第一篇　复变函数

第1章　复数与复变函数

1.1　内容要点

1. 复数的各种表示法

代数表示法：$z=x+\mathrm{i}y$.

三角表示法：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

指数表示法：$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

2. 复数的代数运算及几何意义

复数的加减法：$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$.

复数的乘法：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$.

复数的除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0)$.

定理1　两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们辐角的和.

定理2　两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角差.

3. 扩充复平面、平面点集

4. 复变函数的概念及其几何意义

定义1　设 D 是一个给定的复数集，如果有一法则 f，对于每一个数 $z\in D$，总有确定的复数 w 和它对应，则称 f 是 D 上确定的复变数函数（简称复变函数），记作 $w=f(z)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域.

5. 初等函数的定义及性质

1.2　教学要求和学习注意点

1. 教学要求

牢固掌握复数的各种表示方法及其运算，了解区域的概念，理解复变函数的概念，了解指数函数、对数函数、幂函数和三角函数的定义及它们的主要性质.

重点：复数的运算，复变函数的概念.

难点：初等函数中的多值函数的理解.

2. 学习注意点

(1) 下面的证明过程错在何处?

题目：证明　若 $z_1z_2z_3=0$，则 z_1,z_2,z_3 中至少有一个为零.

证：设 $z_k=r_ke^{i\theta_k}$　$(k=1,2,3)$，则

$$z_1z_2z_3=r_1r_2r_3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=0.$$

∴　r_1,r_2,r_3 中至少有一个为零，

∴　z_1,z_2,z_3 中至少有一个为零.

答：证明过程的设是错误的，当 $z=0$ 时，z 不具有指数表达式. 正确的证明为：

若 $z_3\neq0$，则 $z_1z_2=z_1z_2\left(z_3\cdot\dfrac{1}{z_3}\right)=0$，

若 $z_2\neq0$，则 $z_1=z_1\left(z_2\cdot\dfrac{1}{z_2}\right)=0$，

故　z_1,z_2,z_3 中至少有一个为0.

(2) 下面的解题过程错在何处?

题目：求 $8^{\frac{1}{6}}$ 的全部单根.

解：$8^{\frac16}=(2^3)^{\frac16}=2^{\frac12}=e^{\frac12\ln2}=e^{\frac12(\ln2+i2k\pi)}=e^{\ln2^{\frac12}}\cdot e^{ik\pi}=\pm\sqrt2$.

答：此解题过程在第二步到第三步的推导时出错了，正确的是：

在复数范围内

$$(2^3)^{\frac16}=(2^3e^{2k\pi i})^{\frac16}=\sqrt2e^{\frac{k\pi}{3}i}\quad(k=0,1,2).$$

在实数范围内

$$(2^3)^{\frac16}=2^{\frac12}.$$

(3) 下面的解题过程错在何处?

题目：设 $z_1=-1+\sqrt3 i$，$z_2=-1+i$. 求 $\arg z_1z_2$.

解：$\mathrm{Arg}z_1z_2=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$

$$=\frac23\pi+\frac34\pi+2k\pi$$

$$=\frac{17}{12}\pi+2k\pi,$$

∴　$\arg z_1z_2=\dfrac{17}{12}\pi$.

答：∵ $-\pi < \arg z_1 z_2 \leq \pi$,

∴ $\arg z_1 z_2 = \frac{17}{12}\pi$ 是错误的.

正确答案：由 $\mathrm{Arg} z_1 z_2 = -\frac{7}{12}\pi + 2k\pi$，得

$$\arg z_1 z_2 = -\frac{7}{12}\pi.$$

(4) 证明：(a) $\mathrm{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$;

(b) $\mathrm{Ln}i^2 \neq 2\mathrm{Ln}i$.

证：(a) ∵ $\mathrm{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = i\arg(i^{\frac{1}{2}}) + 2k\pi i$

$$= \begin{cases} \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)i, \\ \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right)i \end{cases}$$

$$= \left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)i,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i,$$

∴ $\mathrm{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(b) ∵ $\mathrm{Ln}i^2 = \mathrm{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$,

$2\mathrm{Ln}i = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = (4k+1)\pi i$,

∴ $\mathrm{Ln}i^2 \neq 2\mathrm{Ln}i$.

1.3 释疑解难

1. 复方程 $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ 的求根公式 $z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 中 $b^2 - 4ac$ 为什么要求不等于 0.

答：因为关于复数方根 $w = z^{\frac{1}{n}}$ (即 $w^n = z$) 的定义中要求 $w \neq 0$，若 $z = 0$ 必有 $w = 0$. 而 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ 为复数方根的形式，因此公式中 $b^2 - 4ac \neq 0$.

事实上，因为

$$az^2 + bz + c = 0,$$

所以

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0,$$

若 $b^2 - 4ac = 0$， 则

$\frac{b}{2a}$

2．证明：(a) 若 $\ln z = \ln r + i\theta\left(r>0, \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{9}{4}\pi\right)$，那么

$$\ln i^2 = 2\ln i;$$

(b) 若 $\ln z = \ln r + i\theta\left(r>0, \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{11}{4}\pi\right)$，那么

$$\ln i^2 \neq 2\ln i.$$

证：(a) $\because \quad \ln i^2 = \ln(-1) = \pi i, \quad 2\ln i = 2\left(\ln|i| + \frac{\pi}{2}i\right) = \pi i;$

$\therefore \quad \ln i^2 = 2\ln i.$

(b) $\because \quad \ln i^2 = \ln(-1) = \pi i, \quad 2\ln i = 2\left(\ln|i| + \frac{10}{4}\pi i\right) = 5\pi i;$

$\therefore \quad \ln i^2 \neq 2\ln i.$

由(a)、(b)可知，辐角主值的定义范围可由复平面上原点引出的任一条射线为起始边、终边来划分，随之相关的性质也可能发生变化.

3．证明：对任何非零复数 z_1 和 z_2

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1).$$

证：因为当 $\mathrm{Re}(z_1)>0$，$\mathrm{Re}(z_2)>0$ 时，

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0).$$

当 $\mathrm{Re}(z_1)>0$ 或 $\mathrm{Re}(z_2)>0$ 时，

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2, & |\arg z_1 + \arg z_2| \leqslant \pi, \\ \arg z_1 + \arg z_2 \pm 2\pi, & |\arg z_1 + \arg z_2| > \pi. \end{cases}$$

$$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|,$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1).$$

当 $\mathrm{Re}(z_1)<0$ 且 $\mathrm{Re}(z_2)<0$ 时，

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2, & |\arg z_1 + \arg z_2| \leqslant \pi, \\ \arg z_1 + \arg z_2 \pm 2\pi, & |\arg z_1 + \arg z_2| > \pi. \end{cases}$$

$$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|,$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1).$$

综上所述，对任何非零复数 z_1 和 z_2 都有

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1).$$

4．求证：三个复数 z_1, z_2, z_3 成为等边三角形顶点的必要与充分条件是：

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

证：三角形 $z_1 z_2 z_3$ 是等边三角形的必要与充分条件为：向量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 绕 z_1 旋转

$\frac{\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{3}$得向量$\overrightarrow{z_1 z_3}$，即 $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ 或

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

两边平方化简得结论.

1.4 典型例题

例 1 将复数$\frac{2i}{-1+i}$化为三角表示式和指数表示式.

解：$\because$ $\frac{2i}{-1+i} = 1 - i, |1 - i| = \sqrt{2}, \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$,

$\therefore$ $\frac{2i}{-1+i}$的三角表示式为：$\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$,

$\frac{2i}{-1+i}$的指数表示式为：$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

例 2 若$(1+i)^n = (1-i)^n$，试求 n 的值.

解：由$(1+i)^n = (1-i)^n$ 可得：

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{-n\pi}{4}\right),$$

即

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \sin\frac{-n\pi}{4} \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi.$$

则得 $n = 4k$ （k 为整数）.

例 3 判断 $\mathrm{Im}(z) = 1$ 是否为区域?

答：点集$\{z \mid \mathrm{Im}(z) = 1\}$不是区域. 因为此点集的每一个点都不是内点，依据区域的定义知其不是区域.

例 4 判断 $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ 是开区域还是闭区域，有界否?

答：依平面点集部分有关开区域、闭区域、有界集和无界集的概念，$\mathrm{Im}(z) > 0$ 为无界的开区域，$\mathrm{Im}(z) = 0$ 为 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 的边界，故 $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ 为无界的闭区域.

例 5 如果复数 $a + ib$ 是实系数方程 $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ 的根，那么 $a - ib$ 也是它的根.

证：因为

$$\begin{aligned} & a_0(\bar{z})^n + a_1(\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\bar{z} + a_n \\ = & a_0\,\overline{(z^n)} + a_1\,\overline{(z^{n-1})} + \cdots + a_{n-1}\bar{z} + a_n \\ = & \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1} z} + \overline{a_n} \\ = & \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \\ = & 0, \end{aligned}$$

所以，若 $z=a+ib$ 为上述方程的根，则其共轭复数 $\bar{z}=a-ib$ 也为方程的根.

例 6 为什么在复数范围内 $|\cos z|\leqslant 1$，$|\sin z|\leqslant 1$ 未必总成立？

答：设 $z=x+iy$，则

$$\cos z=\cos x\,\text{ch}\,y-i\sin x\,\text{sh}\,y,$$

$$|\cos z|=\sqrt{(\cos x\,\text{ch}\,y)^2+(\sin x\,\text{sh}\,y)^2}$$
$$=\sqrt{(1+\text{sh}^2y)\cos^2x+\sin^2x\,\text{sh}^2y}$$
$$=\sqrt{\cos^2x+\text{sh}^2y}.$$

当 $\text{sh}\,y>1$ 时，有 $|\cos z|>1$；当 $y\to\infty$ 时，$|\cos z|\to\infty$. 所以，$|\cos z|\leqslant 1$ 未必总成立. 同理 $|\sin z|\leqslant 1$ 也未必总成立.

例 7 证明：若 z 在圆周 $|z|=2$ 上，那么 $\left|\dfrac{1}{z^4-4z^2+3}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$.

证：$\because$ $|z^4-4z^2+3|\geqslant\left||z^4-4z^2|-3\right|\geqslant\left||z^4|-|4z^2|-3\right|=3$，

$\therefore$ $\left|\dfrac{1}{z^4-4z^2+3}\right|\leqslant\dfrac{1}{3}$.

例 8 求 $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}$ 的所有的根、单根，并说明几何意义.

解：所有的方根：$(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}=(2e^{\frac{3}{4}\pi i+2k\pi i})^{\frac{1}{3}}$

$$=\sqrt[3]{2}e^{\left(\frac{2k}{3}+\frac{1}{4}\right)\pi i}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

单根：$\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$，$\sqrt[3]{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}$，$\sqrt[3]{2}e^{\frac{19\pi}{12}i}$.

几何意义：半径为 $\sqrt[3]{2}$ 的圆内接等边三角形的三个顶点.

1.5 习题选解

1.1.4 证明：(a) $\dfrac{1}{z_1z_2}=\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}$ $(z_1\neq0,z_2\neq0)$；

(b) $\dfrac{z_1z_2}{z_3z_4}=\dfrac{z_1}{z_3}\cdot\dfrac{z_2}{z_4}$ $(z_3\neq0,z_4\neq0)$.

证：$\because$ $\dfrac{zz_1}{zz_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$，$z\cdot\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{z}{z_1}$，

$\therefore$ (a) $\dfrac{1}{z_1z_2}=\dfrac{1}{z_1z_2}\cdot\left(z_2\cdot\dfrac{1}{z_2}\right)=\dfrac{z_2}{z_1z_2}\cdot\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{z_1}\cdot\dfrac{1}{z_2}$；

(b) $\dfrac{z_1z_2}{z_3z_4}=(z_1z_2)\left(\dfrac{1}{z_3}\cdot\dfrac{1}{z_4}\right)=\dfrac{z_1}{z_3}\cdot\dfrac{z_2}{z_4}$.

1.1.5 证明：$(z_1+z_2)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kz_1^{n-k}z_2^k$，其中 z_1,z_2 为任意的复数，n 为正整数.

证：当 $n=1$ 时，等式显然成立.

