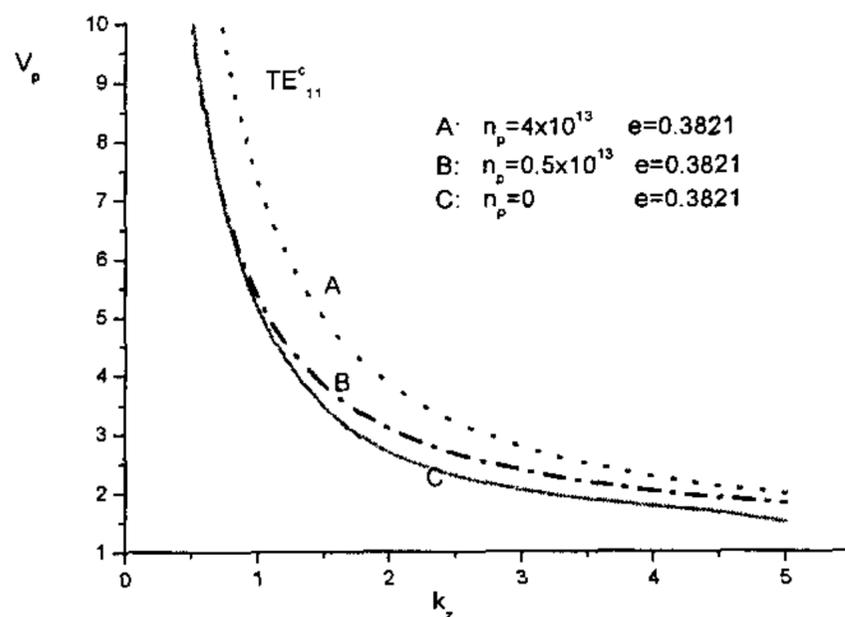


图 3.4-8 填充不同等离子体浓度的波型的 V_p — k_z 色散曲线

图 (3.4-8) 中 A、B、C 分别是偏心率相同不同等离子体浓度时的色散曲线，A 的浓度为 $n_p = 4 \times 10^{13}$ ，B 的浓度为 $n_p = 0.5 \times 10^{13}$ ，C 的浓度为零，可见，A 的色散性要好。

