

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

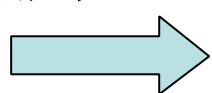
PPT课件网：www.ppthouse.com

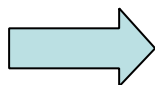
课后答案网
www.hackshp.cn

第一章、核反应堆的核物理基础

1、某压水堆采用二氧化铀作燃料，其富集度为 **2.43%**（重量），密度为 **10⁴公斤/米³**，计算：当中子能量为 **0.025**电子伏时，二氧化铀的宏观吸收截面和宏观裂变截面。

宏观截面的物理含义：一个中子与单位体积内原子核发生核反应的几率。


$$\Sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i N_i$$


$$\Sigma_a = \sigma_a^o N_o + \sigma_a^5 N_5 + \sigma_a^8 N_8$$


$$\Sigma_f = \sigma_f^5 N_5$$

www.hackshp.cn

宏观吸收截面

$$\Sigma_a = \sigma_a^o N_o + \sigma_a^5 N_5 + \sigma_a^8 N_8$$



N_0 N_5 N_8

N_{UO_2}

求宏观
截面



单位体积
内各原子
核个数



单位体积内
各分子个数

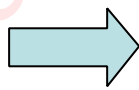


求分
子量

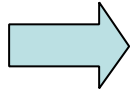
UO₂分子量:

铀 (Uranium) 元素包含 **U-238**与**U-235**两种同位素, 在计算分子量时需要考虑 **U-235**与**U-238**的原子比例

$$c_5 = \frac{N_5}{N_5 + N_8}$$



$$\frac{N_5}{N_8} = \frac{c_5}{1 - c_5}$$



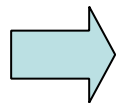
$$\begin{aligned} M_{UO_2} &= 235 \times c_5 + 238 \times (1 - c_5) + 2 \times 16 \\ &= 269.9262 \end{aligned}$$

www.hackshp.cn

UO₂分子量:



$$M_{UO_2} = 235 \times c_5 + 238 \times (1 - c_5) + 2 \times 16$$



$$M_{UO_2} = 269.9262 \text{ g/mol}$$

$$\begin{aligned} c_5 &= [1 + 0.9874(\frac{1}{\varepsilon} - 1)]^{-1} \\ &= [1 + 0.9874(\frac{1}{0.0243} - 1)]^{-1} \\ &= 0.0246 \end{aligned}$$

单位体积内 **UO₂** 分子数目

$$N_{UO_2} = \frac{1000\rho_{UO_2}}{M_{UO_2}} N_A = \frac{1000 \times 10^4}{269.9262} \times 6.02 \times 10^{23} \\ = 2.23024 \times 10^{28}$$

UO₂ 宏观吸收截面

$$\Sigma_a = c_5 N_{UO_2} \sigma_{5a} + (1 - c_5) N_{UO_2} \sigma_{8a} + 2 N_{UO_2} \sigma_{Oa} \\ = 43.23 m^{-1}$$

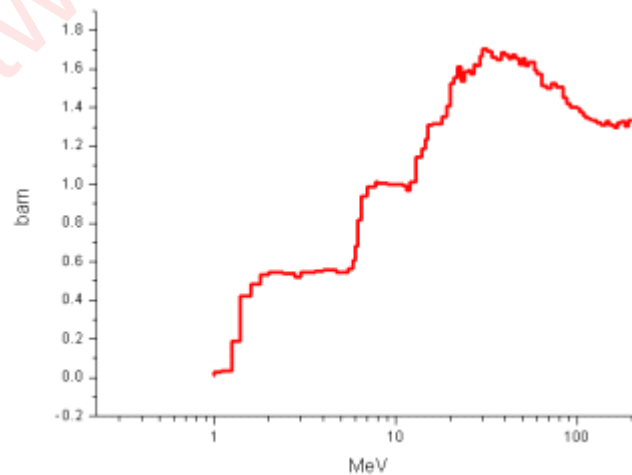
与求宏观吸收截面类似的，有

UO₂ 宏观裂变截面

$$\Sigma_f = c_5 N_{UO_2} \sigma_f \\ = 0.0246 \times 2.23024 \times 10^{28} \times 583.5 \times 10^{-28} \\ = 32.01 m^{-1}$$

对于**0.025eV**的中子，**UO₂**的宏观裂变截面只与**U-235**核有关，而**U-238**核属于阈裂变核素，在中子能量达到**1.1MeV**以上时才有可能发生裂变。如果本题中的中子能量在**1.1MeV**以上，求宏观裂变截面就必须考虑**U-238**了。

U-238裂变截面



www.hackshp.cn

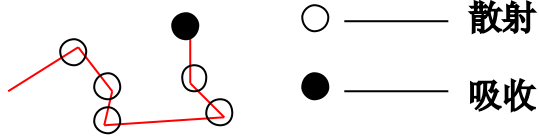
2、某反应堆堆芯由铀-235、水和铝组成，各元素所占的体积比分别为0.002，0.600和0.398，计算堆芯的总吸收截面 Σ_a (0.025电子伏)

与前一题类似地，

$$\begin{aligned}
 \Sigma_a &= \Sigma_{a5} + \Sigma_{aH_2O} + \Sigma_{aAl} \\
 &= \sigma_{a5} N_5 + \sigma_{aH_2O} N_{H_2O} + \sigma_{aAl} N_{Al} \\
 &= N_A \left[\sigma_{a5} \frac{0.002 \times 10^6 \rho_5}{235} + \sigma_{aH_2O} \frac{0.600 \times 10^6 \rho_{H_2O}}{18.016} \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_{aAl} \frac{0.398 \times 10^6 \rho_{Al}}{26.98} \right] \\
 &= 8.5 m^{-1}
 \end{aligned}$$

3、求热中子（0.025电子伏）在轻水、重水、和镉中运动时，被吸收前平均遭受的散射碰撞次数。

热中子在介质中的运动



吸收前的碰撞次数 = $\frac{\text{从产生点到吸收点穿过的平均路程}}{\text{每两次散射穿过的平均路程}}$

www.hackshp.cn

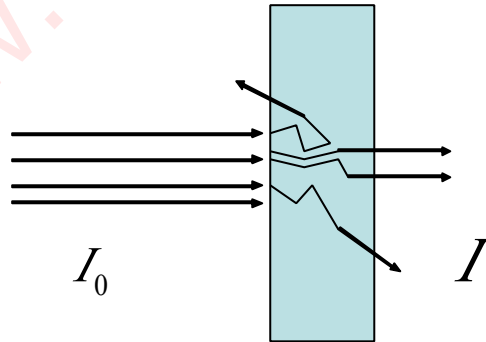
$$n = \frac{\lambda_a}{\lambda_s} = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_a} = \frac{N\sigma_s}{N\sigma_a} = \frac{\sigma_s}{\sigma_a}$$

$$n_{H_2O} = \frac{103}{0.66} = 156$$

$$n_{D_2O} = \frac{13.6}{0.001} = 13600$$

$$n_{Cd} = \frac{7}{2450} = 2.86 \times 10^{-3}$$

4、试比较：将**2.0MeV**电子伏的中子束减弱到**1/10**所需的铝、钠和铅的厚度。



窄束衰减规律: $I = I_0 e^{-\Sigma_t d}$

www.hackshp.cn

窄束衰减规律: $I = I_0 e^{-\Sigma d}$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{10}$$

$$d = \frac{\ln 10}{\Sigma_t}$$

在**10MeV**以内，铝、钠、铅的吸收截面都满足**1/V**定律

$$\Sigma_a = \Sigma_a(0.0253) \sqrt{\frac{0.0253}{E}}$$

与吸收截面不同的是，在 **10MeV** 以内，散射截面基本不变

$$\Sigma_s \approx \Sigma_s(0.0253)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_a = \Sigma_a(0.0253) \sqrt{\frac{0.0253}{E}} \\ \Sigma_s \approx \Sigma_s(0.0253) \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma_t$$

$$d = \frac{\ln 10}{\Sigma_t}$$

www.hackshp.cn

分别求得：

$$d_{Al} = 0.274 \text{ m}$$

$$d_{Na} = 0.226 \text{ m}$$

$$d_{Pb} = 0.0634 \text{ m}$$

如果不考虑散射导致的束流损失，只考虑吸收损失

$$d = \frac{\ln 10}{\Sigma_a}$$

$$d_{Al} = 1.36 \times 10^4 \text{ m}$$

$$d_{Na} = 1.575 \times 10^4 \text{ m}$$

$$d_{Pb} = 3.412 \times 10^4 \text{ m}$$

这样的结果显然是低估了散射使得束流偏移而导致的束流损失，同时也说明窄射束衰减中散射效应对束流损失的较大贡献

www.hackshp.cn

8、某反应堆在额定功率 500兆瓦下运行了 31天后停堆，设每次裂变产生的裂变产物的放射性活度为 $1.08 \times 10^{-16} t^{-1.2}$ 居里。此处 t 为裂变后的时间，单位为天，试估算停堆 24小时堆内裂变产物的居里数。

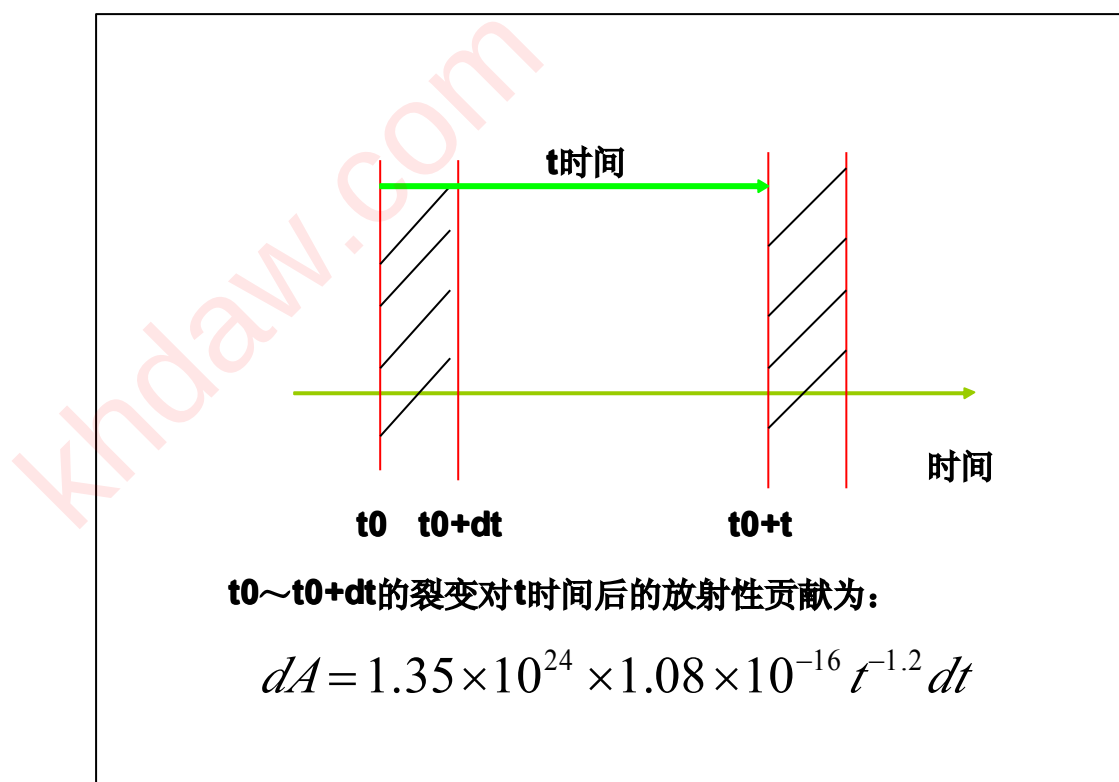
首先，裂变率：

$$E_{day} = 500 \times 10^6 \times 24 \times 3600 \text{ J}$$

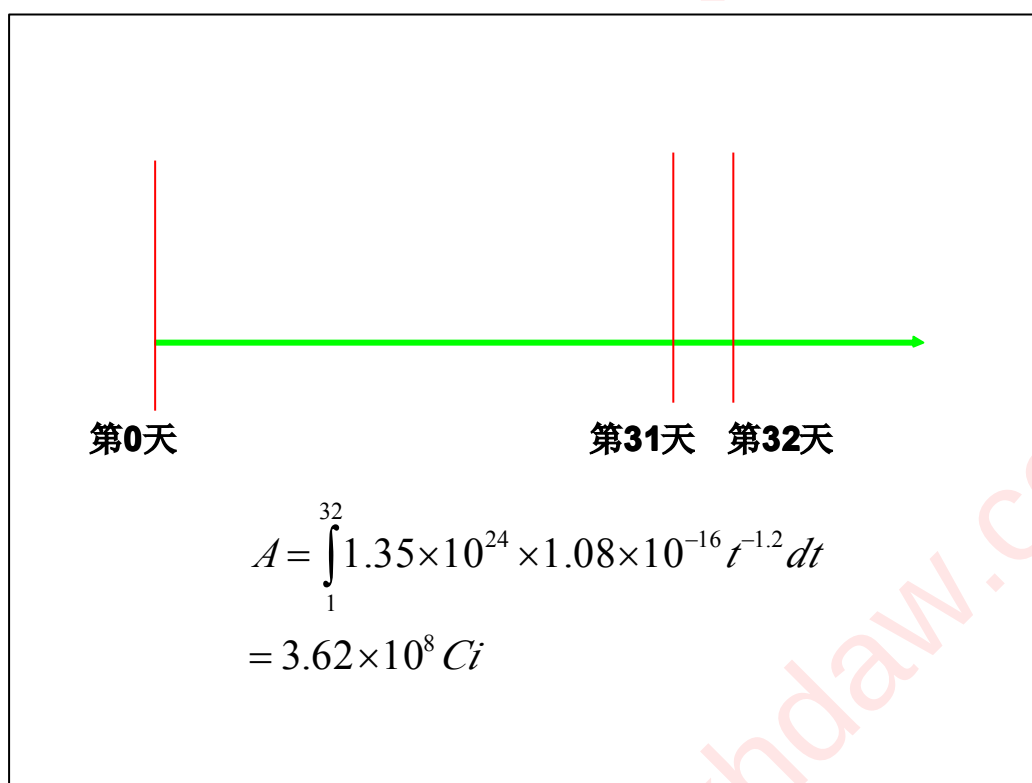
$$n_{day} = \frac{E_{day}}{200 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}$$

$$= \frac{500 \times 10^6 \times 24 \times 3600}{200 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}$$

$$= 1.35 \times 10^{24}$$



www.hackshp.cn



12、设核燃料中铀-235的浓缩度为**3.2%**（重量），试求铀-235与铀-238的核子数之比。

$$\begin{aligned}
 c_5 &= [1 + 0.9874(\frac{1}{\varepsilon} - 1)]^{-1} \\
 &= [1 + 0.9874(\frac{1}{0.032} - 1)]^{-1} \\
 &= 0.0324 \\
 \frac{n_5}{n_8} &= \frac{c_5}{1 - c_5} = \frac{0.0324}{1 - 0.0324} = 0.0335
 \end{aligned}$$

www.hackshp.cn

13、为了使铀的 $\eta=1.7$ ，试求铀中铀-235的富集度为多少（设中子能量为**0.0253eV**）。

$$\begin{aligned}
 \eta &= 2.5 \frac{\Sigma_{f5}}{\Sigma_{a5} + \Sigma_{a8}} = 2.5 \frac{n_5 \sigma_{f5}}{n_5 \sigma_{a5} + n_8 \sigma_{a8}} \\
 \frac{n_5}{n_8} &= \frac{\eta \sigma_{a8}}{2.5 \sigma_{f5} - \eta \sigma_{a5}} = \frac{1.7 \times 2.7}{2.5 \times 583.5 - 1.7 \times 680.9} = 0.01524 \\
 c_5 &= \frac{n_5}{n_5 + n_8} = \frac{\frac{n_5}{n_8}}{\frac{n_5}{n_8} + 1} = [1 + 0.9874(\frac{1}{\varepsilon} - 1)]^{-1}
 \end{aligned}$$