设 $n=m$ 时，$(z_1+z_2)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k z_1^{m-k} z_2^k$ 成立，则

当 $n=m+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
(z_1+z_2)^{m+1} &= (z_1+z_2)\sum_{k=0}^{m} C_m^k z_1^{m-k} z_2^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k z_1^{m+1-k} z_2^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k z_1^{m-k} z_2^{k+1} \\
&= z_1^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^{k+1} z_1^{m-k} z_2^{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k z_1^{m-k} z_2^{k+1} + z_2^{m+1} \\
&= z_1^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} (C_m^{k+1} + C_m^k) z_1^{m-k} z_2^{k+1} + z_2^{m+1} \\
&= z_1^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+1}^{k+1} z_1^{m-k} z_2^{k+1} + z_2^{m+1} \\
&= z_1^{m+1} + \sum_{k'=1}^{m-1} C_{m+1}^{k'} z_1^{m+1-k'} z_2^{k'} + z_2^{m+1} \\
&= \sum_{k'=0}^{m+1} C_{m+1}^{k'} z_1^{m+1-k'} z_2^{k'}.
\end{aligned}
$$

故结论成立.

1.1.7 证明：(a) $\overline{\bar z+3i} = z-3i$； (b) $\overline{iz} = -i\bar z$； (c) $\overline{(2+i)^2} = 3-4i$；

(d) $|(2\bar z+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$.

证：(a) $\overline{\bar z+3i} = \bar{\bar z} + \overline{3i} = z-3i$；

(b) $\overline{iz} = \bar i\cdot\bar z = -i\bar z$；

(c) $\overline{(2+i)^2} = (\overline{2+i})^2 = (2-i)^2 = 3-4i$；

(d) $|(2\bar z+5)(\sqrt{2}-i)| = |\sqrt{2}-i||2\bar z+5| = \sqrt{3}|\overline{2z+5}| = \sqrt{3}|2z+5|$.

1.1.8 应用数学归纳法证明：当 $n=2,3,\cdots$ 时，

(a) $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_n} = \bar z_1+\bar z_2+\cdots+\bar z_n$； (b) $\overline{z_1 z_2\cdots z_n} = \bar z_1\bar z_2\cdots\bar z_n$.

证：(a) $\because$ $\overline{z_1+z_2} = \bar z_1+\bar z_2$.

设 $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_m} = \bar z_1+\bar z_2+\cdots+\bar z_m$，而

$$
\begin{aligned}
\overline{z_1+z_2+\cdots+z_m+z_{m+1}} &= \overline{z_1+z_2+\cdots+z_m} + \overline{z_{m+1}} \\
&= \bar z_1+\bar z_2+\cdots+\bar z_m+\bar z_{m+1}.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 结论成立.

(b) $\because$ $\overline{z_1 z_2} = \bar z_1\cdot\bar z_2$.

设 $\overline{z_1 z_2\cdots z_m} = \bar z_1\bar z_2\cdots\bar z_m$，而

$$
\overline{z_1 z_2\cdots z_m\cdot z_{m+1}} = \overline{z_1 z_2\cdots z_m}\cdot\overline{z_{m+1}} = \bar z_1\bar z_2\cdots\bar z_m\cdot\bar z_{m+1}.
$$

∴ 结论成立.

1.1.9 证明：$\sqrt{2}|z|\geqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$.

证：∵ $x^2+y^2\geqslant 2|x||y|$,

∴ $2(x^2+y^2)\geqslant x^2+2|x||y|+y^2$,

∴ $2|z|^2\geqslant(|x|+|y|)^2$,

∴ $\sqrt{2}|z|\geqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$.

1.1.10 证明：当 z_2,z_3 为非零复数时，

(a) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; (b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2z_3}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

证：(a) ∵ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\left|\dfrac{1}{z_2}\cdot z_1\right|=\left|\dfrac{1}{z_2}\right|\cdot|z_1|$,

$$\left|\frac{1}{z_2}\right|=\left|\frac{1}{x_2+iy_2}\right|=\left|\frac{x_2-iy_2}{x_2^2+y_2^2}\right|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2+\left(\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)^2}=\frac{1}{|z_2|},$$

∴ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

(b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2z_3}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2z_3|}=\dfrac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

1.1.11 证明：当 $|z_3|\neq|z_4|$ 时，不等式 $\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right|\leqslant\dfrac{|z_1|+|z_2|}{\big||z_3|-|z_4|\big|}$ 成立.

证：$\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right|=\dfrac{|z_1+z_2|}{|z_3+z_4|}\leqslant\dfrac{|z_1|+|z_2|}{\big||z_3|-|z_4|\big|}$.

1.1.12 证明：当 $|z|<1$ 时，$|\mathrm{Im}(1-\bar{z}+z^2)|<3$.

证：$|\mathrm{Im}(1-\bar{z}+z^2)|=|\mathrm{Im}(1-x+iy+x^2-y^2+2xyi)|$

$$=|y+2xy|\leqslant|y|+2|x||y|\leqslant 3\quad(|z|<1).$$

1.1.15 证明：以 z_0 为中心，R 为半径的圆的方程 $|z-z_0|=R$ 可以写成：

$$|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+|z_0|^2=R^2.$$

证：∵ $|z-z_0|^2=(z-z_0)(\overline{z-z_0})=(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)$

$$=z\bar{z}-z_0\bar{z}-z\bar{z}_0+z_0\bar{z}_0$$

$$=|z|^2-(\overline{\bar{z}_0z}+z\bar{z}_0)+|z_0|^2$$

$$=|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+|z_0|^2,$$

∴ 以 z_0 为心，R 为半径的圆的方程可以写为：

$$|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+|z_0|^2=R^2.$$

1.1.16 证明：双曲线 $x^2-y^2=1$ 可以写成 $z^2+\bar{z}^2=2$.

证：∵ $x^2 - y^2 = \left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)^2$

$$= \frac{z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 - 2z\bar{z}}{4}$$

$$= \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2},$$

∴ 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 可以写为：$z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

1.1.18 就以下各种情况，分别求 $\arg z$.

(a) $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$;　　(b) $z = \dfrac{\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$;　　(c) $z = (\sqrt{3} - \mathrm{i})^6$.

解：(a) $z = \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

∴ $\arg z = \dfrac{2\pi}{3}$;

(b) $z = \dfrac{\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}} = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$,

∴ $\arg z = -\dfrac{3\pi}{4}$;

(c) $z = (\sqrt{3} - \mathrm{i})^6 = 2^6 \mathrm{e}^{6\left(-\frac{\pi}{6}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}\right)}$,

∴ $\arg z = \pi$.

1.1.19 利用复数的三角表达式或指数表达式证明：

(a) $(-1+\mathrm{i})^7 = -8(1+\mathrm{i})$;　(b) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{-10} = 2^{-11}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

证：(a) $(-1+\mathrm{i})^7 = \sqrt{2}^7 \mathrm{e}^{7\left(\frac{3\pi}{4}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}\right)} = \sqrt{2}^7 \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}$

$= -8(1+\mathrm{i})$;

(b) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{-10} = 2^{-10} \mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{3}\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}\right)(-10)} = 2^{-10} \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$

$= 2^{-11}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

1.1.20 证明：(a) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$;　　(b) $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$;

(c) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot \cdots \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \cdots + \theta_n)}$　$(n = 2, 3, \cdots)$.

证：(a) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = |\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta| = 1$;

(b) $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$;

(c) ∵ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}$,

设 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot \cdots \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{n-1}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1})}$，则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot \cdots \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot \cdots \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{n-1}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \cdots + \theta_n)},$$

1.1.21 当 $z_1 \neq 0$ 时，求 $\operatorname{Arg} z$：

(a) $z = z_1^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$；　　(b) $z = z_1^{-1}$.

解：(a) $\because \quad z = z_1^n = (r_1 e^{i\theta_1})^n = r_1^n e^{in\theta_1}$,

$\therefore \quad \operatorname{Arg} z = n \operatorname{Arg} z_1$；

(b) $\because \quad z = z_1^{-1} = (r_1 e^{i\theta_1})^{-1} = r_1^{-1} e^{-i\theta_1}$,

$\therefore \quad \operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} z_1$.

1.1.22 证明：若 $\operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) > 0$，那么 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

证：$\because \quad \operatorname{Re}(z_1) > 0, \quad \operatorname{Re}(z_2) > 0$,

$\therefore \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z_1 < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \arg z_2 < \frac{\pi}{2}$,

$-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 < \pi$,

$\therefore \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

1.1.23 若 $z_1 z_2 \neq 0$，证明：$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1||z_2|$ 当且仅当

$$\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

这里 $\theta_1 = \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 = \operatorname{Arg} z_2$.

证：设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \operatorname{Re}(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}) = r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

$$|z_1||z_2| = r_1 r_2,$$

$\therefore$ 当 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1||z_2|$ 时，

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1,$$

即

$$\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

反之，当 $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ 时，

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1||z_2|.$$

$\therefore$ 结论成立.

1.2.1 求下面各复数的所有的方根、单根，并说明几何意义.

(a) $(2i)^{\frac{1}{2}}$；　(b) $(1 - \sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}}$；　(c) $(-1)^{\frac{1}{3}}$；

(d) $(-16)^{\frac{1}{4}}$；　(e) $8^{\frac{1}{6}}$；　(f) $(-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}$.

解：(a) 所有的方根：$(2i)^{\frac{1}{2}} = (2e^{\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{2} e^{\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

单根：$\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}, \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

几何意义：半径为$\sqrt{2}$的圆的直径的两端点.

(b) 所有的方根：$(1 - \sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(e^{-\frac{\pi}{3}i + 2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}e^{\left(k-\frac{1}{6}\right)\pi i} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{6}i},\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

几何意义：半径为$\sqrt{2}$的圆的直径的两端点.

(c) 所有的方根：$(-1)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}(\pi i+2k\pi i)}$

$$=e^{\frac{1}{3}(2k+1)\pi i} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$e^{\frac{\pi}{3}i},e^{\pi i},e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

几何意义：单位圆内接等边三角形的三个顶点.

(d) 所有的方根：$(-16)^{\frac{1}{4}}=2e^{\frac{1}{4}(\pi i+2k\pi i)}$

$$=2e^{\frac{1}{4}(2k+1)\pi i} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$2e^{\frac{\pi}{4}i},2e^{\frac{3\pi}{4}i},2e^{\frac{5\pi}{4}i},2e^{\frac{7\pi}{4}i}$.

几何意义：半径为 2 的圆内接正四边形的四个顶点.

(e) 所有的方根：$8^{\frac{1}{6}}=(8e^{2k\pi i})^{\frac{1}{6}}$

$$=\sqrt{2}e^{\frac{k\pi}{3}i} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$\sqrt{2},\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i},\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i},\sqrt{2}e^{\pi i},\sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}i},\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{3}i}$.

几何意义：半径为$\sqrt{2}$的圆内接正六边形的六个顶点.

(f) 所有的方根：$(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}=2e^{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi i+2k\pi i\right)}$

$$=2e^{\left(\frac{2k}{3}+\frac{1}{4}\right)\pi i} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

单根：$2e^{\frac{\pi}{4}i},2e^{\frac{11\pi}{12}i},2e^{\frac{19\pi}{12}i}$.

几何意义：半径为 2 的圆内接等边三角形的三个顶点.

1.2.2 (a) 令 a 为实数，证明：$a+i$ 的二次方根为 $\pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i}$，这里 $A=\sqrt{a^2+1}$且 $\alpha=\arg(a+i)$.

(b) 由(a)及

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2},\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

证明：$\pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a})$.

证：(a) $\because$ $(a+i)^{\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{a^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\alpha i+2k\pi i}{2}}=\pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i}$,

$\left(A=\sqrt{a^2+1},\alpha=\arg(a+i)\right)$,

$\therefore$ 结论成立.

(b) $\because$ $\pm\sqrt{A}e^{\frac{\alpha}{2}i}=\pm\sqrt{A}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, $\cos\alpha=\frac{a}{A}$,

$$\therefore \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{A+a}{2A}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{A-a}{2A}},$$

$$\therefore \quad \pm\sqrt{A}\,e^{\frac{\alpha}{2}i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a}\right).$$

1.2.3 (a) 证明：二次方程 $az^2+bz+c=0\ (a\neq 0)$ 当 a,b,c 为复常数时的求根公式是

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

这里 $b^2-4ac\neq 0$.

(b) 试用(a)的结果求方程 $z^2+2z+(1-i)=0$ 的根.