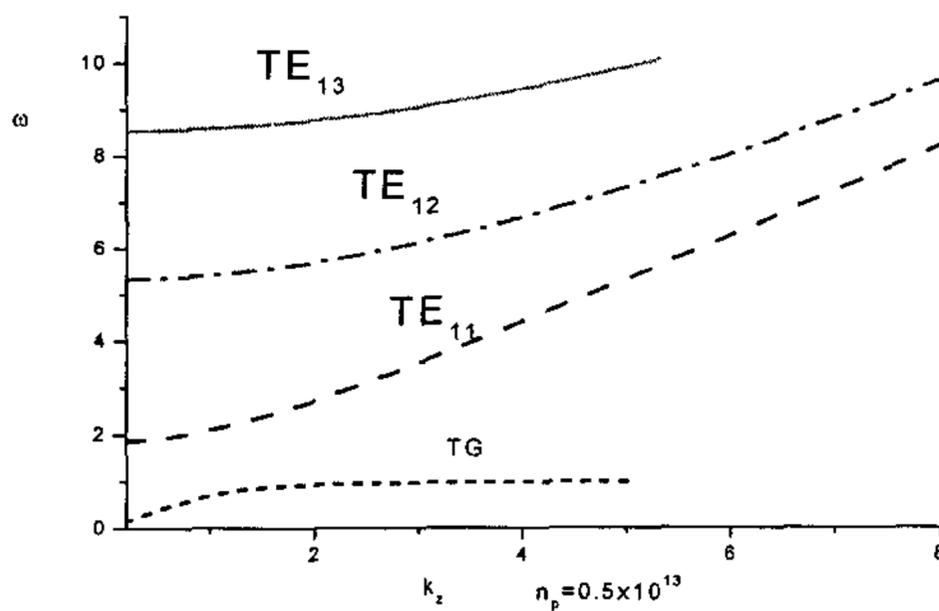


图 3.4-9 圆波导的归一化色散曲线

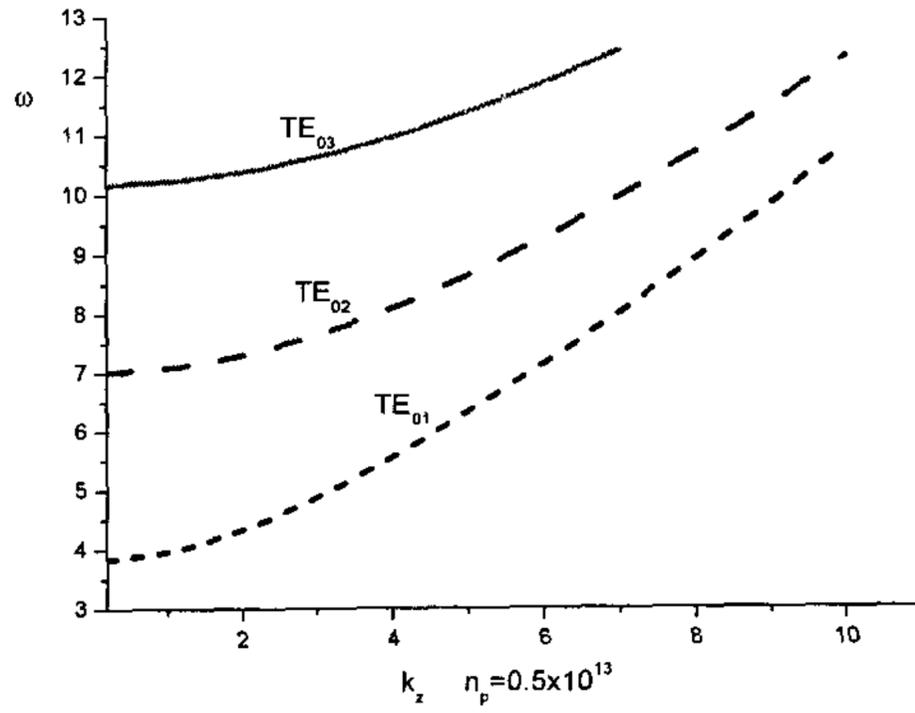


图 3.4-10 圆波导的归一化色散曲线

从上图 (3.4-9)、(3.4-10) 可以看出波导尺寸不变, 圆波导几种模式的波型色散特性的比较。

下图示出了等离子体浓度不变, 改变波导尺寸, 归一化的 k_z 随 ω 的变化。

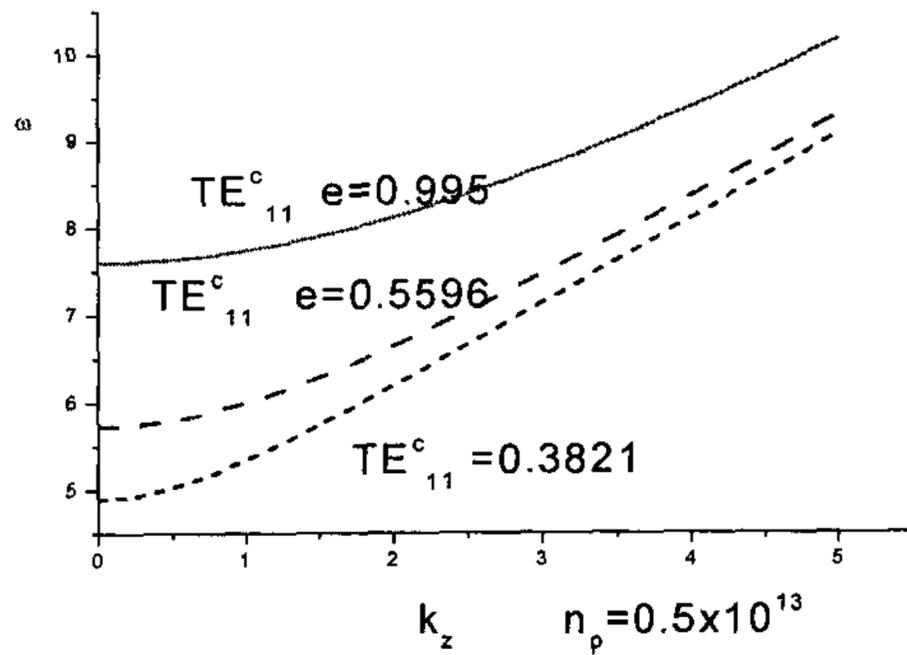


图 3.4-11 不同偏心率下的椭圆波导 TE_{11}^c 模的色散曲线

图 (3.4-11) 是椭圆波导 TE_{11}^c 波型的波在等离子体浓度不变时, 改变波导尺

寸, 即椭圆偏心率 e , 其色散特性的变化曲线, 与图 (3.4-7) 比较, 图 (3.4-7) 是椭圆波导尺寸不变, 改变等离子体浓度而得到的色散曲线, 可见, 两者变化不大。

