三明一中高三数学（文）模拟试卷 6 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【分析】解不等式化简集合 B，再进行交集运算，即可得答案；

【详解】$\because B=\{x\mid x(2x-3)>0\}=\{x\mid x>\dfrac{3}{2}$ 或 $x<0\}$，$\therefore A\bigcap B=\{-1,2,3\}$，故选：C.

2.【分析】利用复数的除法运算化简复数 z，再根据共轭复数的概念，即可得答案；

【详解】$\because z=\dfrac{2}{i-1}=\dfrac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-1-i$，$\therefore \bar{z}=-1+i$，故选：A.

3.【分析】利用已知条件列出关系式，求解 k，然后得到双曲线的渐近线方程.

【详解】解：由已知 $(2,0)$ 为双曲线的一个焦点可得，$1+k=4$，即 $k=3$，$\therefore x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

所以渐近线方程为：$y=\pm\sqrt{3}x$．故选：D．

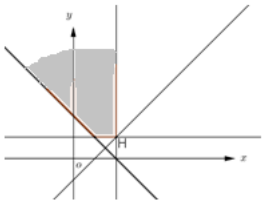
4. 【分析】直接将数据代入卡方公式中计算，即可得答案；

【详解】$\because K^2=\dfrac{100(40\times20-30\times10)^2}{70\times30\times50\times50}\approx4.76>3.841$，

$\therefore$ 有 95%的把握认为“喜欢该电视节目与性别有关”，故选：A.

5.【分析】作出约束条件所表示的可行域，当直线 $z=x-y$ 过点 H 时，z 取最大值.

【详解】作出约束条件所表示的可行域，如图所示，则 $H(2,1)$，



当直线 $y=x-z$ 过点 H 时，直线在 y 轴上的截距 $-z$ 达到最小，即 z 达到最大值，

$\therefore z_{\max}=2-1=1$.故选：C.

6.【分析】根据题意可得 2α 为第一象限角，再对 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 两边平方可得 $\sin2\alpha$，最后利用同角三角函数基本关系，即可得答案；

【详解】$\because \cos\alpha-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，$\alpha$ 为第三象限角，

$\therefore 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\dfrac{5\pi}{4},k\in Z$，$\therefore 4k\pi+2\pi<2\alpha<4k\pi+\dfrac{5\pi}{2},k\in Z$，

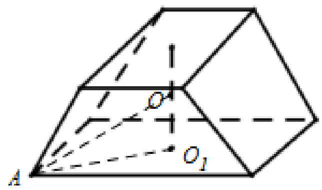
$\therefore 2\alpha$ 为第一象限角，$\therefore \cos2\alpha>0$，

$\because \cos\alpha-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，$\therefore 1-\sin2\alpha=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\sin2\alpha=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore \cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \dfrac{4}{5}$.故选：D

7.【分析】确定几何体外接球的球心O，再利用勾股定理求出外接球的半径R，代入球的表面积公式，即可得答案；

【详解】如图所示，取对称轴的中点O，下面底的中心O_1，连结OA, O_1A，



$\therefore OA^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \Rightarrow R^2 = (\dfrac{\sqrt{34}}{2})^2 + (\dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{43}{4}$，

$\therefore S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \dfrac{43}{4} = 43\pi$.故选：C.

8.【分析】利用辅助角公式化简函数$f(x)$，进而得到平移后的函数解析式，利用函数为偶函数，则y轴为函数的一条对称轴，即可得到$f(0)$是函数的最值，得到φ的值后，即可得到答案.

【详解】$\because$ $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin(2x + \dfrac{\pi}{3})$，

图象向左平移$\varphi(\varphi > 0)$个单位得$f(x) = 2\sin(2(x+\varphi) + \dfrac{\pi}{3}) = 2\sin(2x + 2\varphi + \dfrac{\pi}{3})$，

$\therefore$ $x = 0$时，$\sin(2\varphi + \dfrac{\pi}{3}) = \pm 1$，

$\therefore$ $2\varphi + \dfrac{\pi}{3} = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z$，即$\varphi = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}, k \in Z$，

当$k = 0$，$\varphi_{\min} = \dfrac{\pi}{12}$.故选：A.