证：(a) $\because \quad az^2+bz+c=0,$

$\therefore \quad 4a^2z^2+4abz+4ac=0,$

$\therefore \quad (2az+b)^2=b^2-4ac,$

$$\therefore \quad z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad (b^2-4ac\neq 0).$$

(b) 方程 $z^2+2z+(1-i)=0$ 的根为

$$z=\frac{-2+\sqrt{4-4(1-i)}}{2}=-1+\sqrt{i}=-1+e^{\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi i}\quad (k=0,1).$$

1.2.4 设 z 为非零复数，$m=-n$（n 为负整数），利用 $z=re^{i\theta}$ 证明：

$$(z^m)^{-1}=(z^{-1})^m.$$

证：
$$(z^m)^{-1}=[(re^{i\theta})^m]^{-1}=[(re^{i\theta})^{-n}]^{-1}=\left(\frac{1}{r^n e^{in\theta}}\right)^{-1}=r^n e^{in\theta}$$
$$=(re^{i\theta})^{-m}=\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right)^m=(z^{-1})^m.$$

1.2.5 建立恒等式 $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\quad (z\neq 1)$，并导出

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\quad (0<\theta<2\pi).$$

提示：关于第一个等式可记 $S=1+z+z^2+\cdots+z^n$，并考虑 $S-zS$. 关于第二个等式可在第一个等式中令 $z=e^{i\theta}$.

证：设 $S=1+z+z^2+\cdots+z^n$，则

$$S-zS=1-z^{n+1},$$

即

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

若记 $z=e^{i\theta}$，则

$$1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\cdots+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

$$=\frac{[1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta](1-\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta},$$

$$\therefore\quad 1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos n\theta}{2-2\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\cos n\theta-\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2\cos n\theta\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

1.3.2　画出以下各种情形相应的闭区域的草图.

(a) $-\pi<\arg z<\pi\quad(z\neq0)$；　　(b) $|\mathrm{Re}(z)|<|z|$；

(c) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\leq\frac{1}{2}$；　　(d) $\mathrm{Re}(z^2)>0$.

解：(a) 带截痕 $z=x(x\leq0)$ 的复平面(图 1.1.1)；　(b) 整个复平面(图 1.1.2)；

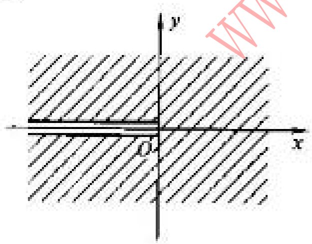

图 1.1.1

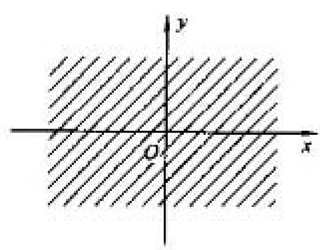

图 1.1.2

(c) $(x-1)^2+y^2\geq1$(图 1.1.3)；　(d) $|x|>|y|$(图 1.1.4)；

1.3.3　设 S 为由 $|z|<1$ 和 $|z-2|<1$ 两点集构成的开集，请说明为什么 S 不是连通的.

解：因为从 $z=0$ 到 $z=2$ 的任何一条折线都不完全属于 S，由"连通"的定义知，S 不是连通的.

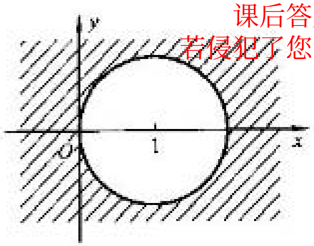

图 1.1.3

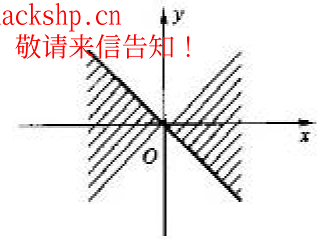

图 1.1.4

1.4.2　求函数 $g(z)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{\mathrm{i}}{1-y}(z=x+\mathrm{i}y)$ 的定义域．并证明当 $x>0,|y|<1$ 时，

$$g(z)=f(z),$$

这里 $f(z)=y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t+\mathrm{i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}y^n$．

解：函数 $g(z)$ 的定义域为：$x\neq0$ 且 $y\neq1$．

$$\because\quad f(z)=y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t+\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}y^n=y\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\Bigg|_0^{+\infty}+\mathrm{i}\lim_{n\to\infty}\frac{1-y^n}{1-y}$$

$$=\frac{y}{x}+\frac{\mathrm{i}}{1-y}\quad(x>0,|y|<1),$$

$\therefore$　当 $x>0$ 且 $|y|<1$ 时，$f(z)=g(z)$．

1.4.3　写出函数 $f(z)=z^3+z+1$ 的 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 形式．

解：$f(z)=(x+\mathrm{i}y)^3+x+\mathrm{i}y+1$

$$=x^3-3xy^2+x+1+\mathrm{i}(y+3x^2y-y^3).$$

1.4.4　设 $f(z)=x^2-y^2-2y+\mathrm{i}(2x+2xy)$，写出 $f(z)$ 关于 z 的表达式．

解：$f(z)=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}+2x\mathrm{i}-2y=(x+\mathrm{i}y)^2+2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)$

$$=z^2+2\mathrm{i}z.$$

1.5.2　求 z 的值　(a) $\mathrm{e}^z=-2$；　(b) $\mathrm{e}^z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$；　(c) $\mathrm{e}^{2z-1}=1$．

解：(a) $\because\quad \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=2\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}}$，

$\therefore\quad x=\ln2,\quad y=(2k+1)\pi$，

$\therefore\quad z=\ln2+(2k+1)\pi\mathrm{i}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(b) $\because\quad \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}}$，

$\therefore\quad x=\ln2,\quad y=\left(2k+\dfrac{1}{3}\right)\pi$，

$\therefore\quad z=\ln2+\left(2k+\dfrac{1}{3}\right)\pi\mathrm{i}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(c) $\because\quad 2z-1=\mathrm{Ln}1=\ln1+2k\pi\mathrm{i}$，

$\therefore$

∴ $z = \dfrac{1}{2} + k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

1.5.3 证明：$|e^{z^2}| \leqslant e^{|z|^2}$.

证：∵ $|e^{z^2}| = |e^{x^2 - y^2 + 2xyi}| = e^{x^2 - y^2}$， $e^{|z|^2} = e^{x^2 + y^2}$，

∴ $|e^{z^2}| \leqslant e^{|z|^2}$.

1.5.4 证明：$|e^{-2z}| < 1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z) > 0$.

证：∵ $|e^{-2z}| = e^{-2x}$，

∴ 当 $\mathrm{Re}(z) = x > 0$ 时，$|e^{-2z}| < 1$.

反之，要想 $|e^{-2z}| < 1$，需 $x = \mathrm{Re}(z) > 0$.

∴ $|e^{-2z}| < 1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z) > 0$.

1.5.5 证明：(a) $e^{\bar z} = \overline{e^{z}}$；

(b) $e^{i\bar z} = \overline{e^{iz}}$ 当且仅当 $z = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

证：(a) $e^{\bar z} = e^{x - iy} = e^{x}(\cos y - i\sin y) = \overline{e^{x}(\cos y + i\sin y)} = \overline{e^{z}}$.

(b) ∵ $e^{i\bar z} = \overline{e^{iz}}$， $e^{i\bar z} = \overline{e^{-iz}}$，

∴ $-z = z + 2k\pi$，

∴ $z = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

反之，当 $z = k\pi$ 时，

$$e^{iz} = e^{k\pi i} = (-1)^k,$$
$$e^{i\bar z} = \overline{e^{k\pi i}} = (-1)^k,$$

∴ $e^{iz} = \overline{e^{iz}}$，

∴ $e^{i\bar z} = \overline{e^{iz}}$ 当且仅当 $z = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

1.5.6 (a) 若 e^{z} 为纯虚数，z 有什么限制？

(b) 证明：若 e^{z} 为实数，则 $\mathrm{Im}(z) = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

证：(a) 当 $e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$ 为纯虚数时，

$$\cos y = 0,$$

∴ $\mathrm{Im}(z) = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(b) 设 $z = x + iy$，则当 $e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$ 为实数时，

$$\sin y = 0,$$

∴ $\mathrm{Im}(z) = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

1.5.7 证明：(a) $\ln(1 - i) = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{4}i$；

(b) $\mathrm{Ln}(-1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + 2\left(k + \dfrac{1}{3}\right)\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

证：(a) $\ln(1 - i) = \ln\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{4}i = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{4}i$；

(b) $\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = \ln 2 + \frac{2}{3}\pi\mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i}$

$$= \ln 2 + 2\left(k + \frac{1}{3}\right)\pi\mathrm{i} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

1.5.11　证明：若 $\mathrm{Re}(z_1) > 0, \mathrm{Re}(z_2) > 0$，那么

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2.$$

证：由 1.1.22 知 $\mathrm{Re}(z_1) > 0, \mathrm{Re}(z_2) > 0$ 时，

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$$

$\because$ $\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|$，

$\therefore$
$$\begin{aligned} \ln z_1 z_2 &= \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\arg(z_1 z_2) \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i}(\arg z_1 + \arg z_2) \\ &= \ln z_1 + \ln z_2. \end{aligned}$$

1.5.13　应用 $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2$，证明：$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2$.

证：$\because$
$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \\ &= \ln|z_1| - \ln|z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{i}\mathrm{Arg} z_2 \\ &= \mathrm{Ln} z_1 - \mathrm{Ln} z_2, \end{aligned}$$

$\therefore$ 结论成立.

1.5.14　证明：当 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，

(a) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\ln 2}$；　　(b) $(-1)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2k+1}{n}\pi\mathrm{i}}$.

证：(a) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}+2n\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\ln 2}$；

(b) $(-1)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}(-1)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(2k+1)\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2k+1}{n}\pi\mathrm{i}}$　$(n \neq 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

1.5.15　求值：(a) $(1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}}$；　　(b) $\left[\frac{\mathrm{e}}{2}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})\right]^{3\pi\mathrm{i}}$.

解：(a) $(1-\mathrm{i})^{4\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\mathrm{Ln}(1-\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{(\pi-8k\pi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\ln 2}$；

(b)
$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathrm{e}}{2}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})\right]^{3\pi\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{e}}{2}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)} \\ &= -\mathrm{e}^{(2-6k)\pi^2}. \end{aligned}$$

1.5.16　由 $z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln} z}$ 证明：$(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{\frac{3}{2}} = \pm 2\sqrt{2}$.

证：$\because$
$$\begin{aligned} (-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{\frac{3}{2}} &= \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\left(\ln 2+\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}+3k\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\ln 2} \\ &= \pm 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 等式成立.

1.5.17　证明：若 $z \neq 0$，α 为实数，那么 $|z^{\alpha}| = \mathrm{e}^{\alpha\ln|z|} = |z|^{\alpha}$.

证：$\because$ $z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln} z} = \mathrm{e}^{\alpha(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i})}$,

$\therefore \quad |z^c| = e^{c\ln|z|} = |z|^c$.

1.5.18　令 c, d 和 $z(z \neq 0)$ 为复数，若所有的幂均取主值，证明：

(a) $\dfrac{1}{z^c} = z^{-c}$；　　　(b) $z^c z^d = z^{c+d}$.

证：(a) $\because \quad z^c \cdot z^{-c} = e^{c\mathrm{Ln}z} \cdot e^{-c\mathrm{Ln}z} = e^0 = 1$,

$$\therefore \quad \frac{1}{z^c} = z^{-c}.$$

(b) $z^c z^d = e^{c\mathrm{Ln}z} \cdot e^{d\mathrm{Ln}z} = e^{(c+d)\mathrm{Ln}z} = z^{c+d}$.

1.5.19　证明：$e^{iz} = \cos z + i\sin z$.

证：$\because \quad$ 右边 $= \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\,\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz} =$ 左边，

$\therefore$　等式成立.

1.5.20　(f) 证明：$2\sin(z_1 + z_2)\sin(z_1 - z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1$.

证：$\because \quad 2\sin(z_1 + z_2)\sin(z_1 - z_2)$

$$= 2 \cdot \frac{e^{(z_1+z_2)i} - e^{-(z_1+z_2)i}}{2i} \cdot \frac{e^{(z_1-z_2)i} - e^{-(z_1-z_2)i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{2z_1 i} - e^{-2z_2 i} - e^{2z_2 i} + e^{-2z_1 i}}{-2}$$

$$= \cos 2z_2 - \cos 2z_1$$

$\therefore$　等式成立.

1.5.20 中的(a)～(e)，(g)可类似证之.