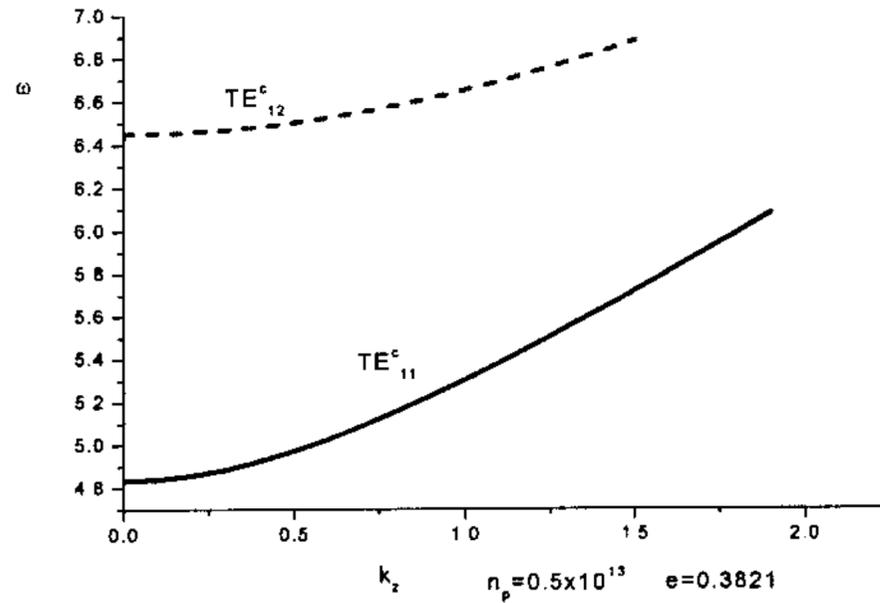


图 3.4-12 椭圆波导在相同条件下 TE_{11}^c 与 TE_{12}^c 的比较

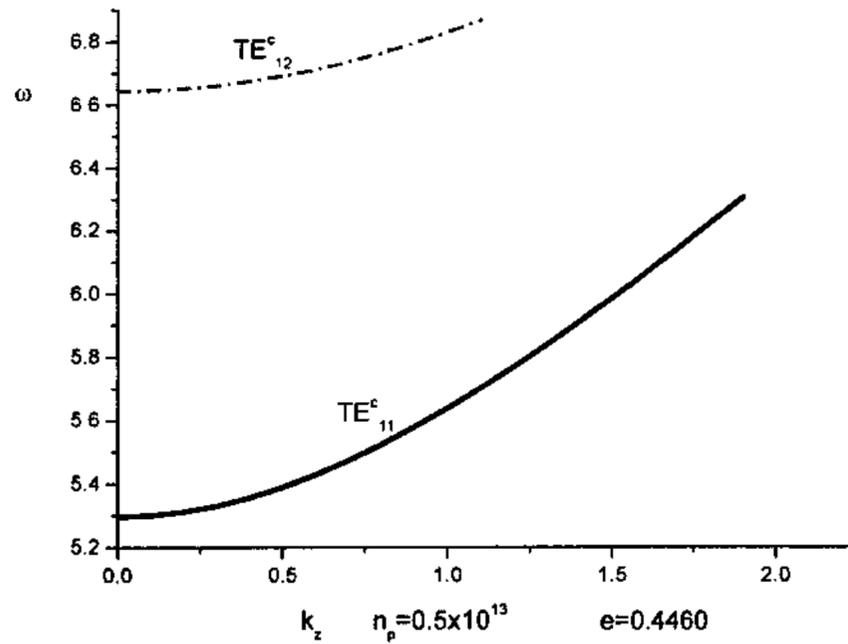


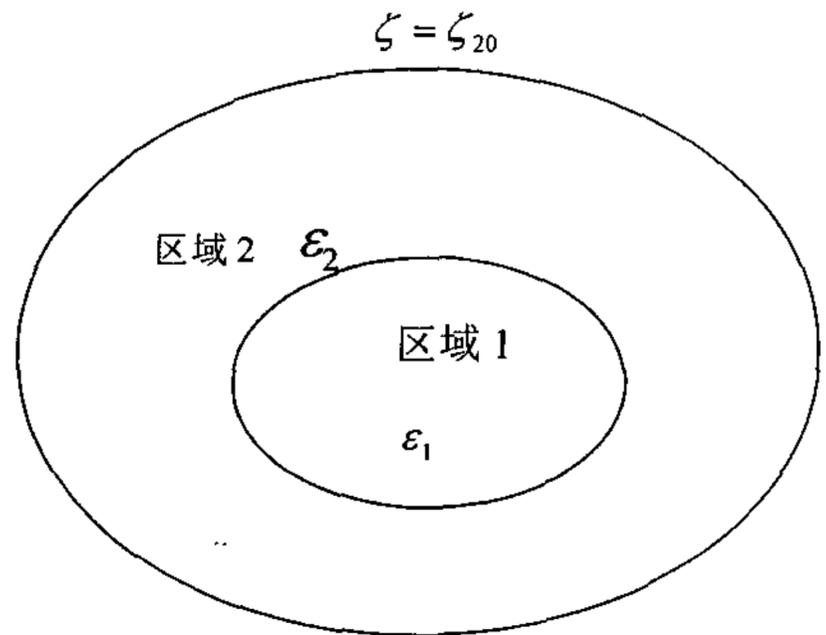
图 3.4-13 椭圆波导在相同条件下 TE_{11}^c 与 TE_{12}^c 的比较

图 (3.4-12)、(3.4-13) 是椭圆波导波型 TE_{11}^c 、 TE_{12}^c 分别在相同偏心率, 相同等离子体浓度下的两种模式的色散曲线。

第四章 部分填充介质的椭圆波导理论研究

4.1 引言

本章所用系统结构示意图如图(4-1)^[24]所示, 区域1为介电常数为 ϵ_1 的区域, 边界上 $\zeta = \zeta_{10}$, 区域2为介电常数为 ϵ_2 的区域, 边界上 $\zeta = \zeta_{20}$ 。



图(4-1)

圆波导在平衡条件激励下的混合模式已经得到很广泛的研究, 并在天线系统中天线的反馈部分广泛地作为高性能的反射器。当在自由空间中辐射时, 它产生了一个理想的没有交叉的偏振成分的对称的辐射模式。在圆波导中为了支持一个平衡模式的混合模, 要求满足各向异性的边界条件, 如圆周方向和纵向的表面电抗 X_ζ 和 X_z 在圆周边界上需满足 $X_\zeta X_z = -Z_1^2$, 其中 Z_1 是波导内填充的介质的阻抗。最常用的产生满足边界条件方法是采用波纹波导, 这样的波纹波导近年来得到了广泛的研究, 尤其用在天线的馈元部分。长久以来, 部分填充的圆波导被看作是一种便宜的, 有成本效益且具有足够带宽的带名词。圆对称的平衡混合模式的波导辐射出一对称的模式。在一些应用中需要非对称的电子束, 这时采用椭圆波导较好, 尽管它导致了线性的横向极化场。已经证实在椭圆波导中一种混合模式在圆周方向处处可以辐射出成形电子束。椭圆波导喇

叭的特性还没有得到应有的研究，其中一个困难是制造工艺上的，另一个是分析上的。另外，一些研究表明，椭圆波导的混合模式一定程度上限制了带宽性能，这样，我们不免要问，象部分填充圆波导那样，椭圆波导能否也可以支持平衡混合模式的波型，它在工艺制造上比波纹波导容易，有可能具有很好的带宽特性。另外，一些研究表明，椭圆波导的混合模式一定程度上限制了带宽性能，这样，我们不免要问，象部分填充圆波导那样，椭圆波导能否也可以支持平衡混合模式的波型，它在工艺制造上比波纹波导容易，有可能具有很好的带宽特性。

4.2 色散方程的推导

椭圆波导中可以传播四种模式的波型，奇型的 TE 波和 TM 波，偶型的 TE 波和 TM 波，它们一般用 s 和 c 来区分奇偶模。这两种模式的波以同样的速度在椭圆波导中传播，所以在椭圆波导中我们能得到同时有 TE 和 TM 波型的混合模式，假设是各向异型的边界条件，则 TE 和 TM 场组合成混合模式的唯一可能是 TE^c 和 TM^s 的线性组合或者是 TE^s 和 TM^c 的线性组合，在圆波导中，基模 HE_{11} 是用 $\gamma TE_{11} + TM_{11}$ 来表征的，其中， γ 是模式间耦合系数，为了研究部分填充的椭圆波导的一些特性，我们可以作这样的假设，即椭圆波导中混合模式的基模可以用圆波导中用来表示混合模式基模的方法来表示。对于椭圆波导，在介质区内，我们这样来描述混合模式：

$$HE_{11}^c = \gamma_c TE_{11}^c + TM_{11}^s$$

$$HE_{11}^s = \gamma_s TE_{11}^s + TM_{11}^c$$

当从部分填充的波导中计算辐射场时，通常忽略了 2 区所起的作用。因为横向场是被大面积的介质区所支配。这样对于混合模式的基模来说 $\gamma_c = \gamma_s = 1$ ，在区域 1, 对于偶模 HE_{11} ， TE_{11}^c 和 TM_{11}^s 的场分别用下面的公式来表示：

$$\varphi_c^e = \frac{-j\omega\mu}{Z_1} Ce_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_c^{(1)}) e^{-jk_z z}$$

$$\varphi_s^m = j\omega\epsilon_1 Se_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) se_1(\eta_1, q_c^{(1)}) e^{-jk_z z}$$