9.【分析】根据函数为非奇非偶函数，可排除 B,D，再根据$x \to 0$且$x < 0$函数值的正负，即可得答案；

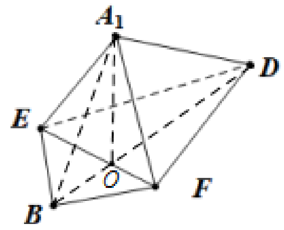
【详解】$\because$ $f(x) = \dfrac{e^x - \ln|x|}{x}$，$\therefore$ $f(-x) \neq \pm f(x)$，

$\therefore$函数为非奇非偶函数，可排除 B,D，

当$x \to 0$且$x < 0$时，$e^x - \ln|x| > 0$，$\therefore$ $\dfrac{e^x - \ln|x|}{x} < 0$，即$f(x) < 0$，故排除 A，故选：C.

10.【分析】如图所示，连接BD交EF于点O，连接A_1B、A_1O，利用余弦定理求出$\cos\angle A_1OB$，再利用余弦定理求得A_1B的值.

【详解】如图所示，连接BD交EF于点O，连接A_1B、A_1O，



在$\triangle A_1OD$中，$\because$ $A_1O = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$BO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$DO = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \cos\angle A_1OD=\dfrac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2-2^2}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{3}$， $\therefore \cos\angle A_1OB=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore A_1B^2=A_1O^2+BO^2-2A_1O\cdot BO\cdot\cos\angle A_1BO=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore A_1B=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.故选：B.

11.【分析】利用参变分离，构造函数 $f(x)=\dfrac{3\ln x}{x}$ ，求出函数在区间$\left[\sqrt{e},e^2\right]$的最小值，即可得答案；

【详解】由题意得：$a>\dfrac{3\ln x}{x}$在区间$\left[\sqrt{e},e^2\right]$内有解，

令 $f(x)=\dfrac{3\ln x}{x}$，则 $f^{'}(x)=\dfrac{3(1-\ln x)}{x^2}$，

$\because f^{'}(x)>0\Rightarrow\sqrt{e}\le x<e$， $f^{'}(x)<0\Rightarrow e<x\le e^2$，

$\therefore f(x)$在$[\sqrt{e},e)$单调递增，在$(\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$单调递减，

$\because f(\sqrt{e})=\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$， $f(e^2)=\dfrac{6}{e^2}$， $e\approx 2.7$，

$\therefore f(e^2)<f(\sqrt{e})$， $f(x)_{\min}=\dfrac{6}{e^2}$，

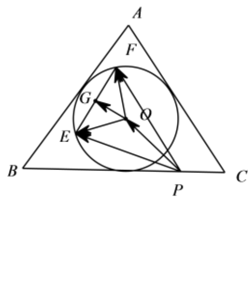
$\therefore a>\dfrac{6}{e^2}$.故选：C.

12.【分析】根据$EF=\sqrt{3}$可得$\angle EOF=\dfrac{2\pi}{3}$，再利用向量加法的几何意义，将$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的最大值转化为求

$\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OG}-\dfrac{1}{2}$的最大值.

【详解】如图所示，在$\triangle ABC$中，内切圆的半径$r=OE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=1$，

在$\triangle OEF$中， $EF=\sqrt{3},OE=OF=1$，



$\therefore \cos\angle EOF=\dfrac{1+1-3}{2}=-\dfrac{1}{2}$， $\therefore \angle EOF=\dfrac{2\pi}{3}$，

取EF的中点G，连结OG，

$\therefore \overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OE})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF})=\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})+\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}$

$=\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OG}-\dfrac{1}{2}$

当$\overrightarrow{PO}^2$，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OG}$分别取最大值时，$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$取得最大值，

$\therefore$当点P运动到三角形的顶点，且顶点与O的连线垂直于EF时，$\overrightarrow{PO}^2$，$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OG}$分别取最大值时，

$\therefore (\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF})_{\max}=4+2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$.故选：B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【分析】根据向量垂直，数量积为 0 直接计算，即可得答案；

【详解】$\because \vec{a}\perp\vec{b}$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2$，故答案为：$-2$

14.【分析】对函数求导得$y'=2ax-\dfrac{3}{x^2}$，进而得到$y'(1)=-1$，解方程即可得到答案.

【详解】$\because y'=2ax-\dfrac{3}{x^2}$，$\therefore y'(1)=-1\Rightarrow 2a-3=-1\Rightarrow a=1$，故答案为：1.