1.5.21　证明：$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$，并进而推出 $|\sin z| \geqslant |\sin x|$.

证：$\because \quad \sin z = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$,

$\therefore \quad |\sin z|^2 = (\sin x\,\mathrm{ch}\,y)^2 + (\cos x\,\mathrm{sh}\,y)^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$,

$\therefore \quad |\sin z| \geqslant |\sin x|$.

1.5.22　证明：$|\mathrm{sh}\,y| \leqslant |\sin z| \leqslant \mathrm{ch}\,y$；　$|\mathrm{sh}\,y| \leqslant |\cos z| \leqslant \mathrm{ch}\,y$.

证：由上题

$$\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y = |\sin z|^2 = \mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x,$$

$$\therefore \qquad |\mathrm{sh}\,y| \leqslant |\sin z| \leqslant \mathrm{ch}\,y.$$

同理　$|\mathrm{sh}\,y| \leqslant |\cos z| \leqslant \mathrm{ch}\,y$.

1.5.23　证明：$\cos z = 0$ 当且仅当 $z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$，其中 k 为整数.

证：$\because \quad \cos z = \cos x\,\mathrm{ch}\,y - i\sin x\,\mathrm{sh}\,y = 0$,

$\therefore \quad \cos x = 0$ 且 $\mathrm{sh}\,y = 0$,

$\therefore \quad z = x + iy = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

以上过程可逆，故结论成立.

1.5.24 根据复数相等的概念解方程.

(a) $\sin z = \operatorname{ch}4$; (b) $\sin z = \sqrt{2}$; (c) $\cos z = 2$.

解：(a) $\because \quad \sin z = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}4$,

$\therefore \quad x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, \quad y = \pm 4$，或

$\sin x = \operatorname{ch}4, \quad y = 0$（无解，舍去）.

$\therefore \quad z = \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi \pm 4\mathrm{i} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(b) $\because \quad \sin z = \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{sh} y = \sqrt{2}$,

$\therefore \quad x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, y = -\ln(\sqrt{2}+1)$，或

$\sin x = \sqrt{2}, \quad y = 0$（无解，舍去）.

$\therefore \quad z = \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi - \mathrm{i}\ln(\sqrt{2}+1) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(c) $\because \quad \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - \mathrm{i}\sin x \operatorname{sh} y = 2$,

$\therefore \quad x = 2k\pi, \quad y = -\ln(2+\sqrt{3})$，或

$\cos x = 2, y = 0$（无解，舍去）.

$\therefore \quad z = 2k\pi - \mathrm{i}\ln(2+\sqrt{3}) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

1.5.27 证明：$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + \mathrm{i}\operatorname{ch} x \sin y$.

证：$\because$ 右边 $= \dfrac{\sin \mathrm{i}x}{\mathrm{i}}\cos y + \mathrm{i}\cos \mathrm{i}x \sin y$

$= \mathrm{i}(\cos \mathrm{i}x \sin y - \sin \mathrm{i}x \cos y)$

$= \mathrm{i}\sin(y - \mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sin(-\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y)$

$= \mathrm{i}\,\dfrac{e^{-\mathrm{i}^2 z} - e^{\mathrm{i}^2 z}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z$,

$\therefore$ 等式成立.

1.5.25,1.5.26,1.5.28 可类似证之.

1.5.29 推导公式：$\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$.

证：$\because \quad w = \operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$,

$\therefore \quad e^{2z} = \dfrac{1+w}{1-w}, \qquad z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+w}{1-w}$,

$\therefore \quad \operatorname{Arth} w = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+w}{1-w}$,

即

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

1.5.30 计算：(a) $\operatorname{Arc}\tan(2\mathrm{i})$; (b) $\operatorname{Arc}\tan(1+\mathrm{i})$;

(c) Arch(-1);　　(d) Arth(0).

解：(a) $\mathrm{Arc\,tan}(2\mathrm{i}) = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+2\mathrm{i}^2}{1-2\mathrm{i}^2}$

$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\mathrm{i}}{2}\ln 3 \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

(b) $\mathrm{Arc\,tan}(1+\mathrm{i}) = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}$

$$= \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{2}\arctan 2 + \frac{\mathrm{i}}{4}\ln 5$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(c) $\mathrm{Arch}(-1) = \mathrm{Ln}\left[-1+\sqrt{(-1)^2-1}\right]$

$$= (2k+1)\pi\mathrm{i} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

(d) $\mathrm{Arth}(0) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+0}{1-0} = k\pi\mathrm{i} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

第2章 导 数

2.1 内容要点

1. 复变函数的极限和连续的概念

2. 复变函数导数的概念和运算法则

定义 1 设 $f(z)$ 在包含 z_0 的某区域 D 内有定义，如果

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ (z \in D)}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，那么我们说函数 $f(z)$ 在 z_0 可导(或可微)，并称这个极限为函数 $w = f(z)$ 在 z_0 处的导数，记为 $f'(z_0)$. 即

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ (z \in D)}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

若记 $z = z_0 + \Delta z$，则得到 $f'(z_0)$ 的另一种表达式

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

定理 1 函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在定义域内一点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可导的必要与充分条件是：$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，并且在该点满足柯西－黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3. 解析函数的概念、函数解析的必要与充分条件

定义 2 如果函数 $f(z)$ 不仅在 z_0 处可导，而且在 z_0 的某个邻域内的任一点可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内任一点解析，则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

定理 2 函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在其定义域 D 内解析的必要与充分条件是：$u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内可微，并且满足柯西－黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4. 解析函数与调和函数的关系，由解析函数的实部求其虚部和由虚部求其实部的方法

定理 3 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数，那么 $u(x, y)$

和 $v(x,y)$ 均为 D 内的调和函数.

由解析函数的实部(虚部)求其虚部(实部)的方法共有三种，见本章 2.4 的例 6.

5. 初等函数的解析性

2.2 教学要求和学习注意点

1. 教学要求

了解复变函数的极限和连续的概念. 理解复变函数的导数及复变函数解析的概念，掌握复变函数解析的必要与充分条件. 了解调和函数与解析函数的关系，掌握从解析函数的实(虚)部求其虚(实)部的方法，了解初等函数的解析性.

重点：解析函数的概念，函数解析的必要与充分条件，已知解析函数的实(虚)部求其表达式的方法，初等函数的解析性.

难点：函数解析的必要与充分条件的证明.

2. 学习注意点

(1) 下面题目的求解过程错在何处?

题目：计算 $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{iz^3-1}{z+i}$.

解：令 $z=iy$，则

$$\lim_{z\to i}\frac{iz^3-1}{z+i}=\lim_{y\to 1}\frac{i(iy)^3-1}{iy+i}=0.$$

答：复函数求极限时，$z\to z_0$ 表达的是在复平面上 z 以任何方式趋于 z_0，它与实平面上 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的含义一样.

(2) 下面的解答错在何处?

题目：求函数 $\ln(1+z)$ 的奇点.

解：此函数的奇点为 $z\leqslant -1$.

答：此解答错在“$z\leqslant -1$”这个表达式上. 复数域上的数是不分大小的. 正确的解答是：此函数的奇点为 $z=x\leqslant -1$.

(3) (洛必达法则) 若 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在点 z_0 解析，且 $f(z_0)=g(z_0)=0$，$g'(z_0)\neq 0$，试证：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

证：∵ $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

注意点：在使用此运算法则时，要注意法则成立的条件，特别是 $f(z_0)=g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$ 的要求.

(4) 应用定理 2 判定函数解析时，需注意：

定理的条件缺一不可，仅有 $u(x,y), v(x,y)$ 可微或仅有柯西－黎曼方程成立都不能推出函数解析的结论.

例如：函数 $f(z)=\bar{z}=x-iy$，虽然 $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$ 均可微，但不能由此推断 $f(z)$ 的解析性. 事实上，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(\Delta z+z)}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

此极限在 Δz 沿 $\Delta x=0$ 趋于 0 时值为 -1，在 Δz 沿 $\Delta y=0$ 趋于 0 时值为 1，故此极限不存在，即函数 $f(z)=\bar{z}$ 在整个复平面上不可导，不解析.

从定理方面来看，由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$，即柯西－黎曼方程是不成立的.

例如：证明函数 $f(z)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}(z\neq 0), f(0)=0$ 在原点满足柯西－黎曼方程，但在原点不解析$\left(\text{提示：对}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z}\text{沿不同方向求极限}\right)$.

证：∵ $u=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$，$v=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$，

故由二元函数偏导数的定义得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y-0}=-1,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-0}{y-0}=1.$$

∴ 柯西－黎曼方程在原点成立.

而 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-0}{z-0}$ 当 z 沿 $y=0$ 趋于原点时的极限为 $1+i$，沿 $y=x$ 趋于原点时的极限为 $\dfrac{1+i}{2}$，故 $f(z)$ 在原点不可导，不解析.

此题说明在使用函数解析的判定定理 2 时，仅有柯西－黎曼方程成立是不够的，一定还要有 u, v 可微.

(5) 应用定理 1 判定函数不可导时，应注意下面所叙述的情况.

① 避免出现类似于如下解题过程的错误.

例如：讨论函数 $f(z)=x^2y+2iy$ 的可导性.

解：∵ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=2$，

∴ 函数 $f(z)=x^2y+2iy$ 在复平面上处处不可导.

首先，当 $xy=1$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 是成立的.

其次，由 $2xy=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2$ 与 $x^2=\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$ 知柯西－黎曼方程的两部分不能同时成立，从而推出结论.

② 下面的解题推导过程是正确的.

例如：讨论函数 $f(z)=\mathrm{i}2y$ 的可导性.

解：$\because\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=0\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=2,$

$\therefore$ 函数 $f(z)=\mathrm{i}2y$ 在复平面上处处不可导.

答：此结论的推导过程是正确的，因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}$在复平面上任何一点都成立，不论柯西－黎曼方程的另一部分成立与否，还是 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 可微与否，定理 1 关于函数可导的必要与充分条件都不成立，故函数 $f(z)=\mathrm{i}2y$ 在复平面上处处不可导.

(6) 下面的题目用两种解法得到的结果为什么不一样呢？

题目：求函数 $w=\begin{cases}\dfrac{x^3y(y-\mathrm{i}x)}{x^3+y^2}, & z\neq0,\\ 0, & z=0\end{cases}$ 的导数 $w'(0)$.

解法一：$\because$

$$\lim_{z\to0}\frac{w(z)-w(0)}{z-0}=\lim_{x+\mathrm{i}y\to0}\frac{\dfrac{x^3y(y-\mathrm{i}x)}{x^3+y^2}-0}{x+\mathrm{i}y}$$

$$=\lim_{x+\mathrm{i}y\to0}\frac{-\mathrm{i}x^3y}{x^3+y^2}$$

$$\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}\lim_{r\to0}(-\mathrm{i})\frac{r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r\cos^3\theta+\sin^2\theta}$$

$$=0,$$

$\therefore\quad w'(0)=0.$

解法二：因为 $w'(0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}$，而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2y^4}{(x^3+y^2)^2}$$

在 $(0,0)$ 处无意义，所以 $w'(0)$ 不存在.

答：第一种解法是正确的，第二种解法因函数在 $z=0$ 处可导，故柯西－黎曼方程成立，$u(x,y)$，$v(x,y)$ 可微. $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 可微则 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 偏导存在，但偏导未必连续，只有偏导连续时，才可先求偏导$\dfrac{\partial u}{\partial x}$再代入点 $(0,0)$.

(7) 下面的证明过程哪个地方出问题了？

题目：证明函数 $h(x,y)=x^2-y^2$ 为调和函数.

证：∵ $h_{xx}+h_{yy}=2-2=0$,

∴ $h(x,y)$ 为调和函数.

答：此证明的问题出在推导结论的条件不够充分，依据调和函数的定义，还需说明 $h(x,y)$ 具有连续的二阶偏导，这一点在做题时常常被遗忘.

2.3 释疑解难

1. 设 $z=x+iy$，证明：$\lim\limits_{z\to 2i}(2x+iy^2)=4i$.

证：因为 $|2x+iy^2-4i|\leqslant 2|x|+|y^2-4|=2|x|+|y-2||y+2|$，所以若能找到正数 δ，使得 $0<|z-2i|<\delta$ 时，有

$$2|x|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |y-2||y+2|<\frac{\varepsilon}{2},$$

则可推出结论.