其中, Z_1 是介质的阻抗, $q_c^{(1)} = \frac{h_1^2}{4}(k_1^2 - k_z^2)$, $k_1^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_1$,

$$h_1 = a_1 \cosh^{-1} \zeta_{10}$$

所以偶模 HE_{11}^c 在 $z=0$ 时的各场分量如下:

$$E_{\zeta_1}^c = \frac{-jk_1}{L_1} [-\gamma_c Ce_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) ce_1'(\eta_1, q_c^{(1)}) + \overline{k_z^c} Se_1'(\zeta_1, q_c^{(1)}) se_1(\eta_1, q_c^{(1)})]$$

$$E_{\eta_1}^c = \frac{-jk_1}{L_1} [\gamma_c Ce_1'(\zeta_1, q_c^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_c^{(1)}) + \overline{k_z^c} Se_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) se_1'(\eta_1, q_c^{(1)})]$$

$$E_{z_1}^c = \frac{4}{h_1^2} [q_c^{(1)} Se_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) se_1(\eta_1, q_c^{(1)})] \quad (4-1)$$

$$Z_1 H_{\zeta_1}^c = \frac{-jk_1}{L_1} [-\gamma_c \overline{k_z^c} Ce_1'(\zeta_1, q_c^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_c^{(1)}) - Se_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) se_1'(\eta_1, q_c^{(1)})]$$

$$Z_1 H_{\eta_1}^c = \frac{-jk_1}{L_1} [-\gamma_c \overline{k_z^c} Ce_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) ce_1'(\eta_1, q_c^{(1)}) + Se_1'(\zeta_1, q_c^{(1)}) se_1(\eta_1, q_c^{(1)})]$$

$$E_{z_1}^c = -\gamma_c \frac{4}{h_1^2} [q_c^{(1)} Ce_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_c^{(1)})]$$

其中, $\overline{k_z^c} = k_z^c / k_1$, $L_1 = h_1 (\cosh^2 \zeta_1 - \cosh^2 \eta_1)^{1/2}$

同样的, 对于, 而对于奇模 HE_{11}^s , TE_{11}^c 和 TM_{11}^s 的场分别用下面的公式来表示:

$$\varphi_s^c = \frac{j\omega\mu}{Z_1} Se_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) se_1(\eta, q_s^{(1)}) e^{-jk_z^c z}$$

$$\varphi_c^m = j\omega\varepsilon_1 Ce_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) se_1(\eta, q_s^{(1)}) e^{-jk_z^c z}$$

$$q_s^{(1)} = \frac{h_1^2}{4} (k_1^2 - k_z^s{}^2)$$

所以奇模 HE_{11}^s 在 $z=0$ 时的各场分量如下:

$$E_{\zeta_1}^s = \frac{-jk_1}{L_1} [\gamma_s Se_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) se_1(\eta_1, q_s^{(1)}) + \overline{k_z^s} Ce_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_s^{(1)})]$$

$$E_{\eta_1}^s = \frac{-jk_1}{L_1} [-\gamma_s Se_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) se_1(\eta_1, q_s^{(1)}) + \overline{k_z^s} Ce_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_s^{(1)})]$$

$$E_{z_1}^s = \frac{4}{h_1^2} [q_s^{(1)} Ce_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_s^{(1)})] \quad (4-2)$$

$$Z_1 H_{\zeta_1}^s = \frac{-jk_1}{L_1} [-\gamma_s \overline{k_z^s} Se_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) se_1(\eta_1, q_s^{(1)}) - Ce_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_s^{(1)})]$$

$$Z_1 H_{\eta_1}^s = \frac{-jk_1}{L_1} [-\gamma_s \overline{k_z^s} Se_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) se_1(\eta_1, q_s^{(1)}) + Ce_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) ce_1(\eta_1, q_s^{(1)})]$$

$$E_{z_1}^s = -\gamma_s \frac{4}{h_1^2} [q_s^{(1)} Se_1(\zeta_1, q_s^{(1)}) se_1(\eta_1, q_s^{(1)})]$$

在平衡混合模式下,当 $\gamma_c = \gamma_s = 1$ 时,由(4-1)(4-2)两组方程表示的场分量应该有相同的传播常数。在这个前提下,我们可以得到, $E^c = Z_1 H^s$,
 $E^s = -Z_1 H^c$ 。

在区域2:

$$\varphi_c^e = \frac{-j\omega\mu}{Z_2} \beta_c M_c^e(\zeta_2, q_c^{(2)}) ce_1(\eta_2, q_c^{(2)}) e^{-jk_z^c z}$$

$$\varphi_s^m = j\omega\epsilon_2 \alpha_c M_s^m(\zeta_2, q_c^{(2)}) se_1(\eta_2, q_c^{(2)}) e^{-jk_z^c z}$$

其中, β_c , α_c 是未知的模式耦合系数, $Z_2 = \sqrt{\mu/\epsilon_2}$, $k_z^c = \omega^2 \mu \epsilon_2$,
 $h_2 = a_2 \cosh^{-1} \zeta_{20}$

而

$$M_c^e = Ce_1(\zeta, q) Fey_1(\zeta_{20}, q) - Ce_1(\zeta_{20}, q) Fey_1(\zeta, q)$$

$$M_s^m = Se_1(\zeta, q) Gey_1(\zeta_{20}, q) - Se_1(\zeta_{20}, q) Gey_1(\zeta, q)$$

其中, $Fey_1(\zeta, q)$, $Gey_1(\zeta, q)$ 分别是偶模和奇模的第二类修正的马丢函数。

$$\varphi_s^e = \frac{j\omega\mu}{Z_2} \beta_s M_s^e(\zeta_2, q_s^{(2)}) se_1(\eta_2, q_s^{(2)}) e^{-jk_z^e z}$$

$$\varphi_s^m = j\omega\varepsilon_2 \alpha_s M_c^m(\zeta_2, q_s^{(2)}) ce_1(\eta_2, q_s^{(2)}) e^{-jk_z^m z}$$

$$\text{其中, } q_s^{(2)} = \frac{h_2^2}{4} (k_2^2 - k_z^2)$$

而

$$M_s^e = Se_1(\zeta, q) Gey_1'(\zeta_{20}, q) - Se_1'(\zeta_{20}, q) Gey_1(\zeta_2, q)$$

$$M_c^m = Ce_1(\zeta, q) Fey_1(\zeta_{20}, q) - Ce_1(\zeta_{20}, q) Fey_1(\zeta, q)$$