15.【分析】根据圆的弦长公式等于$2c$得到关于a,c的方程，即可得答案；

【详解】设直线l的方程为$y=x+c$，圆的半径为R，圆心到直线的距离为$d=\dfrac{|c|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}c}{2}$，

$\therefore |AB|=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{a^2-\dfrac{c^2}{2}}=2c\Rightarrow a^2=\dfrac{3c^2}{2}$，

$\therefore e^2=\dfrac{2}{3}\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

16.【分析】（1）利用正弦定理求得AC的值，即可得答案；（2）设$\triangle AMD$ 外心为O，连接OC交AD于点O_1，利用正弦定理求出外接圆的半径，根据圆外一点到圆上距离的最小值为点到圆心距离减去半径，利用余弦定理求得BO的值，即可得答案；

【详解】（1）$\because \dfrac{AC}{\sin 120^\circ}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}\Rightarrow \dfrac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{21}}{14}}\Rightarrow AC=6\sqrt{7}$，

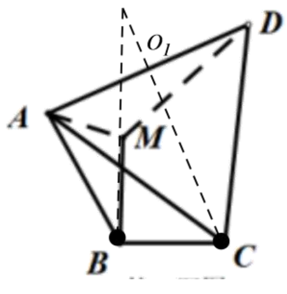
$\because \angle ACD=60^\circ$，$CD=AC$，$\therefore \triangle ACD$为正三角形，$\therefore AD=6\sqrt{7}$.

（2）设$\triangle AMD$的外心为O，连接OC交AD于点O_1，

则$\dfrac{AD}{\sin 120^\circ}=2R\Rightarrow R=2\sqrt{21}$，

$\therefore O_1O=\sqrt{R^2-(3\sqrt{7})^2}=\sqrt{21}$，

$O_1C=O_1O+OC=\sqrt{21}+6\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{21}$



$\therefore BM$ 的最小值为 $BO-R=BO-2\sqrt{21}$，

$\because \sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$, $\therefore \cos\angle BAC=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

$\therefore \sin\angle ACB=\sin(\angle BAC+120^\circ)=\dfrac{\sqrt{21}}{14}\cdot(-\dfrac{1}{2})+\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

$\therefore \cos\angle ACB=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore \cos\angle BCO=\cos(\angle ACB+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{21}}{7}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，

$\because BO^2=(4\sqrt{21})^2+6^2-2\cdot4\sqrt{21}\cdot6\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{14}=300$，

$\therefore BM$ 的最小值为 $10\sqrt{3}-2\sqrt{21}$，故答案为：$6\sqrt{7}$；$10\sqrt{3}-2\sqrt{21}$.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.【分析】（1）根据等差中项得 $2a_n=a_{n+1}+1$，进而转化成 $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=2$，即可得答案；

（2）利用等比数列前 n 项和公式进行求和，再解不等式，即可得答案；

【详解】（1）因为 $1,a_n,a_{n+1}$ 成等差数列，所以 $2a_n=a_{n+1}+1$，

当 $n=1$ 时，有 $2a_1=a_2+1=6$，得 $a_1=3$，

所以 $a_{n+1}-1=2\left(a_n-1\right)$，又 $a_1-1=2$，所以 $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=2$，

所以 $\left\{a_n-1\right\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列.

（2）由（1）知 $\left\{a_n-1\right\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n-1=2\times2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=2^n+1$.

所以 $S_n=\left(2^1+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(2^3+1\right)+\cdots+\left(2^n+1\right)$

$=\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n\right)+n=\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}+n=2^{n+1}+n-2$，

所以$\log_2 S_n < 10$即$2^{n+1} + n - 2 < 2^{10}$，

因为$\left(2^{n+1}+n-2\right)-\left[2^n+(n-1)-2\right]=2^n+1>0$，所以数列$\left\{2^{n+1}+n-2\right\}$为递增数列.

当$\boldsymbol{n=9}$时，$2^{10}+9-2>2^{10}$，不满足，当$n=8$时，$2^9+8-2<2^{10}$满足.

所以满足不等式$\log_2 S_n<10$的最大的正整数n的值为8.

【点睛】本题主要考查等差、等比数列的定义，考查分组求和法、等比数列的求和运算以及对数运算，考查运算求解能力，化归与转化思想等.

