第一章　复数与复变函数

生命，那是自然付给人类去雕琢的宝石。
——诺贝尔

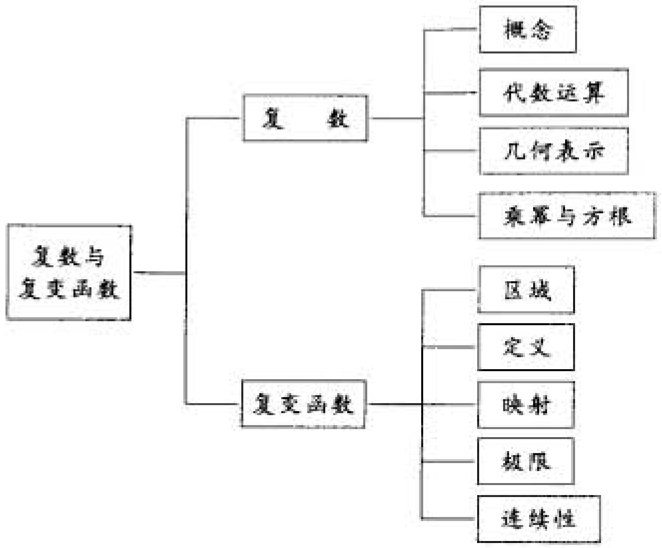
导　学

复变函数就是自变量为复数的函数。本课程研究的主要对象是在某种意义之下可导的复变函数，通常称为解析函数。为建立这种解析函数的理论基础，在这一章中，首先引入复数的代数运算及其多种表示法；其次介绍复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念，这些概念及性质与一元或二元微积分中相应概念及性质在形式上几乎完全相同，但本质上却有很大差别，应当特别给以关注。

每学一个概念、定理，均要与高等数学中相应部分进行对照，尤其要记住差别。$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是联系高等数学与复变函数的重要桥梁，全书许多定理的表述或证明均须借助于 $u(x,y)$，$v(x,y)$。

复变函数理论体系的构建，以高等数学为参照系，并借用了其中的结论。回过头来，对其中的一些棘手的高等数学问题能轻而易举地加以解决。例如，用留数计算广义积分等。同时，复变函数向应用领域的延伸也是独特的。

本章知识结构



习题全解

1. 求下列复数 z 的实部与虚部，共轭复数，模与辐角主值。

(1) $\dfrac{1}{3+2i}$；　　(2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$

(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$；　　(4) $i^8-4i^{21}+i$

解 (1) $\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3}{13}+\left(\dfrac{-2}{13}\right)i$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{13}$；$\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{2}{13}$；$\bar{z}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$

$|z|=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$；$\arg z=-\arctan\left(\dfrac{2}{3}\right)$

(2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=-i-\dfrac{3i-3}{2}=\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{-5}{2}\right)i$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{2}$；$\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{5}{2}$；$\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$；

$|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$；$\arg(z)=-\arctan\left(\dfrac{5}{3}\right)$

(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=\dfrac{(-4+3i)}{-2}(2-5i)=-\dfrac{7}{2}-13i$

$\mathrm{Re}(z)=-\dfrac{7}{2}$；$\mathrm{Im}(z)=-13$；$\bar{z}=-\dfrac{7}{2}+13i$；

$|z|=\dfrac{5}{2}\sqrt{29}$；$\arg z=\arctan\left(\dfrac{26}{7}\right)-\pi$

(4) $i^8-4i^{21}+i=1-4i+i=1-3i$

$\mathrm{Re}(z)=1$；$\mathrm{Im}(z)=-3$；$\bar{z}=1+3i$；$|z|=\sqrt{10}$；

$\arg z=-\arctan 3$

2. 当 x,y 等于什么实数时，等式 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立？

解 由 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 可得

$$(x+1)+i(y-3)=2+8i$$

因此 $\begin{cases}x+1=2\\ y-3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=11\end{cases}$ 时等式成立。

3. 证明虚单位 i 有这样的性质：$-i=i^{-1}=\bar{i}$

证明 $i^{-1}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i=\bar{i}$

因此 $-i=i^{-1}=\bar{i}$

4. 证明：

(1) $|z|^2=z\bar{z}$；　　(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$

(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；　　(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$，$z_2\neq 0$

(5) $\bar{\bar{z}}=z$

(6) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(\bar{z}+z)$，$\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$

证明 (1) 由 $z=x+yi$，得

$|z|^2=x^2+y^2$

$z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$ 等式成立。

(2) 设 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，则

左式 $=\overline{z_1\pm z_2}=\overline{(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)}$

$$= \overline{(x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i}$$
$$= (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i$$

右式 $= \bar z_1 \pm \bar z_2 = \overline{(x_1 + y_1 i)} \pm \overline{(x_2 + y_2 i)}$
$$= (x_1 - y_1 i) \pm (x_2 - y_2 i)$$
$$= (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i$$

等式成立。

(3) 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$，则

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i}$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i$$
$$\bar z_1 \bar z_2 = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i)$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

等式成立。

(4) 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$，则

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i}\right)} = \overline{\frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}}$$
$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$\frac{\bar z_1}{\bar z_2} = \frac{x_1 - y_1 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$$

等式成立。

(5) 设 $z = x + yi$，则 $\bar z = x - yi$ $\quad \bar{\bar z} = x + yi = z$

(6) 设 $z = x + yi$，则 $\bar z = x - yi$

$$\frac{1}{2}(\bar z + z) = \frac{1}{2}(x - yi + x + yi) = x = \mathrm{Re}(z)$$
$$\frac{1}{2i}(x + yi - x + yi) = y = \mathrm{Im}(z)$$

5. 对任何 z，$z^2 = |z|^2$ 是否成立？如果是，就给出证明，如果不是，对哪些 z 值才成立？

答 不成立，例如 $z = i, z^2 = i^2 = -1$，而 $|z|^2 = |i|^2 = 1, z^2 \neq |z|^2$。只有 z 为实数时，等式 $z^2 = |z|^2$ 才成立。

6. 当 $|z| \leqslant 1$ 时，求 $|z^n + a|$ 的最大值，其中 n 为正整数，a 为复数。

解 $|z^n + a| \leqslant |z^n| + |a| \leqslant 1 + |a|$ 故 $1 + |a|$ 为所求。

7. 判定下列命题的真假：

(1) 若 c 为实常数，则 $c = \bar c$； (2) 若 z 为纯虚数，则 $z \neq \bar z$

(3) $i < 2i$； (4) 零的辐角是零

(5) 仅存在一个数 z，使得 $\frac{1}{z} = -z$

(6) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$； (7) $\frac{1}{i}\bar z = \overline{iz}$

解 (1) 真命题。因为实数作为复数，其虚部为零，所以若 c 为实数，则必有 $\bar c = c$。

(2) 真命题。若 z 为纯虚数，不妨设 $z = iy, y \neq 0, \bar z = -iy$。由于 $y \neq 0$，所以 $iy \neq -iy$，即 $\bar z \neq z$。

(3) 假命题。因为实数集外的复数不能比较大小。

(4) 假命题。因为复数 0 的辐角可以是任意的。

(5) 假命题。若 $\frac{1}{z} = -z$，设 $z = x + iy$，则

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad -z = -x - iy$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + y^2} = -x \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

两个复数 $z_1 = i, z_2 = -i$，均满足 $\frac{1}{z} = -z$，不止一个。

(6) 假命题。举反例，令 $z_1 = i, z_2 = -i$，则 $|z_1 + z_2| = 0$，而 $|z_1| + |z_2| = 2$，此时 $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$。

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ 不恒成立。

(7) 真命题。证明：设 $z = x + iy$，则

$$\bar z = x - iy$$
$$\frac{1}{i} \cdot \bar z = -i\bar z = -i(x - yi) = -y - ix$$
$$\overline{iz} = \overline{i(x + iy)} = \overline{-y + ix} = -y - ix$$
$$\Rightarrow \frac{1}{i}\bar z = \overline{iz}。$$

8. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式：

(1) i；　　(2) -1

(3) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$；　　(4) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$

(5) $\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$；　　(6) $\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}$

解 (1) 因为 $r=|\mathrm{i}|=1$，$\arg(\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}$，所以

i 的三角形式为 $$\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$$

i 的指数形式为 $$\mathrm{i}=e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$$

(2) 由 $r=|-1|=1$，$\arg(-1)=\pi$，知

$$-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$$
$$-1=e^{\pi\mathrm{i}}$$

(3) 因为 $r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$\arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$，所以

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$$
$$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

(4) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{i}}$$

(5) $$\frac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)}$$

(6) $$\frac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\frac{(e^{\mathrm{i}5\varphi})^2}{(e^{-\mathrm{i}3\varphi})^3}=e^{\mathrm{i}19\varphi}=\cos19\varphi+\mathrm{i}\sin19\varphi$$

9. 将下列坐标变换公式写成复数的形式：

(1) 平移公式：$\begin{cases}x=x_1+a_1\\ y=y_1+b_1\end{cases}$

(2) 旋转公式：$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$

解 (1) 平移公式：$\begin{cases}x=x_1+a_1\\ y=y_1+b_1\end{cases}$

$$z=x+y\mathrm{i}=(x_1+a_1)+(y_1+b_1)\mathrm{i}$$
$$=(x_1+y_1\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})=z_1+A\ (\text{其中 } A=a_1+\mathrm{i}b_1)$$

(2) 旋转公式：$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$

设 $$z=x+y\mathrm{i},\quad z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$$

则 $$\begin{aligned}z&=(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+\mathrm{i}(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)\\&=\cos\alpha(x_1+\mathrm{i}y_1)+(-y_1+\mathrm{i}x_1)\sin\alpha\\&=(\cos\alpha)z_1+\mathrm{i}(\sin\alpha)z_1\\&=z_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\\&=z_1e^{\mathrm{i}\alpha}\end{aligned}$$

10. 一个复数乘以 $-\mathrm{i}$，它的模与辐角有何改变？

答 设复数为 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，则 $(-\mathrm{i})z=e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\cdot re^{\mathrm{i}\theta}=re^{\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$，因此，模不变，辐角减小 $\dfrac{\pi}{2}$。

11. 证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ 并说明其几何意义。

证明 $$\begin{aligned}\text{左}&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\&=(z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2)+(z_1-z_2)(\bar z_1-\bar z_2)\\&=|z_1|^2+z_1\bar z_2+z_2\bar z_1+|z_2|^2+|z_1|^2-z_1\bar z_2-\\&\quad z_2\bar z_1+|z_2|^2\\&=2(|z_1|^2+|z_2|^2)=\text{右}\end{aligned}$$

几何意义：平行四边形两条对角线的平方和等于平行四边形相邻两边平方和的两倍。

12. 证明下列问题：

(1) 任何有理分式函数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+\mathrm{i}Y$ 的形式，其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数；

(2) 如果 $R(z)$ 为(1)中的有理分式函数，但具有实系数，那么 $R(\bar z)=X-\mathrm{i}Y$；

(3) 如果复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程
$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$
的根，那么 $a-\mathrm{i}b$ 也是它的根。

证明 (1) 令 $z=r(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n$$
$$Q(z) = b_0z^m + b_1z^{m-1} + \cdots + b_m \quad (a_i, b_i \in \mathbf{R})$$

则
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)\overline{Q(z)}}{|Q(z)|^2}$$

而
$$P(z)\overline{Q(z)} = C_0z^n + C_1z^{n-1} + \cdots + C_n + C_{n+1}\bar{z} + \cdots + C_{n+m}\bar{z}^m$$
$$= C_0r^n(\cos nx + i\sin nx) + \cdots +$$
$$C_{n+m}r^m[\cos(-mx) + i\sin(-mx)]$$
$$= [C_0r^n\cos nx + \cdots + C_{n+m}\cos(-mx)] +$$
$$[C_0r^n\sin nx + \cdots + C_{n+m}r^m\sin(-mx)]i$$

令
$$X = \frac{1}{|Q(z)|^2}[C_0r^n\cos nx + \cdots + C_{n+m}r^m\cos(-mx)]$$
$$Y = \frac{1}{|Q(z)|^2}[C_0r^n\sin nx + \cdots + C_{n+m}r^m\sin(-mx)]$$

则
$$R(z) = X + Yi$$

(2) $R(\bar{z}) = \dfrac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})} = \dfrac{P(\bar{z})Q(z)}{|Q(z)|^2}$ 由上面所证，类似可得
$$\frac{P(\bar{z})Q(z)}{|Q(z)|^2} = X - Yi$$

(3) 令 $R(z) = a_0z^n + a_1z^{n+1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$

设当 $z = a + ib$ 时，$R(z) = 0 \Rightarrow \overline{R(z)} = \bar{0} = 0$

已知 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为实数，于是
$$R(\bar{z}) = a_0(\bar{z})^n + \cdots + a_{n-1}\bar{z} + a_n = 0$$

因此 $\bar{z} = a - ib$ 也是它的根。

13. 如果 $z = e^{it}$，证明：

(1) $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos nt$；　　(2) $z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin nt$

证明 由 $z = e^{it} \Rightarrow z = \cos t + i\sin t$

(1) $z^n + \dfrac{1}{z^n} = (\cos nt + i\sin nt) + \dfrac{1}{(\cos nt + i\sin nt)}$
$$= \cos nt + i\sin nt + \cos nt - i\sin nt = 2\cos nt$$

(2) $z^n - \dfrac{1}{z^n} = (\cos nt + i\sin nt) - \dfrac{1}{(\cos nt + i\sin nt)}$
$$= \cos nt + i\sin nt - \cos nt + i\sin nt = 2i\sin nt$$

14. 求下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3} - i)^5$；　(2) $(1 + i)^6$　(3) $\sqrt[6]{-1}$；　(4) $(1 - i)^{1/3}$

解 (1) $(\sqrt{3} - i)^5 = \left\{2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]\right\}^5$
$$= 32 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$
$$= -16\sqrt{3} - 16i$$

(2) $(1 + i)^6 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^6 = 8\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$
$$= -8i$$

(3) $\sqrt[6]{-1} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{6}}$

$w_k = \cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{6}$　　$k = 0,1,2,3,4,5$

$w_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$，　$w_1 = i$，　$w_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

$w_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$，　$w_4 = -i$，　$w_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

(4) $(1 - i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

$w_k = \sqrt[6]{2}\left[\cos\dfrac{-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right]$　　$k = 0,1,2$

$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{7}{12}\pi + i\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)$

$w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{15}{12}\pi + i\sin\dfrac{15}{12}\pi\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$

15. 若 $(1 + i)^n = (1 - i)^n$，试求 n 的值。

解 由 $(1 + i)^n = (1 - i)^n$，可得
$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{-n\pi}{4}\right)$$
$$\Rightarrow \sin\frac{n\pi}{4} = \sin\frac{-n\pi}{4} \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow n = 4k$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

16. (1) 求方程 $z^3+8=0$ 的所有根；

(2) 求微分方程 $y'''+8y=0$ 的一般解。

解 (1) 由 $z^3+8=0$，得

$$z=\sqrt[3]{-8}$$

又

$$-8=8e^{\pi i}$$

$$\Rightarrow z=\sqrt[3]{-8}=2e^{i\cdot\frac{\pi+2n\pi}{3}}\quad(n=0,1,2)$$

取 $n=0$，得 $z_0=2e^{\frac{\pi}{3}i}=1+\sqrt{3}\,i$，

取 $n=1$，得 $z_1=2e^{\pi i}=-2$，

取 $n=2$，得 $z_2=2e^{\frac{5}{3}\pi i}=1-\sqrt{3}\,i$，

方程 $z^3+8=0$ 的三个根分别为：$1+\sqrt{3}\,i,\ -2,\ 1-\sqrt{3}\,i$。

(2) 微分方程 $y'''+8y=0$ 的特征方程为

$$r^3+8=0$$

由(1)的结果可知方程 $r^3+8=0$ 有三个互异的根：

$$1+\sqrt{3}\,i,\quad -2,\quad 1-\sqrt{3}\,i$$

方程 $y'''+8y=0$ 有三个线性无关的特解：

$$y_1=e^{(1+\sqrt{3}\,i)x}=e^x\left(\cos\sqrt{3}\,x+i\sin\sqrt{3}\,x\right)$$

$$y_2=e^{-2x}$$

$$y_3=e^{(1-\sqrt{3}\,i)x}=e^x\left(\cos\sqrt{3}\,x-i\sin\sqrt{3}\,x\right)$$

于是原方程三个线性无关的实数特解为：$e^x\cos\sqrt{3}\,x,e^x\sin\sqrt{3}\,x,e^{-2x}$，从而原微分方程的一般解为

$$y=c_1e^{-2x}+e^x\left(c_2\cos\sqrt{3}\,x+c_3\sin\sqrt{3}\,x\right)$$

其中，c_1,c_2,c_3 为任意常数。

17. 在平面上任意选一点 z，然后在复平面上画出下列各点的位置：

$$-z,\bar{z},-\bar{z},\frac{1}{z},-\frac{1}{z}$$

解 设 $z=1+i$，则

$$-z=-1-i$$

$$\bar{z}=1-i,\ -\bar{z}=-1+i$$

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{1-i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$-\frac{1}{\bar{z}}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