由以上各式得到当 $z=0$, 偶模时区域 2 内的电磁场各分量分别为:

$$E_{\zeta_2}^c = -\frac{jk_2}{L_2} [-\beta_c M_c^e(\zeta_2, q_c^{(2)}) ce_1'(\eta_2, q_c^{(2)}) + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \alpha_c \bar{k}_z^c M_s^m(\zeta_2, q_c^{(2)}) se_1(\eta_2, q_c^{(2)})]$$

$$E_{\eta_2}^c = -\frac{jk_2}{L_2} [\beta_c M_c^e(\zeta_2, q_c^{(2)}) ce_1(\eta_2, q_c^{(2)}) + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \alpha_c \bar{k}_z^c M_s^m(\zeta_2, q_c^{(2)}) se_1'(\eta_2, q_c^{(2)})]$$

$$E_{z_2}^c = \frac{4}{h_2} q_c^{(2)} \alpha_c M_s^m(\zeta_2, q_c^{(2)}) se_1(\eta_2, q_c^{(2)}) \quad (4-3)$$

$$Z_2 H_{\zeta_2}^c = -\frac{jk_2}{L_2} [-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \beta_c \bar{k}_z^c M_c^e(\zeta_2, q_c^{(2)}) ce_1(\eta_2, q_c^{(2)}) + \alpha_c M_s^m(\zeta_2, q_c^{(2)}) se_1'(\eta_2, q_c^{(2)})]$$

$$Z_2 H_{\eta_2}^c = -\frac{jk_2}{L_2} [-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \bar{k}_z^c \beta_c M_c^e(\zeta_2, q_c^{(2)}) ce_1'(\eta_2, q_c^{(2)}) + \alpha_c M_s^m(\zeta_2, q_c^{(2)}) se_1(\eta_2, q_c^{(2)})]$$

$$Z_2 H_{z_2}^c = \frac{4}{h_2} q_c^{(2)} \beta_c M_c^e(\zeta_2, q_c^{(2)}) ce_1(\eta_2, q_c^{(2)})$$

$$\text{其中, } L_2 = h_2 (\cosh^2 \zeta_2 - \cosh^2 \eta_2)^{1/2}$$

同样, 奇型场各分量为:

$$\begin{aligned}
 E_{\zeta_2}^s &= -\frac{jk_2}{L_2} [\beta_s M_s^e(\zeta_2, q_s^{(2)}) se_1(\eta_2, q_s^{(2)}) + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \alpha_s \bar{k}_z^s M_c^{m'}(\zeta_2, q_s^{(2)}) ce_1(\eta_2, q_s^{(2)})] \\
 E_{\zeta_2}^s &= -\frac{jk_2}{L_2} [-\beta_s M_s^{e'}(\zeta_2, q_s^{(2)}) se_1(\eta_2, q_s^{(2)}) + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \alpha_s \bar{k}_z^s M_c^m(\zeta_2, q_s^{(2)}) ce_1'(\eta_2, q_s^{(2)})] \\
 E_{z_2}^s &= \frac{4}{h_2} q_s^{(2)} \alpha_s M_c^m(\zeta_2, q_s^{(2)}) ce_1(\eta_2, q_s^{(2)}) \tag{4-4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_2 H_{\zeta_2}^s &= -\frac{jk_2}{L_2} \left[\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \bar{k}_z^s \beta_s M_s^e(\zeta_2, q_s^{(2)}) se_1(\eta_2, q_s^{(2)}) - \alpha_s M_c^m(\zeta_2, q_s^{(2)}) ce_1'(\eta_2, q_s^{(2)}) \right] \\
 Z_2 H_{\zeta_2}^s &= -\frac{jk_2}{L_2} \left[\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \bar{k}_z^s \beta_s M_s^e(\zeta_2, q_s^{(2)}) se_1'(\eta_2, q_s^{(2)}) + \alpha_s M_c^{m'}(\zeta_2, q_s^{(2)}) ce_1(\eta_2, q_s^{(2)}) \right] \\
 Z_2 H_{z_2}^s &= \frac{4}{h_2^2} q_s^{(2)} \beta_s M_s^e(\zeta_2, q_s^{(2)}) se_1(\eta_2, q_s^{(2)})
 \end{aligned}$$

欲求波传播常数 k_z^c, k_z^s 和模式耦合系数 α, β, γ ，只要在边界 $\zeta = \zeta_{10}$ 处满足电磁场各分量的连续性即可，本章所用的系统结构图（用参数 h_1, ζ_{10} 和 h_2, ζ_{20} 来表征）是同心椭圆，如果这两个椭圆共焦，即 $h_1 = h_2$ ，那么椭圆柱坐标系 (ζ_1, η_1, z) 和 (ζ_2, η_2, z) 重合，在这样的条件下，在边界 $\zeta = \zeta_{10}$ 处如要严格匹配边界条件，则需每个区域的场都用无穷项多个模式来表示。对于太复杂的解，我们只要分析其主要的模式即可，偶模是上面用方程组 (4-1) 和 (4-3) 表示的场，需要满足边界条件：在边界 $\zeta = \zeta_{10}$ 处，

$$E_{\eta_1}^c = E_{\eta_2}^c, \quad E_{z_1}^c = E_{z_2}^c, \quad H_{\eta_1}^c = H_{\eta_2}^c, \quad H_{z_1}^c = H_{z_2}^c$$

同样的, 对于奇模 (用上面方程组(4-2)(4-4) 表示的场), 在边界 $\zeta = \zeta_{10}$ 处,

满足:

$$E_{\eta_1}^s = E_{\eta_2}^s, \quad E_{z_1}^s = E_{z_2}^s, \quad H_{\eta_1}^s = H_{\eta_2}^s, \quad H_{z_1}^s = H_{z_2}^s$$

由 (4-1) (4-3)所示场结构, 再由边界条件得:

$$\frac{4}{h_1^2} [q_c^{(1)} Se_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) se_1(\eta_1, q_c^{(1)})] = \frac{4}{h_2} q_c^{(2)} \alpha_c M_s^m(\zeta_2, q_c^{(2)}) se_1(\eta_2, q_c^{(2)}) \Big|_{\zeta=\zeta_{10}} \quad (4-5)$$