18.【分析】(1) 根据抛物线的定义，即可得到轨迹C的方程；

（2）依题意可设直线l的方程为：$y=kx+1, A\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2, y_2\right), Q\left(x_0,-1\right)$，根据$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}=1$可求得点$Q(1,-1)$或$Q(3,-1)$，再分别计算三角形的面积即可.

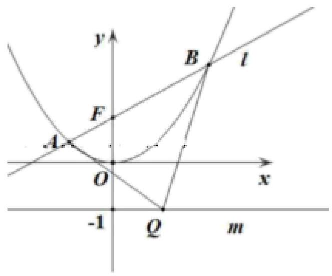
【详解】(1) 依题意：平面内动点E到定点$F(0,1)$和到定直线$y=-1$的距离相等，

根据抛物线的定义，曲线C是以点F为焦点，直线$y=-1$为准线的抛物线，

其方程为$x^2=4y$.

（2）依题意可设直线l的方程为：$y=kx+1, A\left(x_1, y_1\right), B\left(x_2, y_2\right), Q\left(x_0,-1\right)$.

联立$\begin{cases} y=kx+1 \\ y=\dfrac{x^2}{4} \end{cases}$，得$x^2-4kx-4=0$，得$x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4$



由$|AB|=y_1+y_2+2=8$，得$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2=4k^2+2=6$，

所以$k^2=1$，即$k=\pm 1$，又由$k>0$，得$k=1$，

故：$x_1+x_2=4, x_1 \cdot x_2=-4, y_1+y_2=6, y_1 \cdot y_2=1$.

$\overrightarrow{QA}=\left(x_1-x_0, y_1+1\right), \overrightarrow{QB}=\left(x_2-x_0, y_2+1\right), \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}=x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)x_0+x_0^2+y_1y_2+y_1+y_2+1$，

化简得：$x_0^2-4x_0+3=0$，解得$x_0=1$或3，即$Q(1,-1)$或$Q(3,-1)$.

当Q为$(1,-1)$时，点Q到直线l的距离为$\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S_{\Delta QAB}=\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$；

当 Q 为 $(3,-1)$ 时，点 Q 到直线 l 距离为 $\frac{|3+1+1|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，

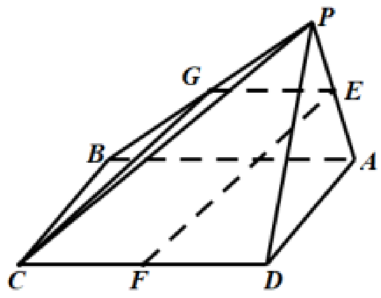
$\therefore S_{\Delta QAB}=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查直线的方程、抛物线的定义及轨迹方程、直线与圆锥曲线的关系等知识，考查运算求解能力、推理论证能力等，考查数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想等.

19.【分析】(1) 如图，取 PB 的中点 G，连接 GC，EG，证明四边形 $EGCF$ 是平行四边形，再利用线面平行判定定理，即可证得结论；

(2) 如图，取 PB 的中点 G，由 (1) 可知，$EG//CD$，所以过 E, F, C 的平面即为平面 $EGCD$. 分别计算 $V_{P-ECCD}=\frac{1}{3}PE\times S_{EGCD}$ 和 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times PN\times S_{ABCD}$ 的值，再求比值即可得到答案.

【详解】(1) 如图，取 PB 的中点 G，连接 GC，EG.



E 是 PA 的中点，$\therefore EG//AB$，且 $EG=\frac{1}{2}AB$，

又正方形 $ABCD$, $AB//CD$, $AB=CD$，

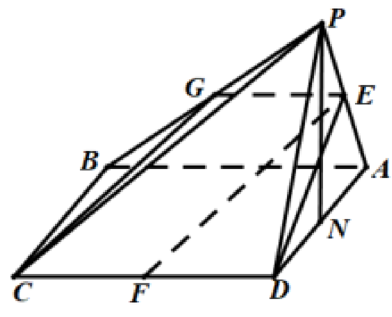
$\therefore EG//CD$，且 $EG=\frac{1}{2}CD$.