结果如图 1-1 所示。

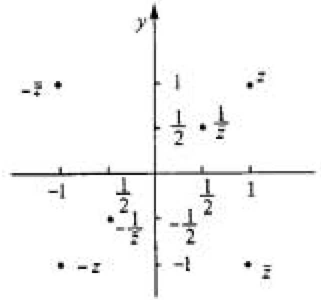


图 1-1

18. 已知两点 z_1 与 z_2（或已知三点 z_1,z_2,z_3），问下列各点 z 位于何处？

(1) $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$

(2) $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$（其中 λ 为实数）

(3) $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$

解 (1) $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$：位于 z_1 与 z_2 连线中点上；

(2) $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2\left(\lambda=\frac{|z-z_2|}{|z_1-z_2|}\right)$：位于 z_1,z_2 连线上；

(3) $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$：位于三角形 z_1,z_2,z_3 重心。

19. 设 z_1,z_2,z_3 三点适合条件：$z_1+z_2+z_3=0,|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$。证明：$z_1,z_2,z_3$ 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点。

证明 因为 $$z_1+z_2+z_3=0$$

所以 $$z_3=-(z_1+z_2)$$

$$\bar{z}_3=-(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$|z_3|^2=z_3\bar{z}_3=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)$$

因为 $$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$

所以 $$(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)=-1$$

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)$$

$$=1+1-(-1)=3$$

$$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$$

同理 $$|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=\sqrt{3}$$

所以 z_1,z_2,z_3 为正三角形。

20. 如果复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，证明 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$，并说明这些等式的几何意义。

证明 由 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

$$\left(\frac{(z_2-z_1)+(z_1-z_3)}{(z_3-z_1)+(z_2-z_3)}=\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\right)$$

$$|z_2-z_1|^2=|z_3-z_1||z_2-z_3| \quad (1)$$

$$|z_3-z_1|^2=|z_2-z_1||z_2-z_3| \quad (2)$$

$\dfrac{(1)}{(2)}$ 得 $$\frac{|z_2-z_1|^2}{|z_3-z_1|^2}=\frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}$$

故 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$，同理 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$ 这几个式子表明 z_1,z_2,z_3 构成一个正三角形。

21. 指出下列各题中点 z 的轨迹或所在范围，并作图：

(1) $|z-5|=6$； (2) $|z+2i|\geqslant 1$

(3) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$； (4) $\mathrm{Re}(i\bar{z})=3$

(5) $|z+i|=|z-i|$； (6) $|z+3|+|z+1|=4$

(7) $\mathrm{Im}(z)\leqslant 2$； (8) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$

(9) $0<\arg z<\pi$； (10) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$

解 (1) $|z-5|=6$ 以 5 为圆心，以 6 为半径的圆[作图略，下同]。

(2) $|z+2i|\geqslant 1$ 在复平面上以 $(0,-2)$ 为圆心，以 1 为半径的圆及圆外部区域

(3) $\mathrm{Re}(z+2)=-1$ 直线 $x=-3$

(4) $\mathrm{Re}(i\bar{z})=3$ 直线 $y=3$

(5) $|z+i|=|z-i|$ 实轴

(6) $|z+3|+|z+1|=4$ 以 $(-3,0)$，$(-1,0)$ 为焦点，以 4 为长轴的椭圆

(7) $\mathrm{Im}(z)\leqslant 2$ $y=2$ 直线及其下方区域

(8) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geqslant 1$ 直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 及其左方区域

(9) $0<\arg z<\pi$ 不包括实轴的上半平面

(10) $\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{4}$ 以 $(0,i)$ 为起始点的 $y-x=1$ 的射线 $(x>0)$

22. 描出下列不等式所确定的区域或闭区域，并指明它是有界的还是无界的，单连通的还是多连通的：

(1) $\mathrm{Im}(z)>0$； (2) $|z-1|>4$

(3) $0<\mathrm{Re}(z)<1$； (4) $2\leqslant|z|\leqslant 3$

(5) $|z-1|<|z+3|$； (6) $-1<\arg z<-1+\pi$

(7) $|z-1|<4|z+1|$； (8) $|z-2|+|z+2|\leqslant 6$

(9) $|z-2|-|z+2|>1$； (10) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leqslant 4$

解 本题的解法，是将条件转化为直角坐标。

(1) $\mathrm{Im}(z)>0$ 无界，单连通域。不包括实轴的上半平面。

(2) $|z-1|>4$ 无界，多连通。圆周 $(x-1)^2+y^2=16$ 的外部区域(不包括圆周)。

(3) $0<\mathrm{Re}(z)<1$ 无界，单连通。由直线 $x=0$ 及 $x=1$ 所构成的带形区域，不包括两直线在内。

(4) $2\leqslant|z|\leqslant 3$ 有界，多连通，闭。由 $x^2+y^2=4$ 与 $x^2+y^2=9$ 所围的圆环域。

(5) $|z-1|<|z+3|$ 无界，单连通。直线 $x=-1$ 右边的半平面区域，不包括直线在内。

(6) $-1<\arg z<-1+\pi$ 无界，单连通。由射线 $\theta=-1$ 及 $\theta=-1+\pi$ 构成的角形域，不包括两射线在内。

(7) $|z-1|<4|z+1|$ 无界，多连通。中心在 $z=-\dfrac{17}{15}$，半径为 $\dfrac{8}{15}$ 的圆周的外部区域(不包括圆周)。

(8) $|z-2|+|z+2|\leqslant 6$ 有界，单连通，闭。$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 及其围成区域。

(9) $|z-2|-|z+2|>1$ 无界，单连通。双曲线 $4x^2-\dfrac{4}{15}y^2=1$ 的左边分支的内部(含焦点 $z=-2$ 的那部分)区域。

(10) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leqslant 4$ 有界，单连通，闭。$(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 及其内部区域。

部分图形如图 1-2 所示。

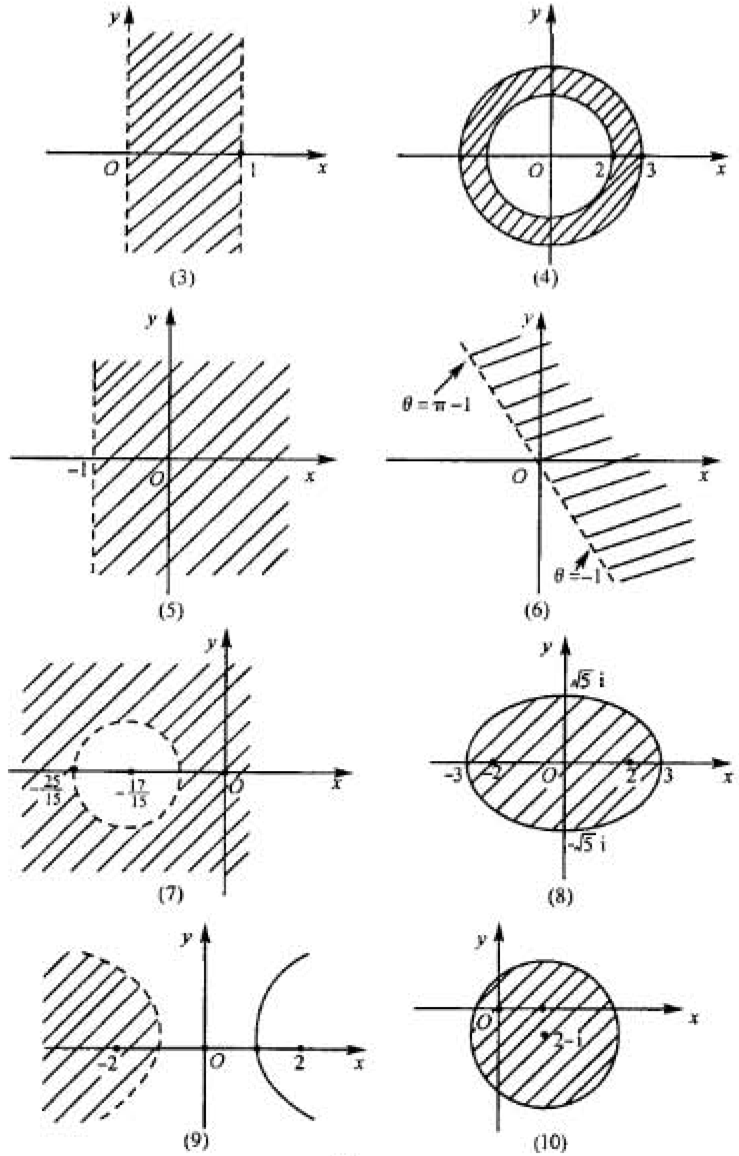


图 1-2

23. 证明复平面上的直线方程可写成：

$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c$，($\alpha\neq 0$ 为复常数，c 为实常数)。

证明 设 $\alpha=a+bi$，$z=x+yi$。

$$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=(a+bi)(x-yi)+(a-bi)(x+yi)$$
$$=ax-ayi+bxi+by+ax+ayi-bxi+by$$
$$=2(ax+by)=c \quad \text{（这是直线方程。）}$$

以上每步均可倒推，得证。

24. 证明复平面上的圆的方程可写成：

$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0$，(其中 α 为复常数，c 为实常数)。

证明 设 $z=x+yi$，$\alpha=a+bi$。

$$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0$$
$$x^2+y^2+(a+bi)(x-yi)+(a-bi)(x+yi)+c=0$$
$$x^2+y^2+ax-ayi+bxi+by+ax+ayi-bxi+by+c=0$$
$$x^2+y^2+2(ax+by)+c=0$$
$$(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2-c \quad \text{（这是圆的方程。）}$$

以上每步均可倒推，得证。

25. 将下列方程（t 为实参数）给出的曲线用一个实直角坐标方程表出：

(1) $z=t(1+i)$

(2) $z=a\cos t+ib\sin t$，(a,b 为实常数)

(3) $z=t+\dfrac{i}{t}$

(4) $z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$

(5) $z=a\,\mathrm{ch}\,t+ib\,\mathrm{sh}\,t$，($a,b$ 为实常数)

(6) $z=ae^{it}+be^{-it}$

(7) $z=e^{\alpha t}$ ($\alpha=a+bi$ 为复数)

解 (1) 设 $z=x+yi$，则

$$x+iy=t(1+i)\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}\Leftrightarrow x=y$$

(2) $z=a\cos t+ib\sin t$

设 $z=x+yi$，则

$$x+yi=a\cos t+ib\sin t\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(3) 设 $z=x+iy$，则

$$x+iy=t+\frac{i}{t}$$

$$\begin{cases}x=t\\y=\dfrac{1}{t}\end{cases}\Leftrightarrow xy=1\Rightarrow y=\frac{1}{x}$$

(4) 设 $z=x+iy$，则

$$x+iy=t^2+\frac{1}{t^2}i\Leftrightarrow\begin{cases}x=t^2\\y=\dfrac{1}{t^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow xy=1\quad(x>0,y>0)$$

(5) 设 $z=x+iy$，则

$$x+iy=a\operatorname{ch}t+ib\operatorname{sh}t$$

$$\begin{cases}x=a\operatorname{ch}t=\dfrac{a(e^t+e^{-t})}{2}\\y=b\operatorname{sh}t=\dfrac{b(e^t-e^{-t})}{2}\end{cases}$$

得
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(6) 设 $z=x+iy$，则

$$\begin{aligned}x+iy&=ae^{it}+be^{-it}\\&=a\cos t+ia\sin t+b\cos t-b\sin t\\&=(a+b)\cos t+i(a-b)\sin t\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=(a+b)\cos t\\y=(a-b)\sin t\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{(a+b)^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1$$

(7) 设 $z=x+iy$，则

$$\begin{aligned}x+iy&=e^{\alpha t}(\alpha=a+bi\text{ 为复数})\\&=e^{(a+bi)t}=e^{at}\cdot e^{bti}\\&=e^{at}\cdot(\cos bt+i\sin bt)\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x=\cos bt\cdot e^{at}\\y=\sin bt\cdot e^{at}\end{cases}$$

$$\frac{y}{x}=\tan bt\quad t=\left(\arctan\frac{y}{x}\right)/b$$

$$x^2+y^2=e^{2at}=e^{\frac{2a}{b}\cdot\arctan\frac{y}{x}}$$

26. 函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 把下列 z 平面上的曲线映射成 w 平面上怎样的曲线？

(1) $x^2+y^2=4$； (2) $y=x$

(3) $x=1$； (4) $(x-1)^2+y^2=1$

解 设 z 平面上为 $z=x+iy$，w 平面上点为

$$w=a+bi$$

由 $w=\dfrac{1}{z}\Rightarrow a+bi=\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{-y}{x^2+y^2}i$

由两复数相等的定义得

$$a=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad b=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

(1) 由 $x^2+y^2=4$，得

$$a^2+b^2=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

表示：以(0,0)为圆心，以 $\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆。

(2) 由 $y=x$，得

$$a=\frac{x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2x},b=\frac{-x}{x^2+x^2}=-\frac{1}{2x}\Rightarrow a=-b\Rightarrow b=-a$$

表示直线。

(3) 由 $x=1$，得

$$a=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+y^2},\quad b=\frac{-y}{1+y^2}\Rightarrow a^2+b^2=a\Rightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2=\frac{1}{4}$$

表示以 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 为圆心，以 $\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆。

(4) 由 $(x-1)^2+y^2=1$，得

$$x^2+y^2=2x\Rightarrow\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

表示一条直线。

27. 已知映射 $w = z^3$，求：

(1) 点 $z_1 = \mathrm{i}, z_2 = 1+\mathrm{i}, z_3 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$ 在 w 平面上的象；

(2) 区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的象。

解 (1) 设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则

$w = r^3(\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta)$

$z_1 = \mathrm{i} = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$

在 w 上的象为

$$\cos\frac{3}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi = -\mathrm{i}$$

同理，z_2 的象为 $-2+2\mathrm{i}$，z_3 的象为 $8\mathrm{i}$。

(2) 区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的象为

$$0 < \arg w < \pi = \frac{\pi}{3} \times 3$$

28. 证明 §6 定理二与定理三。

定理二 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，那么

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)] = A \pm B$；

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)] = AB$；

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}\quad (B \neq 0)$。

证明 (1) 因为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta_1 > 0$，使 $0 < |z - z_0| < \delta_1$ 时，有 $|f(z) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists\ \delta_2 > 0$，使 $0 < |z - z_0| < \delta_2$ 时，有 $|g(z) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，必有

$$|[f(z) + g(z)] - (A + B)|$$

$$\leqslant |f(z) - A| + |g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

成立，故 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z) + g(z)] = A + B$

同理可证 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z) - g(z)] = A - B$

(2) 因为 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，所以 $\exists\ \delta_1 > 0$ 及 $M > 0$，使 $0 < |z - z_0| < \delta_1$ 时，$|g(z)| < M$。

$\forall \varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，所以 $\exists\ \delta_2 > 0$，使 $0 < |z - z_0| < \delta_2$ 时，有