代入 ($n_5/n_8=0.01524$)得 $\varepsilon \approx 1.5\%$

16、某压水堆的电功率为990MW，设电站的效率为32%，运行了三个月后停堆。试计算停堆后1分钟、1小时、10小时、1天、10天、1月后的衰变热。同样计算运行一年后停堆的情况。

热功率：

$$P_{th} = \frac{P_e}{\eta} = \frac{990 \times 10^6}{0.32} \approx 3.1 \times 10^9 W$$

衰变热功率：

$$\begin{aligned} P_d &= 4.1 \times 10^{11} P_{th} [\tau^{-0.2} - (\tau + T)^{-0.2}] (MeV/s) \\ &\approx 6.6 \times 10^{-2} P_{th} [\tau^{-0.2} - (\tau + T)^{-0.2}] (W) \\ &\approx 2.1 \times 10^8 [\tau^{-0.2} - (\tau + T)^{-0.2}] (W) \end{aligned}$$



www.hackshp.cn

分别代入：

$$1) T_1 = 3 \text{ months} = 7.78 \times 10^6 \text{ s}$$

$$\tau_1 = 1 \text{ minutes} = 60 \text{ s};$$

$$2) T_2 = 3 \text{ months} = 7.78 \times 10^6 \text{ s}$$

$$\tau_2 = 1 \text{ hour} = 3600 \text{ s};$$

$$3) T_3 = 3 \text{ months} = 7.78 \times 10^6 \text{ s}$$

$$\tau_3 = 10 \text{ hours} = 36000 \text{ s}$$

$$4) T_4 = 3 \text{ months} = 7.78 \times 10^6 \text{ s}$$

$$\tau_4 = 1 \text{ day} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$$

$$5) T_5 = 3 \text{ months} = 7.78 \times 10^6 \text{ s}$$

$$\tau_5 = 10 \text{ days} = 8.64 \times 10^5 \text{ s}$$

$$6) T_6 = 3 \text{ months} = 7.78 \times 10^6 \text{ s}$$

$$\tau_6 = 1 \text{ months} = 2.6 \times 10^6 \text{ s}$$

得:

$$P_{d1} = 4.7 \times 10^7 \text{ W} = 47 \text{ MW}$$

$$P_{d2} = 3.2 \times 10^7 \text{ W} = 32 \text{ MW}$$

$$P_{d3} = 1.7 \times 10^7 \text{ W} = 17 \text{ MW}$$

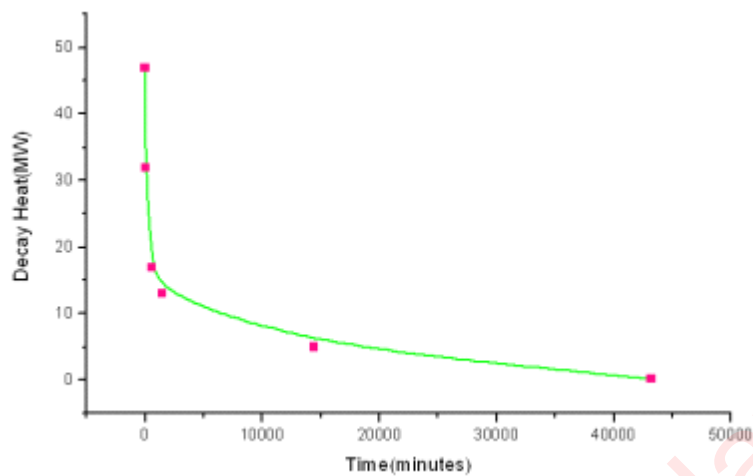
$$P_{d4} = 1.3 \times 10^7 \text{ W} = 13 \text{ MW}$$

$$P_{d5} = 0.5 \times 10^7 \text{ W} = 5 \text{ MW}$$

$$P_{d6} = 0.03 \times 10^7 \text{ W} = 0.3 \text{ MW}$$

www.hackshp.cn

衰变热功率随时间的关系



核反应堆物理分析第二章习题

1、有两束方向相反的平行热中子束射到 U-235的薄片上，设其上某点自左面入射的中子强度为 10^{16} 中子/米²秒。自右面入射的中子束强度为 2×10^{16} 中子/米²秒。计算：（a）该点的中子通量密度；（b）该点的中子流密度。（c）设 $\Sigma_a = 19.2 \times 10^2$ 米⁻¹，求该点的吸收率。

解：（a）中子通量密度为各方向中子束流强度值的总和

$$\therefore \Phi = 10^{16} + 2 \times 10^{16} = 3 \times 10^{16} \text{ 中子/米}^2 \text{秒}$$

（b）中子流强度为各方向中子束流强度的代数和（即中子净流量），取向右为正方向

$$\therefore J = 10^{16} - 2 \times 10^{16} = -10^{16} \text{ 中子/米}^2 \text{秒}$$

（c）吸收反应率 $R_a = \Phi \times \Sigma$
 $= 3 \times 10^{16} \times 19.2 \times 10^2 = 5.76 \times 10^{19}$ 中子/米³秒

www.hackshp.cn

5、在某球形裸堆（R=0.5米）内中子通量密度分布为

$$\phi(r) = \frac{5 \times 10^{17}}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) \text{ 中子/米}^2 \cdot \text{秒}$$

试求：（a） $\phi(0)$ ；（b） $J(r)$ 的表达式，设 $D = 0.8 \times 10^{-2}$ 米；（c）每秒从堆表面泄漏的总中子数（假设外推距离很小可略去不计）。

解：（a）由中子通量密度的物理意义可知， ϕ 必须满足有限、连续的条件

$$\begin{aligned} \therefore \phi(0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{5 \times 10^{17}}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{5 \times 10^{17}}{r} \cdot \frac{\pi r}{R} \\ &= 5 \times 10^{17} \cdot \frac{\pi}{R} \\ &= 3.14 \times 10^{18} \text{ 中子/米}^2 \cdot \text{秒} \end{aligned}$$

(b) 中子流密度

$$\begin{aligned} J(r) &= -D \text{grad} \phi \\ &= -D \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \vec{e} \quad \vec{e} \text{ 为径向单位矢量} \\ \therefore J(r) &= -0.8 \times 10^{-2} \times \left[\frac{-5 \times 10^{17}}{r^2} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) + \frac{5 \times 10^{17}}{r} \cos\left(\frac{\pi r}{R}\right) \frac{\pi}{R} \right] \vec{e} \\ &= 4 \times 10^{15} \left[\frac{1}{r^2} \sin(2\pi r) - \frac{2\pi}{r} \cos(2\pi r) \right] \vec{e} \end{aligned}$$

www.hackshp.cn

(c) 泄漏中子量 = 径向中子净流量 × 球体表面积

$$\therefore L = \oint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

∵ $\phi(r)$ 仅于 r 有关，是各向同性的

$$\begin{aligned} \therefore L &= J(R) \times 4\pi R^2 \\ &= 4 \times 10^{15} \times \frac{\pi}{0.5^2} \times 4\pi \times 0.5^2 \\ &= 1.58 \times 10^{17} \text{ 中子 / 秒} \end{aligned}$$

7、圆柱体裸堆内中子通量密度分布为

$$\phi(r, z) = 10^{16} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) J_0\left(\frac{2.405r}{R}\right) \text{中子/米}^2\text{秒}$$

其中，**H**，**R**为反应堆的高度和半径（假设外推距离可略去不计）。试求：（**a**）径向和轴向的平均中子通量密度和最大中子通量密度之比；（**b**）每秒从堆侧表面和两个断面泄漏的中子数；（**c**）设**H=7米**，**R=3米**，反应堆功率为**10兆瓦**， $\sigma_f=410$ 靶，求反应堆内**U-235**的装载量。

www.hackshp.cn

解：（**a**）1.径向中子通量密度平均值与径向中子通量密度最大值之比：

$$\frac{\bar{\phi}(r)}{\phi_{\max}(r)} = \frac{\frac{1}{R} \int_0^R \phi(r, z) dr}{\phi(r')} \quad (1)$$

$$\text{由：} \quad \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

求出**r'** **r'**为 $\phi(r)$ 的极大值点

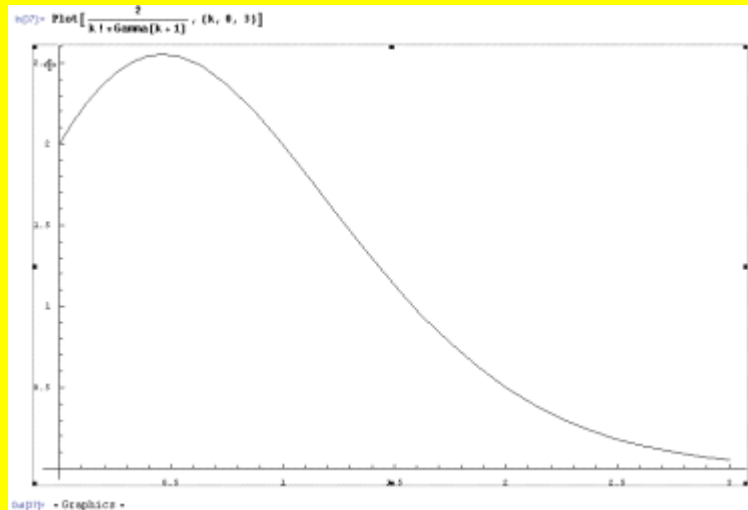
0阶第一类 Bessel函数:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k! \Gamma(k+1)}$$

由于题中 $x = \left(\frac{2.405r}{R} \right)$

取r的最大值R，并且足够大，这里取 **x=2**代入Bessel函数中，得到0阶Bessel函数的前4项的图像

www.hackshp.cn



Bessel函数前4项图像

在图中可以看出当 **k=3**时，函数值已经非常的小了，并且后面的项很快收敛到**0**，因此我们取前**4**项即可（**误差计算此处并不给出**）

因此

$$J_0(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \frac{-x^2/4}{\Gamma(2)} + \frac{x^4/16}{2\Gamma(3)} - \frac{x^6/64}{6\Gamma(4)}$$

查表或者自行计算得到 $\Gamma(1, 2, 3, 4)$ 的值为 $(1, 1, 2, 6)$ 代入上式, 并且令 $x = (2.405r/R)$ 得到:

$$J_0(r) = 1 - \frac{5.78r^2}{4R^2} + \frac{33.45r^4}{64R^4} - \frac{193.5r^6}{2304R^6}$$

将 J_0 代入 $\Phi(r, z)$ 并利用 (2) 求出极大值点 r'

$$\frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} = C \left[-\frac{5.78r}{2R^2} + \frac{33.45r^3}{16R^4} - \frac{193.5r^5}{384R^6} \right] = 0$$

$$C = 10^{16} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right)$$

www.hackshp.cn

解以上方程得到

$$r' = \{0, \pm R\sqrt{-1.09393}, \pm R\sqrt{5.24276}\}$$

舍去无意义根和大于 R 的根 ($\because 0 \leq r \leq R$), 得:

$$r' = 0 \quad \text{时, } \phi \text{ 取极大值}$$

$$\therefore (1) \quad \frac{\bar{\phi}(r)}{\phi_{\max}(r)} = \frac{\frac{1}{R} \int_0^R \phi(r, z) dr}{\phi(r')}$$

$$= \frac{C \frac{1}{R} \int_0^R \left[1 - \frac{5.78 r^2}{4 R^2} + \frac{33.45 r^4}{64 R^4} - \frac{193.5 r^6}{2304 R^6} \right] dr}{C \left[1 - \frac{5.78 r^2}{4 R^2} + \frac{33.45 r^4}{64 R^4} - \frac{193.5 r^6}{2304 R^6} \right]}$$

代入 r' 并计算出积分值得到:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\phi}(r)}{\phi_{\max}(r)} &= \frac{0.611}{1} = 0.611 \\ \text{(a) 2.} \quad \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} &= -C \frac{\pi}{H} \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (3) \\ C &= 10^{16} J_0 \left(\frac{2.405r}{R} \right) \end{aligned}$$

令 (3) = 0, 得:

$Z=nH$, n 为整数

$\therefore$ 从 ϕ 的形式可以看出, 原点是建在柱体的中心的

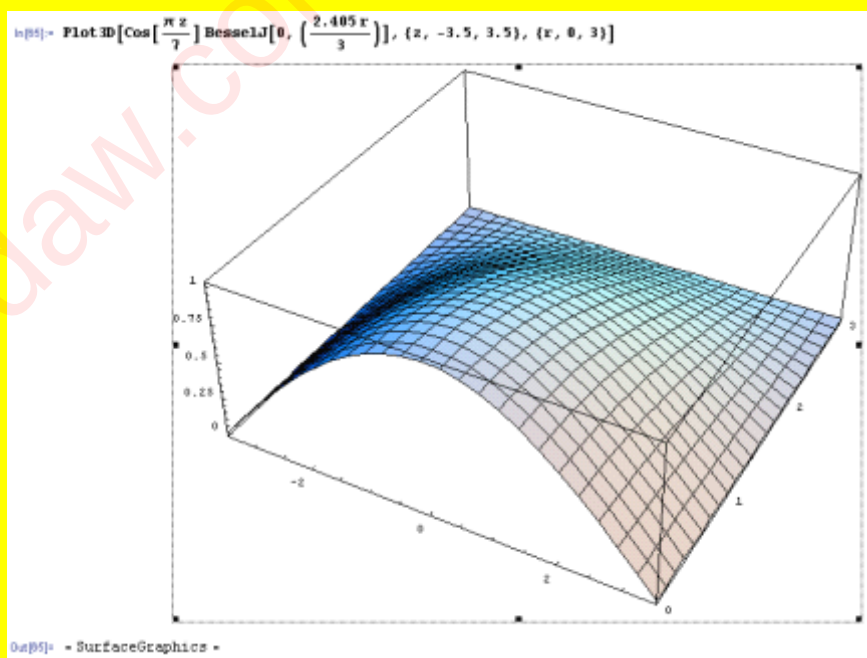
$\therefore Z$ 只能取0, $\phi(r, z)$ 有极大值

www.hackshp.cn

同理, 可得:

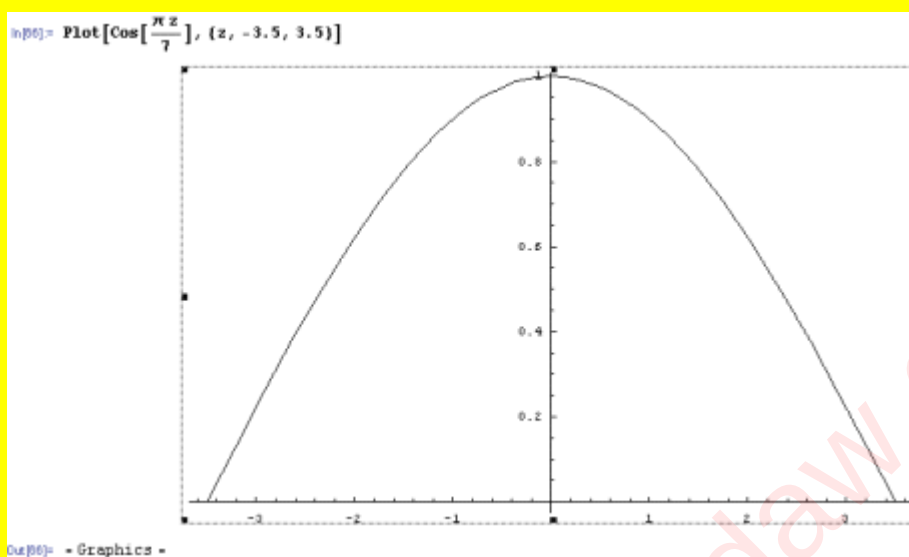
$$\begin{aligned} \frac{\bar{\phi}(z)}{\phi_{\max}(z)} &= \frac{\frac{1}{H} C \int_{-H/2}^{H/2} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) dz}{C} \\ &= \frac{2}{\pi} = 0.637 \end{aligned}$$

该堆芯中子通量密度的分布图：

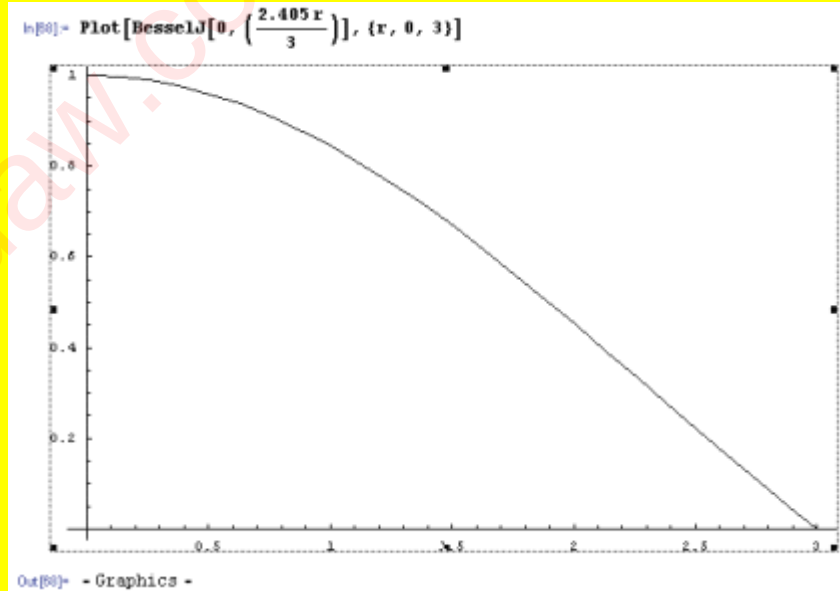


www.hackshp.cn

轴向中子通量密度分布：



径向中子通量密度分布：



www.hackshp.cn

(b) 侧面中子流密度：

$$\begin{aligned}
 J_{\text{侧}} &= -D \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \\
 &= -DC \left[-\frac{5.78r}{2R^2} + \frac{33.45r^3}{16R^4} - \frac{193.5r^5}{384R^6} \right] \\
 &= -10^{16} D \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \left[\frac{5.78}{2R} + \frac{33.45}{16R} - \frac{193.5}{384R} \right]
 \end{aligned}$$

∴ 单位时间从侧面泄漏的中子数为：

$$\begin{aligned}
 L_{\text{侧}} &= \int_0^H J_{\text{侧}} 2\pi R dz \\
 &= 5.2HD \times 10^{16} \text{ 中子/秒}
 \end{aligned}$$

上下面中子流密度:

$$J_z = \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z}$$

$$= DC \left(\frac{\pi}{H} \right) \sin \left(\frac{\pi z}{H} \right)$$

分别代入 $z=-H/2, z=H/2$ 得:

$$J_{z=-H/2} = 10^{16} DJ_0 \left(\frac{\pi}{H} \right) \left(\frac{2.405r}{R} \right) \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= -10^{16} DJ_0 \left(\frac{\pi}{H} \right) \left(\frac{2.405r}{R} \right)$$

负号表示中子流密度指向z-方向

www.hackshp.cn

$$J_{z=H/2} = 10^{16} DJ_0 \left(\frac{\pi}{H} \right) \left(\frac{2.405r}{R} \right)$$

$$\therefore L_z = L_{-H/2} + L_{H/2}$$

$$= 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} 10^{16} DJ_0 \left(\frac{\pi}{H} \right) \left(\frac{2.405r}{R} \right) r dr d\theta$$

$$= 8.5 \frac{D}{H} R^2 \times 10^{16} \text{中子/秒}$$

(c) 堆内的裂变反应率为

$$\begin{aligned}
 R_f &= \int_{-3.5}^{3.5} \int_0^{2\pi} \int_0^3 \phi(r, z) N \sigma_f r dr d\theta dz \\
 &= \int_{-3.5}^{3.5} \int_0^{2\pi} \int_0^3 10^{16} \cos\left(\frac{\pi z}{7}\right) \left(1 - \frac{5.78r^2}{4 \times 3^2} + \frac{33.45r^4}{64 \times 3^4} - \frac{193.5r^6}{2304 \times 3^6}\right) N \sigma_f r dr d\theta dz \\
 &= \int_{-3.5}^{3.5} \int_0^{2\pi} \int_0^3 10^{16} \cos\left(\frac{\pi z}{7}\right) \left(1 - \frac{5.78r^2}{4 \times 3^2} + \frac{33.45r^4}{64 \times 3^4} - \frac{193.5r^6}{2304 \times 3^6}\right) \frac{m}{235} N_A \sigma_f r dr d\theta dz
 \end{aligned}$$

裂变功率为:

$$\begin{aligned}
 P_f &= 200 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} R_f \\
 &= 10^7
 \end{aligned}$$

由以上两式可以算出 U-235 的装载量

www.hackshp.cn

9. 设某石墨介质内，热中子的微观吸收和散射截面分别为 $\sigma_a = 4.5 \times 10^{-28}$ 靶和 $\sigma_s = 4.8$ 靶。试计算石墨的热中子扩散长度 L 和吸收自由程 λ_a ，比较两者数值大小，并说明其差异的原因。

解： 单位体积内石墨的核数目为：

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\sigma}{M} \times N_a \\
 &= \frac{1.6 \times 10^6}{12} \times 6.02 \times 10^{23} \\
 &= 8 \times 10^{28} \text{ 个/米}^3 \\
 \Sigma_a &= n \sigma_a \\
 &= 8 \times 10^{28} \times 4.5 \times 10^{-28} \times 10^{-28} \\
 &= 0.36 / \text{米}
 \end{aligned}$$

$$\Sigma_s = n\sigma_s = 8 \times 10^{28} \times 4.8 \times 10^{-28} \\ = 38.4 / \text{米}$$

$$L = \sqrt{\frac{1}{3\Sigma_a\Sigma_s(1-\mu_0)}} \\ = \sqrt{\frac{1}{3 \times 0.36 \times 38.4 \times 0.9444}} \\ = 0.16 \text{米}$$

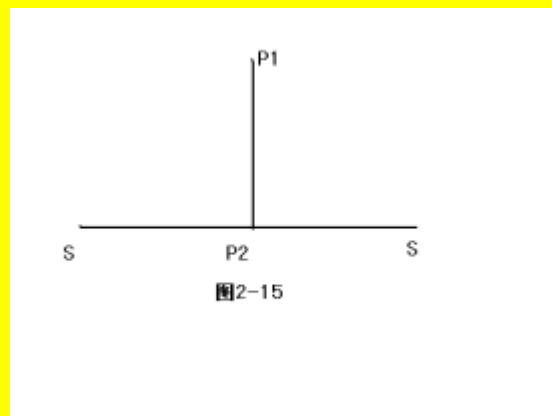
$$\lambda_a = \frac{1}{\Sigma_a} = \frac{1}{0.36} \\ = 2.8 \text{米}$$

$$L < \lambda_a$$

解释：堆内热中子的平均行为是先扩散最后被吸收，因此扩散长度 < 吸收自由程

www.hackshp.cn

12.如图2-15所示，在无限介质内有两个源强为 S 中子/秒的点源，试求 p_1 和 p_2 点的中子通量密度和中子流强度。



解： 无限介质点源中子通量密度为：

$$\phi(r) = \frac{Se^{-r/L}}{4\pi Dr}$$

1、中子通量密度

$$\begin{aligned}\phi(p_1) &= 2 \frac{Se^{-\sqrt{2}a/L}}{4\sqrt{2}\pi Da} \\ &= \frac{Se^{-\sqrt{2}a/L}}{2\sqrt{2}\pi Da}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(p_2) &= 2 \frac{Se^{-a/L}}{4\pi Da} \\ &= \frac{Se^{-a/L}}{2\pi Da}\end{aligned}$$

www.hackshp.cn

2、中子流强度

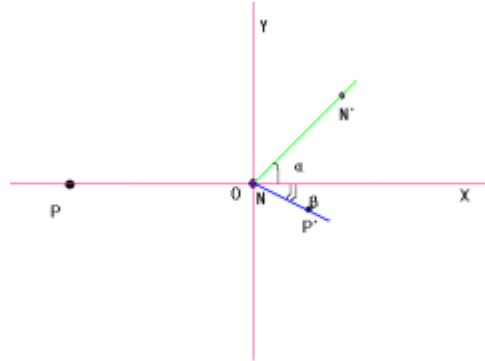
$$\begin{aligned}J(r) &= -D \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \\ J(p_1) &= 2 \cos(45^\circ) J_s(p_1) \\ &= \sqrt{2} \left[-D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Se^{-r/L}}{4\pi Dr} \right) \right] \quad (r = \sqrt{2}a) \\ &= \frac{Se^{-\sqrt{2}a/L}}{4\pi a} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) \quad \text{方向为 } \mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}_2 \text{ 的方向}\end{aligned}$$

由于p2点处中子流强度大小相等方向相反，因此：

$$J(p_2) = 0$$

核反应堆物理分析第三章

1、证明：当中子被自由质子散射时，散射中子和反冲质子的实验室系速度之间的夹角总是 **90度**



www.hackshp.cn

解： 能量守恒：

$$\frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_p v_p'^2 + \frac{1}{2} m_n v_n'^2 \quad (1)$$

x方向动量守恒

$$m_p v_p = m_p v_p' \cos \beta + m_n v_n' \cos \alpha \quad (2)$$

y方向动量守恒

$$m_p v_p' \sin \beta = m_n v_n' \sin \alpha \quad (3)$$

令 $m_p = m_n = 1$

(2) 两边平方, 得:

$$v_p'^2 = v_p'^2 \cos^2 \beta + v_n'^2 \cos^2 \alpha + 2v_p' v_n' \cos \alpha \cos \beta \quad (4)$$

把(1)代入(4), 消去 v_p , 得:

$$v_p'^2 + v_n'^2 = v_p'^2 \cos^2 \beta + v_n'^2 \cos^2 \alpha + 2v_p' v_n' \cos \alpha \cos \beta \quad (5)$$

将(3)代入(5)消去 v_n' , 并整理得:

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\text{即: } \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\text{由于 } 0 < (\alpha + \beta) < \pi \quad \longrightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

www.hackshp.cn

2、设 $f(v \rightarrow v')dv'$ 表示L系中速度 v 的中子弹性散射后速度在 v' 附近 dv' 内的几率。假定在C系中散射是各向同性的, 求 $f(v \rightarrow v')$ 的表达式, 并求一次碰撞后的平均速度。

$$\text{解: 由: } E = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\text{得: } dE = mv' dv'$$

$$\text{代入: } f(E \rightarrow E) dE = -\frac{dE}{(1-\alpha)}, \alpha E \leq E \leq E$$

$$\text{得: } f(v \rightarrow v') dv' = -\frac{2v' dv'}{(1-\alpha)v^2}, \sqrt{\alpha}v \leq v' \leq v$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int_v^{\sqrt{\alpha}v} v' f(v \rightarrow v') dv' \\ &= \frac{2v}{3(1-\alpha)} (1 - \alpha^{3/2}) \end{aligned}$$

3、氢和氧在1000电子伏到1电子伏能量范围内的散射截面近似为常数，分别为20靶和3.8靶。计算水的 ξ 以及在水中中子从1000电子伏慢化到1电子伏所需要的平均碰撞次数。

解：
$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \left(\frac{A-1}{A+1} \right)$$

$$\xi_H = \lim_{A \rightarrow 1} \left[1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \left(\frac{A-1}{A+1} \right) \right]$$

对中括号里面第二项用 L'Hospital 法则处理，得：

$$\xi_H = 1$$

$$\xi_O = \frac{2}{A + \frac{2}{3}} = 0.12$$

www.hackshp.cn

在水中散射的平均对数能降为：

$$\begin{aligned} \xi_{H_2O} &= \frac{2\sigma_H \xi_H + \sigma_O \xi_O}{2\sigma_H + \sigma_O} \\ &= \frac{2 \times 20 \times 1 + 3.8 \times 0.12}{2 \times 20 + 3.8} \\ &= 0.92 \end{aligned}$$

平均碰撞次数：

$$\begin{aligned} n &= \frac{\ln \frac{E_0}{E} - \ln \frac{E_0}{E}}{\xi_{H_2O}} = \frac{\ln E - \ln E'}{\xi_{H_2O}} \\ &= \frac{\ln(1000) - \ln(1)}{0.92} \\ &\approx 7.5 \text{ 次} \end{aligned}$$

4、(a) 证明：一个中子依靠弹性散射从初始能量 E_0 慢化到能量 E 所需的平均时间 t (弹性慢化时间)，可表示为

$$t = \int_E^{E_0} \frac{\lambda_s}{\xi \sqrt{2E}^{3/2}} dE$$

(b) 设 $\xi \Sigma_s$ 与中子速度无关，试分别计算在轻水中和石墨中裂变中子 (取 $E_0 = 2 \times 10^6$ 电子伏) 慢化到 1 电子伏所需要的慢化时间。