$\because F$ 是 CD 的中点，$\therefore FC=\frac{1}{2}CD$, $\therefore FC//EG$ 且 $FC=EG$，

$\therefore$ 四边形 $EGCF$ 是平行四边形，$\therefore EF//GC$

又 $\because GC\subset$ 平面 PBC，$EF\not\subset$ 平面 PBC，$\therefore EF//$ 平面 PBC.

(2) 如图，取 PB 的中点 G，由 (1) 可知，$EG//CD$，所以过 E, F, C 的平面即为平面 $EGCD$.



$\because \Delta PAD$ 是等边三角形，E 是 AP 中点，$\therefore EP\perp ED$.

在正方形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，$\because$ 由(1)可知 $EG//AB$，$\therefore EG\perp$ 平面 PAD，

$\because EP\perp ED, DE\cap EG=E, \therefore PE\perp$ 平面 $EGCD$.

$\therefore V_{P-EGCD}=\frac{1}{3}PE\times S_{EGCD}$.

在四棱锥 $P-EGCD$ 中，$\because EG\perp$ 平面 PAD，$\therefore EG\perp DE$，

$\therefore$ 底面 $EGCD$ 为直角梯形，又 $\because$ 底面边长为 2，$\triangle PAD$ 是等边三角形，

$\therefore DE=\sqrt{3},\quad \therefore S_{EGCD}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，又$\because PE=1$，

$\therefore V_{P-ECCD}=\frac{1}{3}PE\times S_{EGCD}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

取 AD 的中点 N，连接 PN.

$\because \Delta PAD$是等边三角形，N是 AD 中点，$\therefore NP\perp AD$.

又$\because$平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD, NP\subset$平面 PAD

$\therefore NP\perp$平面 $ABCD$，

$\therefore V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times PN\times S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times4=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

所以$\frac{V_{P-EGCD}}{V_{P-ABCD}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{8}$，所以被平面 EFC 分成的两部分的体积比为$\frac{3}{5}$.

【点睛】本题考查直线与平面平行和直线与平面垂直、体积等基础知识，考查空间想象能力、运算求解能力、推理论证能力，考查数形结合思想、化归与转化思想等.

20.【分析】（1）方法一，31 个零件序号的中位数为 1546，所有零件序号的中位数为$\frac{N+1}{2}$；方法二，抽取的 31 个零件将$[0,N+1]$划分为 32 个区间，平均长度为$\frac{N+1}{32}$，列方程即可求得 N 的值；

（2）抽取的 720 件优等品占总数的$\frac{720}{2880}=\frac{1}{4}$，依题意得$P(200-m\le y\le 200+m)=\frac{1}{4}$，再根据频率分布直方图的面积为$\frac{1}{4}$，可计算 m 的近似值，从而得到答案；

【详解】（1）方法一：31 个零件序号的中位数为 1546，所有零件序号的中位数为$\frac{N+1}{2}$，

依题意得$1546=\frac{N+1}{2}$，解得 $N=3091$.

方法二：抽取的 31 个零件将$[0,N+1]$划分为 32 个区间，平均长度为$\frac{N+1}{32}$，前 31 个区间的平均长度为

$\frac{2791}{31}$， 依题意得$\frac{N+1}{32}=\frac{2791}{31}$，解得 $N\approx2880$.

（2）抽取的 720 件优等品占总数的$\frac{720}{2880}=\frac{1}{4}$，依题意得$P(200-m\le y\le 200+m)=\frac{1}{4}$

由频率分布直方图可知：

$P(190\le y\le 210)=(0.029+0.041)\times10=0.7>0.25$，故$0<m<10$，

则 $P(200-m\le y\le 200+m)=(m\times 0.029+m\times 0.041)\times 10=0.25$，

解得 $m\approx 3$.故优等品的范围为$197\le y\le 203$.

因为$205\notin[197,203]$，所以内径为 205 的零件不能作为优等品.

【点睛】本题考查频率分布直方图，样本数字特征估计总体数字特征等知识；考查学生的阅读理解能力、数据处理能力和运算求解能力，考查统计与概率思想、化归与转化思想、创新意识和应用意识.