$|f(z) - A| < \dfrac{\varepsilon}{M + |A|}$；

又因为 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，所以存在 $\delta_3 > 0$，使 $0 < |z - z_0| < \delta_3$ 时，有

$|g(z) - B| < \dfrac{\varepsilon}{M + |A|}$；

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$，则当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，必有

$$|f(z)g(z) - AB| = |f(z)g(z) - Ag(z) + Ag(z) - AB|$$

$$\leqslant |f(z) - A|\,|g(z)| + |A|\,|g(z) - B|$$

$$< \frac{\varepsilon}{M + |A|}\cdot M + |A|\cdot\frac{\varepsilon}{M + |A|} = \varepsilon$$

故 $$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = AB$$

(3) 因为 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B\,(B \neq 0)$，所以 $\exists\ \delta_1 > 0$ 及 $M > 0$，使 $0 < |z - z_0| < \delta_1$ 时，$|g(z)| > \dfrac{|B|}{2}$

$\forall \varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$，所以 $\exists\ \delta_2 > 0$，使 $0 < |z - z_0| < \delta_2$ 时，有

$$|f(z) - A| < \frac{B^2\varepsilon}{2(|A| + |B|)}$$

$\exists\ \delta_3 > 0$，使 $0 < |z - z_0| < \delta_3$ 时，有

$$|g(z) - B| < \frac{B^2\varepsilon}{2(|A| + |B|)}$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$，则当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，必有

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|Bf(z) - Ag(z)|}{|g(z)|\cdot|B|}$$

$$\leqslant \frac{|B|\cdot|f(z) - A| + |A|\cdot|g(z) - B|}{|B|\cdot|g(z)|}$$

$$< \frac{|B| \cdot \dfrac{B^2\varepsilon}{2(|A|+|B|)} + |A| \cdot \dfrac{B^2\varepsilon}{2(|A|+|B|)}}{\dfrac{B^2}{2}} = \varepsilon$$

故
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$$

定理三 函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。

证明 因为 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$，即

$$\lim_{(x+iy)\to(x_0+iy_0)} [u(x,y) + iv(x,y)] = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)$$

而上式成立的充要条件是：

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} (x,y) = u(x_0,y_0) \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} (x,y) = v(x_0,y_0)$$

即 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。

29. 设函数 $f(z)$ 在 z_0 连续且 $f(z_0) \neq 0$，那么可找到 z_0 的小邻域，在这邻域内 $f(z) \neq 0$。

证明 由于 $f(z_0) \neq 0$，不妨设 $|f(z_0)| > 0$。因为 $f(z)$ 在点 z_0 连续，所以对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|f(z_0)| > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_0 = \frac{1}{2}|f(z_0)|$$

又
$$|f(z_0)| - |f(z)| < |f(z) - f(z_0)|$$

故
$$|f(z_0)| - |f(z)| < \frac{1}{2}|f(z_0)|$$

从而
$$|f(z)| > |f(z_0)| - \frac{1}{2}|f(z_0)| = \frac{1}{2}|f(z_0)| > 0$$

即存在 z_0 在 δ 邻域，在这个邻域内 $f(z) \neq 0$。

30. 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，证明 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内是有界的，即存在一个实常数 $M > 0$，使在 z_0 的某一去心邻域内有 $|f(z)| \leqslant M$。

证明 由 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，对 $\varepsilon = 1$，$\exists\ \delta > 0$，当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - A| < 1$，即 $A - 1 < f(z) < A + 1$

取 $M = |A| + 1$，则

$$|f(z)| \leqslant M$$

31. 设 $f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right)$，$(z \neq 0)$，试证：当 $z \to 0$ 时，$f(z)$ 的极限不存在。

证明 设 $z = x + yi$。

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{x+yi}{x-yi} - \frac{x-iy}{x+iy}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{x^2 + 2xyi - y^2 - x^2 + 2xyi + y^2}{x^2+y^2}\right)$$
$$= \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ 极限不存在（由《高等数学（下册）》知）

所以 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在。

32. 试证 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续。

证明 (1) $\arg z$ 在原点未定义，故不连续。

(2) 在负实轴上取一点 $P(x,0)(x < 0)$

当 z 在上半平面上时 $z \to P$，$\lim\limits_{y\to 0^+} (\arg z) = \pi$

当 z 在下半平面上时 $z \to P$，$\lim\limits_{y\to 0^-} (\arg z) = -\pi$

所以 $\arg(z)$ 在 $P(x,0)(x < 0)$ 处不连续

由点 $x < 0$ 的任意性知，$\arg z$ 在原点与负实轴上不连续。

第二章　解析函数

任何节约归根到底是时间的节约。

——马克思

导　学

解析函数是复变函数研究的主要对象，在理论和实践中有着广泛的应用。本章首先引入复变函数导数概念和求导法则，在此基础上定义了解析函数的概念，并着重介绍了判断函数可导和解析的判别方法；其次，把我们熟知的初等函数推广到复数域上来，并研究其解析性；最后以平面流速场和静电场的复势为例，说明解析函数在研究平面场问题中的应用。

学习本章的主要手段是"推导"。本章习题中证明题所占的比例高居全书各章之首。对初等函数的有效把握，需建立在熟练推导之上。比如，三角函数、双曲函数及其反函数，是一个"关系网"，自己拿笔推导数遍后，"自然"就掌握了。

柯西 - 黎曼方程：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，是全书最重要的公式之一。第三章还会回头研究本公式。

本章知识结构

- 解析函数
  - 概　念
    - 导数与微分
    - 解析函数的定义
  - 充要条件
    - 柯西 - 黎曼方程（C-R 方程）
  - 初等函数
    - 1. 指数
    - 2. 对数
    - 3. 乘幂 a^b 与幂函数
    - 4. 三角与双曲
    - 5. 反三角与反双曲
  - 平面场的复势
    - 平面向量场
    - 平面流速场的复势
    - 静电场的复势

习题全解

1. 利用导数定义推出：

（1）$(z^n)'=nz^{n-1}$（n 为正整数）；　　（2）$\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$

证明　（1）令 $f(z)=z^n$　　$f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$

用数学归纳法证：$(z^n)'=nz^{n-1}$

当 $n=1$ 时

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)-z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta z}=1=1\cdot z^{1-1}$$

即 $(z^1)' = 1 \times z^{1-1}$ 成立

设当 $n = k$ 时，有 $\quad (z^k)' = kz^{k-1}$

则 $n = k + 1$ 时

$$(z^n)' = (z^{k+1})' = (z \cdot z^k)' = z' \cdot z^k + z(z^k)'$$
$$= 1 \cdot z^k + z \cdot k \cdot z^{k-1} = z^k(k+1) = nz^{n-1}$$

由数学归纳法原理知：

$$(z^n) = nz^{n-1} \quad (n\text{ 为正整数})$$

(2) $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$

证明　令 $f(z) = \dfrac{1}{z}$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1}{z+\Delta z} - \dfrac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{-\Delta z}{z^2 + \Delta z \cdot z}}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{z^2 + \Delta z \cdot z} = -\frac{1}{z^2}$$

2. 下列函数何处可导？何处解析？

(1) $f(z) = x^2 - iy$；　(2) $f(z) = 2x^3 + 3y^3 i$

(3) $f(z) = xy^2 + ix^2 y$；　(4) $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$

要点　在某点可导：验证是否满足 C-R 方程即可。在 z_0 解析：$f(z)$ 在点 z_0 及含 z_0 的某邻域内处处可导。

解　(1) $f(z) = x^2 - iy$

令 $u = x^2, v = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

满足
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

即
$$2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

所以 $f(z)$ 在直线 $x = -\dfrac{1}{2}$ 上可导，而在复平面上处处不解析。

(2) $f(z) = 2x^3 + i3y^3$

$$u = 2x^3, v = 3y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 9y^2$$

若
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

有
$$6x^2 = 9y^2$$

即
$$\sqrt{2}\,x = \pm\sqrt{3}\,y$$

即只在 $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}\,y = 0$ 上可导，但在复平面上处处不解析。

(3) $f(z) = xy^2 + ix^2 y$

$$u = xy^2, v = x^2 y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2$$

满足
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $y^2 = x^2$，$2xy = -2xy \Rightarrow y = \pm x, x = 0$ 或 $y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$

即只在 $z = 0$ 处可导，在复平面上处处不解析。

(4) $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$

$u = \sin x \operatorname{ch} y$，　$v = \cos x \operatorname{sh} y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

故 $f(z)$ 在复平面上处处可导，处处解析。

3. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域，并求出其导数：

(1) $(z-1)^5$；　(2) $z^3 + 2iz$

(3) $\dfrac{1}{z^2 - 1}$；　(4) $\dfrac{az+b}{cz+d}$（c, d 中至少有一个不为 0）

解　(1) $f(z) = (z-1)^5$

$f'(z) = 5(z-1)^4$，$f(z)$ 在复平面内处处解析。

(2) $f(z) = z^3 + 2iz$

$f'(z) = 3z^2 + 2i$，$f(z)$ 在复平面内处处解析。

(3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$

$$f'(z) = \frac{-2z}{(z^2-1)^2}, \quad z^2 - 1 = 0, z = \pm 1$$

除 $z = \pm 1$ 点外，$f(z)$ 在复平面上处处解析。

(4) $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$(c,d 中至少有一个不为 0)

$$f'(z)=\frac{a(cz+d)-(az+b)\cdot c}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

若 $c=0$，则处处解析，若 $c\neq 0$，$cz+d=0$，$z=-\dfrac{d}{c}$

故除 $z=-\dfrac{d}{c}$ 点外，$f(z)$ 在复平面上处处解析。

4. 求下列函数的奇点：

(1) $\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$；　　(2) $\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$

解 (1) 由 $z(z^2+1)=0$ 得 $z=0, z=\pm\mathrm{i}$

奇点：$0, \pm\mathrm{i}$

(2) 由 $(z+1)^2(z^2+1)=0$，得 $z=\pm\mathrm{i}, z=-1$

奇点：$\pm\mathrm{i}, -1$

5. 复变函数的可导性与解析性有什么不同？判断函数的解析性有哪些方法？

解　复变函数的可导性反映了函数在某一点的局部性质，而解析性则反映了函数在一个区域内的整体性质。函数可以在某个区域内仅有一点处可导，在这个区域内的其他点均不可导，此时在这一点处不解析；而如果说函数在某一点处解析，则这个函数必定在这一点的某邻域内处处解析。因此，函数在一点处解析与在区域内可导才是等价的。

判断函数的解析性有两种常用方法。(一)是用定义，利用可导性判断解析性；(二)是用定理：函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在其定义域 D 内解析 $\Leftrightarrow u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内任一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微，且满足柯西-黎曼方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

6. 判断下列命题的真假。若真，请给以证明；若假，请举例说明。

(1) 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，那么 $f'(z_0)$ 存在；

命题为假。

例如，$f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在复平面内任一点连续，但不满足 C-R 方程，故 $f'(z)$ 不存在。

(2) 如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 解析；

命题为假。

例如，$f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 可导，但不解析。

(3) 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导；

命题为假。

例如，见上例，不解析的点叫奇点，但可能有导数。

(4) 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点；

命题为假。

例如，$f(z)=\dfrac{1}{z-1}, g(z)=\dfrac{-1}{z-1}$

$z_0=1$ 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一奇点，但不是 $f(z)+g(z)=0$ 和 $f(z)/g(z)=-1$ 的奇点。

(5) 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导(指偏导数存在)，那么 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 亦可导；

命题为假。

例如，令 $u(x,y)=x^2, v(x,y)=xy$，则 $u(x,y), v(x,y)$ 均可导，但 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=x$，于是 $f(z)$ 不可导。

(6) 设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内是解析的，如果 u 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；如果 v 是实常数，那么 $f(z)$ 在 D 内也是常数。

命题为真。

证明　已知 $f(z)$ 在 D 内解析 $\forall z\in D$，有

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

且满足 C-R 方程：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

又 $u=$ 常数 $\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \dfrac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \dfrac{\partial v}{\partial y}=0\Rightarrow v=$ 常数

故 $f(z)=u+\mathrm{i}v=$ 常数。

7. 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，证明：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$$

证明　由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 得

$$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$$

又由于 $f(z)$ 是解析函数

有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

所以 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2$

$$=\left[\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}\right]^2+\left[\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}\right]^2\left(将\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}代入\right)$$

$$=\frac{(u^2+v^2)\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]}{u^2+v^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

又由 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 可得

$$|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$左=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=右$$

得证。

8. 设 $my^3+nx^2y+\mathrm{i}(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l,m,n 的值。

解 设 $u=my^3+nx^2y,\quad v=x^3+lxy^2$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nyx\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2lxy$$

由 C-R 方程
$$\begin{cases}2nyx=2lxy\\3x^2+ly^2=-(3my^2+nx^2)\end{cases}$$

所以 $n=l=-3,m=1$

9. 证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证明 由 $x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta$

得
$$r^2=x^2+y^2\quad \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

再由复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{y}{r^2},\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left(-\frac{y}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{y}{r^2}$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{y}{r^2}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

即
$$x\frac{\partial u}{\partial r}-y\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\tag{1}$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}=-\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{y}{r^2}$$

即
$$y\frac{\partial u}{\partial r}+x\cdot\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\tag{2}$$

仅将 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ 及 $\dfrac{\partial v}{\partial r}$ 看做线性方程组中的 x_1,x_2，其余看做系数 a_{11},a_{12} 等，

联立求解(1)(2)，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

10. 证明：如果函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数。

(1) $f(z)$ 恒取实值；

(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析；

(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数；

(4) $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数；

(5) $au+bv=c$，其中 a,b 与 c 为不全为零的实常数

证明 (1) $f(z)$ 恒取实值。

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\equiv \text{实值}$$

则 $$v(x,y)\equiv 0\ \text{且}\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$f(z)$ 解析，则 $f(z)$ 满足 $C\text{-}R$ 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0\Rightarrow u=\text{常数}\quad f(z)\equiv C$$

(2) $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析

由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内解析，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\tag{1}$$

又 $\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$ 在 D 内解析得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\tag{2}$$

由(1)(2)，得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

所以 $$u\equiv C_1,v\equiv C_2$$

所以 $$f(z)=C_1+\mathrm{i}C_2\equiv C$$

(3) $|f(z)|$ 在 D 内为一常数。

证法 1 若 $|f(z)|\equiv C=0$，则 $f(z)=0$，$f(z)$ 是常数。

若 $|f(z)|\equiv C\neq 0$，则 $f(z)\neq 0$

于是 $$f(z)\cdot\overline{f(z)}=C^2$$

即 $$\overline{f(z)}=\frac{C^2}{f(z)}$$

也解析

于是由(2)，知 $$f(z)\equiv C$$

证法 2 由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$，得

$$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}=C\neq 0$$

上式两边分别对 x,y 求偏导

$$\begin{cases}\dfrac{2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{2\sqrt{u^2+v^2}}=0\\[2ex]\dfrac{2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{2\sqrt{u^2+v^2}}=0\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2ex]u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

题设 $f(z)$ 在 D 内解析，则满足 $C\text{-}R$ 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & (1)\\[2ex]v\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & (2)\end{cases}$$

仅将 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 看成线性方程组中的 x_1,x_2，其余看成 a_{11},a_{12} 等系数

系数矩阵：$\begin{vmatrix}u & v\\ v & -u\end{vmatrix}=-(u^2+v^2)=-C^2\neq 0$

由克拉默法则有 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

再由 $C\text{-}R$ 方程有 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0\Rightarrow u\equiv C_1,v\equiv C_2\Rightarrow f(z)\equiv C_1+\mathrm{i}C_2$$

(4) $\arg f(z)$ 在 D 内为一常数

证明 设 $\arg f(z)=\theta\equiv C$，则

$$\frac{v}{u}=\tan\theta=\tan C=C'\Rightarrow v=u\cdot C'$$

上式分别对 x 及 y 求偏导，再用 C-R 方程

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=C'\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-C'\frac{\partial u}{\partial x}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-C'\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ C'\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