解： (a) 能量为 E 的中子在 dt 系统内发生的平均散射次数为：

$$n = \frac{v dt}{\lambda_s(E)} = \sqrt{2E} \frac{dt}{\lambda_s(E)}$$

在 dt 时间内的对数能降增量为：

$$du = n\xi = \xi \sqrt{2E} \frac{dt}{\lambda_s(E)}$$

由：

$$u = \ln \frac{E_0}{E}$$

得：

$$du = \frac{-1}{E} dE$$

若散射自由程与能量无关，则：

$$t = - \int_{E_0}^E \frac{\lambda_s}{\xi \sqrt{2} E^{3/2}} dE$$

$$= \int_E^{E_0} \frac{\lambda_s}{\xi \sqrt{2} E^{3/2}} dE$$

www.hackshp.cn

(b) 利用上题的结论：

$$\begin{aligned} t &= \int_E^{E_0} \frac{\lambda_s}{\xi \sqrt{2} E^{3/2}} dE \\ &= \frac{\sqrt{2} \lambda_s}{\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\xi \Sigma_s} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}} \right) \end{aligned}$$

分别代入轻水和石墨的 Σ_s 和 ξ ，得：

$$t_{sH_2O} = 9.4 \times 10^{-7} s$$

$$t_{sC} = 2.3 \times 10^{-5} s$$

6、在讨论中子热化时，认为热中子源项 $Q(E)$ 是从某给定分界能 E_c 以上能区的中子，经过弹性散射慢化而来的。设慢化能谱服从 $\phi(E) = \phi_0/E$ 分布，试求在氢介质内每秒每立方米内有 E_c 以上能区，（a）散射到能量 $E(E < E_c)$ 的单位能量间隔内中子数 $Q(E)$ ；和（b）散射到能量区间 $\Delta E_g = E_{g-1} - E_g$ 内的中子数 Q_g 。

解： 散射函数：

$$f(E \rightarrow E')dE' = -\frac{dE}{(1-\alpha)E}$$

对于氢核 $\alpha = 0$ ，从 E 散射到 E' 能降间隔 dE' 的几率为：

$$f(E \rightarrow E')dE' = -\frac{dE}{E}$$

∴ 散射到 E_c 以下能量 E' 单位能量间隔 dE' 的中子数目为（单位体积）

$$\begin{aligned} Q(E')dE' &= dE' \int_{\infty}^{E_c} \Sigma_s \Phi(E) f(E \rightarrow E') dE \\ &= dE' \int_{\infty}^{E_c} \Sigma_s \frac{\phi_0}{E} \left(-\frac{1}{E} \right) dE \quad E < E_c \quad (1) \end{aligned}$$

由（1）得出，散射入 E' 能量间隔 dE' 内的中子数是与 E' 无关的，

∴ 散射到 ΔE_g 区间内的中子数为：

$$\Delta E_g Q(E) = \Delta E_g \int_{\infty}^{E_g} -\frac{\phi_0 \Sigma_s(E)}{E^2} dE$$

www.hackshp.cn

1、设有一边长 $a=b=0.5$ 米， $c=0.6$ 米（包括外推距）的长方体裸堆， $L=0.0434$ 米， $\tau=0.6$ 米²，（a）求达到临界时所必须的 k_{∞} ；（b）如果功率为 5000 千瓦， $\Sigma_f=4.01$ 米⁻¹，求中子通量密度分布。

解：（1）已知裸堆的尺寸



几何曲率 B_g

确定！

修正单群裸堆临界方程：

$$k = \frac{k_{\infty}}{1 + M^2 B_g^2}$$

B_g 可算出；

$M^2 = L^2 + \tau$ 可算出；

临界时， $k=1$

方程还剩 k_{∞} 未知

代入以上的 B_g ， M^2 和 k ，解出 k_{∞}



www.hackshp.cn

（2）长方体裸堆的中子通量密度沿各轴向余弦分布：

$$\phi_T(x, y, z) = \phi_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi z}{c}$$

反应堆功率： P

$$P = E_f \bar{\Sigma}_f \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} \int_0^{c/2} 8 \phi_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi z}{c} dx dy dz$$

$$= \frac{8 V E_f \bar{\Sigma}_f \phi_0}{\pi^3}$$

$$\phi_0 = \frac{\pi^3 P}{8 V E_f \bar{\Sigma}_f} = \frac{3.88 P}{V E_f \bar{\Sigma}_f}$$

假设单次裂变能 200MeV；

题目已知体积、功率、 Σ_f

代入计算，求出 ϕ_0 ，再代入 ϕ_T 表达式，即可求出中子通量密度分布



2、设一重水-铀反应堆堆芯的 $k_{\infty}=1.28$ ， $L^2=1.8 \times 10^{-2} \text{米}^2$ ， $\tau=1.20 \times 10^{-2} \text{米}^2$ 。试按单群理论，双群理论以及年龄理论，临界方程分别求出该芯部的材料曲率和达到临界时的总的中子不泄漏几率以及慢化过程和热中子不泄漏几率。

解： (1) 单群理论临界方程：

$$\frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B_g^2} = 1$$

(2) 双群理论临界方程：

$$\frac{k_{\infty}}{(1 + \tau B_g^2)(1 + L^2 B_g^2)} = 1$$

(3) 年龄理论临界方程：

$$\frac{k_{\infty} e^{-B_g^2 \tau}}{1 + L^2 B_g^2} = 1$$

反应堆临界对曲率的要求是：

$$B_g^2 = B_m^2$$

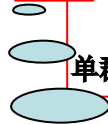
k_{∞} ， L^2 ， τ 已知，代入算出 B_g ，也就算出了 B_m

www.hackshp.cn

比较六因子公式和一下三种理论的临界方程：

六因子公式

$$k = k_{\infty} P_s P_d$$



单群临界的扩散不泄漏项

单群理论临界方程：

$$\frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B_g^2} = 1$$

单群临界中，中子均考虑为热中子，因此并没有慢化泄漏项

六因子公式

$$k = k_{\infty} P_f P_a$$

单群临界理论的扩散不泄漏项

考虑到慢化后的不泄漏项

双群理论临界方程:

$$\frac{k_{\infty}}{(1 + \tau B_g^2)(1 + L^2 B_g^2)} = 1$$

www.hackshp.cn

六因子公式

$$k = k_{\infty} P_f P_a$$

单群临界的扩散的不泄漏项

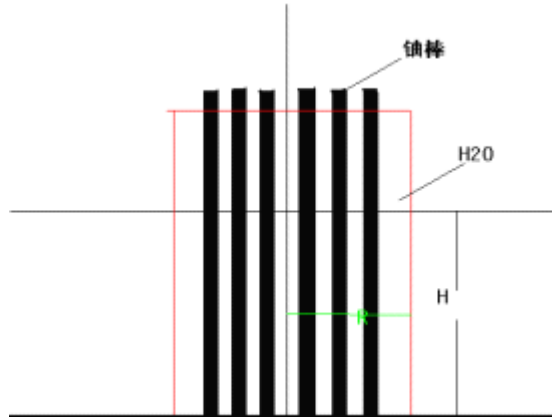
考虑到慢化到热中子年龄 τ 引起的泄漏项

年龄理论临界方程:

$$\frac{k_{\infty} e^{-B_g^2 \tau}}{1 + L^2 B_g^2} = 1$$

3、设有圆柱形铀-水栅装置， $R=0.50$ 米，水位高度 $H=1.0$ 米，设栅格参数为： $k_{\infty}=1.19$ ， $L^2=6.6 \times 10^{-4}$ 米²， $\tau=0.50 \times 10^{-2}$ 米²。

(a) 试求该装置的有效增殖系数 k ；(b) 当该装置恰好达临界时，水位高度 H 等于多少？(c) 设某压水堆以该铀-水栅格作为芯部，堆芯的尺寸为 $R=1.66$ 米， $H=3.50$ 米，若反射层节省估算为 $\delta_r=0.07$ 米， $\delta_H=0.1$ 米。试求反应堆的初始反应性 ρ 以及快中子不泄漏几率和热中子不泄漏几率。



www.hackshp.cn

解： (a) 已知了反应堆的几何尺寸

↓

几何曲率 B_g

+

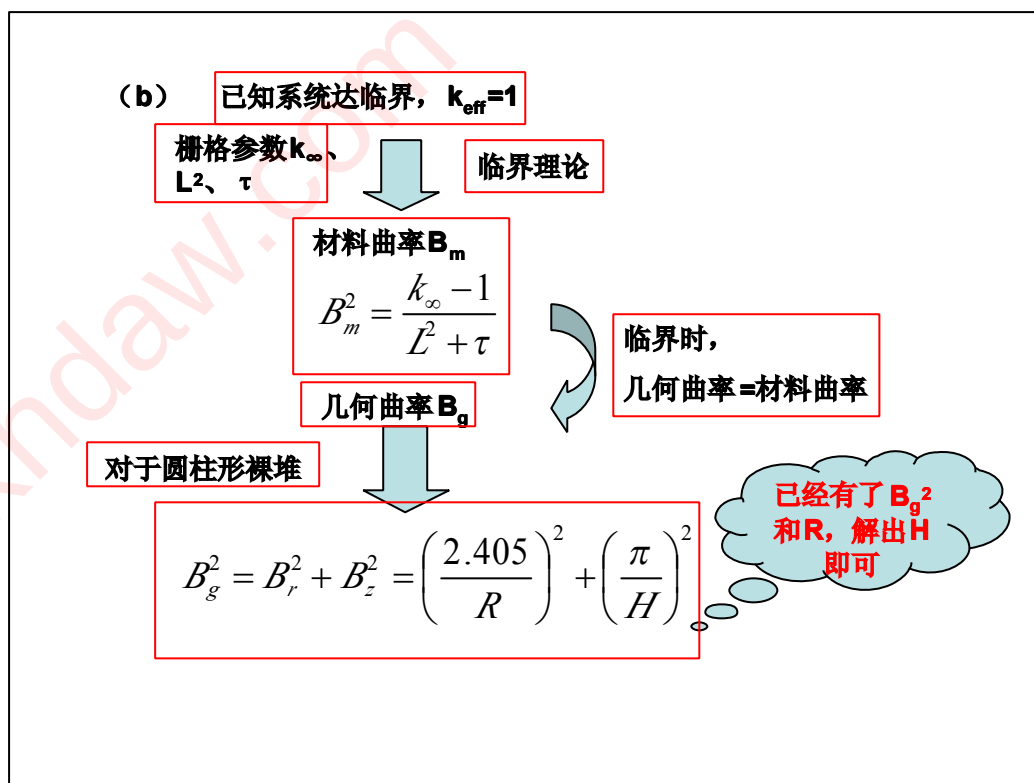
栅格参数 k_{∞} 、
 L^2 、 τ

↓

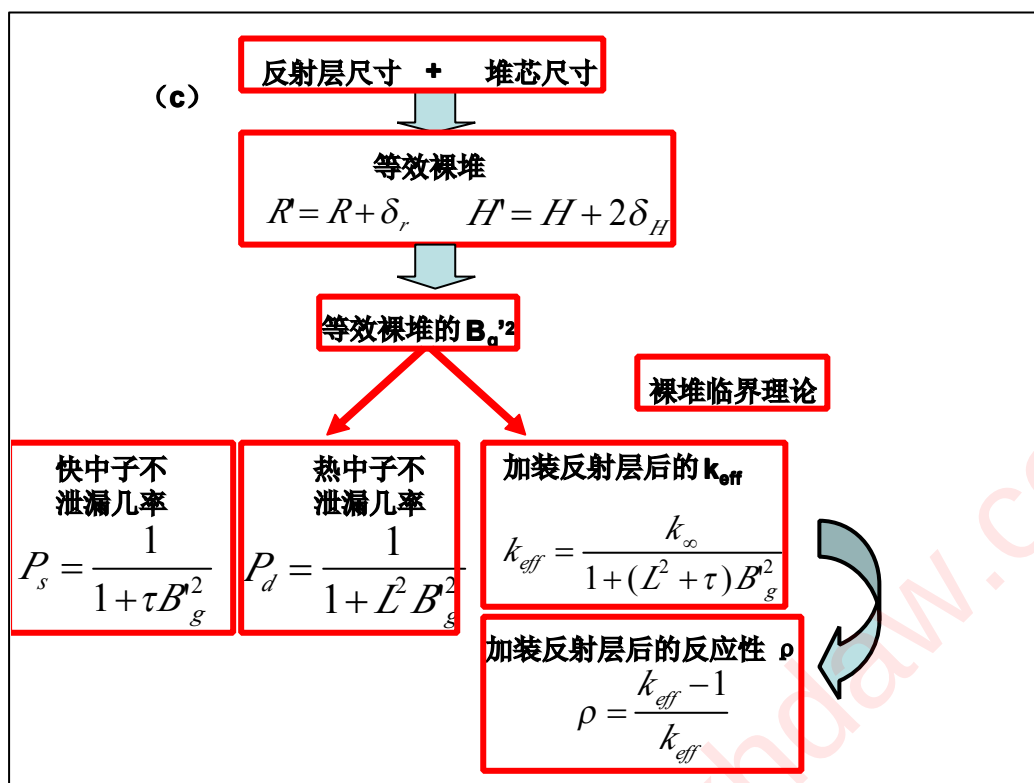
修正单群
临界理论

有效增殖系数 k_{eff}

$$k = \frac{k_{\infty}}{1 + (L^2 + \tau) B_g^2}$$



www.hackshp.cn



9、一由纯铀-235金属 ($\rho = 18.7 \times 10^3$ 公斤/米³) 组成的球形快中子堆, 其周围包以无限厚的纯铀-238 ($\rho = 19.0 \times 10^3$ 公斤/米³)。试用单群理论计算其临界质量, 单群常数如下:

铀-235: $\sigma_f = 1.5$ 靶, $\sigma_a = 1.78$ 靶, $\Sigma_{tr} = 35.4$ 米⁻¹, $\nu = 2.51$