21.【分析】（1）将 $a=\dfrac{1}{2}$ 代入解析式得 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\cos x$，再进行求导得 $f'(x)=x+\sin x$，利用导数研究导数等于 0 的方程的根，即可得答案；

（2）当 $x=0$ 时，$f(x)\ne 0$，故 $f(x)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{\cos x}{x^2}$，$x\in\left[-\dfrac{3}{2}\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right]$且 $x\ne 0$ ，

令 $h(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$，则 $h'(x)=\dfrac{-x^2\sin x-2x\cos x}{x^4}=\left(\dfrac{-1}{x^3}\right)(x\sin x+2\cos x)$，对区间分三种情况讨论，即

$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$分别研究在各个区间内零点的个数，从而得到

$M=h\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0,\quad N=h\left(x_0\right)$，再利用导数研究 $N=h\left(x_0\right)$ 的取值范围，即可证得结论；

【详解】（1）$\because a=\dfrac{1}{2}\quad\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\cos x,\quad\therefore f'(x)=x+\sin x$，$f'(0)=0$，

当 $x\in(0,1]$ 时，$x>0,\quad \sin x>0,\quad\therefore f'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)=x+\sin x>1+\sin x\ge 0$.

∴当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，又$\because f'(-x)=-x-\sin x=-f'(x)$，

$\therefore f'(x)$ 是奇函数，∴当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$.

∴综上，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0,y=f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0,y=f(x)$ 单调递增；

因此 $x=0$ 为函数 $y=f(x)$ 的极小值点，无极大值点.

（2）当 $x=0$ 时，$f(x)\ne 0$，故 $f(x)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{\cos x}{x^2}$，$x\in\left[-\dfrac{3}{2}\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right]$且 $x\ne 0$

令 $h(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$，则 $h'(x)=\dfrac{-x^2\sin x-2x\cos x}{x^4}=\left(\dfrac{-1}{x^3}\right)(x\sin x+2\cos x)$，

1°当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$h'(x)<0,\quad y=h(x)$ 单调递减，当 $x\to 0,\quad h(x)\to+\infty,\quad h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$；

2°当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，令 $\varphi(x)=x\sin x+2\cos x$，则 $\varphi'(x)=x\cos x-\sin x<0,\quad y=\varphi(x)$ 单调递减，又

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0,\varphi(\pi)=-2<0$，故存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 使得 $\varphi\left(x_0\right)=0$，即当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$ 时，

$\varphi(x)>0,h'(x)<0$，$y=h(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(x_0,\pi\right)$ 时，$\varphi(x)<0,\quad h'(x)>0,\quad y=h(x)$ 单调递增；

3°当 $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0,\quad y=h(x)$ 单调递增；

综上可知：$y=h(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

由于 $y=h(x)$ 为偶函数，只需函数 $y=h(x)$ 与 $y=a$ 在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上有两个交点.

$\because h(0)\to+\infty,\quad h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,h\left(x_0\right)<0,\quad h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,\quad \therefore M=h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,\quad N=h\left(x_0\right)$

以下估计 $N=h\left(x_0\right)$ 的范围：

$\because \varphi\left(x_0\right)=0,\quad \therefore x_0\sin x_0+2\cos x_0=0,\quad \therefore x_0=-\frac{2\cos x_0}{\sin x_0}$,

$\therefore h\left(x_0\right)=\frac{\cos x_0}{x_0^2}=\frac{\sin^2 x_0}{4\cos x_0}=\frac{1-\cos^2 x_0}{4\cos x_0}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x_0}-\cos x_0\right)$

$\because \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{3\pi}{4}-2\right)>0,\quad \therefore x_0\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right),\quad \therefore \cos x_0\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\therefore$ 令 $t=\cos x_0\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $N=h\left(x_0\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x_0}-\cos x_0\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-t\right)$,

$\because y=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-t\right)$ 在 $t\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递减，$\therefore y>\frac{1}{4}\left(-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}\left(t=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\therefore N=h\left(x_0\right)>-\frac{\sqrt{2}}{8},\quad \therefore M-N<\frac{\sqrt{2}}{8}$，结论得证.