系数矩阵
$$\begin{vmatrix}1 & -C'\\ C' & 1\end{vmatrix}=1+C'^2\neq 0$$

由克拉默法则知
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

再由 C-R 方程得
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

于是
$$u\equiv C_1,\ v\equiv C_2$$

即
$$f(z)=C_1+\mathrm{i}C_2$$

(5) $au+bv=c$，其中 a,b 与 c 为不全为零的实常数

证明 若 $a\neq 0$，由 $au+bv=c$，得

$$u=\frac{c-bv}{a}$$

有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}$$

由 C-R 方程
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

于是
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{\partial v}{\partial y}$$

即
$$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2+1\right]\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow u\equiv C_1,\ v\equiv C_2$$

$$\Rightarrow f(z)=C_1+\mathrm{i}C_2$$

11. 下列关系是否正确？

(1) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$； (2) $\overline{\cos z}=\cos\bar z$

(3) $\overline{\sin z}=\sin\bar z$

解 (1) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$ 正确。因为

$$\overline{e^z}=\overline{e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}=e^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)$$
$$=e^x[\cos(-y)+\mathrm{i}\sin(-y)]=e^xe^{-\mathrm{i}y}=e^{x-\mathrm{i}y}=e^{\bar z}$$

(2) $\overline{\cos z}=\cos\bar z$ 正确。因为

$$\cos z=\cos(x+\mathrm{i}y)=\cos x\cdot\mathrm{ch}y-\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}y$$
$$\overline{\cos z}=\cos x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}y$$

而
$$\cos\bar z=\cos(\overline{x+\mathrm{i}y})=\cos(x-\mathrm{i}y)=\cos x\,\mathrm{sh}y+\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}y$$

所以
$$\overline{\cos z}=\cos\bar z$$

(3) $\overline{\sin z}=\sin\bar z$ 正确。因为

$$\overline{\sin z}=\overline{\sin(x+\mathrm{i}y)}=\overline{\sin x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}y}$$
$$=\sin x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}y$$
$$\sin\bar z=\sin(\overline{x+\mathrm{i}y})=\sin(x-\mathrm{i}y)$$
$$=\sin x\,\mathrm{ch}(-y)+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}(-y)$$
$$=\sin x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}y$$

所以
$$\overline{\sin z}=\sin\bar z$$

12. 找出下列方程的全部解：

(1) $\sin z=0$； (2) $\cos z=0$

(3) $1+e^z=0$； (4) $\sin z+\cos z=0$

解 (1) 由 $\sin z=0$，得

$$e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}=0$$

即
$$e^{2\mathrm{i}z}=1$$

故 $z=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

(2) 由 $\cos z=0$ 得 $e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}=0$，即 $e^{2\mathrm{i}z}=-1$，故

$$z=\frac{\pi}{2}+n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(3) 由 $1+e^z=0$ 得 $e^z=-1$，故

$$z=(2n+1)\pi\mathrm{i}\qquad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(4) 由 $\sin z+\cos z=0$，得

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z})+\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z})=0$$

即
$$e^{2\mathrm{i}z}=-\mathrm{i}$$

故 $z = n\pi - \dfrac{\pi}{4}$ $\quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

13. 证明：

(1) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$；

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$；

(2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$；

(3) $\sin 2z = 2\sin z \cos z$；

(4) $\tan 2z = \dfrac{2\tan z}{1 - \tan^2 z}$；

(5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \cos z, \cos(z + \pi) = -\cos z$；

(6) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y, |\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$

证明 (1) $\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

$$= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$$

所以 $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

同理 $\qquad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(2) 左边 $= \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = 1 =$ 右边

(3) 在(1)$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ 中，令 $z_1 = z_2 = z$ 可得 (3)。

(4) 右边 $= \dfrac{2\sin z / \cos z}{1 - \sin^2 z / \cos^2 z} = \dfrac{2\sin z \cdot \cos z}{\cos^2 z - \sin^2 z}$

$$= \frac{2\left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \cdot \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)}{\left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i}}{\dfrac{e^{i2z} + e^{-2iz}}{2}} = \frac{\sin 2z}{\cos 2z} = \tan 2z = \text{左边}$$

(5) 左边 $= \sin\dfrac{\pi}{2}\cos(-z) + \cos\dfrac{\pi}{2}\sin(-z) = \cos z =$ 右边

(6) $|\cos z|^2 = |\cos x \,\mathrm{ch} y - i \sin x \,\mathrm{sh} y|^2$

$$= (\cos x \,\mathrm{ch} y)^2 + (\sin x \,\mathrm{sh} y)^2$$

$$= \cos^2 x \,\mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x \,\mathrm{sh}^2 y$$

$$= \cos^2 x (1 + \mathrm{sh}^2 y) + (1 - \cos^2 x)\mathrm{sh}^2 y$$

$$= \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y$$

同理 $\qquad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$

14. 说明：

(1) 当 $y \to \infty$ 时，$|\sin(x + iy)|$ 和 $|\cos(x + iy)|$ 趋于无穷大；

(2) 当 t 为复数时，$|\sin t| \leqslant 1$ 和 $|\cos t| \leqslant 1$ 不成立

解 (1) $\cos(x + iy) = \cos x \,\mathrm{ch} y - i \sin x \,\mathrm{sh} y$

$$|\cos(x + iy)| = \sqrt{\cos^2 x \,\mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x \,\mathrm{sh}^2 y}$$

$$= \sqrt{(1 - \sin^2 x)(1 + \mathrm{sh}^2 y) + \sin^2 x \,\mathrm{sh}^2 y}$$

$$= \sqrt{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y} \geqslant |\mathrm{sh} y|$$

$\mathrm{sh} y$ 为奇函数，只须证：$y > 0$ 时，$\mathrm{sh} y > y$，则有 $|\mathrm{sh} y| > |y|$，从而得

$$|\cos(x + iy)| > |y|$$

即得 $\qquad y \to \infty$ 时，$|\cos(x + iy)| \to \infty$

下证：$y > 0$ 时，$\mathrm{sh} y > y$，而这是个高等数学问题。

令 $f(y) = \mathrm{sh} y - y, f'(y) = \mathrm{ch} y - 1 > 0$

所以 $\qquad f(y) \uparrow$（当 $y > 0$ 时）

而 $\qquad f(0) = \mathrm{sh} 0 - 0 = 0$

所以 $\qquad f(y) > f(0) = 0$

即 $\qquad \mathrm{sh} y > y$ （当 $y > 0$ 时）

关于 $|\sin(x + iy)|$ 为无穷大（当 $y \to \infty$），也可类似证明。

(2) 当 t 为复数时，$|\sin t| \leqslant 1$ 和 $|\cos t| \leqslant 1$ 不成立，以 $\cos z$ 为例

$$\cos z|_{z=i} = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1.5471$$

所以 $\qquad |\cos z|_{z=i}| > 1$

15. 求 $\mathrm{Ln}(-i)$，$\mathrm{Ln}(-3 + 4i)$ 和它们的主值。

解 $\qquad \mathrm{Ln}(-i) = \ln|-i| + i\mathrm{Arg}(-i) + i(2k\pi)$

证明 (1)$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=\left(\dfrac{e^{-z}+e^{z}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2$

$$=\frac{e^{-2z}+e^{2z}+2}{4}-\frac{e^{-2z}+e^{2z}-2}{4}=1$$

(2) $\mathrm{sh}^2z+\mathrm{ch}^2z=\left(\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2$

$$=\frac{e^{2z}+e^{-2z}-2}{4}+\frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4}$$

$$=\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}=\mathrm{ch}2z$$

(3) $\mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2$

$$=\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}+\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}$$

$$=\frac{2e^{z_1}e^{z_2}-2e^{-(z_1+z_2)}}{4}=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{2}=\mathrm{sh}(z_1+z_2)$$

$\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2$

$$=\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}+\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\cdot\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}$$

$$=\frac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{2}=\mathrm{ch}(z_1+z_2)$$

21. 解下列方程：

(1) $\mathrm{sh}z=0$； (2) $\mathrm{ch}z=0$； (3) $\mathrm{sh}z=\mathrm{i}$

解 (1)$\mathrm{sh}z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\sin\mathrm{i}z=-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z$，$\mathrm{sh}z=0$ 即

$$\sin\mathrm{i}z=0$$

由 $\sin\mathrm{i}z=\sin[\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)]=\sin(-y+\mathrm{i}x)$

$$=\sin(-y)\mathrm{ch}x+\mathrm{i}\cos y\mathrm{sh}x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin(-y)\mathrm{ch}x=0 & (1)\\ \cos y\mathrm{sh}x=0 & (2)\end{cases}$$

在式(1)中，$\mathrm{ch}x\neq0\Rightarrow\sin y=0\Rightarrow y=k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$ 代入式(2)$\cos(k\pi)\mathrm{sh}x=0$，$(\pm1)\mathrm{sh}x=0$

$\Rightarrow\mathrm{sh}x=0\Rightarrow x=0$

$\Rightarrow z=x+\mathrm{i}y=0+\mathrm{i}k\pi=k\pi\mathrm{i}\quad k=0,\pm1,\cdots$

(2) $\mathrm{ch}z=\cos(\mathrm{i}z)=0$

$\Rightarrow\cos(\mathrm{i}z)=\cos[\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)]=\cos(-y+\mathrm{i}x)$

$$=\cos(-y)\mathrm{ch}x-\mathrm{i}\sin(-y)\mathrm{sh}x$$

$$=\cos y\mathrm{ch}x+\mathrm{i}\sin y\mathrm{sh}x=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{ch}x\cos y=0 & (1)\\ \sin y\mathrm{sh}x=0 & (2)\end{cases}$$

$\mathrm{ch}x\neq0$，由式(1)$\Rightarrow\cos y=0$

$$\Rightarrow y=k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\cdots$$

代入式(2)，得 $\sin\left(k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{sh}x=0$

$\Rightarrow(\pm1)\mathrm{sh}x=0\Rightarrow\mathrm{sh}x=0\Rightarrow x=0$

$\Rightarrow z=x+\mathrm{i}y=0+\mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$=\mathrm{i}\dfrac{\pi+2k\pi}{2}=\dfrac{2k+1}{2}\pi\mathrm{i}\qquad(k=0,\pm1,\cdots)$

(3) 由(1)的推导过程知

$\mathrm{sh}z=-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z=(-\mathrm{i})(-\sin y\mathrm{ch}x+\mathrm{i}\cos y\mathrm{sh}x)=\mathrm{i}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin y\mathrm{ch}x=1 & (1)\\ \cos y\mathrm{sh}x=0 & (2)\end{cases}$$

由式(2)，若 $\mathrm{sh}x=0$，得

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=0\Rightarrow x=0$$

将 $x=0$ 代入式(1)得

$$1\cdot\sin y=1\Rightarrow y=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

若 $\cos y=0$，得 $y=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，代入式(1)，得

$$\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{ch}x=1$$

$$\Rightarrow\mathrm{ch}x=\pm1$$

又 $\mathrm{ch}x>0$ 恒成立，舍去 $\mathrm{ch}x=-1$

$\Rightarrow\mathrm{ch}x=1\quad\Rightarrow x=0,y=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z=x+\mathrm{i}y=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

22. 证明：(2.3.19) 与 (2.3.20)。

证明 $\mathrm{ch}iy = \dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} = \dfrac{\cos y + i\sin y + \cos y - i\sin y}{2} = \cos y$

$$\mathrm{sh}iy = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2} = \frac{\cos y + i\sin y - \cos y + i\sin y}{2} = i\sin y$$

$\mathrm{ch}iy = \cos y, \mathrm{sh}iy = i\sin y$ (2.3.19) 得证

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x+iy) &= \cos i(x+iy) = \cos(-y+ix)\\ &= \cos(-y)\cos ix - \sin(-y)\sin ix\\ &= \cos y\,\mathrm{ch}x + \sin y\,\mathrm{sh}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(x+iy) &= i\sin[(x+iy)(-i)] = i\sin(y-ix)\\ &= i\sin y\cos ix - i\cos y\sin ix\\ &= \mathrm{sh}x\cos y + i\,\mathrm{ch}x\sin y\end{aligned}$$

(2.3.20) 得证。

23. 证明：$\mathrm{sh}z$ 的反函数 $\mathrm{Arsh}z = \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$。

证明 设 $z = \mathrm{sh}w$，则

$$w = \mathrm{Arsh}z$$

又 $z = \mathrm{sh}w = \dfrac{1}{2}(e^w - e^{-w})$，于是

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$$

$$e^w = z + \sqrt{z^2+1}$$

$$w = \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$$

即
$$\mathrm{Arsh}z = \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$$

*24. 已知平面流速场的复势 $f(z)$ 为

(1) $(z+i)^2$； (2) z^3； (3) $\dfrac{1}{z^2+1}$

求流动的速度以及流线和等势线的方程。

解 (1) $f(z) = (z+i)^2 = (x+yi+i)^2$

$$= x^2 - (y+1)^2 + 2x(y+1)i$$

$f'(z) = 2(z+i)$ $v = \overline{f'(z)} = 2(\bar z - i) = 2x - 2(y+1)i$

流函数 $\Psi(x,y) = 2x(y+1)$

流线方程 $x(y+1) = c_1$ 即 $y = \dfrac{c_1}{x} - 1$

势函数 $\varphi(x,y) = x^2 - (y+1)^2$

等势线方程 $x^2 - (y+1)^2 = c_2$

速度方程为 $v(z) = 2(\bar z - i)$

(2) $f(z) = z^3 = (x+yi)^3 = (x^2-y^2+2xyi)(x+yi)$

$$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$f'(z) = 3z^2 = 3(x^2-y^2+2xyi)$$

$$v = \overline{f'(z)} = 3\bar z^2 = 3(x^2-y^2-2xyi)$$

流函数 $\Psi(x,y) = 3x^2y - y^3$

流线方程 $(3x^2-y^2)y = c_1$

势函数 $\varphi(x,y) = x(x^2-3y^2)$

等势线方程 $x(x^2-3y^2) = c_2$

速度方程为 $v(z) = 3\bar z^2$

(3) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

$$f'(z) = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}$$

$$v = \overline{f'(z)} = \frac{2x^3+2xy^2+2x+(2x^2y+2y^3-2y)i}{(x^2+y^2+1)^2+4x^2y^2}$$

流函数 $\Psi(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$

流线方程 $(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2 = c_1xy$

势函数 $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}$

等势线方程 $\dfrac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2} = c_2$

速度方程为 $v(z) = -\dfrac{2\bar z}{(\bar z^2+1)^2}$

第三章　复变函数的积分

> 古往今来人们开始探索，都应起源于对自然万物的惊异。
>
> ——亚里士多德

导　学

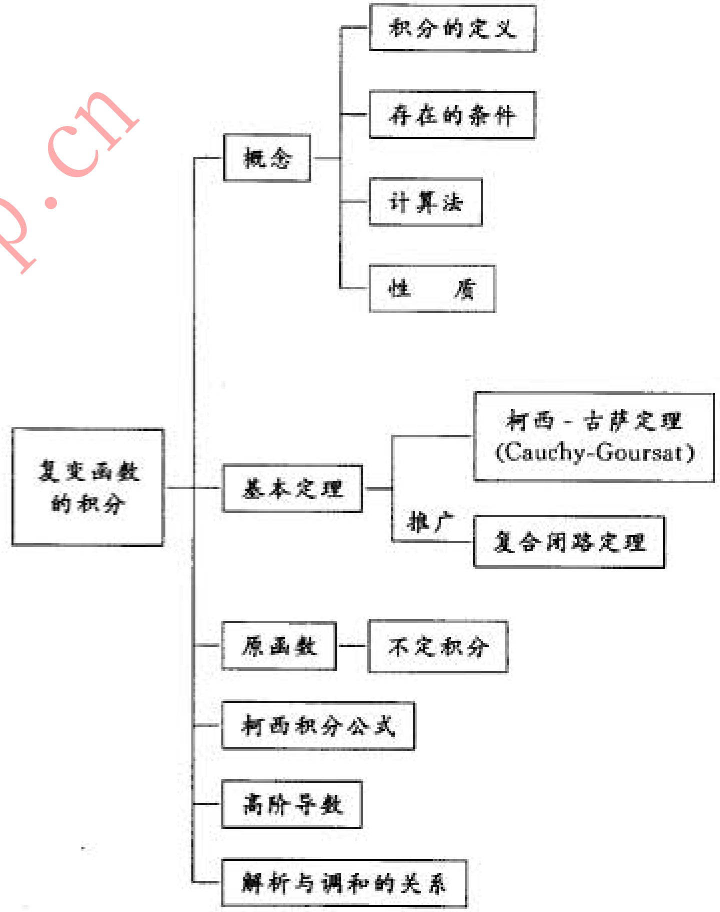
学习本章，核心是掌握复积分的计算。后面第四章用级数求积分，第五章用留数计算积分，均是这一问题的发展。在本章习题中，编排了相当比例的复积分计算题。您随意抽取一份复变函数的考试试卷，其中定会有一定分数的考题来测试复积分计算的能力。