铀-238: $\sigma_f = 0$ 靶, $\sigma_a = 0.18$ 靶, $\Sigma_{tr} = 35.4$ 米⁻¹

www.hackshp.cn

解: 外部包裹U-238做反射层

带有反射层的球形堆的临界方程:

$$D_c [1 - B_c R \cdot \text{ctg}(B_c R)] = D_r \left[1 + \frac{R}{L_r} \text{cth} \left(\frac{T}{L_r} \right) \right]$$

$$D_c = D_r$$

$$\text{cth} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

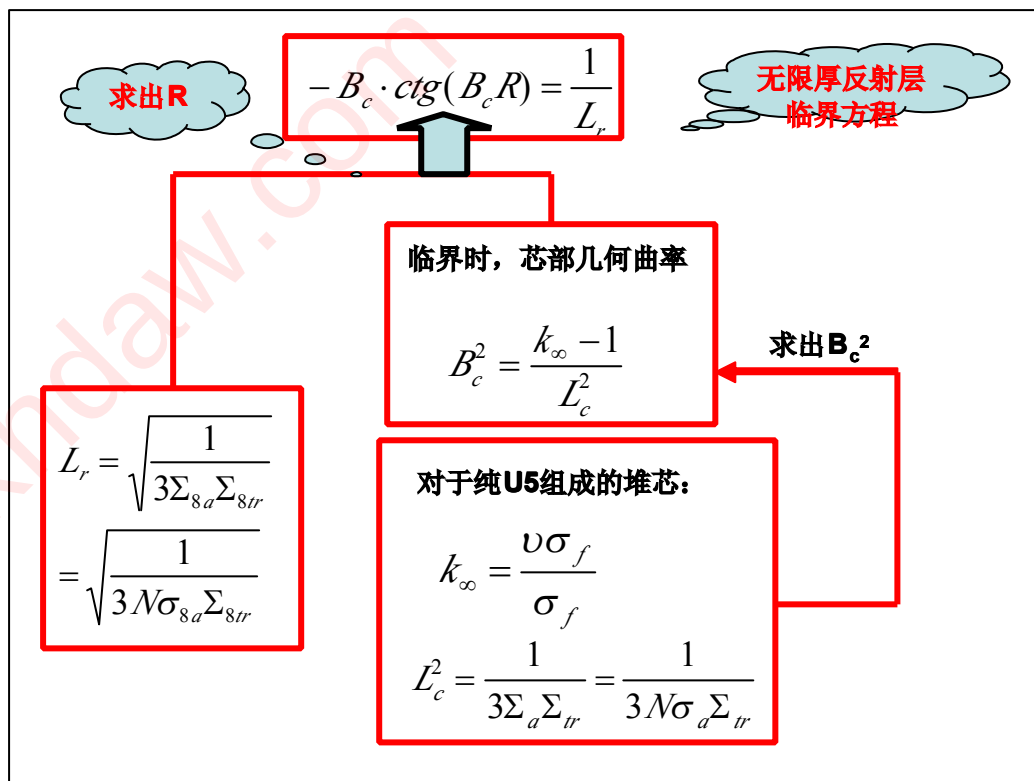
无限厚反射层
临界方程

T → ∞
化简方程

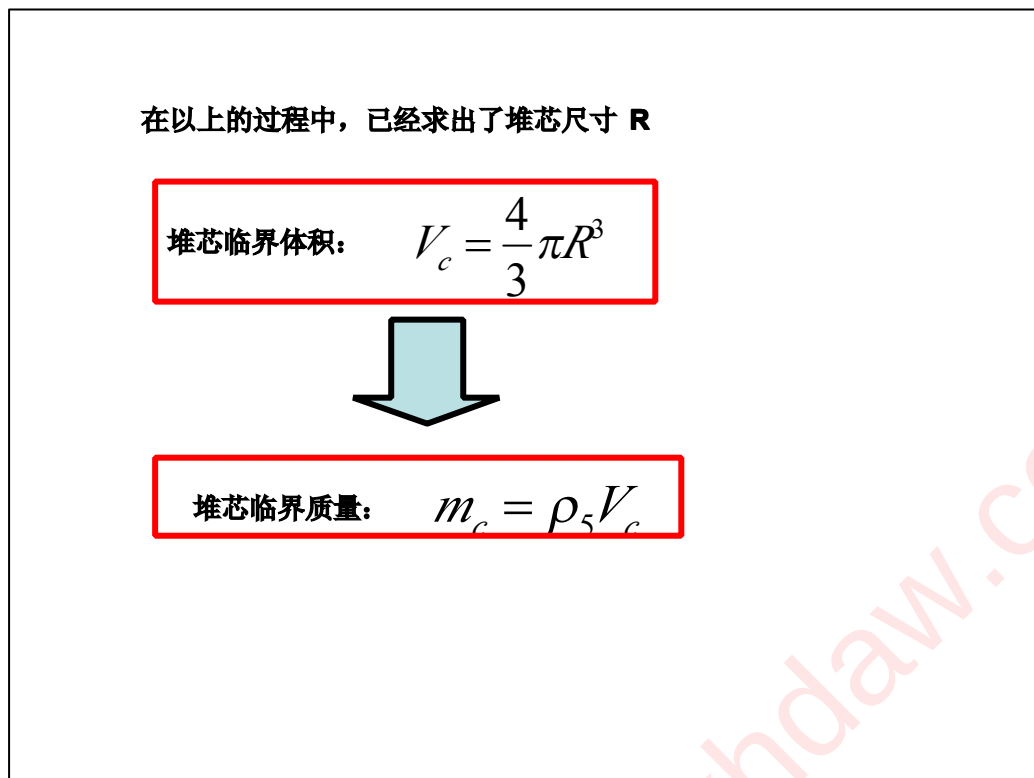
$$-B_c \cdot \text{ctg}(B_c R) = \frac{1}{L_r}$$

为何选取慢化能力不好的U8做反射层材料?

说明: 下表c, r分别代表芯部和反射层; cth为双曲余切函数



www.hackshp.cn



数学知识补习

- 1、空间立体角
- 2、Taylor级数
- 3、梯度、散度、旋度
- 4、波动方程（亥姆霍兹方程）
- 5、Bessel函数

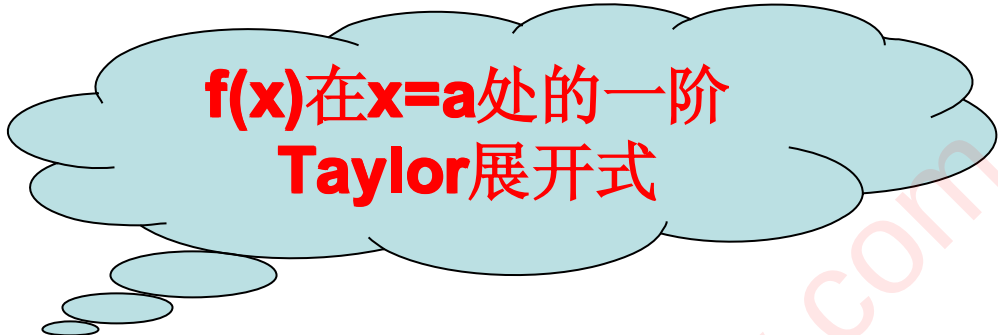
1、Taylor级数引入

逼近 (**approximation**)

在某点 $\mathbf{x_0}$ 附近用简单函数近似地代替一般函数 $\mathbf{f(x)}$

一阶逼近：利用微分的性质，在 $\mathbf{x=a}$,用切线代替 $\mathbf{f(x)}$

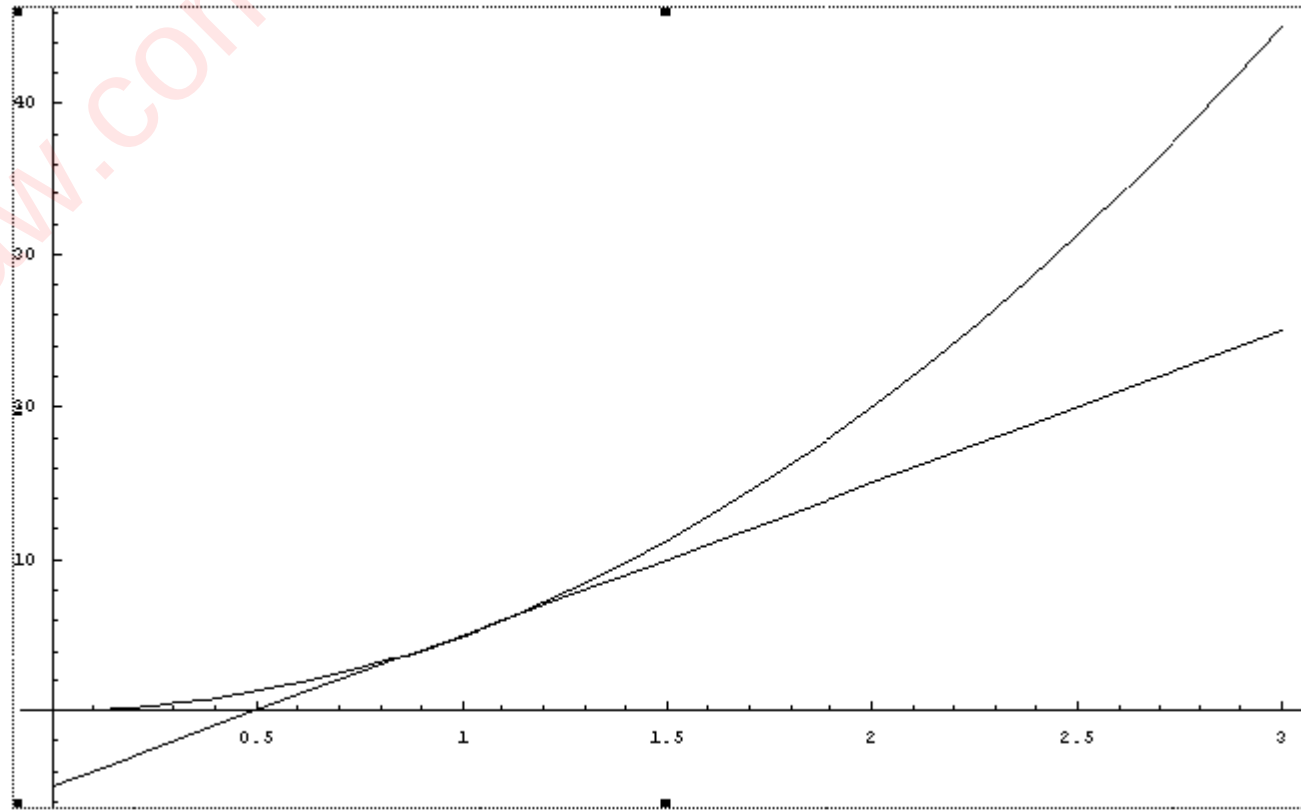
当 $\Delta \mathbf{x=x-a}$ 很小时，



**$f(x)$ 在 $x=a$ 处的一阶
Taylor展开式**

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad (1.1)$$

```
In[1]:= Plot[{5 x^2, 5 + 10 (x - 1)}, {x, 0, 3}]
```



```
Out[1]= - Graphics -
```

$y=5x^2$ 和 y 在 $x=1$ 处一阶逼近函数 $y=10(x-1)+5$ 的图像

二阶逼近

用 $P(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$ 逼近 $f(x)$

初值相等

$$P_2(0) = f(0) \longrightarrow C_0 = f(0)$$

斜率相同

$$P_2'(0) = f'(0) \longrightarrow C_1 = f'(0)$$

凹凸相同

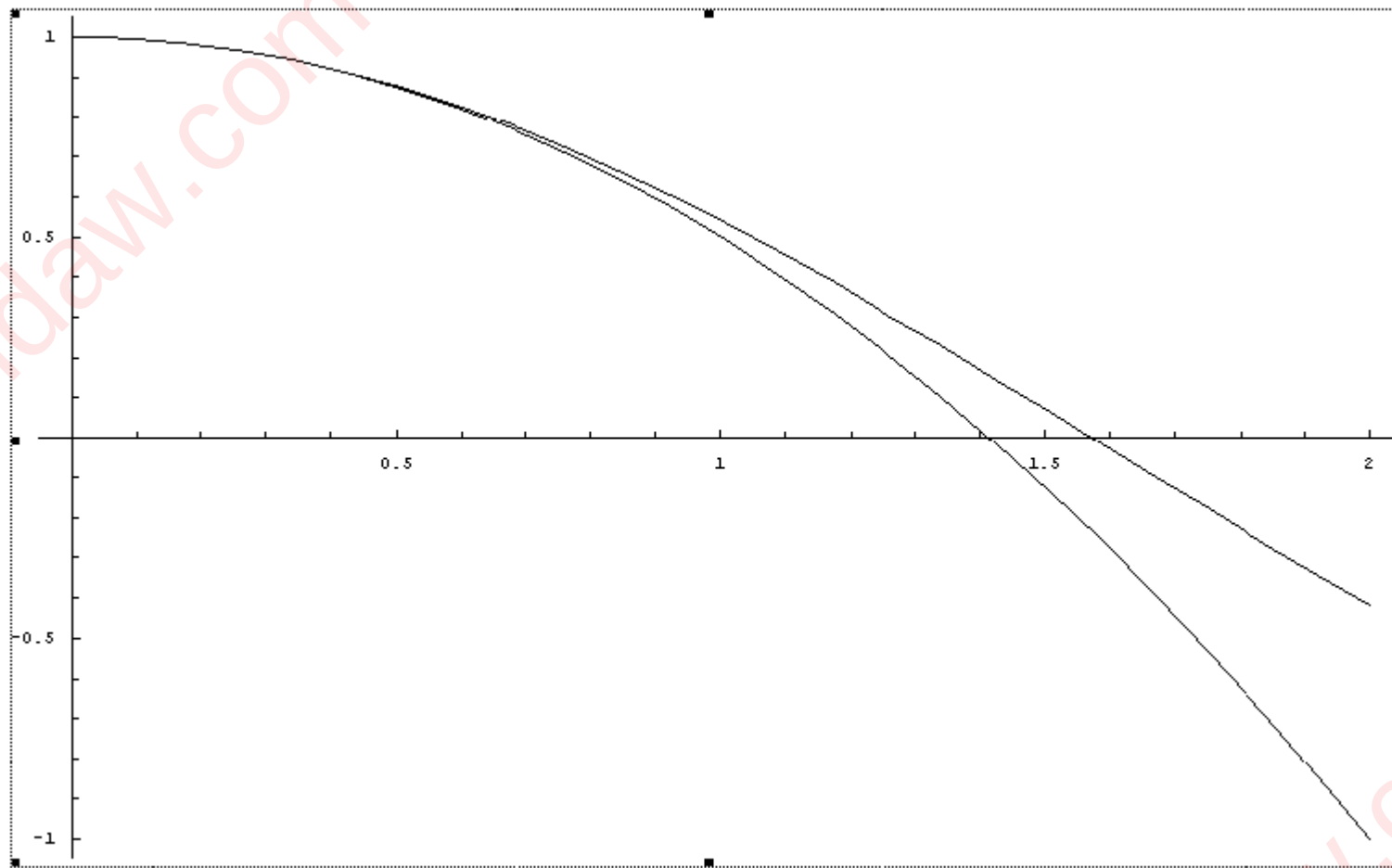
$$P_2''(0) = f''(0) \longrightarrow C_2 = (1/2) f''(0)$$

二阶Taylor
级数展开式



$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

```
In[1]:= Plot[{1 - 0.5 x^2, Cos[x]}, {x, 0, 2}]
```



```
Out[1]= - Graphics -
```

$y = \cos x$ ，与它的二阶**Taylor**展开式 **$y = 1 - (1/2)x^2$** 的图像

n阶多项式逼近:

多项式函数: $P_n(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n$

满足:

$$P_n(0) = f(0)$$

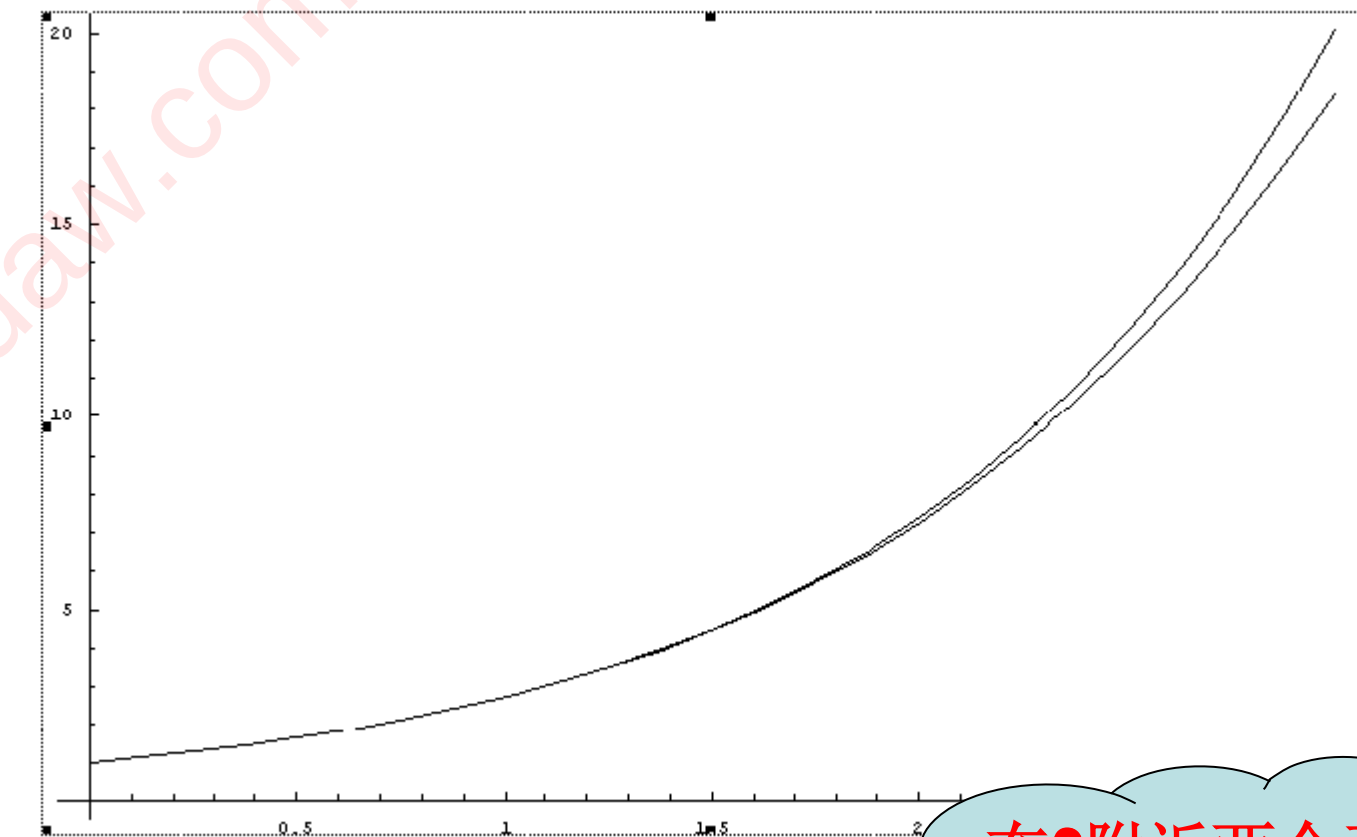
$$P_n'(0) = f'(0)$$

$$P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

**n阶麦克劳林
展开式**


$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

```
In[3]:= Plot[{e^x, 1 + x + 0.5 x^2 +  $\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{120} x^5$ }, {x, 0, 3}]
```



Out[3]= - Graphics -

在0附近两个函数的
差别已经很小

e^x 与它的5阶Taylor展开式图像

2、梯度、散度、旋度引入

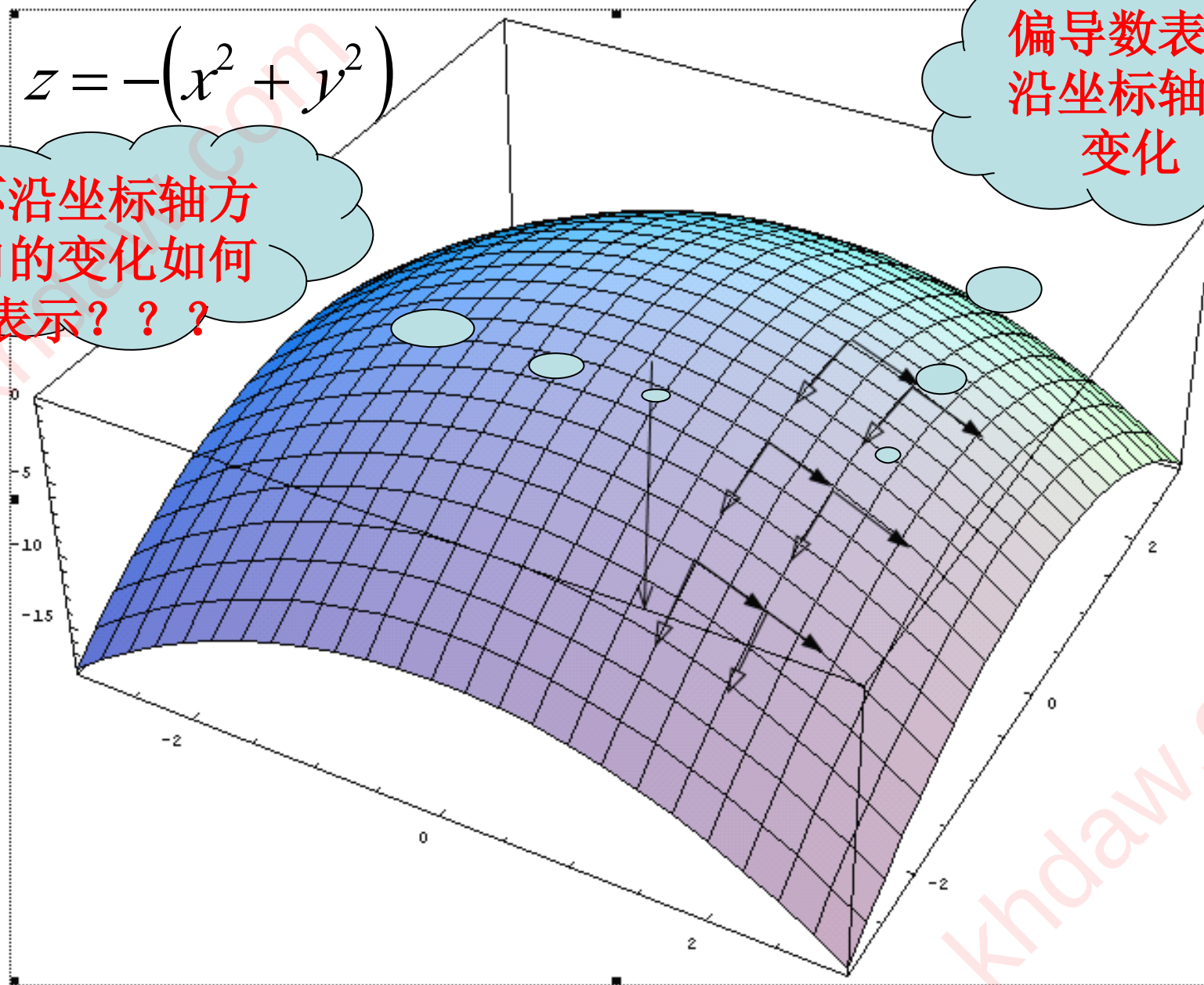
2.1梯度

```
In[2]:= Plot3D[-x^2 - y^2, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

$$z = -(x^2 + y^2)$$

不沿坐标轴方向的变化如何表示???

偏导数表示沿坐标轴的变化