我们观察，当 $|y-2|<1$ 时，有

$$|y+2|\leqslant|y-2|+4<5,$$

从而在 $|y-2|<\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$ 时，

$$|y-2||y+2|<\frac{\varepsilon}{10}\cdot 5<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再观察图 1.2.1 中，在 $|x|<\frac{\varepsilon}{4}$，$|y-2|<\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$ 的带形域中，δ 只好取 $\frac{\varepsilon}{4}$ 和 $\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$ 中的较小者，即 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$. 从而，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{10},1\right\}$，当 $0<|z-2i|<\delta$ 时，

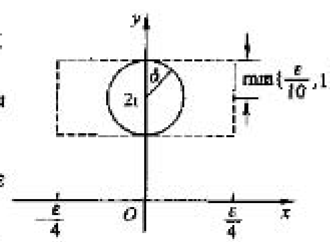

图 1.2.1

$$|2x+iy^2-4i|<\varepsilon$$

成立，即 $\lim\limits_{z\to 2i}(2x+iy^2)=4i$.

2. 证明 当 z_0 不取到负半实轴和原点时有：

$$\lim_{z\to z_0}\arg z=\arg z_0.$$

证：设 $z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，$w=\cos\arg z$，则

$$\arg z=\arccos w=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad(0\leqslant\arg z\leqslant\pi),$$

$$\arg z_0=\arccos\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

$$\because \quad \lim_{z \to z_0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

$$\therefore \quad \lim_{z \to z_0} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

即

$$\lim_{z \to z_0} \arg z = \arg z_0.$$

当 $-\pi < \arg z \leqslant 0$ 时，

$$\arg z = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

同理可得：

$$\lim_{z \to z_0} \arg z = \arg z_0.$$

3．证明：设函数 $f(z)$ 在 z_0 连续且 $f(z_0) \neq 0$，那么可以找到 z_0 的一个小邻域，在这个邻域内 $f(z) \neq 0$.

证：$\because \quad \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，

$\therefore \quad \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |f(z_0)|$，

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta$，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，

$$||f(z)| - |f(z_0)|| < \varepsilon$$

成立.

$\therefore$ 当取 $\varepsilon = |f(z_0)| > 0$ 时，$\exists \delta_1$，当 $|z - z_0| < \delta_1$ 时，

$$||f(z)| - |f(z_0)|| < |f(z_0)|$$

成立，即

$$0 < |f(z)| < 2|f(z_0)|,$$

$\therefore$ 当 $|z - z_0| < \delta_1$ 时，$f(z) \neq 0$.

故结论成立.

4．证明：$f(z)$ 在 z_0 处可导的必要与充分条件是：$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \cdot \Delta z + o(|\Delta z|)$，其中 $A = a + ib$，$o(|\Delta z|)$ 为比 $|\Delta z|$ 高阶的无穷小.

证：必要条件

设 $f(z)$ 在 z_0 处的导数为 $f'(z_0)$，则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0).$$

$\therefore$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时，

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

$$\therefore \quad \frac{|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)-f'(z_0)\Delta z|}{|\Delta z|}<\varepsilon,$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)-f'(z_0)\Delta z|}{|\Delta z|}=0,$$

$$\therefore \quad f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|).$$

充分条件

$$\because \quad f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\cdot\Delta z+o(|\Delta z|),$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=A,$$

$\therefore$ $f(z)$在 z_0 处可导.

5. 证明用极坐标表达的柯西－黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

证：$\because$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},\tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y},\tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial y},\tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y},\tag{4}$$

利用$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$比较上面的式(1)与式(4)、式(2)与式(3)，即得极坐标形式的柯西－黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

6. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，并且 u,v 偏导存在. 求证：对 $f(z)$柯西－黎曼方程条件可写成

$$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=\frac{\partial u}{\partial\bar z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\bar z}=0.$$

证：$\because$ $u(x,y)=u\left(\dfrac{z+\bar z}{2},\dfrac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}\right),v(x,y)=v\left(\dfrac{z+\bar z}{2},\dfrac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}\right),$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}u'_1+\frac{1}{2\mathrm{i}}u'_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}u'_1-\frac{1}{2\mathrm{i}}u'_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2}v'_1+\frac{1}{2\mathrm{i}}v'_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}v'_1-\frac{1}{2\mathrm{i}}v'_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

$$\therefore\quad \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\partial u}{\partial \bar z}+i\frac{\partial v}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$\therefore$ 柯西－黎曼方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 成立等价于 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$.

7. 若 $f(z)$ 在上半复平面内解析，试证函数 $\overline{f(\bar z)}$ 在下半复平面内解析.

证：$\because$ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(y>0)$ 解析，

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial(-y)}\qquad (y>0)$$

$$=\frac{\partial(-v)}{\partial y}\qquad (y<0),$$

$$\because\quad -\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial(-y)}\qquad (y>0),$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}\qquad (y<0),$$

$\therefore$ $u(x,y),v(x,y)$ 在 $y<0$ 时柯西－黎曼方程成立.

又 $\because$ $u(x,y),v(x,y)$ 在 $y>0$ 和 $y<0$ 时均可微.

$\therefore$ $\overline{f(\bar z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 在 $y<0$(下半平面内)时解析.

8. 证明 若 v 是 u 在 D 内的共轭调和函数，那么 v 在 D 内的共轭调和函数是 $-u$.

证：$\because$ v 为 u 的共轭调和函数，

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(-u)}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(-u)}{\partial x},$$

$\therefore$ $-u$ 为 v 的共轭调和函数.

2.4 典型例题

例 1 计算 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{e^z-1}{z}$.

解：$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{e^z-1}{z}\xlongequal{w=\frac{1}{z}}\lim\limits_{w\to 0}w(e^{\frac{1}{w}}-1)$.

当 $w=u+iv$ 沿 u 轴正半实轴趋于 0 时，$\lim\limits_{w\to 0}w(e^{\frac{1}{w}}-1)=\infty$. 当 w 沿 u 轴负实轴趋于 0 时，$\lim\limits_{w\to 0}w(e^{\frac{1}{w}}-1)=0$，故 $\lim\limits_{w\to 0}w(e^{\frac{1}{w}}-1)$ 的极限值不存在，即 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{e^z-1}{z}$ 极限值不存在.

(a) $f(z)=\dfrac{z-2}{e^{-x}e^{-iy}}$；(b) $f(z)=x^3+i(1-y)^3$.

解：(a) $f(z)=(z-2)e^z$

$$=e^x(x\cos y-2\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y-2\sin y+y\cos y).$$

方法一 ∵ $f(z)=(z-2)e^z$ 为解析函数 $(z-2)$ 和 e^z 的积，

∴ $f(z)$ 在整个复平面上可导，解析.

方法二 ∵ $u=e^x(x\cos y-2\cos y-y\sin y)$，

$v=e^x(x\sin y-2\sin y+y\cos y)$，

∴ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y-\cos y-y\sin y)$，

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x(x\cos y-\cos y-y\sin y)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^x(\sin y-x\sin y-y\cos y)$，

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x(x\sin y+y\cos y-\sin y)$，

且这四个偏导数连续（u,v 可微），柯西－黎曼方程成立，所以 $f(z)$ 在整个复平面上解析.

(b) ∵ $u=x^3$，$v=(1-y)^3$，

∴ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-3(1-y)^2$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，

且这四个偏导数连续，柯西－黎曼方程在 $x=0,y=1$ 时成立. 所以，$f(z)$ 仅在 $z=i$ 处可导，在整个复平面上不解析.

例 3 函数 $g(z)=\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}(r>0,-\pi<\theta<\pi)$ 在定义域内解析，证明：复合函数 $g(z^2+1)$ 在四分之一 z 平面 $x>0,y>0$ 内解析（提示：$g(z)=z^{\frac{1}{2}}$）.

证：∵ $g(z)=\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ 在定义域内解析，z^2+1 在整个复平面上解析.

∴ 由复合函数的求导运算法则知：当 $|z^2+1|>0$，$\pi>\arg(z^2+1)>-\pi$ 时，函数 $g(z^2+1)$ 解析，即在 $x^2-y^2+1\leqslant 0$ 且 $x\cdot y=0$ 也就是 $x=0$ 且 $|y|>1$ 时，$g(z^2+1)$ 不解析. 故当 $x>0,y>0$ 时，$g(z^2+1)$ 是解析的.

例 4 判断下列命题的真假. 若真，试证之；若假，请举出反例.

(a) 若 $f'(z_0)$ 存在，则 $f(z)$ 在 z_0 处解析；

(b) 若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 处不可导；

(c) 若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏导数存在，则 $f(z)=u+iv$ 可导.

例如：函数 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 处可导，但不解析.

(b) 假命题.

例如：$z=0$ 为函数 $f(z)=|z|^2$ 的奇点，但 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导.

(c) 假命题.

例如：设 $u(x,y)=x^2, v(x,y)=xy$，则 $u(x,y), v(x,y)$ 偏导连续，但当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\neq\frac{\partial v}{\partial y}=x$，$\frac{\partial u}{\partial y}=0\neq-\frac{\partial v}{\partial x}=-y$，故 $f(z)=u+iv$ 在整个复平面上除原点外不可导.

例 5 设 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l,m,n 的值.

解：设 $u=my^3+nx^2y, v=x^3+lxy^2$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nyx,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2lxy.$$

$\because$ $f(z)$ 为解析函数，

$$\therefore \begin{cases}2nyx=2lxy;\\ 3x^2+ly^2=-(3my^2+nx^2).\end{cases}$$

$\therefore$ $n=l=-3, m=1$.

例 6 由 $u=2(x-1)y$，$f(2)=-i$ 求解析函数 $f(z)=u+iv$.

解：方法一

$\because$ $f(z)=u+iv$ 是解析函数，

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=2y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$\therefore$ $v=y^2+h(x)$,

$v_x=h'(x)=2(1-x)$,

$h(x)=2x-x^2+c$,

$v=y^2+2x-x^2+c$.

$\therefore$ $f(z)=2(x-1)y+i(y^2+2x-x^2+c)$.

$\because$ $f(2)=-i$,

$\therefore$ $f(2)=2(2-1)\cdot 0+i(0^2+2\times 2-2^2+c)=-i$,

$\therefore$ $c=-1$.

$$\begin{aligned}\therefore\ f(z)&=2(x-1)y+i(y^2+2x-x^2-1)\\&=-i(x^2+2xyi-y^2)+2i(x+iy)-i\\&=-(z^2-2z+1)i\\&=-(z-1)^2 i.\end{aligned}$$

方法二

$$\because \quad v = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\mathrm{d}x + u_x\mathrm{d}y + c$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 2(1-x)\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y + c$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} 2(1-x)\mathrm{d}x + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} 2y\mathrm{d}y + c$$

$$= (2x - x^2)\Big|_{x_0}^{x} + y^2\Big|_{y_0}^{y} + c$$

$$= y^2 + 2x - x^2 + c,$$

$$\therefore \quad f(z) = 2(x-1)y + \mathrm{i}(y^2 + 2x - x^2 + c)$$

$$= -(z-1)^2\mathrm{i} + (1+c)\mathrm{i}.$$

$$\because \quad f(2) = -\mathrm{i},$$

$$\therefore \quad f(2) = -\mathrm{i} + (1+c)\mathrm{i} = -\mathrm{i},$$

$$\therefore \quad c = -1.$$

$$\therefore \quad f(z) = -(z-1)^2\mathrm{i}.$$

方法三

$$\because \quad f'(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = u_x - \mathrm{i}u_y$$

$$= 2y - 2\mathrm{i}(x-1) = -2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) + 2\mathrm{i}$$

$$= -2\mathrm{i}(z-1),$$

$$\therefore \quad f(z) = -\mathrm{i}(z-1)^2 + c.$$

$$\because \quad f(2) = -\mathrm{i},$$

$$\therefore \quad c = 0,$$

$$\therefore \quad f(z) = -(z-1)^2\mathrm{i}.$$

2.5 习题选解

2.1.1 设 z_0 为复常数，应用极限的定义证明：

(a) $\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_0)$； (b) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0$.

证：(a) $\because \quad |\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)| = |x - x_0|$,

$\therefore$ 对 $\forall\,\varepsilon > 0$，$\exists\,\delta = \varepsilon$，当 $|x - x_0| \leqslant |z - z_0| < \delta$ 时，

$$|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)| < \varepsilon$$

成立．故

$$\lim_{z\to z_0}\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_0).$$

(b) $\because$ 对 $\forall\,\varepsilon > 0$，$\exists\,\delta = \varepsilon$，当 $|z - 0| < \delta$ 时，

成立.故

$$\lim_{z\to 0} z^2/\bar{z} = 0.$$

2.1.2　证明：若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = A+B$.