本章介绍的复积分计算，一分为三：其一，与《高等数学》中曲线积分的计算公式类似，将曲线的参数方程代入，化为定积分计算；其二，求不定积分，再用牛顿-莱布尼兹公式计算；其三，用公式：$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ ($n = 0,1,2,\cdots$) 计算。$n = 0$，即柯西积分公式；$n = 1,2,\cdots$ 即高阶导数公式。

另外，已知解析函数的实部或虚部，求解析函数的方法有三种：① 偏积分法；② 不定积分法；③ 线积分法。可在演算题目的过程中，对比掌握。

柯西 - 古萨基本定理有极高的理论价值。

本章知识结构



习题全解

1. 沿下列路线计算积分 $\int_0^{3+i} z^2 dz$（图 3-1）

(1) 自原点至 $3+i$ 的直线段；

(2) 自原点沿实轴至 3，再由 3 铅直向上至 $3+i$；

(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向向右至 $3+i$。

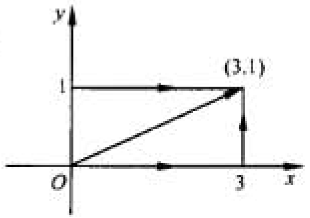


图 3-1

解(1) $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$z = 3t + it \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$dz = (3+i)dt$

$$\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 (3t+it)^2(3+i)dt = (3+i)^3 \int_0^1 t^2 dt$$

$$= (3+i)^3 \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(3+i)^3 = 6 + \frac{26}{3}i$$

(2) $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{(0,0)}^{(3,0)} z^2 dz + \int_{(3,0)}^{(3,1)} z^2 dz = \int_{c_1} z^2 dz + \int_{c_2} z^2 dz$

c_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \quad z^2 = 9t^2, dz = 3dt$

c_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \quad z^2 = (3+it)^2, dz = idt$

代入原式 $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 9t^2 \cdot 3dt + \int_0^1 (3+it)^2 \cdot idt = 6 + \frac{26}{3}i$

(3) $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{(0,0)}^{(0,1)} z^2 dz + \int_{(0,1)}^{(3,1)} z^2 dz = \int_{c_1} z^2 dz + \int_{c_2} z^2 dz$

c_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

c_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

代入原式 $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 -t^2 \cdot idt + \int_0^1 (3t+i)^2 \cdot 3dt = 6 + \frac{26}{3}i$

2. 分别沿 $y = x$ 与 $y = x^2$ 算出积分 $\int_0^{1+i}(x^2 + iy)dz$ 的值。

解 (1) $y = x$（图 3-2）

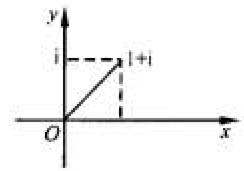


图 3-2

参数方程 $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$z = t + it = t(1+i) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

$dz = (1+i)dt$

$$\int_0^{1+i}(x^2 + iy)dz = \int_0^1 (t^2 + it)(1+i)dt$$

$$= (1+i)\left[\int_0^1 (t^2 + it)dt\right] = (1+i)\left[\frac{1}{3}t^3 + i\frac{1}{2}t^2\right]\Big|_0^1$$

$$= (1+i)\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

(2) $y = x^2$（图 3-3）

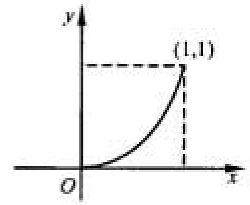


图 3-3

参数方程 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$z = t + it^2 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

$dz = (1 + i2t)dt$

$$\int_0^{1+i}(x^2 + iy)dz$$

$$= \int_0^1 (t^2 + it^2)(1 + i2t)dt$$

$$= (1+i)\int_0^1 t^2(1+i2t)dt = (1+i)\int_0^1 (t^2 + i2t^3)dt$$

$$= (1+i)\left(\frac{1}{3}t^3 + i\frac{1}{2}t^4\right)\Big|_0^1 = (1+i)\left(\frac{1}{3} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}i$$

3. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，C 为 B 内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = 0, \quad \oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = 0$$

是否成立？如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

解 不成立。

反例：如图 3-4，设 $f(z) = z$，$f(z)$ 在复平面上处处解析。

$C: |z| = 1$

$$z = re^{i\theta} = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = x + iy$$

即
$$\mathrm{Re}[f(z)] = x = \cos\theta$$
$$\mathrm{Im}[f(z)] = y = \sin\theta$$
$$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$$

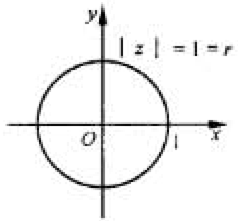


图 3-4

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi}\cos\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}(-\sin\theta\cos\theta + i\cos^2\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin 2\theta + i\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d(2\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-\cos 2\theta) + \frac{1}{2}i\sin 2\theta + \frac{i}{2}2\theta\right]\Big|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{i}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{i}{2}2\pi = i\pi \neq 0$$

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = \int_0^{2\pi}\sin\theta(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{i}{2}\sin 2\theta - \sin^2\theta\right)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{i}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right]d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{i}{2}(-\cos 2\theta) - \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}2\theta\right]\Big|_0^{2\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = -\pi \neq 0$$

但
$$\oint_{|z|=1} z\,dz = \oint_{|z|=1}\mathrm{Re}[f(z)]dz + i\oint_{|z|=1}\mathrm{Im}[f(z)]dz$$
$$= i\pi + (-i\pi) = 0$$

4. 利用在单位圆上 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 的性质，及柯西积分公式说明 $\oint_C \bar{z}dz = 2\pi i$，其中 C 为正向单位圆周 $|z| = 1$。

解 柯西积分公式的变形 $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$ 而此题中 $f(z) = 1$，$f(z)$ 在 C 内解析，且 C 内含 $z = 0$ 点。于是

$$\oint_C \bar{z}dz = \oint_{|z|=1}\frac{1}{z-0}dz = 1 \cdot 2\pi i = 2\pi i$$

5. 计算积分 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周：

(1) $|z| = 2$；　　(2) $|z| = 4$

解 因为 $|z| = 2$

所以 $z = 2e^{i\theta}$，$dz = 2ie^{i\theta}d\theta$，$\bar{z} = 2e^{-i\theta}$，$\theta: 0 \to 2\pi$

所以 $$\oint_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{|z|}dz = \int_0^{2\pi}\frac{2e^{-i\theta}}{2}2ie^{i\theta}d\theta = 2i\int_0^{2\pi}d\theta = 2i \cdot 2\pi = 4\pi i$$

(2) $|z| = 4$

$$\oint_{|z|=4}\frac{\bar{z}}{|z|}dz = \oint_{|z|=4}\frac{\frac{16}{z}}{4}dz = \oint_{|z|=4}\frac{4}{z}dz = 4 \times 2\pi i = 8\pi i$$

6. 试用观察法得出下列积分的值，并说明观察时所依据的是什么？C 是正向的圆周 $|z| = 1$。

(1) $\oint_C \frac{dz}{z-2}$；　　(2) $\oint_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 4}$

(3) $\oint_C \frac{dz}{\cos z}$；　　(4) $\oint_C \frac{dz}{z - \frac{1}{2}}$

(5) $\oint_C ze^z dz$；　　(6) $\oint_C \frac{dz}{\left(z - \frac{i}{2}\right)(z+2)}$

解 (1) 因奇点 $z = 2$ 在 $|z| = 1$ 之外，利用柯西－古萨定理即得

$$\oint_C \frac{dz}{z-2} = 0$$

(2) 奇点 $z + 1 = 3i$，$z = -1 + 3i$；$z + 1 = -3i$，$z = -1 - 3i$，均在 $|z| = 1$ 之外；

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 4} = \oint_C \frac{dz}{(z+1)^2 + 3} = 0$$

(3) 奇点 $\cos z = 0$，$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 均在 $|z| = 1$ 之外；

$$\oint_C \frac{dz}{\cos z} = 0$$

(4) 因奇点 $z_0 = \frac{1}{2} \in \{z \mid |z| \leqslant 1\}$，$f(z) = 1$ 在 $|z| = 1$ 内解析，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,用柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{dz}{z-\frac{1}{2}} = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$$

(5) $f(z)=ze^z$ 在 $|z|=1$ 内处处解析,由柯西-古萨定理即得

$$\oint_C ze^z dz = 0$$

(6) $$\oint_C \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2)} = \frac{2}{4+i}\left[\oint_C \frac{1}{z-\frac{i}{2}}dz - \oint_C \frac{dz}{z+2}\right]$$

由于 $\frac{i}{2}$ 在 $C:|z|=1$ 内,从而

$$\oint_C \frac{dz}{z-\frac{i}{2}} = 2\pi i$$

而 -2 不在 $C:|z|=1$ 内,从而

$$\oint_C \frac{dz}{z+2} = 0$$

因此 $$\oint_C \frac{dz}{\left(2-\frac{i}{2}\right)(z+2)} = \frac{2}{4+i}\cdot 2\pi i = \frac{4\pi i}{4+i}$$

7. 沿指定曲线的正向计算下列各积分:

(1) $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz, C: |z-2|=1$

(2) $\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2},\quad C: |z-a|=a$

(3) $\oint_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}, C: |z-2i|=\frac{3}{2}$

(4) $\oint_C \frac{zdz}{z-3}, C: |z|=2$

(5) $\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}, C: |z|=r<1$

(6) $\oint_C z^3\cos z dz$,C 为包围 $z=0$ 的闭曲线

(7) $\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}, C: |z|=\frac{3}{2}$

(8) $\oint_C \frac{\sin z dz}{z}, C: |z|=1$

(9) $\oint_C \frac{\sin z dz}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}, C: |z|=2$

(10) $\oint_C \frac{e^z dz}{z^5}, C: |z|=1$

解 (1) $f(z)=e^z$ 在 C 内解析,由柯西积分公式

原式 $= 2\pi i\cdot e^z\Big|_{z=2} = 2\pi e^2 i$

(2) $\frac{1}{z^2-a^2} = \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a} = \frac{f(z)}{z-a}$,由柯西积分公式有

原式 $= \oint_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz = 2\pi i \times \frac{1}{z+a}\Big|_{z=a} = \frac{\pi i}{a}$

(3) $z=\pm i$ 是奇点,但是 C 内只有一个奇点 $z=i$,如图 3-5;C_1 是包围 $z=i$ 的正向圆周。

$$C_1: |z-i|=r$$

所以由复合闭路定理

原式 $= \oint_{C_1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i}dz \xlongequal{\text{柯西积分公式}} 2\pi i\frac{e^{ii}}{i+i} = \frac{\pi}{e}$

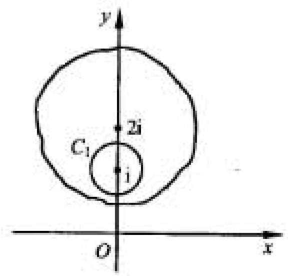


图 3-5

(4) 用柯西-古萨定理。

奇点 $z=3$ 在 $C: |z|=2$ 之外,$f(z)=\frac{z}{z-3}$ 在 $|z|=2$ 内解析。

原式 $=0$

(5) 用柯西-古萨定理。

因为 $z=\pm 1, z=1, z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

均在 $C:|z|=r<1$ 之外，$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z^2+1)}$ 在 $|z|<r<1$ 内解析。

原式 $=0$

(6) 用柯西-古萨定理，$f(z)=z^3\cos z$ 在 C 内解析。

原式 $=0$

(7) 由复合闭路定理，及柯西积分公式

$$原式=\oint_{|z-i|=r}\frac{\frac{dz}{(z^2+4)(z+i)}}{z-i}+\oint_{|z+i|=r}\frac{\frac{dz}{(z^2+4)(z-i)}}{(z+i)}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{2i(4-1)}+\frac{1}{-2i(4-1)}\right]=0$$

($z=\pm 2i$ 在 C 之外)

(8) 原式 $=2\pi i\cdot\sin z|_{z=0}=0$(柯西积分公式)

(9) 令 $f(z)=\sin z$，$f(z)$ 在 $|z|=z$ 内解析，由解析函数求导公式：

原式 $=2\pi i(\sin z)'|_{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi i\cos\frac{\pi}{2}=0$

(10) $f(z)=e^z$ 在 $|z|=1$ 内解析，用解析函数的求导公式：

原式 $=\frac{2\pi i}{4!}(e^z)^{(4)}\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{12}$

8. 计算下列各题：

(1) $\int_{-\pi i}^{3\pi i}e^{2z}dz$；　(2) $\int_{\frac{\pi}{6}i}^{0}\operatorname{ch}3z\,dz$；

(3) $\int_{-\pi i}^{\pi i}\sin^2 z\,dz$；　(4) $\int_0^1 z\sin z\,dz$；

(5) $\int_0^i(z-1)e^{-z}dz$；　(6) $\int_1^i\frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz$(沿 1 到 i 的直线段)

解 (1) 原式 $=\frac{1}{2}\int_{-\pi i}^{3\pi i}e^{2z}d(2z)=\frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{-\pi i}^{3\pi i}=\frac{1}{2}[e^{6\pi i}-e^{-2\pi i}]=0$

(2) 原式 $=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}i}^{0}\operatorname{ch}(3z)d(3z)=\frac{1}{3}\operatorname{sh}3z\Big|_{\frac{\pi}{6}i}^{0}=\frac{1}{3}\left[\operatorname{sh}0-\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}i\right]$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}i=-\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}-e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2}=-\frac{1}{3}i$$

(3) 原式 $=\int_{-\pi i}^{\pi i}\frac{1-\cos 2z}{2}dz=\frac{1}{2}\left[z-\frac{1}{2}\sin 2z\right]\Big|_{-\pi i}^{\pi i}=\pi i-\frac{1}{2}\sin 2\pi i$

$$=\pi i-\frac{i}{2}\operatorname{sh}2\pi=\left(\pi-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\pi\right)i$$

(4) 原式 $=\int_0^1 z\sin z\,dz=-\int_0^1 z\,d(\cos z)$

$$=-\left[z\cos z|_0^1-\int_0^1\cos z\,dz\right]$$

$$=-[z\cos z-\sin z]|_0^1$$

$$=-(\cos 1-\sin 1)=\sin 1-\cos 1$$

(5) 原式 $=\int_0^i(z-1)e^{-z}dz=-\int_0^i(z-1)d(e^{-z})$

$$=-\left[(z-1)e^{-z}\Big|_0^i-\int_0^i e^{-z}dz\right]$$

$$=-\left[(z-1)e^{-z}\Big|_0^i+\int_0^i e^{-z}d(-z)\right]$$

$$=-[(z-1)e^{-z}+e^{-z}]|_0^i$$

$$=-\{[(i-1)e^{-i}+e^{-i}]-(-1+1)\}$$

$$=-ie^{-i}=-i[\cos(-1)+i\sin(-1)]$$

$$=-\sin 1-i\cos 1$$

(6) 原式 $=\int_1^i(1+\tan z)\sec^2 z\,dz=\int_1^i(1+\tan z)d\tan z$

$$=\left[\tan z+\frac{1}{2}(\tan z)^2\right]\Big|_1^i$$

$$=\left[\tan i+\frac{1}{2}(\tan i)^2\right]-\left[\tan 1+\frac{1}{2}\tan^2 1\right]$$

$$=-\left(\tan 1+\frac{1}{2}\tan^2 1+\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 1\right)+i\operatorname{th}1$$