【点睛】本题考查函数的单调性、导数及其应用、不等式等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想，函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4−4：坐标系与参数方程]

22.【分析】（1）利用 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x$，代入圆的方程 $x^2+y^2-2x=0$，即可得到圆的极坐标方程；对点 P 在 y 轴右侧时，P 在 y 轴，y 轴左侧时，三种情况进行讨论，均可得到 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$；

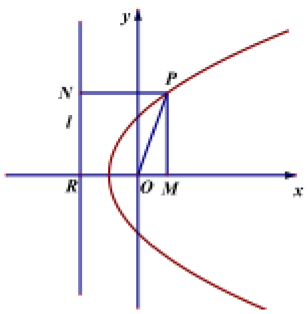
（2）因为 $\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OQ}$，所以设点 $P(\rho_1,\theta),Q(\rho_2,\theta)$，且 $\rho_1=4\rho_2$，求出 $\cos\theta$ 的值，即可得答案；

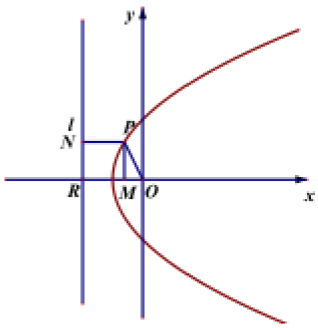
【详解】（1）由 $(x-1)^2+y^2=1$ 得，$x^2+y^2-2x=0$.

因为 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x$，所以 $\rho=2\cos\theta$，即为 C 的极坐标方程.

当 P 在 y 轴右侧时，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，作 y 轴的垂线，垂足为 N，设 l 与 x 轴的交点为 R，因为点 P 到原点距离与到 l 距离相等，所以 $|OP|=|PN|=|MR|=|OR|+|OM|$.

在 RT$\triangle OPM$ 中，$|OM|=|OP|\cos\theta=\rho\cos\theta$，所以 $\rho=2+\rho\cos\theta$.





因为 $\theta\neq 0$，所以 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

当 P 在 y 轴或 y 轴左侧时，满足 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

综上，P 点轨迹的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

（2）因为 $\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{OQ}$，所以设点 $P(\rho_1,\theta),Q(\rho_2,\theta)$，且 $\rho_1=4\rho_2$.

又 $\rho_1=\dfrac{2}{1-\cos\theta},\rho_2=2\cos\theta$，所以 $\dfrac{2}{1-\cos\theta}=8\cos\theta$，

解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，所以 $|OP|=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{2}}=4$.

【点睛】本题考查曲线的极坐标方程等基础知识，考查直线与圆锥曲线的位置关系；考查运算求解能力、推理论证能力；考查数形结合思想、化归与转化思想、分类与整合思想等.

[选修 4−5：不等式选讲]

23.【分析】（1）根据 $f(0)=a+b+c=1$，两边平方后，再利用基本不等式，即可证明结论；

（2）当$a=b=1$时，$f(x)=2|x+1|+|x+c|$，因为对于任意的$x\in(-\infty,-1]$, $f(x)\geq 4$恒成立，所以取$f(-1)=|-1+c|\geq 4$可求得$c\leq -3$或$c\geq 5$，再进一步验证$c\leq -3$或$c\geq 5$使命题成立.

【详解】（1）由已知得，$f(0)=|a|+|b|+|-c|=a+b+c=1$

所以$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$=\frac{1}{2}\left[\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)+\left(a^2+c^2\right)\right]+2ab+2bc+2ac$

$\geq\frac{1}{2}(2ab+2bc+2ac)+2ab+2bc+2ac=3(ab+bc+ac)$，

所以$ab+bc+ac\leq\frac{1}{3}$.

（2）当$a=b=1$时，$f(x)=2|x+1|+|x+c|$，

因为对于任意的$x\in(-\infty,-1]$，$f(x)\geq 4$恒成立，

所以$f(-1)=|-1+c|\geq 4$，解得$c\leq -3$或$c\geq 5$.

①当$c\leq -3$时，$f(x)=2|x+1|+|x+c|=$ -$(3x+c+2)$在$x\in(-\infty,-1]$为减函数，

所以$f(x)_{\min}=f(-1)=1-c\geq 4$，即$c\leq -3$.

②当$c\geq 5$时，$f(x)=2\left|x+1\right|+\left|x+c\right|=\begin{cases}-x-2+c,-c<x\leq -1\\-(3x+c+2),x\leq -c\end{cases}$在$x\in(-\infty,-1]$为减函数，

所以$f(x)_{\min}=f(-1)=c-1\geq 4$，即$c\geq 5$.

综上所述，$c\leq -3$或$c\geq 5$.

【点睛】本题考查基本不等式、含绝对值不等式等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力等；考查数形结合、转化与化归、函数与方程、分类与整合等数学思想方法.