记 $\delta_1 = 1 - h_1/h_2$, 且同心椭圆两个焦点间相距很近, $\zeta_1 = \zeta_{10}$, $\delta_h \rightarrow 0$ 已知, $\delta_h \rightarrow 0$, 则有:

$$\zeta_2 \approx \zeta_{10} + \delta_\zeta \quad \eta_2 = \eta_1 + \delta_\eta$$

其中,

$$\delta_\zeta = -\frac{1}{2} \delta_h \frac{\sinh 2\zeta_{10}}{\sin^2 \eta_1 + \sinh^2 \zeta_{10}}$$

$$\delta_\eta = \frac{1}{2} \delta_h \frac{\sin 2\eta_1}{\sin^2 \eta_1 + \sinh^2 \zeta_{10}} \quad (4-6)$$

把 (4-6) 两个式子代入 (4-5), 且把 (4-5) 式的右边展开成泰勒级数:

$$\frac{1}{h_1^2} [q_c^{(1)} Se_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) se_1(\eta_1, q_c^{(1)})] = \frac{1}{h_2} q_c^{(2)} \alpha_c M_s^m(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) se_1(\eta_1, q_c^{(2)}) +$$

$$\delta_\zeta M_s^m(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) se_1(\eta_1, q_c^{(2)}) + \delta_\eta M_s^m(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) se_1'(\eta_1, q_c^{(2)}) + 0(\delta_\zeta + \delta_\eta) \quad (4-7)$$

这个方程中马丢函数可以记为：

$$se_1(\eta_1, q_c^{(2)}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)} \sin(2n+1)\eta_1$$

(4-7)式两边同时乘以 $\sin \eta_1 (\sin^2 \eta_1 + \sinh^2 \zeta_{10})$ ，括号里的项是 $\delta_\eta, \delta_\zeta$ 的分母，

再进行 $0 \leq \eta_1 \leq 2\pi$ 间的积分，得到：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1^2} q_c^{(1)} Se_1(\zeta_1, q_c^{(1)}) \left\{ B_0^{(1)} \left(\frac{3}{4} + \sinh^2 \zeta_{10} - \frac{1}{4} B_1^{(1)} \right) \right\} = \\ & \frac{1}{h_2} q_c^{(2)} \alpha_c [M_s^m(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \left\{ B_0^{(2)} \left(\frac{3}{4} + \sinh^2 \zeta_{10} + \frac{1}{4} \delta_h \right) - B_1^{(2)} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \delta_h \right) \right\} \\ & - \sinh 2\zeta_{10} M_s^m(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \frac{1}{2} \delta_h B_0^{(2)}] \end{aligned}$$

我们用同样方法处理 z 向场：

$$ce_1(\eta_1, q_c^{(2)}) = \sum A_n^{(2)} \cos(2n+1)\eta_1$$

但它两边同乘以 $\cos \eta_1 (\sin^2 \eta_1 + \sinh^2 \zeta_{10})$ ，再进行积分。

η 向的场也用同样的方法处理。记：

$$L_1 / L_2 \approx \frac{h_1}{h_2} \left[1 - \frac{1}{4} \delta_h \frac{\sin^2 2\eta_1 - \sinh^2 2\zeta_{10}}{\sin^2 \eta_1 + \sinh^2 \zeta_{10}} \right] \quad \delta_h \rightarrow 0$$

偶型场在边界上满足边界条件，得到：

$$\begin{vmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma_c \\ \alpha_c \\ \beta_c \end{vmatrix} = 0 \quad (4-8)$$

其中,

$$C_{11} = q_c^{(1)} Se_1(\zeta_{10}, q_c^{(1)}) \tau_2$$

$$C_{13} = -\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 q_c^{(2)} [M_s^m(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_4 - \frac{1}{2} \delta_h \sinh 2\zeta_{10} B_o^{(2)} M_s^{m'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)})]$$

$$C_{22} = q_c^{(1)} Ce_1(\zeta_{10}, q_c^{(1)}) \tau_1$$

$$C_{24} = -\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 q_c^{(2)} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} [M_c^e(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_3 - \frac{1}{2} \delta_h \sinh 2\zeta_{10} A_o^{(2)} M_c^{e'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)})]$$

$$C_{31} = \bar{k}_z^c Se_1(\zeta_{10}, q_c^{(1)}) \tau_6$$

$$C_{32} = Ce_1'(\zeta_{10}, q_c^{(1)}) \tau_8$$

$$C_{33} = -\bar{k}_z^c \left(\frac{h_1}{h_2}\right) [M_s^m(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{10} + \delta_h \sinh 2\zeta_{10} M_s^{m'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{12}]$$

$$C_{34} = -\frac{h_1}{h_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} [M_c^{e'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{14} - \frac{1}{2} \delta_h \sinh 2\zeta_{10} \{M_c^{e'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{16} + M_c^e(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{18}\}]$$

$$C_{41} = Se_1'(\zeta_{10}, q_c^{(1)}) \tau_7$$

$$C_{42} = -\bar{k}_z^c Ce_1(\zeta_{10}, q_c^{(1)}) \tau_5$$

$$C_{43} = -\frac{h_1}{h_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} [M_s^{e'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{13} - \frac{1}{2} \delta_h \sinh 2\zeta_{10} \{M_s^{e'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{15} + M_s^e(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{17}\}]$$

$$C_{44} = \bar{k}_z^c \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} [M_c^e(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_9 + \delta_h \sinh 2\zeta_{10} M_c^{e'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_{11}]$$