9. 计算下列积分：

(1) $\oint_C\left(\frac{4}{z+1}+\frac{3}{z+2i}\right)dz$，其中 $C:|z|=4$ 为正向；

(2) $\oint_C\frac{2i}{z^2+1}dz$，其中 $C:|z-1|=6$ 为正向；

(3) $\oint_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z}{z^3}dz$，其中 $C_1:|z|=2$ 为正向，$C_2:|z|=3$ 为负向；

(4) $\oint_C\frac{dz}{z-i}$，其中 C 为以 $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{6}{5}i$ 为顶点的正向菱形；

(5) $\oint_C \frac{e^z}{(z-\alpha)^3}dz$，其中 α 为 $|\alpha| \neq 1$ 的任何复数，$C: |z| = 1$ 为正向。

解 (1) 由图 3-6，设 C_1, C_2 是 C 内两个互不包含不相交的正向圆周，而各包围 $z = -1$ 与 $z = -2i$ 由复合闭路定理及柯西积分公式，得

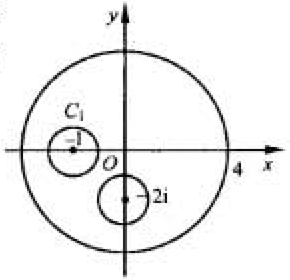


图 3-6

$$\text{原式} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$
$$= \oint_{C_1}\left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right)dz + \oint_{C_2}\left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}\right)dz$$
$$= 2\pi i \cdot 4 + 0 + 0 + 2\pi i \cdot 3 = 14\pi i$$

(2) 如图 3-7，$z = \pm i$ 为奇点，C_1, C_2 为包含 i，$-i$ 的圆周且它们是互不相交正向圆周，都位于 C：$|z-1| = 6$ 内部，C：圆心 $(1,0)$，半径：6

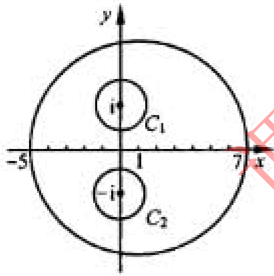


图 3-7

$$\text{原式} = \oint_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz$$
$$= \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2}\right)\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz$$
$$= 2\pi i - 0 + 0 - 2\pi i = 0$$

(3) 原式 $= \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = \oint_{C_1} - \oint_{C_2^-}$

$\left(\begin{aligned}&z = 0 \text{ 为奇点}, f(z) = \cos z, f'(z) = -\sin z\\ &f''(z) = -\cos z \text{ 由解析函数求导公式}\end{aligned}\right)$

$$= \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0} - \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0} = 0$$

(4) 取 C_1 为 C 内只含 $z = i$ 的正向小圆周，则

$$\text{原式} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

(5)① 当 $|\alpha| > 1$，$z = \alpha$ 在 C 之外，由柯西 - 古萨定理，原式 $= 0$

② 当 $|\alpha| < 1$，由解析函数求导公式 $f(z) = e^z$

$$\text{原式} = \frac{2\pi i}{2!}(e^z)''\Big|_{z=\alpha} = \pi i e^\alpha$$

10. 证明：当 C 为任何不通过原点的简单闭曲线时，$\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 0$。

证明 (1) 若 $z = 0$ 在 C 之外，由柯西 - 古萨定理有 $\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 0$

(2) 若 $z = 0$ 在 C 之内（图 3-8），作 C_1：中心在原点，半径足够小的正向圆周。则由复合闭路定理有

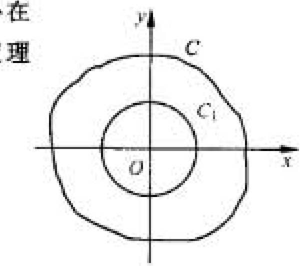


图 3-8

$$\oint_C \frac{1}{z^2}dz = \oint_{C_1}\frac{1}{z^2}dz = 0$$

$\left(\text{因为} \oint_{C_1}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases}2\pi i & n = 0\\ 0 & n \neq 0\end{cases}\right)$

11. 下列两个积分的值是否相等？积分(2)的值能否利用闭路变形定理从(1)的值得到？为什么？

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{z}dz$；　(2) $\oint_{|z|=4}\frac{\bar{z}}{z}dz$

解 (1) $z = 2e^{i\theta}$　$\bar{z} = 2e^{-i\theta}$　$dz = 2ie^{i\theta}d\theta$　$\theta: 0 \to 2\pi$

$$\text{原式} = \oint_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{z}dz = \int_0^{2\pi}\frac{2e^{-i\theta}}{2e^{i\theta}} \cdot 2ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi}2ie^{-i\theta}d\theta = -2e^{-i\theta}\Big|_0^{2\pi}$$
$$= -2(1-1) = 0$$

(2) $\oint_{|z|=4}\frac{\bar{z}}{z}dz = \int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\theta}}{4e^{i\theta}} \cdot 4ie^{i\theta}d\theta = 0$

(1) 与 (2) 的积分值相等，但由于 $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ 在复平面上处处不解析，所以(2)的值不能利用闭路变形定理从(1)得到。

12. 如图 3-9，设区域 D 为右半平面，z 为 D 内圆周 $|z| = 1$ 上的任意一点，用在 D 内的任意一条曲线 C 连结原点与 z，证明 $\text{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\right] = \frac{\pi}{4}$。[提示：可取从原点沿实轴到 1，再从 1 沿圆周 $|z| = 1$ 到 z 的曲线作为 C。]

解 $C: \overline{OA} + \widehat{AB}$　$0 \to z$

$\overline{OA}: \zeta = x, x: 0 \to 1$　$d\zeta = dx$

$\widehat{AB}: \zeta = e^{i\theta}, \quad \theta: 0 \to \theta, \quad d\zeta = ie^{i\theta}d\theta$

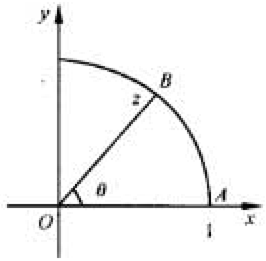


图 3-9

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_{\overline{OA}} + \int_{\widehat{AB}} \\
&= \int_{\overline{OA}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} + \int_{\widehat{AB}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}} \\
&= \arctan x \Big|_0^1 + \int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i(2\theta)}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i(2\theta)}}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\left[\int_C f(z)dz\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}\right] = \frac{\pi}{4} + \mathrm{Re}\left[\int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}\right]$$

只须证：
$$\mathrm{Re}\left[\int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}\right] = 0$$

$$\int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}} = i\int_0^\theta \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}d\theta$$

$$\xrightarrow[\text{并整理}]{\text{分母实数化}} i\int_0^\theta \frac{(\cos\theta + \cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) + i(-\cos\theta\sin 2\theta + \sin\theta + \sin\theta(\cos 2\theta))}{(1+\cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2}d\theta$$

实部分子：$-\cos\theta\sin 2\theta + \sin\theta + \sin\theta\cos 2\theta$

$$\begin{aligned}
&= -\cos\theta\sin 2\theta + \sin\theta(1+\cos 2\theta) \\
&= -\cos\theta\sin 2\theta + \sin\theta \cdot 2\cos^2\theta \\
&= -\cos\theta\sin 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta = 0
\end{aligned}$$

所以
$$\mathrm{Re}\left[\int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{i2\theta}}\right] = 0$$

得证。

13. 设 C_1 与 C_2 为相交于 M, N 两点的简单闭曲线，它们所围的区域分别为 B_1 与 B_2。B_1 与 B_2 的公共部分为 B，如果 $f(z)$ 在 $B_1 - B$ 与 $B_2 - B$ 内解析，在 C_1, C_2 上也解析，证明：

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$

证明 如图 3-10，已知 $f(z)$ 在 $B_1 - B, B_2 - B$ 内解析，且在 C_1, C_2 上解析，$C_1 = L_1 + L'_1, C_2 = L_2 + L'_2$ 于是 $f(z)$ 在 L_1, L'_1, L_2, L'_2 上解析。

因此 $f(z)$ 在 $B_1 - B$ 上及边界 $L_1 + L'_2$ 上解析，在 $B_2 - B$ 上及边界 $L_2 + L'_1$ 上解析。

由柯西－古萨定理有

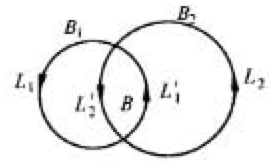


图 3-10

$$\oint_{L_1+L'^-_2} f(z)dz = 0 \qquad \oint_{L_2+L'^-_1} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{L_1+L'^-_2} = \oint_{L_2+L'^-_1}$$

$$\int_{L_1} + \int_{L'^-_2} = \int_{L_2} + \int_{L'^-_1}$$

即
$$\int_{L_1} - \int_{L'^-_1} = \int_{L_2} - \int_{L'^-_2}$$

$$\int_{L_1} + \int_{L'_1} = \int_{L_2} + \int_{L'_2}$$

即
$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

14. 设 C 为不经过 α 与 $-\alpha$ 的正向简单闭曲线，α 为不等于零的任何复数，试就 α 与 $-\alpha$ 跟 C 的各种不同位置，计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}dz$ 的值。

解 $z^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow z = \alpha, -\alpha$ 为奇点，奇点与 C 的各种不同位置可分为四种情况讨论。

(1)C 包括 α，而不包括 $-\alpha$

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}dz = \oint_C \frac{\frac{z}{z+\alpha}}{z-\alpha}dz = 2\pi i\frac{\alpha}{\alpha+\alpha} = \pi i$$

(2)C 包括 $-\alpha$，而不包括 α

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}dz = \oint_C \frac{\frac{z}{z-\alpha}}{z+\alpha}dz = 2\pi i\frac{-\alpha}{-\alpha-\alpha} = \pi i$$

(3)C 包括 $\alpha, -\alpha$

设 C_1, C_2 为两个互不相交且互不包含的正向小圆周且各自包含自己的奇点 $\alpha, -\alpha$。

$$\oint_C \frac{z}{z^2-\alpha^2}dz = \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2}\right)\frac{z}{z^2-\alpha^2}dz = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

(4)C 不包括 a，又不包括 $-a$，则由柯西-古萨定理知

$$\oint_C \frac{z\mathrm{d}z}{z^2-a^2}=0$$

15. 设 C_1 与 C_2 为两条互不包含，也不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2\mathrm{d}z}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin z\mathrm{d}z}{z-z_0}\right]=\begin{cases} z_0^2, & 当 z_0 在 C_1 内时\\ \sin z_0, & 当 z_0 在 C_2 内时\end{cases}$$

证明 (1) 当 z_0 在 C_1 内时

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2}{z-z_0}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\sin z}{z-z_0}\right]\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\left[2\pi i\cdot z^2\Big|_{z=z_0}+0\right]=z_0^2$$

(2) 当 z_0 在 C_2 内时

$$原式=\frac{1}{2\pi i}\left[0+2\pi i\cdot\sin z\Big|_{z=z_0}\right]=\sin z_0$$

综合(1)(2)得证。

16. 设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C:|z|=r,0<r<1$ 的积分等于零，问 $f(z)$ 是否必需在 $z=0$ 处解析？试举例说明之。

解 不一定。

如：$\oint_C \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z=0, f(z)=\frac{1}{z^2}$ 在 $z=0$ 不解析，但 $\oint_C\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z=0$

17. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于 D。如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立，试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立。

证明 由于 $f(z),g(z)$ 在 D 内处处解析，故在 C 内及 C 上解析。设 z_0 为 C 内任一点，则

$$\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i f(z_0)$$

$$\oint_C\frac{g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi i g(z_0)$$

已知在 C 上，$f(z)=g(z)$，于是 $\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$

$\Rightarrow 2\pi i f(z_0)=2\pi i g(z_0)\Rightarrow f(z_0)=g(z_0)$

由 z_0 的任意性，在 C 内的所有点有 $f(z)=g(z)$

18. 设区域 D 是圆环域，$f(z)$ 在 D 内解析，以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1 与 K_2，K_2 包含 K_1，z_0 为 K_1,K_2 之间任一点，试证(3.5.1)仍成立，但 C 要换成 K_1+K_2(见图 3-11)。

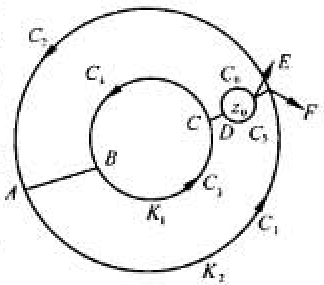


图 3-11

证明 如图 3-11，在 K_1 和 K_2 组成的圆环内，做包含 z_0 的一个圆周，然后作连线 AB，CD，EF，这样，此图形被分成若干段弧 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6

从而就得 $AFEDCBA$ 和 $ABCDEFA$ 形成两条全在 D 内的简单闭曲线，从而知

$$\oint_{AFEDCBA}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{ABCDEFA}f(z)\mathrm{d}z=0$$

将上面两式相加，由于各个连线分别走两次且方向相反，因而积分值相抵消

$$\oint_{C_1+C_5^-+C_3^-}f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_4^-+C_6^-+C_2}f(z)\mathrm{d}z=0$$

$$\oint_{C_1+C_2}+\oint_{C_3^-+C_4^-}+\oint_{C_5^-+C_6^-}=0$$

$$\oint_{K_1}f(z)\mathrm{d}z-\oint_{K_2}f(z)\mathrm{d}z-\oint_{C}f(z)\mathrm{d}z=0$$

从而 $$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_{K_1}f(z)\mathrm{d}z-\oint_{K_2}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{K_1+K_2}f(z)\mathrm{d}z$$

用 $\frac{f(z)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{2\pi i}$ 替换 $f(z)$ 等式也成立。因而

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1+K_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

又 $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

综上有 $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1+K_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

19. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，且不为零。C 为 B 内任何一条简单闭曲线，问积分

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

是否等于零?为什么?

解 已知 $f(z)$ 在 B 内处处解析，

由有关定理知，$f(z)$ 有各阶导数，且仍为解析函数。

$f'(z)$ 在 B 内处处解析，$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 B 内处处解析

由柯西-古萨定理，$\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$

20. 试说明柯西-古萨基本定理中的 C 为什么可以不是简单闭曲线?

解 若 C 不是简单闭曲线，如打结有交点

即 $C = C_1^- + C_2$，其中 C_1^-，C_2 如图 3-12

$f(z)$ 在 B 内解析，C 在 B 内

$\Rightarrow f(z)$ 在 C_1，C_2 上及内均解析

两次使用柯西-古萨定理

$$\oint_{C_1^-} f(z)dz = 0,\quad \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

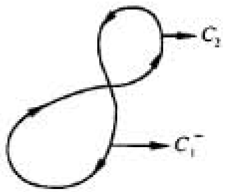


图 3-12

于是 $$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1^-} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

21. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在 D 内但不在 C 上的任意一点 z_0，等式

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

成立。

证明 因为 $f(z)$ 在 D 内解析，所以 $f'(z)$ 在 D 内解析

因为 C 为 D 内任一正向简单曲线，任取 $z_0 \in D$，且 z_0 在 C 内

由柯西积分公式：

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz$$

由有关定理知：

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$$

22. 如果 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 都具有二阶连续偏导数，且适合拉普拉斯方程，而 $s = \varphi_y - \psi_x$，$t = \varphi_x + \psi_y$，那么 $s + it$ 是 $x + iy$ 的解析函数。

证明 因为 $s = \varphi_y - \psi_x$，$t = \varphi_x + \psi_y$

所以 $$\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi_{yx} - \psi_{xx},\ \frac{\partial s}{\partial y} = \varphi_{yy} - \psi_{xy}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi_{xx} + \psi_{yx},\ \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi_{xy} + \psi_{yy}$$

因为 φ，ψ 都具有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程

所以有 $$\varphi_{yx} = \varphi_{xy},\ \psi_{xy} = \psi_{yx}$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,\ \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$$

所以 $$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y},\ \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial t}{\partial x}$$

即 $s + it$ 满足 C-R 方程。

所以 $s + it$ 是 $x + iy$ 的解析函数。

23. 设 u 为区域 D 内的调和函数及 $f = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$，问 f 是不是 D 内的解析函数?为什么?