```
Out[2]= - SurfaceGraphics -
```

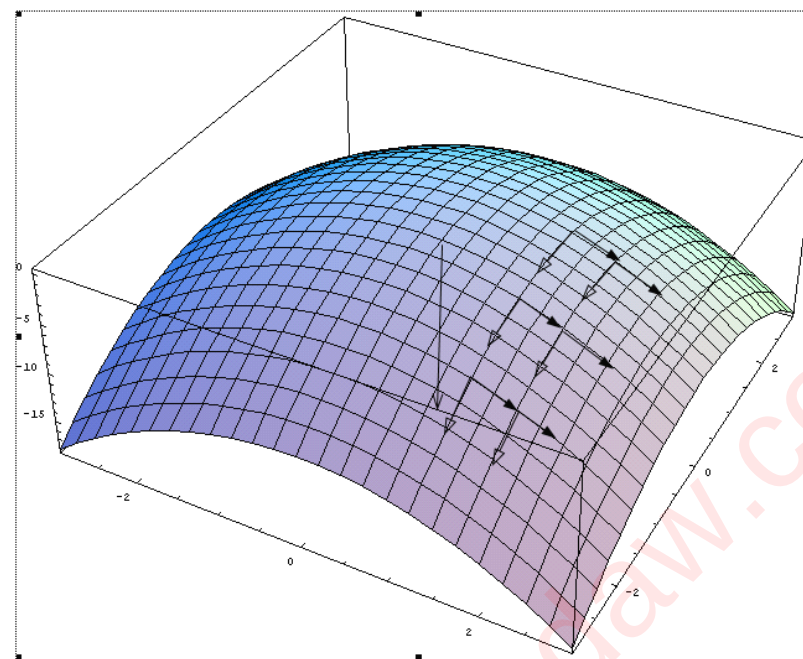

多元函数上某点的偏导数
构成了沿坐标轴的变化，
能否将沿某一给定方向的
变化率看成是沿各坐标轴
变化率的迭加呢？

从图上看是可以的！

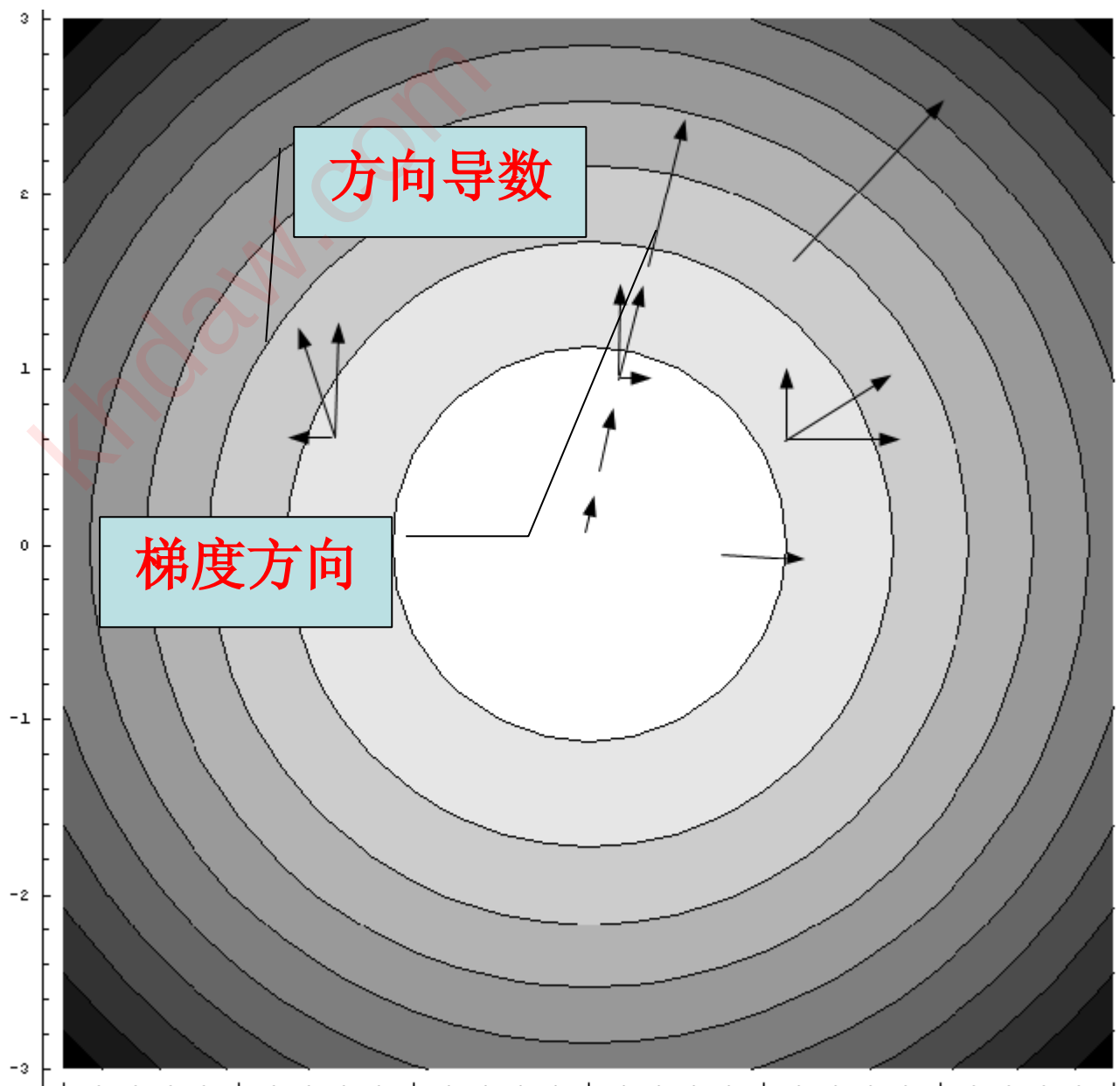
沿某一方向的方向导数可以
这样计算：

偏导数确定的导数向量 $\times$ 单位方向向量

In[2]:= Plot3D[-x^2 - y^2, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]



Out[2]:= - SurfaceGraphics -



$$z = -(x^2 + y^2)$$

的等高线图

由等高线图可以看出：

1、 梯度方向是变化率最大方向

2、 任意方向的方向导数可以表示为偏导数的矢量和

对于二元函数，方向导数可以如此计算：

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i, \frac{\partial f}{\partial y} j \right) \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$$

当 $\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ 与 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} i, \frac{\partial f}{\partial y} j \right)$ 方向相同时，

方向导数有最大值。

方向导数去最大值的方向称为：梯度方向

$$\text{grad} \cdot f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

对于三维变量函数：

$$\text{grad} \cdot f(x, y, z) = \nabla f$$

梯度是针对标量场而言的，梯度的正方向：高->低

2.2散度

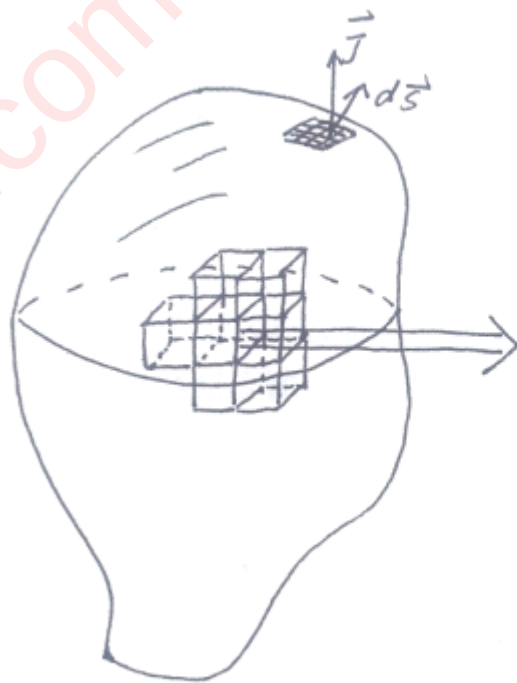
散度描述的是从无限小体积元表面流出的净流量。

Gauss定理的引出：

$$\oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = \iiint \operatorname{div} \vec{J} dV$$

物理上如何解
释???

khdaw.com



交界面上 $\vec{J}d\vec{s}$
大小相等方向
相反，抵消！

将封闭空间分成无数个小体积元，
从面 $\vec{S}$ 流出的流量 = 各个小体积元流
出量之和

Gauss定理！

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sum \oiint_{dV} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sum \text{div} \vec{J} dV = \iiint \text{div} \vec{J} dV$$

2.3旋度

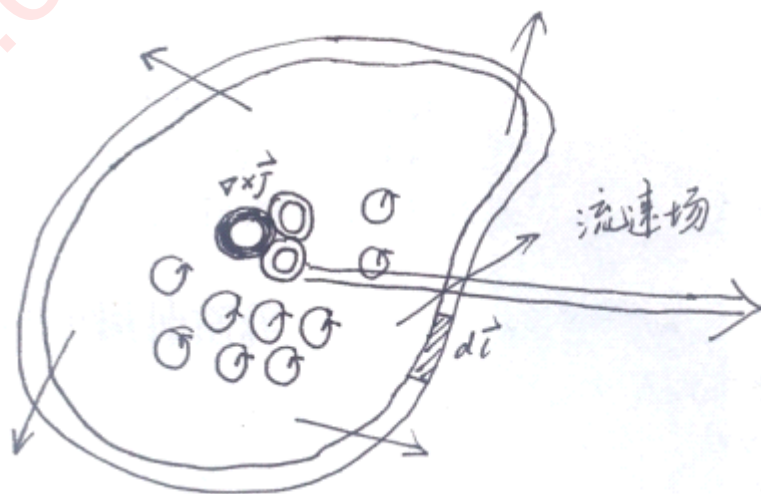
Stokes公式的引入:

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{J} ds$$

Why? ? ? 意义何在?

旋度作为无限小面积内的环流。

计算在流速场 $\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 中，环路中的流量



交界处环流
相互抵消



把以环路为边界的面分成无数个面元

通过环路的流量=微小面元环流之和

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \sum_{ds} \oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{J} ds$$

Wh

y? ? ?

格林公式（斯托克斯的二维形式）

3.波动方程的引入:

弦的振动（古典问题）

设有一根均匀柔软的细弦，平衡时沿直线拉紧，而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外，不受外力影响。下面研究弦作微小横向振动的规律。（*所谓“微小”是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小，以致它们的高于一阶次方都可以忽略不计。）

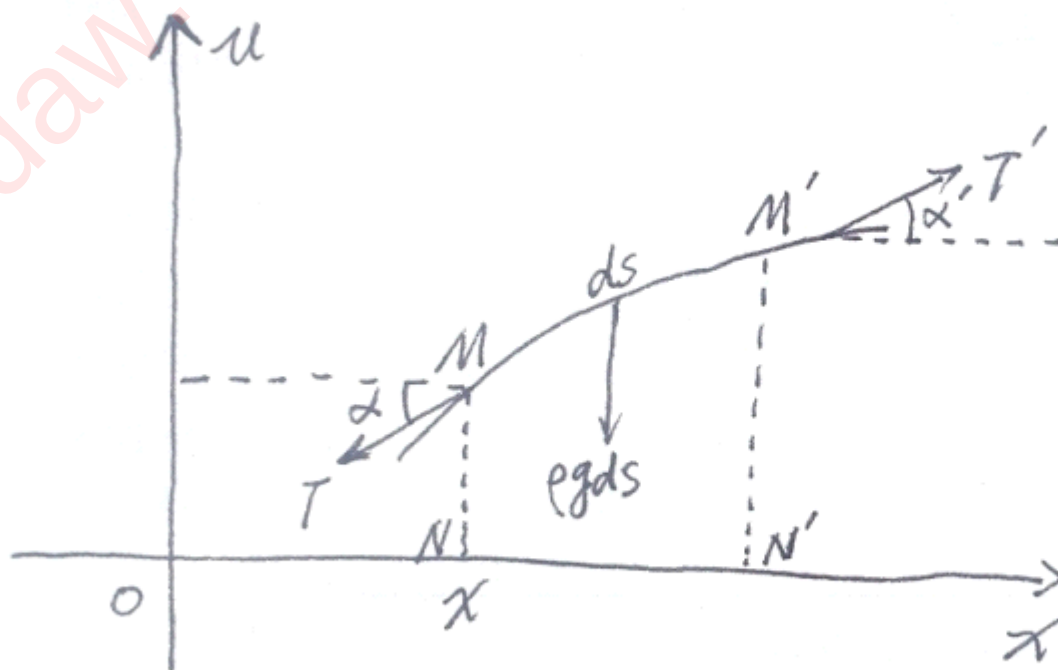


如何用数学描述弦
振动???

设弦上具有横坐标为 x 的点在 t 时刻的位置为 M ，位移 NM 记作 u 。显然，在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的函数 $u(x, t)$ 。

首先，选取弦上长度为 ds 的质量元，研究该质量元的运动情况，如果每小段质量元运动情况研究清楚了，那么，显然整个弦的运动也就清楚了。

一维弦振动



在弦上任取一段弧**MM'**，长度为**ds**，设 ρ 是弦的密度，弧**MM'**两端的张力分别为**T**，**T'**。考虑无刚性（张力沿切线方向），现考虑**MM'**的受力情况。

X轴方向受力：

$$T' \cos \alpha' = T \cos \alpha \quad (3.1)$$

将**cos** α 和**cos** α' 进行**Taylor**展开：

得：

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

$$\cos \alpha' = 1 - \frac{\alpha'^2}{2!} + \frac{\alpha'^4}{4!} - \dots$$

∵ 水平方向弦并没有发生移动

得:

$$\cos \alpha \approx 1 \quad \cos \alpha' \approx 1$$

代入 (3.1), 得:

$$T = T'$$

∵ 考虑微小振动
 α 和 α' 值很
小, ∴ 可以忽略
高阶项。

在 u 方向受力 (取 y^+ 方向为参考方向):

$$-T \sin \alpha + T' \sin \alpha' - \rho g ds$$

$$-T \tan \alpha + T' \tan \alpha' - \rho g ds$$

$$-T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + T' \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \rho g ds$$

$$-T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + T' \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \rho g ds$$

* 因为 α 和 α' 很小, 所以
 $\sin \alpha = \tan \alpha$; $\sin \alpha' = \tan \alpha'$

$\tan \alpha$ 和 $\tan \alpha'$
分别是 x 和
 $x + dx$ 处弦曲线
的导数

$$T = T'$$

u方向，由牛顿第二定律，得：

$$-T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + T \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \rho g ds = \rho ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$T \left[\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \rho g dx = \rho dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

由于
ds $\approx$ **dx**，
替换整理

上式中括号内可以看成是，**u**的一阶导数的微分，可以用**u**的二阶导数来表示：

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx - \rho g dx = \rho dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$T \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho g \right] dx = \rho dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

合并整理

$$T \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho g \right] dx = \rho dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = \rho dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

一维无限长弦波动方程

进一步简化方程，考虑具有理想刚性的弦，弦上的力变化远远大于重力影响

$$\text{令 } a^2 = \frac{T}{\rho}$$

如何求解波动方程
(1.2) ???

3.1 一维波动方程的求解

思想：观察一维弦振动，各点的振动不光和位置有关，并且对于某一个位置上的点随时间的运动的遵循简谐振动的。因此，考虑时-空分离。

令： $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$a^2 T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

代入波动方程

$$\frac{a^2}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

变量分离

*一般地，要使上式成立，等式左右必须均等于一个常数，设为 λ 。

分离出时间方程和空间方程

$$\frac{a^2}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \lambda \quad (3.4)$$

$$\text{令 } k^2 = \frac{\lambda}{a^2}$$

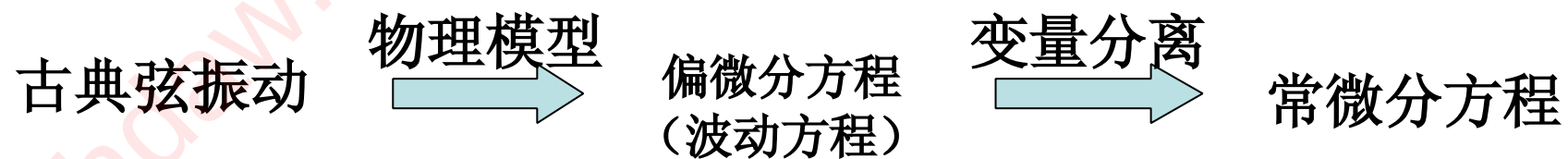
首先求解波动方程的空间部分 (3.3)

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - k^2 X(x) = 0 \quad (3.4)$$

亥姆霍兹方程

*通常 (3.4) 成为亥姆霍兹方程，但是又因为它是波动方程的空间部分，所以也称作波动方程。

工作小结:



如何求解 (3.3)
和 (3.4) 这两
个方程

剩下的工作:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - k^2 X(x) = 0 \quad (3.4)$$

Why???

就目前的知识而言，可以猜想到 (3.4) 的解具有指数或者正弦余弦函数的性质。

两个特解：

$$X_1 = e^{-kx}$$

$$X_2 = e^{kx}$$



由于三角函数可以通过欧拉公式与指数函数联系，因此，只考虑解具有指数函数形式是合适的！

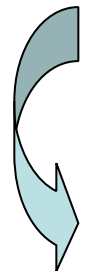
X1, X2称为 (3.4) 的基础解系，由线性叠加可知，**X1, X2**的线性组合应当也满足方程 (3.4)

普遍解



$$X(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} \quad (3.5)$$

考察普遍解
(3.5) 的
最基本约
束, 振动应
该在无限远
处有限


$$X(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} \quad (3.5)$$

$$X(x) = Ae^{-kx} \quad (3.6)$$

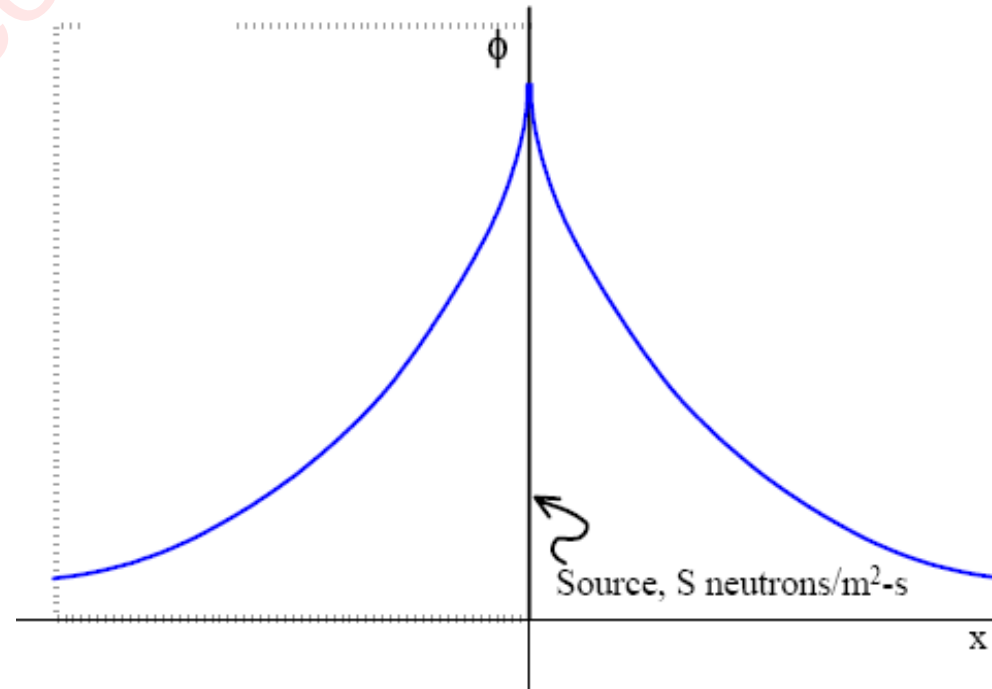
非增殖介质中子扩散方程:

$$\nabla^2 \phi - \frac{\phi}{L^2} = 0 \quad (3.7)$$

显然, (3.7) 和 (3.4) 具有同样的形式