其中,

$$\tau_1 = A_0^{(1)} \left(\frac{1}{4} + \sinh^2 \zeta_{10}\right) - \frac{1}{4} A_1^{(1)}$$

$$\tau_2 = B_0^{(1)} \left(\frac{3}{4} + \sinh^2 \zeta_{10}\right) - \frac{1}{4} B_1^{(1)}$$

$$\tau_3 = A_0^{(2)}(\sinh^2 \zeta_{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \delta_h) - A_1^{(2)}(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \delta_h)$$

$$\tau_4 = B_0^{(2)}(\sinh^2 \zeta_{10} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \delta_h) - B_1^{(2)}(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \delta_h)$$

$$\tau_5 = -A_0^{(1)}(\frac{5}{8} + \frac{3}{2} \sinh^2 \zeta_{10} + \sinh^4 \zeta_{10}) + A_1^{(1)}(\frac{5}{48} + \frac{1}{6} \sinh^2 \zeta_{10}) - \frac{1}{80} A_2^{(1)}$$

$$\tau_6 = B_0^{(1)}(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10} + \sinh^4 \zeta_{10}) - B_1^{(1)}(\frac{1}{16} + \frac{1}{6} \sinh^2 \zeta_{10}) + \frac{1}{80} B_2^{(1)}$$

$$\tau_7 = B_0^{(1)}(\frac{5}{8} + \frac{3}{2} \sinh^2 \zeta_{10} + \sinh^4 \zeta_{10}) - B_1^{(1)}(\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10}) + \frac{1}{16} B_2^{(1)}$$

$$\tau_8 = A_0^{(1)}(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10} + \sinh^4 \zeta_{10}) - A_1^{(1)}(\frac{3}{16} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10}) + \frac{1}{16} B_2^{(1)}$$

$$\tau_9 = -A_0^{(2)}(\frac{5}{8} + \frac{3}{2} \sinh^2 \zeta_{10} + \sinh^4 \zeta_{10}) - A_1^{(2)}(\frac{5}{48} + \frac{1}{6} \sinh^2 \zeta_{10}) - \frac{1}{80} A_2^{(2)} \\ + \delta_h [A_0^{(2)}(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10}) - A_1^{(2)}(\frac{1}{24} + \frac{5}{36} \sinh^2 \zeta_{10}) - \frac{3}{200} A_2^{(2)}]$$

$$\tau_{10} = B_0^{(2)}(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10} + \sinh^4 \zeta_{10}) - B_1^{(2)}(\frac{1}{16} + \frac{1}{6} \sinh^2 \zeta_{10}) + \frac{1}{80} B_2^{(2)} \\ + \delta_h [B_0^{(2)}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10}) + B_1^{(2)}(\frac{2}{72} + \frac{5}{36} \sinh^2 \zeta_{10}) + \frac{3}{200} B_2^{(2)}]$$

$$\tau_{11} = A_0^{(2)}(\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10}) - \frac{7}{24} A_1^{(2)}$$

$$\tau_{12} = B_0^{(2)}(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10}) + \frac{5}{24} B_1^{(2)}$$

$$\tau_{13} = B_0^{(2)}(\frac{5}{8} + \frac{3}{2} \sinh^2 \zeta_{10} + \sinh^4 \zeta_{10}) - B_1^{(2)}(\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10}) + \frac{1}{16} B_2^{(2)} \\ + \delta_h [B_0^{(2)}(\frac{1}{4} \sinh^2 2\zeta_{10} - \frac{1}{4} \sinh^2 \zeta_{10} - \frac{3}{4}) + B_1^{(2)}(\frac{1}{4} \cosh 2\zeta_{10} - \frac{1}{12} \sinh^2 \zeta_{10} - \frac{1}{8}) + \frac{1}{12} B_2^{(2)}]$$

$$\begin{aligned} \tau_{14} = & A_0^{(2)} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10} + \sinh^4 \zeta_{10} \right) - A_1^{(2)} \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{2} \sinh^2 \zeta_{10} \right) + \frac{1}{16} A_2^{(2)} \\ & + \delta_h \left[A_0^{(2)} \left(\frac{1}{4} \sinh^2 2\zeta_{10} + \frac{1}{4} \sinh^2 \zeta_{10} - \frac{1}{2} \right) + A_1^{(2)} \left(\frac{1}{4} \cosh 2\zeta_{10} - \frac{1}{12} \sinh^2 \zeta_{10} + \frac{1}{24} \right) + \frac{3}{40} A_2^{(2)} \right] \end{aligned}$$

$$\tau_{15} = B_0^{(2)} \left(\frac{3}{4} + \sinh^2 \zeta_{10} \right) - \frac{1}{4} B_1^{(2)}$$

$$\tau_{16} = A_0^{(2)} \left(\frac{1}{4} + \sinh^2 \zeta_{10} \right) - \frac{1}{4} A_1^{(2)}$$

$$\tau_{17} = \frac{1}{2} B_0^{(2)} - \frac{1}{6} B_1^{(2)}$$

$$\tau_{18} = -\frac{3}{2} A_0^{(2)} + \frac{1}{6} B_1^{(2)}$$

同样的, 在边界 $\zeta = \zeta_{10}$ 上, 由方程 (4-2) (4-4) 满足边界条件得到:

$$\begin{vmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ \gamma_s \\ \alpha_s \\ \beta_s \end{vmatrix} = 0 \quad (4-9)$$

其中,

$$S_{11} = q_s^{(1)} C e_1(\zeta_{10}, q_s^{(1)}) \tau_1$$

$$S_{13} = -\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 q_s^{(2)} \left[M_c^m(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \tau_3 - \frac{1}{2} \delta_h \sinh 2\zeta_{10} A_o^{(2)} M_c^{m'}(\zeta_{10}, q_c^{(2)}) \right]$$

$$S_{22} = q_s^{(1)} S e_1(\zeta_{10}, q_s^{(1)}) \tau_2$$

$$S_{24} = -\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 q_s^{(2)} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \left[M_s^e(\zeta_{10}, q_s^{(2)}) \tau_4 - \frac{1}{2} \delta_h \sinh 2\zeta_{10} B_o^{(2)} M_s^{e'}(\zeta_{10}, q_s^{(2)}) \right]$$

$$S_{31} = \bar{k}_z^s C e_1(\zeta_{10}, q_s^{(1)}) \tau_5$$

$$S_{32} = -S e_1'(\zeta_{10}, q_c^{(1)}) \tau_7$$

$$S_{33} = -\overline{k_z^s} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) [M_c^m(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_9 + \delta_h \sinh 2\zeta_{10} M_c^{m'}(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_{11}]$$

$$S_{34} = \frac{h_1}{h_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} [M_s^{e'}(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_{13} - \frac{1}{2} \delta_h \sinh 2\zeta_{10} \{M_s^{e'}(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_5 + M_s^e(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_{17}\}]$$

$$S_{41} = C e_1'(\zeta_{10}, q_s^{(1)})\tau_8$$

$$S_{42} = \overline{k_z^s} S e_1(\zeta_{10}, q_s^{(1)})\tau_6$$

$$S_{43} = -\frac{h_1}{h_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} [M_c^{e'}(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_{14} - \frac{1}{2} \delta_h \sinh 2\zeta_{10} \{M_c^{e'}(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_{16} + M_c^e(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_{18}\}]$$

$$S_{44} = -\overline{k_z^s} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} [M_s^e(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_{10} + \delta_h \sinh 2\zeta_{10} M_s^{e'}(\zeta_{10}, q_s^{(2)})\tau_{12}]$$