证：∵　$0 \leqslant |f(z)+g(z)-A-B| \leqslant |f(z)-A| + |g(z)-B|$，由已知条件和夹逼准则得：

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)+g(z)-A-B| = 0,$$

∴　$\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = A+B$.

2.1.4　设 $\Delta z = z - z_0$，证明：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ 当且仅当 $\lim\limits_{\Delta z\to 0} f(z_0+\Delta z) = w_0$.

证：∵　$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$，

∴　对 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta$，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon,$$

即对 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta$，当 $|\Delta z - 0| < \delta$ 时，

$$|f(z_0+\Delta z) - w_0| < \varepsilon,$$

∴　$\lim\limits_{\Delta z\to 0} f(z_0+\Delta z) = w_0$.

以上过程可逆，故结论成立.

2.1.5　若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$ 且存在一个正整数 M，对 z_0 某邻域内所有的数 z 都有 $|g(z)| \leqslant M$，证明：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$.

证：∵　$0 \leqslant |f(z)g(z) - 0| = |f(z)-0||g(z)| \leqslant M|f(z)-0|$，

∴　$\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)g(z)| = 0$，

∴　$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$.

2.1.6　设 z_0 为扩充复平面上的点，证明：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$. 进而计算 $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{1}{(z-1)^3}$ 和 $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2+1}{z^3-1}$ 的值.

证：∵　$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$，

∴　对 $\forall\, M$，$\exists\, \delta$，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，

$$|f(z)| > M,$$

∴　对 $\forall\, \varepsilon = \dfrac{1}{M}$，$\exists\, \delta$，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，

$$\left|\frac{1}{f(z)} - 0\right| < \varepsilon,$$

∴　$\lim \dfrac{1}{f(z)} = 0$

2.2.1　讨论 $f(z)=\dfrac{3z^3-2z^2+12z-8}{z^2+4}$ 的连续性．对 $f(z)$ 不连续的点修改或补充定义使之连续．

解：当 $z\neq\pm 2\mathrm{i}$ 时，$f(z)$ 连续．

当 $z=\pm 2\mathrm{i}$ 时，$f(z)$ 不连续．

$$\because\quad \lim_{z\to\pm 2\mathrm{i}}\frac{3z^3-2z^2+12z-8}{z^2+4}=\lim_{z\to\pm 2\mathrm{i}}\frac{3z(z^2+4)-2(z^2+4)}{z^2+4}$$

$$=(3z-2)\Big|_{z=\pm 2\mathrm{i}}=-2\pm 6\mathrm{i},$$

$\therefore$　补充定义：$f(\pm 2\mathrm{i})=-2\pm 6\mathrm{i}$，使函数在 $z=\pm 2\mathrm{i}$ 处成为连续函数．

2.2.2　设

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0,\end{cases}$$

试证 $f(z)$ 在原点不连续．

证：$\because$　当 $y=kx$ 时，

$$\lim_{z\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{z\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{k^2+1},$$

$\therefore$　$f(z)$ 在 z 沿不同直线方向趋于 0 时，$f(z)$ 的极限值不相等，

$\therefore$　$f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续．

2.3.1　应用导数定义讨论下面函数的导数存在否？

(a) $f(z)=\mathrm{Re}(z)$；　　(b) $f(z)=\mathrm{Im}(z)$．

解：(a) $\because$　$f(z)=\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar z}{2}$，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z+\overline{\Delta z}}{2\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right),$$

$\therefore$　当 Δz 沿 $\Delta x=0$ 趋于 0 时，上面的极限值为 0；当 Δz 沿 $\Delta y=0$ 趋于 0 时，上面的极限值为 1，故 $f(z)$ 在任一点导数不存在．

(b) 用类似于(a)的方法可得：

$$f(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}$$

在任一点的导数不存在．

2.3.2　证明：函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\bar{z}^2}{z}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

在 $z=0$ 处不可导.

证：∵ $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}^2}{z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2$,

当 z 沿 $y=kx$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2=\left(\dfrac{1-\mathrm{i}k}{1+\mathrm{i}k}\right)^2$,

∴ 极限 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}$ 不存在，函数在 $z=0$ 处不可导.

2.3.4 应用求导法则证明：多项式函数 $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ $(a_n\neq 0, n>1)$ 处处可导，且 $P'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}$，并计算 $f(z)=(1-4z^2)^3$ 的导数.

证：当 n 为有限数时，重复应用函数和的导数等于导数的和的运算法则可得：

$$P'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1},$$

$$f'(z)=[(1-4z^2)^3]'=3(1-4z^2)^2(-8z)=-24z(1-4z^2)^2.$$

2.3.5 设 $f'(z)$ 存在，试推导 $\dfrac{\mathrm{d}[c^{f(z)}]}{\mathrm{d}z}$.

证：设 $w=c^{f(z)}$，则

$$w=e^{f(z)\mathrm{Ln}c},$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=e^{f(z)\mathrm{Ln}c}\cdot f'(z)\mathrm{Ln}c=c^{f(z)}f'(z)\mathrm{Ln}c,$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}[c^{f(z)}]}{\mathrm{d}z}=c^{f(z)}f'(z)\mathrm{Ln}c.$$

2.3.6 推导 $\mathrm{Arch}\,z$ 的求导公式.

证：设 $w=\mathrm{Arch}\,z$，则

$$z=\mathrm{ch}\,w=\frac{e^w+e^{-w}}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^{-1}=\left(\frac{e^w-e^{-w}}{2}\right)^{-1}$$

$$=(\mathrm{sh}\,w)^{-1}=(\mathrm{ch}^2w-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}.$$

2.3.8 验证函数 $w=xe^x\cos y-ye^x\sin y+\mathrm{i}(ye^x\cos y+xe^x\sin y)$ 满足柯西－黎曼方程.

2.3.9 讨论下面函数的可导性，如果可导，求出 $f'(z)$.

(a) $f(z)=x^2+\mathrm{i}y^2$; (b) $f(z)=z\operatorname{Im}(z)$.

解：(a) ∵ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y$,

且这四个偏导连续，当 $y=x$ 时柯西－黎曼方程成立.

∴ $f(z)$ 仅在 $y=x$ 时可导，且 $f'(z)=2x$.

(b) ∵ $f(z)=(x+\mathrm{i}y)y=xy+\mathrm{i}y^2$,

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y$,

且这四个偏导连续，当 $y=x=0$ 时柯西－黎曼方程成立.

∴ $f(z)$ 仅在 $z=0$ 时可导，且 $f'(0)=0$.

2.3.10 证明以下各函数在任一点处不可导.

(a) $f(z)=2x+\mathrm{i}xy^2$; (b) $f(z)=z-\bar{z}$;

(c) $f(z)=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$.

证：(a) $f(z)=2x+\mathrm{i}xy^2$,

∵ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2xy$,

∴ 柯西－黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

不成立.

∴ $f(z)$ 在任一点处不可导.

(b) ∵ $f(z)=2y\mathrm{i}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=2$,

∴ 柯西－黎曼方程在任一点不成立，

∴ $f(z)$ 在任一点处不可导.

(c) ∵ $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\mathrm{e}^x\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\cos y.$$

又∵ $\sin y$ 与 $\cos y$ 不可能同时为 0，即柯西－黎曼方程不成立，

∴ $f(z)$ 在任一点处不可导.

2.3.11 证明以下各函数的 $f'(z)$、$f''(z)$ 存在，并求之.

(a) $f(z)=\mathrm{i}z+2$; (b) $f(z)=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$;

(c) $f(z)=\cos x\operatorname{ch}y-\mathrm{i}\sin x\operatorname{sh}y$.

阶导数,且

(a) $f'(z)=\mathrm{i}$, $f''(z)=0$;

(b) $f'(z)=-e^{-z}$, $f''(z)=e^{-z}$;

(c) $f'(z)=-\sin z$, $f''(z)=-\cos z$.

2.4.1 证明 $f(z)=(z^2-4)(z^2+4)$在定义域内解析,并求当 $z=1,2,\mathrm{i},-\mathrm{i}$, $1+2\mathrm{i}$ 时 $f'(z)$的值.

证: ∵ $$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^4-16-(z^4-16)}{\Delta z}=4z^3,$$

∴ $f(z)$在其定义域(整个复平面上)解析.且

$$f'(1)=4,f'(2)=32,f'(\mathrm{i})=-4\mathrm{i},$$
$$f'(-\mathrm{i})=4\mathrm{i},f'(1+2\mathrm{i})=-44-8\mathrm{i}.$$

2.4.4 证明:(a) $\ln(z-\mathrm{i})$在除去直线 $y=1(x\leqslant 0)$的复平面上处处解析;

(b) 函数$\dfrac{\ln(z+4)}{z^2+\mathrm{i}}$在除去点 $z=\pm\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$和实轴上 $x\leqslant -4$ 的点后的复平面上处处解析.

证:(a) ∵ $\ln(z-\mathrm{i})=\ln[x+(y-1)\mathrm{i}]$,而 $\ln z=\ln(x+y\mathrm{i})$在除去负实轴和原点的复平面上解析,

∴ $\ln(z-\mathrm{i})$在除去 $y=1(x\leqslant 0)$的复平面上处处解析.

(b) ∴ $$\frac{\ln(z+4)}{z^2+\mathrm{i}}=\frac{\ln(x+4+y\mathrm{i})}{x^2-y^2+(2xy+1)\mathrm{i}},$$

∴ 当 $x\leqslant -4,y=0$ 和 $z^2=-\mathrm{i}$ 时函数不解析,即函数在除去点 $z=\pm\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$和实轴上 $x\leqslant -4$ 的点后的复平面上解析.

2.4.5 由函数解析的必要与充分条件证明:若 $w=f(z)$为 D 内的解析函数,那么 $\sin f(z)$,$\cos f(z)$在 D 内解析,且$\dfrac{\mathrm{d}\sin w}{\mathrm{d}z}=\cos w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$;$\dfrac{\mathrm{d}\cos w}{\mathrm{d}z}=-\sin w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

证:设 $w=f(z)=u+\mathrm{i}v$,

$$\sin f(z)=\sin(u+\mathrm{i}v)=\sin u\,\mathrm{ch}v+\mathrm{i}\cos u\,\mathrm{sh}v=U+\mathrm{i}V,$$

∵ $$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial\sin u}{\partial x}\mathrm{ch}v+\frac{\partial\,\mathrm{ch}v}{\partial x}\sin u=\cos u\cdot\mathrm{ch}v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{sh}v\cdot\sin u\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial\cos u}{\partial y}\mathrm{sh}v+\frac{\partial\,\mathrm{sh}v}{\partial y}\cos u=-\sin u\cdot\mathrm{sh}v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{ch}v\cdot\cos u\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=\sin u\cdot\mathrm{sh}v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{ch}v\cdot\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

∴ $$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},$$

同理,$\dfrac{\partial U}{\partial y}=-\dfrac{\partial V}{\partial x}$,且这四个偏导数连续.

∴　$\sin f(z)$解析，且 $(\sin f(z))' = U_x + iV_x$，即

$$\frac{\mathrm{d}\sin w}{\mathrm{d}z} = \cos u \cdot \mathrm{ch}\, v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{sh}\, v \cdot \sin u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\left(-\sin u \cdot \mathrm{sh}\, v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{ch}\, v \cdot \cos u \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \cos w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z},$$

同理，$\dfrac{\mathrm{d}\cos w}{\mathrm{d}z} = -\sin w \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

2.4.6　证明：$e^{\bar z}$，$\sin\bar z$，$\cos\bar z$ 在复平面上任一点都不解析.

证：$e^{\bar z}$ 由习题 2.3.10(c) 可得结论.

∵　$\sin\bar z = \sin(x - iy) = \sin x\,\mathrm{ch}\, y - i\,\mathrm{sh}\, y\cos x$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\,\mathrm{ch}\, y,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{sh}\, y\sin x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x\,\mathrm{sh}\, y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\mathrm{ch}\, y\cos x.$$

且这四个偏导数连续．要想柯西－黎曼方程成立，需

$$\cos x = 0 \text{ 且 } \mathrm{sh}\, y = 0,$$

即

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ y = 0.$$

∴　$\sin\bar z$ 仅在离散点 $z = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 处可导，在整个复平面上不解析．同理可得 $\cos\bar z$ 在整个复平面上不解析.