解 设 $f = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = U + iV$，则

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u_{xx},\ \frac{\partial U}{\partial y} = u_{xy}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -u_{yx},\ \frac{\partial V}{\partial y} = -u_{yy}$$

u 是调和函数，于是 $u_{xx} + u_{yy} = 0$

从而 $$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

故 f 是 D 内的解析函数。

24. 函数 $v = x + y$ 是 $u = x + y$ 的共轭调和函数吗?为什么?

解 不是。

由 $u = x + y$

$$\Rightarrow u_x = 1, u_{xx} = 0, u_y = 1, u_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

同理 $$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

故 u,v 为调和函数。

但 $$f(z) = (x + y) + \mathrm{i}(x + y) = u + \mathrm{i}v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

不同时满足 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $f(z)$ 不解析。故 u,v 不是共轭调和函数。

25. 设 u 和 v 都是调和函数，如果 v 是 u 的共轭调和函数，那么 u 也是 v 的共轭调和函数。这句话对吗？为什么？

解 这句话不对。

u,v 都是调和函数，则 $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$

因为 v 是 u 的共轭调和函数，所以 $u_x = v_y, u_y = -v_x$

但若 u 也是 v 的共轭调和函数，则

$$v_x = u_y, v_y = -u_x$$

于是 $$\begin{cases} u_x = u_y = 0 \\ v_x = v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = c_1 \\ v = c_2 \end{cases}$$

即当 u,v 为常数时，互为共轭，除此情况命题则不成立。

26. 证明：一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数。

证明 设 u,v 是一对共轭调和函数，则

$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$， 且 $u_x = v_y, u_y = -v_x$

由 $(uv)_x = u_x v + u v_x$ 得

$(uv)_{xx} = u_{xx}v + u_x v_x + u_x v_x + u v_{xx} = u_{xx}v + 2u_x v_x + u v_{xx}$

同理 $$(uv)_{yy} = u_{yy}v + 2u_y v_y + u v_{yy}$$

故 $$\begin{aligned}&(uv)_{xx} + (uv)_{yy} \\ &= u_{xx}v + 2u_x v_x + u v_{xx} + u_{yy}v + 2u_y v_y + u v_{yy} \\ &= v(u_{xx} + u_{yy}) + 2(u_x v_x + u_y v_y) + u(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= 0\end{aligned}$$

即 $$(uv)_{xx} + (uv)_{yy} = 0$$

故 (uv) 仍为调和函数。

27. 如果 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是一解析函数，试证：

(1) $\mathrm{i}\overline{f(z)}$ 也是解析函数；

(2) $-u$ 是 v 的共轭调和函数；

(3) $\dfrac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 |f(z)|^2}{\partial y^2} = 4(u_x^2 + v_x^2) = 4|f'(z)|^2$

证明 (1) 因为

$$\mathrm{i}\overline{f(z)} = \mathrm{i}\,\overline{(u + \mathrm{i}v)} = \mathrm{i}(u - \mathrm{i}v) = v + \mathrm{i}u = v - \mathrm{i}u$$

因为 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 解析，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以 $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-u)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(-u)}{\partial x}$$

所以 $\mathrm{i}\overline{f(z)}$ 也是解析函数。

(2) 因为 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是解析函数，所以 u,v 均为调和函数，所以 $-u$，v 也是调和函数

为证 $-u$ 是 v 的共轭调和函数，只须证：

$$f(z) = v - \mathrm{i}u$$

是解析函数。

由 (1) 可知 $f(z) = v - \mathrm{i}u = \mathrm{i}\overline{f(z)}$ 解析，所以 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

(3) 设 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 则 $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$

因为 $f(z)$ 在 D 内解析，所以 $f(z)$ 在 D 内任意阶导数存在。

于是 $$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 = 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

同理 $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

因为 $f(z)$ 在 D 内解析，所以 u,v 均为调和函数，即

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

且满足柯西－黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2$

$$=2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$=4\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

因为 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x \quad |f'(z)|^2=u_x^2+v_x^2$

所以 $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

28. 证明：$u=x^2-y^2$ 和 $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但是 $u+\mathrm{i}v$ 不是解析函数。

证明 $$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

因为 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

所以 u 是 z 平面上的调和函数，v 是 z 平面上除去 $z\neq 0$ 的调和函数。

但 $$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y},\quad f(z)=u+\mathrm{i}v$$

不是解析函数。

29. 求具有下列形式的所有调和函数 u：

(1) $u=f(ax+by)$，a 与 b 为常数；

(2) $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$。［提示：(1) 令 $t=ax+by$，因 $u_{xx}+u_{yy}=0$，从而有 $f''(t)=0$；(2) 令 $t=\frac{y}{x}$］

解 (1) $u=f(ax+by)$

设 $t=ax+by$，则

$$u=f(t)$$

$$u_x=f'(t)a,u_{xx}=a^2f''(t)$$

$$u_y=f'(t)b,u_{yy}=b^2f''(t)$$

因为 u 为调和函数，所以 $u_{xx}+u_{yy}=0$

$$f''(t)a^2+f''(t)b^2=0 \quad f''(t)(a^2+b^2)=0$$

所以 $$f''(t)=0,\quad f'(t)=C_1,\quad f(t)=C_1t+C_2$$

所以 $$u=f(t)=f(ax+by)=C_1(ax+by)+C_2$$

(2) $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$

设 $t=\frac{y}{x}$，则

$$u=f(t)$$

$$u_x=-f'(t)\frac{y}{x^2},\quad u_{xx}=f''(t)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f'(t)\frac{2y}{x^3}$$

$$u_y=f'(t)\frac{1}{x},\quad u_{yy}=f''(t)\frac{1}{x}\frac{1}{x}=f''(t)\frac{1}{x^2}$$

因为 u 为调和函数，

所以 $$u_{xx}+u_{yy}=0$$

所以 $$f''(t)\left(\frac{-y}{x^2}\right)^2+f'(t)\frac{2y}{x^3}+f''(t)\frac{1}{x^2}=0$$

即 $$f''(t)(y^2+x^2)+f'(t)2xy=0$$

因为 $y=tx$，所以

$$f''(t)[(tx)^2+x^2]+f'(t)\cdot(xt)\cdot 2x=0$$

$$f''(t)(t^2+1)+f'(t)2t=0$$

$$\frac{f''(t)}{f'(t)}=-\frac{2t}{t^2+1}$$

两边取不定积分：

$$\int\frac{f''(t)}{f'(t)}\mathrm{d}t=-\int\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$\ln f'(t) = -\ln(t^2+1) + \ln C_1 = \ln\frac{1}{t^2+1} + \ln C_1$$

$$f'(t) = \frac{C_1}{t^2+1}$$

$$\int f'(t)\mathrm{d}t = \int C_1 \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$f(t) = C_1\arctan t + C_2$$

所以
$$u = f\left(\frac{y}{x}\right) = C_1\arctan\frac{y}{x} + C_2$$

30. 由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$。

(1) $u = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$； (2) $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}, f(2) = 0$；

(3) $u = 2(x-1)y, f(2) = -\mathrm{i}$； (4) $v = \arctan\dfrac{y}{x}, x > 0$

(1) **解法 1** $u_x = x^2 + 4xy + y^2 + (x-y)(2x+4y)$

$$u_y = -(x^2+4xy+y^2) + (x-y)(4x+2y)$$

$$u_{xx} = 2x + 4y + 2x + 4y + (x-y)\cdot 2 = 6(x+y)$$

$$u_{yy} = -(4x+2y) + (-1)(4x+2y) + (x-y)\cdot 2 = -6(x+y)$$

所以
$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

即 $u(x,y)$ 是 z 平面上的调和函数，以下求 $v = ?$

因为 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 为解析函数

所以
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$$

所以

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + C$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right) + C$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,y)} -[-(x^2+4xy+y^2) + (x-y)(4x+2y)]\mathrm{d}x + [(x^2+4xy+y^2) + (x-y)(2x+4y)]\mathrm{d}y + C$$

$$= \int_0^x 3x^2\mathrm{d}x + \int_0^y (3x^2 + 6xy - 3y^2)\mathrm{d}y + C$$

$$= -x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + C$$

所以
$$f(z) = u + \mathrm{i}v$$
$$= (x-y)(x^2+4xy+y^2) + \mathrm{i}(-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C)$$
$$= (x^3+3x^2y-3xy^2-y^3) + \mathrm{i}(-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3) + \mathrm{i}C$$
$$= (1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)^3 + \mathrm{i}C$$
$$= (1-\mathrm{i})z^3 + \mathrm{i}C$$

解法 2 $f'(z) = u_x - \mathrm{i}u_y$

$$= (x^2+4xy+y^2+2x^2+4xy-2xy-4y^2) - \mathrm{i}(-x^2-4xy-y^2+4x^2-4xy+2xy-2y^2)$$
$$= (3x^2-3y^2+6xy) - \mathrm{i}(3x^2-3y^2-6xy)$$
$$= (3x^2+6xy\mathrm{i}-3y^2) - \mathrm{i}(3x^2+6xy\mathrm{i}-3y^2)$$
$$= 3(x^2+2xy\mathrm{i}-y^2) - 3\mathrm{i}(x^2+2xy\mathrm{i}-y^2)$$
$$= 3(x+\mathrm{i}y)^2 - 3\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^2$$
$$= 3(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)^2$$

所以
$$f(z) = (1-\mathrm{i})z^3 + \mathrm{i}C$$

(2) **解法 1**

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

因为
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

所以
$$u(x,y) = \int\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y = x\int\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= -\frac{x}{x^2+y^2} + g(x)$$

因为
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + g'(x)$$
$$= -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(x) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(x)$$

即 $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+g'(x)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow g(x)=C$$

所以 $f(z)=u+\mathrm{i}v=-\dfrac{x}{x^2+y^2}+C+\mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$=C+\frac{-x+\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=C-\frac{1}{z}$$

因为 $f(2)=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$

所以 $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$

解法 2 因为 $v_x=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$v_y=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\mathrm{i}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2-2xy\mathrm{i}-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(-x+\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{z^2}$$

所以 $f(z)=-\dfrac{1}{z}+C$

因为 $f(2)=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$

所以 $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$

(3) **解法 1**

因为 $u_x=2y, u_y=2(x-1)$

$$u_{xx}=0, u_{yy}=0$$

所以 $u_{xx}+u_{yy}=0$

所以 u 是 z 平面上的调和函数

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，得

u 的共轭调和函数为

$$v=\int 2y\mathrm{d}y=y^2+g(x) \tag{1}$$

而 $v_x=-u_y=-2(x-1)$ (2)

由(1)，得 $v_x=g'(x)$ (3)

由(2)(3)，得 $g'(x)=2-2x$

所以 $g(x)=2x-x^2+C$ 代入(1)，得

$$v=y^2+2x-x^2+C$$

所以 $f(z)=u+\mathrm{i}v$

$$=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2+2x-x^2+C)$$

$$=-\mathrm{i}[\mathrm{i}2xy-\mathrm{i}2y+x^2-2x-y^2-C]$$

$$=-\mathrm{i}[(x+\mathrm{i}y)^2-2(x+\mathrm{i}y)-C]$$

$$=-\mathrm{i}[(z-1)^2]+(1+C)\mathrm{i}$$

因为 $f(2)=-\mathrm{i}$

所以 $-\mathrm{i}(2-1)^2+(1+C)\mathrm{i}=-\mathrm{i}\Rightarrow C=-1$

所以 $f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2$

解法 2 $u_x=2y, u_y=2(x-1)$

所以 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=2y-\mathrm{i}[2(x-1)]$

$$=-\mathrm{i}(2x+2y\mathrm{i})+\mathrm{i}=-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}$$

$$=-\mathrm{i}2z+2\mathrm{i}$$

所以 $f(z)=-\mathrm{i}z^2+2\mathrm{i}z+C$

因为 $f(2)=-\mathrm{i}$，所以 $C=-\mathrm{i}$

所以 $f(z)=-\mathrm{i}z^2+2\mathrm{i}z-\mathrm{i}=-\mathrm{i}(z^2-2z+1)=-\mathrm{i}(z-1)^2$

(4) $$v_x=\frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$v_y=\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，得

$$u=\int\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)$$

又由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+g'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}+g'(y)$$

所以 $$-\frac{y}{x^2+y^2}=-\left[\frac{y}{x^2+y^2}+g'(y)\right]$$

所以 $$g'(y)=0\Rightarrow g(y)=C$$

所以 $$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$$

所以 $$f(z)=u+iv=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C+i\arctan\frac{y}{x}$$
$$=\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+C+i\arctan\frac{y}{x}$$
$$=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z+C=\mathrm{Ln}z+C$$

31. 设 $v=e^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$

解 v 为调和函数，则
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=pe^{px}\sin y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=p^2e^{px}\sin y$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{px}\cos y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-e^{px}\sin y$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=p^2e^{px}\sin y-e^{px}\sin y=0$$
$$(p^2-1)e^{px}\sin y=0$$

$p^2=1$，即当 $p=\pm 1$ 时，v 为调和函数

(1) 当 $p=1$ 时，$v=e^x\sin y$
$$v_x=e^x\sin y,v_y=e^x\cos y$$

所以 $$f'(z)=v_y+iv_x$$
$$=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)$$
$$=e^x\cdot e^{iy}=e^{x+iy}=e^z$$

所以 $$f(z)=e^z+C_1$$

(2) 当 $p=-1$ 时，$v=e^{-x}\sin y$
$$v_y=e^{-x}\cos y=u_x$$

所以 $u=\int u_x\mathrm{d}x=\int e^{-x}\cos y\mathrm{d}x=-e^{-x}\cos y+C_2(y)$
$$u_y=e^{-x}\sin y+C_2'(y)=-v_x=e^{-x}\sin y$$

所以 $$C_2'(y)=0\Rightarrow C_2(y)=C_2$$

所以 $$u=-e^{-x}\cos y+C_2$$

所以 $$f(z)=u+iv=-e^{-x}\cos y+C_2+ie^{-x}\sin y$$
$$=-e^{-x}(\cos(-y)+i\sin(-y))+C_2$$
$$=-e^{-(x+iy)}+C_2=-e^{-z}+C_2$$

所以 $$f(z)=-e^{-z}+C_2$$

*32. 如果 $u(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数，C 为 D 内以 z_0 为中心的任何一个正向圆周：$|z-z_0|=r$，它的内部全含于 D。试证：

(1) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等于 $u(x,y)$ 在圆周 C 上的平均值，即
$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi;$$

(2) $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等于 $u(x,y)$ 在圆域 $|z-z_0|\leqslant r_0$ 上的平均值。

即 $$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

提示：利用平均值公式(3.5.3)。

证明 (1) 令 $z=z_0+re^{i\theta}$，利用柯西积分公式
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}re^{i\theta}\cdot i\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

从而 $u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)+iv(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)]\mathrm{d}\theta$$

等式两边实部相等，即有
$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

(2) 由(1)结论，对于任意 r，$0\leqslant r\leqslant r_0$，都有
$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

从而 $$\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}r\left[\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} ru(x_0,y_0)\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{\pi r_0^2}u(x_0,y_0)\cdot\frac{r_0^2}{2} = u(x_0,y_0)$$

因此 $u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$

*33. 如果 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的正向圆周：$|z| = R$，它的内部全含于 D。设 z 为 C 内一点，并令 $\tilde{z} = R^2/\bar{z}$，试证

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \tilde{z}}\mathrm{d}\zeta = \oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}\mathrm{d}\zeta = 0$$

证明 由于 $\tilde{z} = \frac{R^2}{\bar{z}}$，$|\bar{z}| = |z| < R$，所以 $|\tilde{z}| > R$

$f(z)$ 在 D 内处处解析，正向圆周 C 含于 D 中，从而 $f(\zeta)/(\zeta - \tilde{z})$ 在 C 上和其内部解析，再根据柯西积分定理，得