为了使式(4-8)(4-9)有解,前面系数组成的矩阵行列式的值为零,而各系数里含有 ω, k_z^c, k_z^s ,所以式(4-8)、(4-9)前面的系数行列式为零即得到色散方程。

结束语

本论文从 Maxwell 方程出发, 通过求椭圆柱坐标系下波动方程的解引出马丢函数, 由此对其进行了深入的了解, 对马丢函数的几种近似的解进行分析, 最终采用了无穷级数的有限项来进行数值计算, 结合导师的电磁波在磁化等离子体中的传输理论, 对等离子体填充椭圆波导中波传输的色散特性进行了详细计算和分析, 得出一定结论, 并与圆波导的一些理论进行了比较。

参考文献

1. Lan Jen Chu, Electromagnetic Waves in Elliptic Hollow Pipes of Metal, J. Appl. Phys. V.9, Sept. 1938, 583-591
2. L. Lewin, Cross-section curvature and Elliptical Waveguides, IEEE Trans. MTT-22, 1974, pp. 504-509.
3. J.G. Kretzschmar, Propagation in Elliptical Waveguides, IEEE Trans. MTT-18, Sept. 1970, pp. 547-591
4. G.R. Valenzuela, Impedences of an Elliptical Waveguide (For the TE mode), IRE Trans. MTT-8, July 1960, pp. 431-435
5. Stratton-Morse-chu-Hutner, Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions, 1941.
6. T.S. Bird, behavior of multiple elliptical waveguides opening into a ground plane, IEE PROCEEDINGS. Vol. 137, Pt. H, No. 2, APRIL, 1990
7. Erik Lier, Application of Rectangular and elliptical DeLcore Feed Horns to elliptical reflector antennas, IEEE TRANSACTION ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 39, NO. 11, NOVEMBER 1991
8. F.A. Alhagan AND S.R. Judah, Mode charts for confocal annular elliptical resonators,
9. K.L. Chan and S.R. Judah, Modal analysis at the junction formed by a circular or elliptical waveguide and a translated and rotated elliptical waveguide, IEE Proc.-Microw. Antennas Propag, vol. 145, No. 1, February, 1998
10. Salvatore Caorsi et al, Electromagnetic Scattering by weakly Lossy Multilayer Elliptical Cylinder, IEEE TRANSACTION ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 46, NO. 11, NOVEMBER 1998

11. Liu Shenggang, Robert J.Barker, Zhu Dajun et. al. Basic Theoretical Formulations of Plasma Microwave Electronics –Part I: A Fluid Model Analysis of Electron Beam-wave Interactions. IEEE Transactions on Plasma Science, 2000,28(6): 2135-2151
12. Liu Shenggang, Robert J.Barker, Yan Yang et. al. Basic Theoretical Formulations of Plasma Microwave Electronics –Part II: Kinetic Theory of Electron Beam-wave Interactions. IEEE Transactions on Plasma Science, 2000,28(6): 2152-2165
13. Liu Shenggang, J. K. Lee, Song Liqun et. al. Theory of Wave Propagation Along Corrugated Waveguide Filled with Plasma Immersed in an Axial Magnetic Field, IEEE Transactions on Plasma Science,1996,24(3):918-923
14. Liu Shenggang, R. J. Barker, Gao Hong , A New Hybrid Ion-channel Maser Instability, 23rd Annual International Conference on Infrared and Millimeter Waves, Essex University, September, 7-11,1998
15. Liu Shenggang, R. J. Barker, Gao Hong et. al. Electromagnetic wave pumped ion-channel free-electron laser, 4th Asian Symposium on Free Electron Lasers and Korea-Russia Joint Seminar on High Power FELs, Taejon, Korea, June 8-10,1999.
16. Liu Shenggang, R. J. Barker, Gao Hong et. al. “A new hybrid ion-channel instability”, IEEE Transactions on Plasma Science, 2000,28(3): 1016-1019
17. Liu Shenggang, Zhu Dajun, “An alternative analysis for wave propagation along plasma waveguide in finite magnetic field”, Chinese Journal of Electronics, 1996, 5(2):1-7
18. 刘盛纲, J.K. Lee, 祝大军等, “等离子体波导中电磁波传输理论”, 中国科学(E辑),1996年8月,26(4):348-363

19. 刘盛纲, 鄢扬, 宋立群等, “有限磁场下等离子体填充的波纹波导中波传播理论”, 电子科技大学学报, 1996, 25 (7): 1-11
20. 祝大军, 刘盛纲, “磁化等离子体中电磁波的一种特殊模式”, 电子学报, 1997, 25 (3): 29-24
21. 林为干, 椭圆直波导, 《电磁场工程》专著第三章, pp.299-415.
22. 林其文, 椭圆波导的截止波长和衰减常数的理论计算, 强激光与粒子束, Vol.11, No.6, Dec., 1999
23. J.P.Kinzer and I.G.Wilson, “Some results on cylindrical cavity resonators”, Bell Syst. Tech. J., pp423-431, 1947
24. G.L.James, DSc, FIEE, IEE, PROCEEDINGS, Vol.136, Pt.H, No.3, JUNE 1989.

致谢

首先让我向我的导师中科院院士刘盛纲教授和副导师蒙林教授致以最崇高的谢意！本人在读硕士期间，能有幸成为导师的一名学生而感到自豪。桃李不言，下自成蹊，我在导师这里学到的不仅是单纯的知识，而是可贵的思维方式，严谨的治学作风，高尚的人格，它能让我一生受用不尽。还要深深感谢莫元龙，季天仁教授的深切关怀和学术上的教诲。

感谢李伟博士，肖舒博士，李建清博士，张勇博士的有益指导，使本人思维拓宽，知识面日益广泛。特别感谢同窗兼室友唐剑梅硕士，是她灵动的学习生活气息深深的打动我，象一缕春风，让我在此期间的生活过得坦然有目的。