2.4.7　讨论下面各函数的解析性.

(a) $f(z) = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$;　　(b) $f(z) = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}(z \neq 0)$;

(c) $w = \dfrac{1}{3x - 3iy}$;　　(d) $w = \dfrac{x^2 + y^2}{3x - 3iy}$;　　(e) $w = \dfrac{1 - z^4}{1 + z^4}$.

解：(a) ∵　$u = x^3 - 3xy^2$,　$v = 3x^2y - y^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

且这四个偏导数均连续.

∴　$f(z)$解析且 $f'(z) = 3(x^2 - y^2) + 6xyi = 3z^2$.

(b) ∵　$f(z) \xlongequal{z = re^{i\theta}} \dfrac{1}{r}e^{-i\theta} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$,

$$u = \frac{1}{r}\cos\theta,\ v = -\frac{1}{r}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\sin\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

(c) ∵ $w=\dfrac{x+\mathrm{i}y}{3(x^2+y^2)}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{3(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{3(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

∴ 此函数在整个复平面上不解析.

(d) ∵ $w=\dfrac{(x^2+y^2)(x+\mathrm{i}y)}{3(x^2+y^2)}=\dfrac{z}{3}$,

∴ 此函数在除去 $z=0$ 的复平面上解析.

(e) ∵ $$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\dfrac{1-(z+\Delta z)^4}{1+(z+\Delta z)^4}-\dfrac{1-z^4}{1+z^4}}{\Delta z}=\frac{-2(2z+\Delta z)[z^2+(z+\Delta z)^2]}{[1+(z+\Delta z)^4](1+z^4)},$$

∴ $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{-8z^3}{(1+z^4)^2},$$

∴ 此函数在除去 $z^4=-1$ 的点外的复平面上处处解析.

2.4.9 若函数 $f(z)$在区域 D 内解析，且满足下列条件之一，试证 $f(z)$在 D 内必为常数.

(a) $\overline{f(z)}$在 D 内解析； (b) $|f(z)|$在 D 内为常数；

(c) $\mathrm{Re}f(z)$或 $\mathrm{Im}f(z)$在 D 内为常数.

证：(a) ∵ $\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$, $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内均解析，

∴ $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

∴ $u=c_1$, $v=c_2$（c_1,c_2 为任意实数），

∴ $f(z)=c$（c 为任意复数，$z\in D$）.

(b) ∵ $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}=c'$, $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内解析，

∴ $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

∴ $$2u\frac{\partial u}{\partial x}-2v\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

∴ $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

∴ $u=c_1$, $v=c_2$（c_1,c_2 为任意实数），

∴ $f(z)=c$（c 为任意复数，$z\in D$）.

(c) ∵ $\mathrm{Re}f(z)=c_1=u(x,y)$,

$\therefore\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$,

$\therefore\quad v=c_2$（c_2 为任意实数）.

$\therefore\quad f(z)=c$（c 为任意复数，$z\in D$）.

同理，$\mathrm{Im}f(z)=c_2$（c_2 为任意实数）时，

$$f(z)=c（c \text{ 为任意复数}, z\in D）.$$

2.4.12 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为 D 内的解析函数 $u(x,y)=c_1$，$v(x,y)=c_2$ 为两个曲线族，这里 c_1 和 c_2 为任意的实常数. 证明：这两族曲线正交（提示：曲线正交即为两曲线交点处切线相互垂直）.

证：$\because$ 曲线 $u(x,y)=c_1$ 上任一点处切线斜率 $k_1=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{u_x}{u_y}$，

曲线 $v(x,y)=c_2$ 上任一点处切线斜率 $k_2=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{v_x}{v_y}$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\therefore\quad k_1\cdot k_2=-\frac{u_x}{u_y}\cdot\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}}{-\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}}=-1,$$

$\therefore\quad u(x,y)=c_1$，$v(x,y)=c_2$ 两曲线族正交.

2.5.1 证明下面各函数满足拉普拉斯方程.

(a) $u=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$； (b) $u=\mathrm{Re}[\mathrm{Ln}(z-1)]\ (z\neq 1)$.

证：(a) $\because\quad u_{xx}+u_{yy}=e^{x^2-y^2}[(4x^2-4y^2+2)\sin 2xy+8xy\cos 2xy]$

$\qquad -e^{x^2-y^2}[(4x^2-4y^2+2)\sin 2xy+8xy\cos 2xy]$

$\qquad =0$,

$\therefore\quad u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程.

(b) $\because\quad u=\mathrm{Re}[\mathrm{Ln}(z-1)]=\ln|z-1|=\ln[(x-1)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$,

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{y^2-(x-1)^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}+\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=0,$$

$\therefore\quad u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程.

2.5.2 证明下面各函数为任意区域的调和函数.

(a) $u=\sin x\,\mathrm{sh}\,y$； (b) $v=\cos 2x\,\mathrm{sh}\,2y$.

证：(a) $\because\quad u_{xx}+u_{yy}=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y+\sin x\,\mathrm{sh}\,y=0$ 且 u 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore\quad u(x,y)$ 为调和函数.

2.5.3　用 x 和 y 表示 $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$，并说明这个函数为什么在不包含原点的任何区域内为调和函数.

解：∵　$\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})=\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{x+iy}})=\mathrm{Re}(e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}})$

$$=\mathrm{Re}\left[e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\frac{y}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]$$

$$=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

∵　$e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z\neq0$ 时为解析函数，

∴　$\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$ 在除去原点的任何邻域内为调和函数.

2.5.4　用两种方法证明函数 $\ln(x^2+y^2)$ 在复平面上不含原点的任何区域内均为调和函数.

证：方法一　∵　$u_{xx}+u_{yy}=2\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$ 且 u 在 $z\neq0$ 时具有连续的二阶偏导数，

∴　$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 为调和函数.

方法二　设 $f(z)=u+\mathrm{i}v=\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}2\arctan\dfrac{y}{x}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

而且当 $z\neq0$ 时，这四个一阶偏导数连续. 故 $f(z)$ 为解析函数，其实部为调和函数.

2.5.5　证明：若 v 为 u 的共轭调和函数，并且 u 亦为 v 的共轭调和函数，那么 u 和 v 必为常数.

证：∵　v 为 u 的共轭调和函数，

∴　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

∵　u 为 v 的共轭调和函数，

∴　$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y},\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}.$

∴　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,$

∴　u,v 必为常函数.

2.5.6　证明：如果 v 和 V 都是 u 在 D 内的共轭调和函数，那么 v 和 V 仅相差一个任意常数.

证：∵　v,V 均为 u 在 D 内的共轭调和函数，

故 v 和 V 仅相差一个任意实常数 c.

2.5.7　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为 D 内的解析函数,阐述函数 $U(x,y)=\mathrm{e}^{u(x,y)}\cos v(x,y)$, $V(x,y)=\mathrm{e}^{u(x,y)}\sin v(x,y)$ 亦为 D 内的调和函数,且 V 为 U 的共轭调和函数.

解：设 $F(z)=U+\mathrm{i}V=\mathrm{e}^{u(x,y)}\cos v(x,y)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{u(x,y)}\sin v(x,y)=\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}$,

∵　$u+\mathrm{i}v$ 为 D 内的解析函数,

∴　复合函数 $F(z)=\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}$ 为 D 内的解析函数,

∴　V 为 U 的共轭调和函数.

2.5.8　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 满足条件:$f(x+\mathrm{i}0)=\mathrm{e}^x$, $f(z)$ 为解析函数且对任一点 z 有 $f'(z)=f(z)$. 根据下面的叙述证明:$f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$.

(a) 在得到 $u_x=u, v_x=v$ 后证明存在关于 y 的实值函数 φ 和 ψ,使 $u=\mathrm{e}^x\varphi(y)$, $v=\mathrm{e}^x\psi(y)$.

(b) 应用 u 为调和函数获得方程 $\varphi''(y)+\varphi(y)=0$,因此得 $\varphi(y)=A\cos y+B\sin y$,这里 A 和 B 均为实数.

(c) 随后有相应的 $\psi(y)=A\sin y-B\cos y$,应用 $u(x,0)+\mathrm{i}v(x,0)=\mathrm{e}^x$ 求出 A 和 B 得结论:$u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 和 $v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$.

证：∵　$f'(z)=f(z)$,

∴　$u_x=u$, $v_x=v$.

由此的 u,v 微分方程解得:

$$u=\mathrm{e}^x\varphi(y),\ v=\mathrm{e}^x\psi(y),$$

∵　$f(z)$ 解析,故 u 为调和函数,即

$$u_{xx}+u_{yy}=\mathrm{e}^x\varphi(y)+\mathrm{e}^x\varphi''(y)=0,$$

∴　解微分方程 $\varphi''(y)+\varphi(y)=0$ 得

$$\varphi(y)=A\cos y+B\sin y,$$

$$u(x,y)=\mathrm{e}^x(A\cos y+B\sin y).$$

同理可得

$$v(x,y)=\mathrm{e}^x(C\cos y+D\sin y).$$

∵　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

∴　$\mathrm{e}^x(A\cos y+B\sin y)=\mathrm{e}^x(-C\sin y+D\cos y)$.

∵　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$,

$\therefore \quad e^x(-A\sin y + B\cos y) = e^x(-C\cos y - D\sin y).$

$\therefore \quad D = A,\ C = -B.$

$\therefore \quad v(x,y) = e^x(A\sin y - B\cos y).$

$\because \quad f(x+i0) = e^x,$

$\therefore \quad u(x,0) = e^x = Ae^x,\ v(x,0) = 0 = -Be^x.$

$\therefore \quad A = 1,\ B = 0,$

$\quad u(x,y) = e^x\cos y,\ v(x,y) = e^x\sin y.$

$\therefore \quad f(z) = e^x(\cos y + i\sin y).$

2.5.9 证明 $u(x,y)$为某区域内的调和函数，并求出它的共轭调和函数.

(a) $u(x,y) = 2x(1-y)$; (b) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$;

(c) $u(x,y) = \operatorname{sh}x\sin y$; (d) $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

证：(a) $\because \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 + 0 = 0$，$u$ 具有均连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad u(x,y)$为调和函数，与之相应的共轭调和函数为：

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\,dx + u_x\,dy + c$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 2x\,dx + 2(1-y)\,dy + c$$

$$= x^2 + 2y - y^2 + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(b) $\because \quad u_{xx} + u_{yy} = -6x + 6x = 0$，$u$ 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad u(x,y)$为调和函数，与之相应的共轭调和函数为：

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\,dx + u_x\,dy + c$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -6xy\,dx + (2 - 3x^2 + 3y^2)\,dy + c$$

$$= 2y - 3x^2y + y^3 + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(c) $\because \quad u_{xx} + u_{yy} = \operatorname{sh}x\sin y - \operatorname{sh}x\sin y = 0$，$u$ 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad u(x,y)$为调和函数，与之相应的共轭调和函数为：

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\,dx + u_x\,dy + c$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\operatorname{sh}x\cos y\,dx + \operatorname{ch}x\sin y\,dy + c$$

$$= -\operatorname{ch}y\cos y + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(d) $\because \quad u_{xx} + u_{yy} = \dfrac{6x^2y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3} + \dfrac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2+y^2)^3} = 0,$

u 在 $z \neq 0$ 时具有连续的二阶偏导数，

∴ $u(x,y)$ 为调和函数，与之相应的共轭调和函数为：

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y+c$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+c\quad(c\in\mathbf{R}).$$

2.5.10　证明下面 u 或 v 为调和函数，并求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$.

(a) $u=x^3-3xy^2$;

(b) $u=x^2-y^2+2x$;

(c) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

(d) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$;

(e) $u=2\mathrm{e}^x\sin y$;

(f) $v=2xy+3x$;

(g) $v=\dfrac{-y}{(x+1)^2+y^2}$;

(h) $v=\arctan\dfrac{y}{x}\,(x>0)$;

(i) $v=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$;

(j) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2},f(2)=0$.

证：(a)—(e) 证明及求解 $v(x,y)$ 的方法如 2.5.9 题.