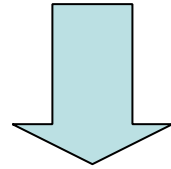
因此非增殖介质中子扩散方程是一个典型的
亥姆霍兹方程 (波动方程)

考虑最简单情况（一维平板面源）



扩散方程:
$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{\phi(x)}{L^2} = 0, x \neq 0 \quad (3.8)$$

扩散方程与亥姆霍兹方程（波动方程）形式相同，故它们具有相同的解



$$\therefore \phi(x) = A e^{-x/L}, x > 0 \quad (3.9)$$

由一维的亥姆霍兹方程的通解（**3.5**）和约束条件得到的具有物理意义的解（**3.6**）也是同样满足反应堆中子扩散理论的！！！！

所以，从物理的意义和数学的解上都可以得知，无限平板源扩散的中子通量密度应该遵循指数衰减规律。

回顾:

前面我们只求解了一维波动方程的空间部分（亥姆霍兹方程），但是我们说解完了空间部分 $\Phi(\mathbf{x})$ 就足够了，因为在反应堆物理分析中，我们所求的稳态中子扩散方程是跟时间无关的。

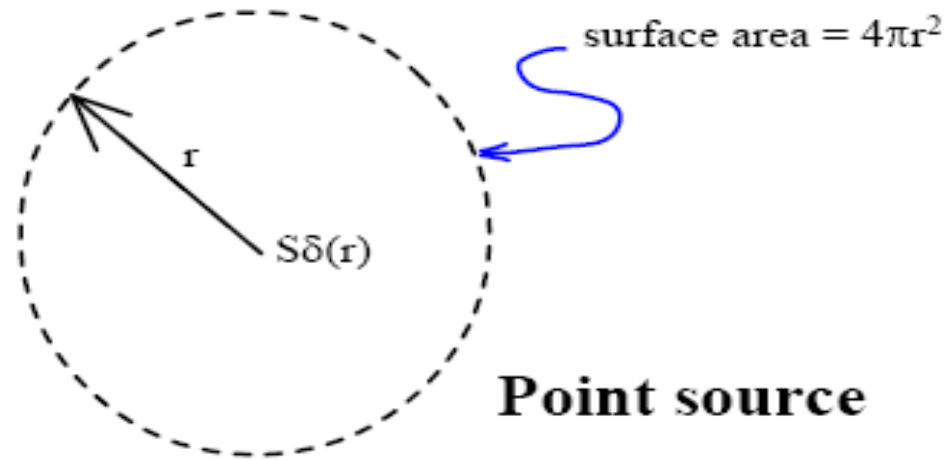
为什么认为中子
通量密度跟时间
无关???

反应堆在给定功率条件下，运行足够长的时间，若没有扰动，那么各点的中子通量密度应该是确定的，即平衡的。对于反射层这样的非增殖介质，用稳态非增殖扩散方程描述是合适的。

如果要用稳态非增殖扩散方程描述净堆启动过程，显然是不合适的，对于未达平衡的状态除了空间函数外还要加上时间函数 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 来描述反应堆的动力学特性。

另外一种情况：

无限大非增殖介质内点源的情况



球坐标下，扩散方程（1.7）演变为：

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{\phi(r)}{L^2} = 0, (r > 0) \quad (3.10)$$

$$u = r\phi \quad \frac{d^2\phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{\phi(r)}{L^2} = 0, (r > 0) \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{u}{L^2} \quad (3.11) \quad \leftarrow \text{波动方程}$$

(3.11) 式是前面所讲的波动方程，不再详述

4. Bessel函数的引入

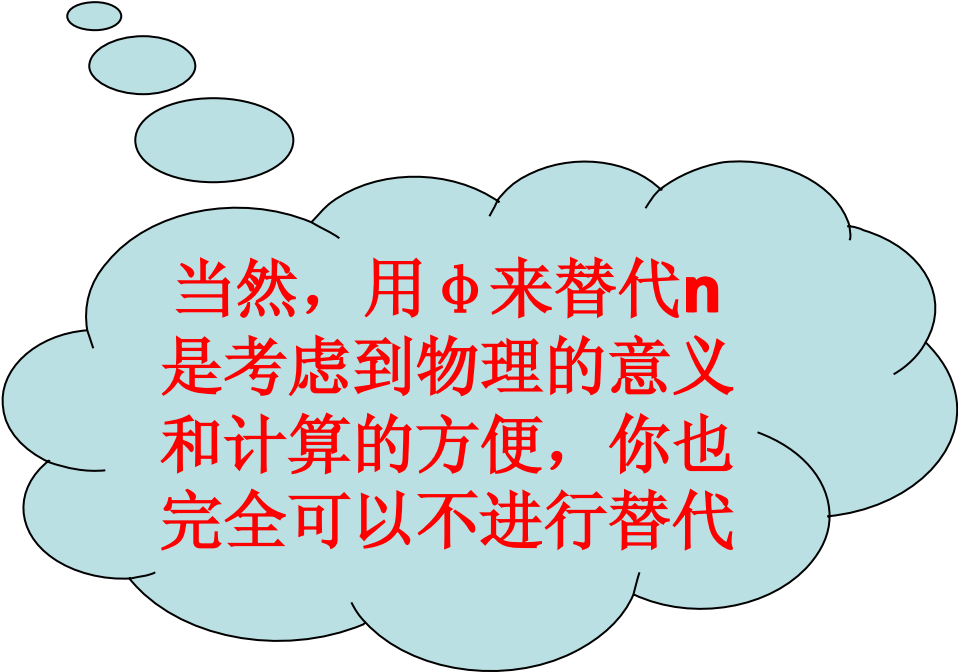
热传导过程

冷热不均的物体，热量要从温度高的地方向温度低的地方转移，形象的用热的流动来描述。将整个物理的温度看成温度场 $u(\mathbf{r}, t)$ （标量场）

由高等数学的初等场论可知，标量场的梯度函数对应于矢量。结合热传导过程，温度场的梯度函数应该对应于热流矢量。



*而在反应堆中，中子密度为一个标量场，中子密度 n 标量的梯度函数应该对应于中子流密度 J ，但是对于单速中子而言，我们是可以用中子通量密度标量 $\phi = nv$ 来代替中子密度 n 标量的。



当然，用 ϕ 来替代 n 是考虑到物理的意义和计算的方便，你也完全可以不进行替代

回到热传导问题，单位时间某体积内的温度变化：

$$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \quad (4.1)$$

是否应该等于从该体积内向外流出的净热量呢？??

definitely true!!!并且从场论
初步我们知道从封闭曲面流
出的净热流=热流场散度×封
闭曲面所围的体积（**Gauss**
定理）

$$\oint J ds \quad (4.2)$$

$$\oint J ds = \int_{dV} \text{div} J dV = \text{div} J \quad (4.3)$$

而，热流矢量 $J = A \cdot \text{grad} u \quad (4.4)$

A为表征热
传导性质
的参数

单位时间穿出无限
小面 $\mathbf{s}$ 的净热流为：

$$A \cdot \text{div} \cdot \text{grad} u = A \cdot \nabla^2 u$$

由温度随时间的变化与单位时间穿出面 $\mathbf{s}$ 的净热流相等的关系，我们建立热传导方程

$$\text{令 } A = a^2 \begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A \nabla^2 u(x, t) & (4.5) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u(x, t) & (4.6) \end{cases}$$

三维热传导方程

*联想在一维弦振动求解时的变量分离：

$$u(x, t) = T(t)X(r) \quad (4.7)$$

$$(2.6) \Rightarrow \begin{cases} X(r) \frac{dT(t)}{dt} = a^2 T(t) \nabla^2 X(r) \\ \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{a^2}{X(r)} \nabla^2 X(r) & (4.8) \end{cases}$$

变量分离

一般地，要使（**2.8**）两边相等，这两边必须都等于一个不含变量的常数 λ

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \lambda \quad (\mathbf{4.9})$$

$$\frac{d^2}{X(r)} \nabla^2 X(r) = \lambda \quad (\mathbf{4.10})$$

*中子扩散理论研究是稳态后的中子通量密度分布，鉴于这样的考虑，我们还是只关心方程的空间部分（**4.10**）

现在考虑无限薄圆片的热传导方程：

在圆柱体反应堆的径向中子通量密度分布中，出现了**Bessel**函数。**Why? ? ?**

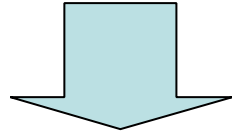
先对方程 (4.10)
进行化简

$$k = \frac{\lambda}{a^2}$$

$$\nabla^2 X(r) - kX(r) = 0 \quad (4.11)$$

又是我们熟悉的亥姆霍兹方程

*为了能在圆中更简单的求解方程，进行坐标变换

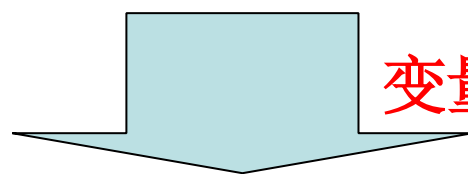


$$\frac{\partial^2 X(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial X(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 X(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} - kX(\rho, \theta) = 0 \quad (4.12)$$

这又是一个偏
微分方
程!!!

要对 (2.12) 求解，必
须再次进行变量分离
It's so boring!!!

$$\frac{\partial^2 X(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial X(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 X(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} - kX(\rho, \theta) = 0 \quad (4.12)$$



变量分离

又是一个亥姆霍兹方程

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \mu \Theta(\theta) = 0 \quad (4.13)$$

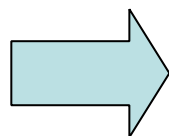
$$\rho^2 \frac{d^2 P(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dP(\rho)}{d\rho} + (k\rho^2 - \mu)P(\rho) = 0 \quad (4.14)$$

前面已经求出亥姆霍兹方程的解：

$$\Theta(\theta) = Ce^{-\sqrt{\mu}\theta} \quad (4.15)$$

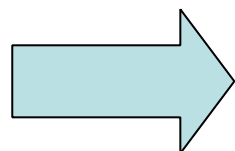
$$\Theta(\theta) = Ce^{-\sqrt{\mu}\theta} \quad (4.15)$$

由圆的对称性，温度分布应该具有周期性!!!



$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{\mu}\theta} &= e^{-\sqrt{\mu}(\theta+2n\pi)} \\ &= e^{-\sqrt{\mu}\theta-2n\pi\sqrt{\mu}} \end{aligned}$$

比较等式两端



$$\mu = 0, 1^2, 2^2, 3^2 \dots n^2 \dots \quad (4.16)$$

代入 (4.14)

$$\rho^2 \frac{d^2 P(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dP(\rho)}{d\rho} + (k\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0 \quad (4.17)$$

n阶Bessel方程

思考:

对于圆柱体反应堆，求解中子通量密度分布时采用柱坐标

亥姆霍兹
方程

变量
分离

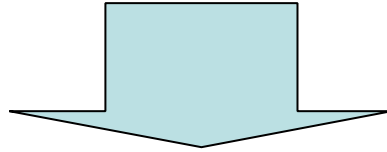
$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{L^2} \phi = 0$$

$$\phi(\rho, \theta, z) = P(\rho)\Theta(\theta)H(z)$$

*与前面引入的热传导方程的空间部分相比，中子通量密度函数的径向-角度分布应该是和热传导方程具有同样的形式！！！！

$P(\rho)\Theta(\theta)$ 是满足热传导方程的空间方程 (4.12) 的

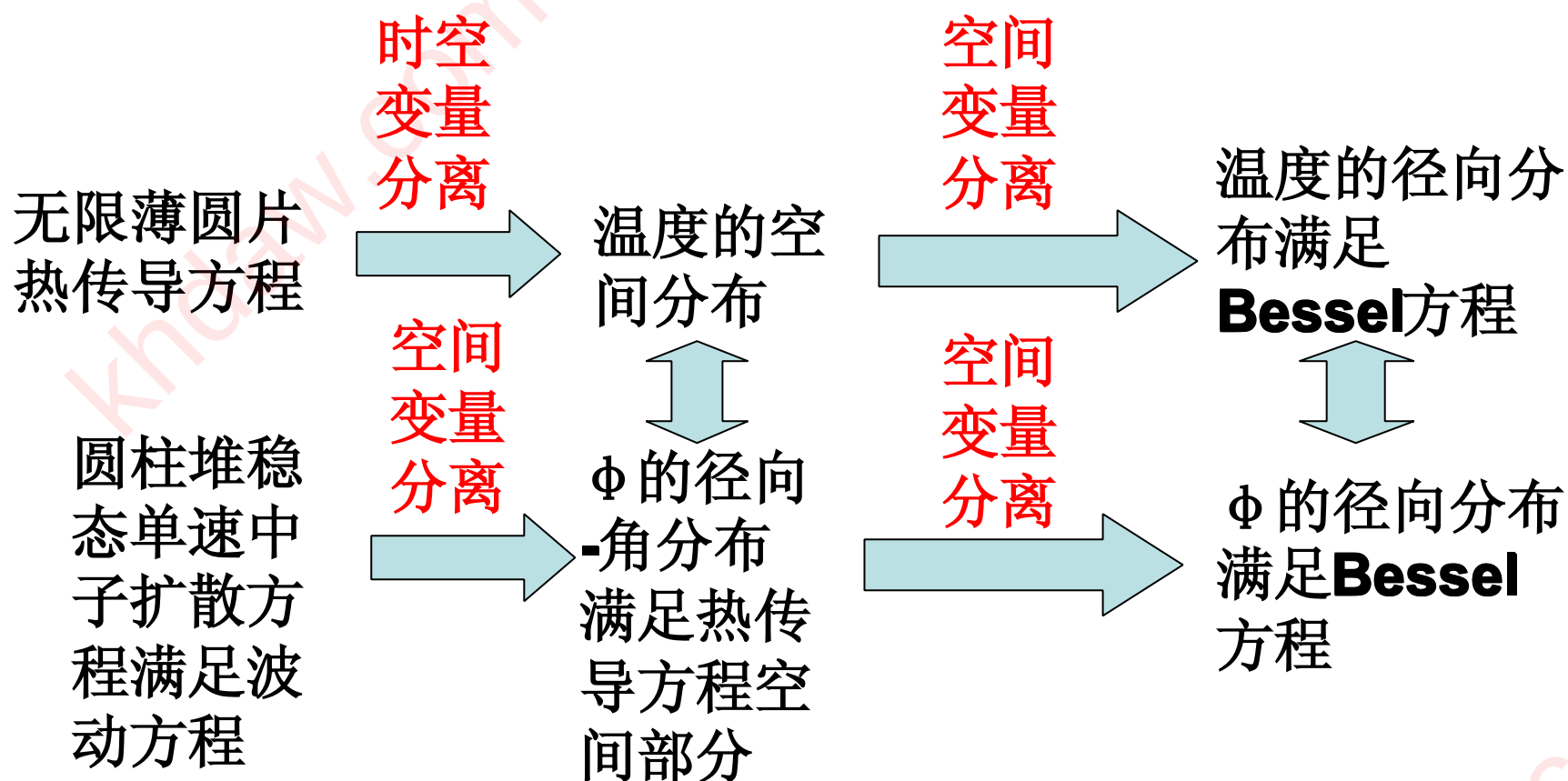
而径向函数部分 $P(\rho)$ 又满足**Bessel**方程 (4.17)



在圆柱形堆内，中子通量密度一定含有**Bessel**函数的乘积项

参看课本**p90-7** 中子通量密度的表达式

*热传导方程与扩散方程的类比



Bessel函数 数理方程形式的类似

起源于热传导方程的求解

出现在圆柱体反应堆的 ϕ 中

n阶Bessel方程:

如何求解???

$$\rho^2 \frac{d^2 P(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dP(\rho)}{d\rho} + (k\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0 \quad (4.17)$$

这也是解微分方程的一种通常考虑

***思想:** 当微分方程很复杂时, 我们不可能通过观察或者猜想求得的特解。但是, 一个连续函数可以展开为级数形式, 并且选定了级数的形式后, **展开式一定!!!**

以上热传导方程的
解法与一般**Bessel**
方程一样

考虑一般**Bessel**方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

解方程的详细过程此处不再赘述，有兴趣的请参看
《数学物理方程与特殊函数》**p-103**页，**5.2**节。

Bessel方程的解称为Bessel函数

Bessel函数 { 第一类Bessel函数 $J_n(x)$
第二类Bessel函数 (Neuman函数) $Y_n(x)$

*具体的函数形式请参看《数理方程与特殊函数》附录，或者数学手册，**Bessel**函数具体表达式中牵涉到的 Γ 函数同样。

常用数学软件：Mathematica，MATLAB，Maple...

参看的书：《大学数学手册》、《剑桥物理公式手册》、
《数理方程与特殊函数》...

**May You Have a Wonderful Experience in
Nuclear-reactor Physical Analysis Study!**

THANKS AGAIN!