(f) ∵ $v_{xx}+v_{yy}=0+0=0$，v_{xx} 和 v 具有连续的二阶偏导数，

∴ $v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}2x\mathrm{d}x-(2y+3)\mathrm{d}y+c$$

$$=x^2-y^2-3y+c,$$

$$\therefore\quad f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

$$=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}-3y+3\mathrm{i}x+c$$

$$=z^2+3\mathrm{i}z+c\quad(c\in\mathbf{R}).$$

(g) ∵ $v_{xx}+v_{yy}=\dfrac{2y^3-14y(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^3}+\dfrac{14y(x+1)^2-2y^3}{[(x+1)^2+y^2]^3}=0,$

在分母不为 0 时具有连续的二阶偏导数，

∴ $v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v_y\mathrm{d}x-v_x\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{y^2-(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}\mathrm{d}x-\frac{2(x+1)y}{[(x+1)^2+y^2]^2}\mathrm{d}y+c$$

$$=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}+c.$$

$$= \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} + c$$

$$= \frac{1}{z+1} + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(h) $\because \quad v_{xx} + v_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0,$

在分母不为 0 时具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y \mathrm{d}x - v_x \mathrm{d}y + c$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c,$$

$$\therefore \quad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{i}\arctan\frac{y}{x} + c$$

$$= \ln z + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(i) $\because \quad v_{xx} + v_{yy} = \mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y + 2\sin y) -$

$$\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y + 2\sin y) = 0,$$

v 具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad v(x,y)$ 为调和函数，且

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y \mathrm{d}x - v_x \mathrm{d}y + c$$

$$= \int_{x_0}^{x} [\mathrm{e}^x(\cos y_0 - y_0\sin y_0 + x\cos y_0) + 1]\mathrm{d}x$$

$$- \int_{y_0}^{y} [\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1]\mathrm{d}y + c$$

$$= \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + c,$$

$$\therefore \quad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

$$= \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + \mathrm{i}[\mathrm{e}^x(y\cos y + x\sin y)$$

$$+ x + y] + c = z\mathrm{e}^z + (1+\mathrm{i})z + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

(j) $\because \quad v_{xx} + v_{yy} = \frac{6x^2y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2+y^2)^3} = 0,$

v 在分母不为 0 时具有连续的二阶偏导数，

$\therefore \quad v(x,y)$ 为调和函数，且

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y + c$$

$$= -\frac{x}{x^2+y^2} + c,$$

$$\therefore \quad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{\mathrm{i}y}{x^2+y^2} + c$$

$$= -\frac{1}{z} + c \quad (c \in \mathbf{R}).$$

$$\because \quad f(2) = -\frac{1}{2} + c = 0,$$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}.$$

第3章 积分

3.1 内容要点

1. 复变函数积分的定义和计算方法

定义1 设$f(z)$为定义在以z_0为起点，z为终点的简单曲线C上的连续函数，把曲线用分点$z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n = z$分成$n$个弧段，这里$z_k(k=0,1,\cdots,n)$是曲线$C$上按照从$z_0$到$z$的次序排列的，$\xi_k$是$z_{k-1}$到$z_k$的弧上的任一点．如果不论对$C$的分法和对$\xi_k$的取法，当分点无限增多，而这些弧段长度的最大值$\lambda$趋于零时，和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

的极限惟一存在，则称此极限为函数$f(z)$沿曲线C从z_0到z的积分，记作$\int_C f(z)\mathrm{d}z$，即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$的计算方法：

若曲线C

$$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

分段光滑，$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$在$C$上分段连续，那么

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y,$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

以上两式我们常用来计算积分．

2. 柯西积分定理及其推广

定理1 （柯西积分定理）设C是一条简单正向闭曲线，$f(z)$在以C为边界的有界闭区域D上解析，那么

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

C_n 围成的有界多连通域，$f(z)$ 在多连通域 D 内及边界线 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 上解析，那么

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

这里 C 为多连通域 D 的所有边界，其方向是 C_0 按逆时针方向取，$C_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$ 按顺时针方向取．

3. 柯西公式

定理 3　设 $f(z)$ 在简单正向闭曲线 C 及其所围区域 D 内处处解析，z_0 为 D 内任一点，那么

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z,$$

此式称为柯西公式．

4. 解析函数的高阶导数

定理 4　设 $f(z)$ 在简单正向闭曲线 C 及其所围区域 D 内处处解析，z_0 为 D 内任一点，那么

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,$$

这里 $n=0,1,2,\cdots$．

3.2　教学要求和学习注意点

1. 教学要求

正确理解复变函数积分的定义，了解其性质，会求复变函数的积分．正确理解柯西积分定理，掌握柯西积分公式和高阶导数公式，了解解析函数无限次可导的性质．

重点：柯西积分定理及其推广，柯西公式，解析函数高阶导数公式．

难点：柯西公式，解析函数高阶导数公式的证明．

2. 学习注意点

(1) 下面求解积分的过程错在何处？

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(2z+1)(z-2)} = \int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{z-2}}{2z+1}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\cdot\frac{1}{z-2}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{4}{5}\pi \mathrm{i}.$$

答：错在第二个等号后．正确的是：

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(2z+1)(z-2)} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{z-2}}{z+\frac{1}{2}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{z-2}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}.$$

这样的错误是时常发生的，应当引起注意！

(2) 计算 $\int_C \bar{z}\mathrm{d}z$. 这里曲线 C 为 $z = x + \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$，方向分别取逆时针和顺时针方向(图 1.3.1).

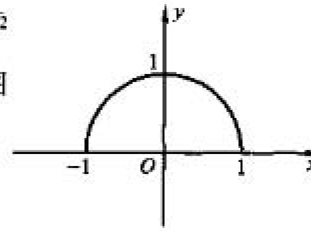

图 1.3.1

解：

$$\int_C \bar{z}\mathrm{d}z = \int_C \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases}\int_0^{\pi}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta; \\ \int_{\pi}^{0}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta.\end{cases} = \begin{cases}\pi\mathrm{i}, & \text{逆时针；} \\ -\pi\mathrm{i}, & \text{顺时针.}\end{cases}$$

此题在求解的过程中应特别注意上、下限的正确性.

(3) 等式 $\mathrm{Re}\left[\int_C f(z)\mathrm{d}z\right] = \int_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z$ 成立吗？

答：不成立. 如 $f(z) = z$，$C: z = \mathrm{i}t\,(0\leqslant t\leqslant 1)$时，等式的左边 $= -\frac{1}{2}$，右边 $= 0$.

(4) 设 $f(z)$在单连通域 D 内处处解析，C 为 D 内任一条简单闭曲线，问

$$\int_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z = \int_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z = 0$$

成立否？如成立，请证明之；如不成立，请举例说明.

答：不成立. 如 $f(z) = z$，$C: |z| = 1$ 时，

$$\int_C \mathrm{Re}[f(z)]\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i},\quad \int_C \mathrm{Im}[f(z)]\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}.$$

3.3 释疑解难

1. 设 $f(z)$在原点的邻域内解析，那么 $\lim\limits_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 2\pi f(0)$.

证：设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = \lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

2. 计算下列各积分,积分路径为任意曲线.

(a) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$;　　(b) $\int_a^b \frac{3z+2}{z-1}\mathrm{d}z$.

并说明积分路径为什么不能过 $z=0$ 及 $z=1$.

解: (a) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big|_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$;

(b) $\int_a^b \frac{3z+2}{z-1}\mathrm{d}z = \int_a^b \left(3 + \frac{5}{z-1}\right)\mathrm{d}z = 3(b-a) + 5\mathrm{Ln}\,\frac{b-1}{a-1}$.

因为计算题目所采用的方法要求被积函数在单连通域内解析,(a)、(b)中积分路径不过 $z=0, z=1$ 时,便能满足上述要求,即可采用积分值与路径无关,仅与起点和终点有关的定理来求解.

3. 设 $f(z)$在 $0<|z-a|<R$ 内解析,且 $f(z)$在 $z=a$ 处连续,证明:$f(z)$在圆 $|z-a|<R$ 内解析.

证: ∵ $f(z)$在 a 处连续,

∴ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta$,当 $|\zeta-a|<\delta$ 时, $|f(\zeta)-f(a)|<\varepsilon$.

又 ∵ $$\left|2\pi i f(a) - \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)-f(a)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$(r<R)$,

∴ 取 $r=\frac{\delta}{k}<R$,其中 k 为正整数,则

$$\left|2\pi i f(a) - \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{\frac{\delta}{k}} \cdot 2\pi \cdot \frac{\delta}{k} = 2\pi\varepsilon,$$

由于上式左边为一常数,而 ε 为任意取定的正数,

∴ $$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\mathrm{d}\zeta.$$

由解析函数高阶导数公式的证明过程可知:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}\mathrm{d}\zeta,$$

∴ 函数 $f(z)$在 $z=a$ 处可导,在圆 $|z-a|<R$ 内解析.

4. 通过函数 $f(z)=e^z, a=0, b=1+i$ 对下述结论进行验证:若 $f(z)$在区域 D 内解析,C 为 D 内以 a、b 为端点的直线段,则存在数 $\lambda(|\lambda|\leqslant 1)$与点 $\xi \in C$ 使得:

$$f(b)-f(a) = |\lambda|(b-a)f'(\xi).$$

验证:对函数 $f(z)=e^z$,端点 $a=0, b=1+i$ 要使

$$f(b)-f(a) = |\lambda|(b-a)f'(\xi)$$

成立,即

$$\frac{e^{1+i}-1}{1+i}=\lambda e^{\alpha(1+i)}$$

成立，其中 $|\lambda|\leqslant 1, 0<\alpha<1$.

利用复数相等的定义知，若取：

$$\alpha = 0.583\,29,\quad \lambda = 0.586\,69,$$

上述结论成立.

5. 如果 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，并且 $|f(z)|\leqslant \dfrac{1}{1-|z|}$，证明：

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)!\quad (n=1,2,\cdots).$$

（提示：考虑 $f(z)$ 在 $|z|=\dfrac{n}{n+1}$ 上的积分.）

证：因为 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，由柯西积分公式知

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\ (r<1),$$

利用积分性质有

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz|$$
$$\leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{|dz|}{(1-|z|)|z|^{n+1}}$$
$$= \frac{n!}{(1-r)r^n},$$

与要证明的结论相比较，取 $r=\dfrac{n}{n+1}$，则

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)!.$$

3.4 典型例题

例 1 计算 $\displaystyle\int_{|z|=1/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz$.

解：被积函数在圆 $|z|=\dfrac{1}{2}$ 及其所围区域内解析，应用柯西定理知

$$\int_{|z|=1/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz = 0.$$

例 2 计算 $\displaystyle\int_{|z|=3/2}\frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz$.

$$= \frac{2}{3}e\pi i$$

这里曲线 $|z|=3/2$ 只围住了被积函数的一个不解析点 1，$z-1$ 的次方为 1，故用柯西公式求解.

例 3 计算 $\displaystyle\int_{|z|=3/2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$.

解：
$$\int_{|z|=3/2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz = \int_{|z|=3/2} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{z+2}\right)'\Big|_{z=1}$$
$$= \frac{4}{9}e\pi i.$$

这里曲线 $|z|=3/2$ 只围住了被积函数的一个不解析点 1，$z-1$ 的次方为 2 大于 1，故用高阶导数公式求解.

例 4 计算 $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz$.

解：
$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz = \int_{|z-1|=1/2} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz + \int_{|z+2|=1/2} \frac{e^z}{(z-1)(z+2)}dz$$
$$= \int_{|z-1|=1/2} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{z-1}dz + \int_{|z+2|=1/2} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z+2}dz$$
$$= \frac{2}{3}e\pi i - \frac{2}{3}e^{-2}\pi i = \frac{2}{3}(e-e^{-2})\pi i.$$

这里曲线 $|z|=3$ 围住了被积函数的两个即一个以上的不解析点，应用柯西定理的推广定理计算原积分，这里 $|z-1|=\frac{1}{2}$，$|z+2|=\frac{1}{2}$ 中的 $\frac{1}{2}$ 是随意取的，但依柯西定理的推广定理应遵循 $|z-1|=\frac{1}{2}$，$|z+2|=\frac{1}{2}$ 两曲线不相交原则，然后再用柯西公式求解.

例 5 计算 $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$.

解：
$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$$
$$= \int_{|z-1|=1/2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz + \int_{|z+2|=1/2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$$
（柯西定理的推广定理）
$$= \int_{|z-1|=1/2} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{(z-1)^2}dz + \int_{|z+2|=1/2} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{z+2}dz$$