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \tilde{z}}\mathrm{d}\zeta = \oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}\mathrm{d}\zeta = 0$$

*34. 根据柯西积分公式与习题 33 的结果，证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right]f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})}\mathrm{d}\zeta$$

其中 C 为 $|z| = R$。

证明 根据柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \quad (\text{其中 } z \text{ 为 } C \text{ 内一点})$$

又由上题结论：

$$\oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{\zeta\bar{z} - R^2}\mathrm{d}\zeta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\mathrm{d}\zeta = 0$$

两式相加，得

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + \oint_C \frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\mathrm{d}\zeta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right)\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right]f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})}\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

*35. 如果令 $\zeta = Re^{i\theta}$，$z = re^{i\varphi}$，验证

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} = \frac{\mathrm{d}\zeta/\zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \frac{i\mathrm{d}\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

并由 34 题的结果，证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta$$

取其实部，得

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

这个积分称为泊松(Poisson)积分。通过这个公式，一个调和函数在一个圆内的值可用它在圆周上的值来表示。

证明 $\frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} = \frac{\mathrm{d}\zeta/\zeta}{(\zeta - z)\left(\frac{R^2}{\zeta} - \bar{z}\right)} = \frac{\mathrm{d}\zeta/\zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}$

根据题意 $\zeta = Re^{i\theta}$，$z = re^{i\varphi}$ 得 $\mathrm{d}\zeta = iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})} &= \frac{\mathrm{d}\zeta/\zeta}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} \\
&= \frac{\frac{iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{Re^{i\theta}}}{(Re^{i\theta} - re^{i\varphi})(Re^{-i\theta} - re^{-i\varphi})} \\
&= \frac{i\mathrm{d}\theta}{R^2 - Rre^{i(\theta - \varphi)} - Rre^{i(\varphi - \theta)} + r^2} \\
&= \frac{i\mathrm{d}\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}
\end{aligned}$$

由上题结论

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(R^2 - z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta\bar{z})}\mathrm{d}\zeta$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})\cdot\frac{i\mathrm{d}\theta}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

令 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，对上式两边做比较，取其实部

$$u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)u(R\cos\theta, R\sin\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\mathrm{d}\theta$$

*36. 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内及 C 上解析，且不恒为常数，n 为正整数。

(1) 试用柯西积分公式证明：

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z}d\zeta$$

(2) 设 M 为 $f(\zeta)$ 在 C 上的最大值，L 为 C 的长，d 为 z 到 C 的最短距离，试用积分估值公式(3.1.10)于(1)中的等式，证明不等式：

$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(3) 令 $n \to +\infty$，对(2)中的不等式取极限，证明：$|f(z)| \leqslant M$。这个结果表明：在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得(最大模原理)。

根据这一结果可知：在无源无旋的平面稳定非等速的流速场中的流速最大值，即它的复势 $f(z)$ 的模 $|f(z)|$，不能在场的内部取得，只能在场的边界上取得。

证明 (1) 由于 $f(z)$ 在 C 内及 C 上解析，由解析函数性质知 $g(z) = [f(z)]^n$ 在 C 内及 C 上也解析，从而根据柯西积分公式得

$$g(z) = [f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z}d\zeta$$

即
$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z}d\zeta$$

(2) 由(1)的结论有

$$\begin{aligned}|[f(z)]^n| &= |f(z)|^n \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z}d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_C \left|\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z}\right| d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta - z|}d\zeta \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M^n \cdot L}{d}\end{aligned}$$

$$(|f(\zeta)| \leqslant M, |\zeta - z| \geqslant d)$$

两边开 n 次方
$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(3) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$，从而对(2)中不等式两边取极限，有

$$|f(z)| \leqslant M \quad (n \to \infty)$$

第四章 级 数

> 受苦的人没有悲观的权利。
>
> ——尼采

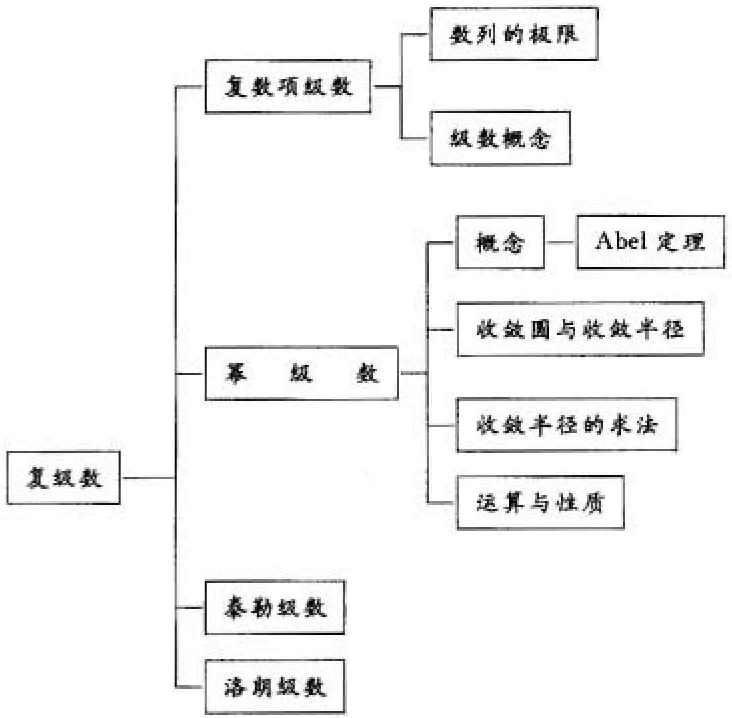
导 学

这一章我们将介绍复数项级数。在学习高等数学时，已经知道级数和数列的关系。在本章，我们将看到，关于复数项的级数和复变函数项级数的某些概念和定理都是实数域内的相应内容在复数域内的直接推广。本章介绍了复数项和复变函数项级数的基本概念与性质，然后主要讨论了泰勒级数和洛朗级数，并围绕如何将解析函数展开成泰勒级数或洛朗级数这一中心内容进行展开，这两类级数都是研究解析函数的重要工具。

要在对比中学习：①将复变函数与高等数学中的级数部分进行对比；②在复变函数中将泰勒展开与洛朗展开进行对比。

级数展开时应优先考虑用间接展开法。即：借助一些已知函数(如 e^z，$\sin z$，$\cos z$，$\mathrm{Ln}(1+z)$ 等)的展开式，利用级数的四则运算性质和逐项导数积分性质来求某函数的展开式。

本章知识结构



习题全解

1. 下列数列$\{\alpha_n\}$是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

(1) $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$；　　(2) $\alpha_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$

(3) $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$；　　(4) $\alpha_n=e^{-n\pi i/2}$

(5) $\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-n\pi i/2}$

解　(1) $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}=\dfrac{(1+ni)^2}{1+n^2}=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}+\dfrac{2n}{1+n^2}i=a_n+b_ni$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{1+n^2}=-1$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{1+n^2}=0$

所以$\{\alpha_n\}$收敛于-1

(2) $\alpha_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$

令$x=1,y=\dfrac{1}{2}$，　$\varphi=\arctan\dfrac{1}{2}$，则

$$r=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt5}{2}$$

$$1+\frac{i}{2}=\frac{\sqrt5}{2}\left(\frac{2}{\sqrt5}+i\frac{1}{\sqrt5}\right)=\frac{\sqrt5}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{\sqrt5}{2}e^{i\varphi}$$

$$\alpha_n=\left(1+\frac{i}{2}\right)^{-n}=\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^{-n}e^{-in\varphi}$$

$$=\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^{-n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)=\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^{n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)$$

因为$\left|\dfrac{2}{\sqrt5}\right|<1$　　$|\cos n\varphi|\leqslant1$　　$|\sin n\varphi|\leqslant1$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt5}\right)^n\cos n\varphi=0$　　$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt5}\right)^n\sin n\varphi=0$

所以$\{\alpha_n\}$收敛于0

(3) $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$

根据数列收敛的充要条件知$\{\alpha_n\}$发散

(4) $\alpha_n=e^{-\frac{n\pi i}{2}}=\cos\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{n\pi}{2}-i\sin\dfrac{n\pi}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$均不存在，根据数列收敛的充要条件知$\{\alpha_n\}$发散。

(5) $\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-\frac{n\pi i}{2}}$

$\alpha_n=\dfrac{1}{n}\left[\cos\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]=\dfrac{1}{n}\left(\cos\dfrac{n\pi}{2}-i\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$

因为$\left|\sin\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant1$，　$\left|\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant1$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$

根据数列收敛的充要条件知$\{\alpha_n\}$收敛于0

2. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\begin{cases}0, & |\alpha|<1,\\ \infty, & |\alpha|>1,\\ 1, & \alpha=1,\\ 不存在, & |\alpha|=1,\alpha\neq 1\end{cases}$$

证明 令 $\alpha=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

(1) $|\alpha|<1$，即 $r<1$

$$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

所以 $$0\leqslant|\alpha^n|\leqslant r^n(|\cos n\theta|+|\sin n\theta|)\leqslant 2r^n$$

$$\lim_{n\to\infty}r^n=0\quad(r<1)$$

所以由两边夹法则，$\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha^n|=0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$$

(2) $|\alpha|>1$，即 $r>1$

$$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty\quad(r>1)$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}|\alpha^n|=\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\infty$$

(3) $\alpha=1\Rightarrow r=1$，即

$$\alpha=\cos 0+i\sin 0$$

所以 $$\alpha^n=\cos 0n+i\sin 0n=\cos 0=1$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=1$$

(4) $|\alpha|=1$，但 $\alpha\neq 1$，即

$$r=1\quad \alpha=\cos\theta+i\sin\theta(\theta\neq 0)$$

所以 $$\alpha^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

但$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\theta$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\theta$均不存在，根据数列收敛的充要条件知$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n$不存在。

3. 判别下列级数的绝对收敛性与收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$； (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$ (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$； (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$

解 (1) $z_n=\dfrac{i^n}{n}=\dfrac{1}{n}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+i\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}(-1)^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot(-1)^k$$

以上两级数均为收敛的交错级数，所以原级数收敛。

又 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

为调和级数，发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$ 为条件收敛。

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$

令 $$z_n=\frac{i^n}{\ln n}=\frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n=\frac{1}{\ln n}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cos\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k)}\cdot(-1)^k$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)}\cdot(-1)^k$$

以上两级数均为收敛的交错级数，所以原级数收敛。

又 $$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{i^n}{\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

$$\ln n=\ln(1+n-1)<n-1\quad(n-1>0)$$

所以 $$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n-1}$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 为调和级数，发散

由比较判别法知：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ 发散

所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$ 条件收敛。

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$

令 $z_n=\frac{(6+5i)^n}{8^n}$

因为 $6+5i=\sqrt{61}(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta=\arctan\frac{5}{6}$

所以 $z_n=\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

又因为 $|z_n|=\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$ 且 $\left|\frac{\sqrt{61}}{8}\right|<1$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|$ 收敛。

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$ 绝对收敛，因而也收敛。

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$

令 $z_n=\frac{\cos in}{2^n}=\frac{1}{2^n}\frac{e^n+e^{-n}}{2}=\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n$ 发散，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$ 收敛

所以原级数发散。

4. 下列说法是否正确？为什么？

(1) 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

(2) 每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；

(3) 每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数。

解 (1) 不正确。

在收敛圆内的点处处收敛，而收敛圆周上的点可能收敛，也可能发散。

例如，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛圆为 $|z-1|=1$，在收敛圆 $|z-1|=1$ 上不一定收敛。当 $z=0$ 时，原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，收敛；当 $z=2$ 时，原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散。

(2) 不正确。

和函数在收敛圆内处处解析。

(3) 不正确。

每一个在 z_0 解析的函数才一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数。

例如，$f(z)=\bar{z}$ 在 z_0 连续，但不可导，故不能在 z_0 点展开成泰勒级数。

5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

解 不能。

令 $z-2=y\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}c_ny^n$

因为在 $z=0$ 收敛，所以在 $y=-2$ 处收敛

由阿贝尔定理知 $\sum_{n=0}^{\infty}c_ny^n$ 在 $|y|<2$ 内均绝对收敛

当 $z=3$ 时，因为 $z-2=y=1$，所以 $|y|<2$。

所以在 $z=3$ 处一定绝对收敛。

6. 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$（$p$ 为正整数）；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^nz^n$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\text{ch}\left(\frac{i}{n}\right)(z-1)^n$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\text{Ln}\,in}\right)^n$

解 (1) $c_n=\frac{1}{n^p}$

所以 $\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}$

所以收敛半径 $R=\frac{1}{\lambda}=1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$

$c_n=\frac{(n!)^2}{n^n}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\infty\left(\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\right)$$

所以收敛半径 $R=0$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+\mathrm{i})^n\cdot z^n$

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$$

$$c_n=(1+\mathrm{i})^n=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}$$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\cdot z^n$

$$c_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}},\quad |c_n|=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=1$$

所以收敛半径 $R=1$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)(z-1)^n$

$$c_n=\mathrm{ch}\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{n}}}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{1}{n}+\cos\left(-\frac{1}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{1}{n}\right)}{2}=\cos\frac{1}{n}$$

$$|c_n|=\left|\cos\frac{1}{n}\right|$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}}\right|=\frac{1}{1}=1$$

所以收敛半径 $R=1$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}n}\right)^n$

$$\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}n=\ln|\mathrm{i}n|+\mathrm{i}(\mathrm{Arg}\,\mathrm{i}n)=\ln n+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

所以
$$|\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}n|=\left(\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

所以
$$|c_n|=\frac{1}{|\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}n|^n}=\left[\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right]^{\frac{n}{2}}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right]^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

所以收敛半径 $R=\infty$

7. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R，证明 $\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$。

(提示 $|(\mathrm{Re}c_n)z^n|<|c_n||z|^n$)

证明 $|(\mathrm{Re}c_n)z^n|=|(\mathrm{Re}c_n)||z^n|\leqslant|c_n||z|^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|(\mathrm{Re}c_n)z^n|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$$

设 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $(-R,R)$ 内绝对收敛，由上式知 $\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$

8. 证明如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在($\neq\infty$)，则下列三个幂级数有相同的收敛半径：

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n;\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1};\quad \sum_{n=0}^{\infty}nc_nz^{n-1}$$

证明 (1) $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在， 设 $\lambda_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}$

因为 $\lambda_2\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda_1$，所以 $\lambda_1=\lambda_2$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}nc_nz^{n-1}$

因为 $\lambda_3=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda_1$，所以 $\lambda_3=\lambda_1$

所以由(1)、(2)和(3)知：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$

综上可得，当 $\lambda_1\neq 0$ 时，$R_1=\frac{1}{\lambda_1}=R_2=\frac{1}{\lambda_2}=R_3=\frac{1}{\lambda_3}$

当 $\lambda_1=0$ 时，$R_1=R_2=R_3=+\infty$

即三个幂级数有相同的收敛半径。

9. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|$ 发散，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为1。

证明　已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $z=1$ 处收敛，由阿贝尔定理，对 $|z|<1$ 的 z，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 必绝对收敛，从而 $R\geqslant 1$。以下证明 $R>1$ 不对。反设 $R>1$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在收敛圆 $|z|<R$ 内绝对收敛，特别地在 $z=1(|z|<R)$ 处也绝对收敛，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|$ 收敛，与题设矛盾，只有 $R=1$，得证。

10. 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在它的收敛圆的圆周上一点 z_0 处绝对收敛，证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛。

证明　设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径为 R，z_0 是收敛圆的圆周上的一点，且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在 z_0 点处绝对收敛。$\forall\ z\in\{z|\ |z|\leqslant R\}$，有

$$|C_nz^n|=|C_n||z|^n\leqslant|C_n||z_0|^n=|C_nz_0^n|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|C_nz_0^n|\ \text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}|C_nz^n|\ \text{收敛，得证。}$$

11. 把下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径：

(1) $\frac{1}{1+z^3}$；　(2) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$；　(3) $\cos z^2$；　(4) $\operatorname{sh}z$；

(5) $\operatorname{ch}z$；　(6) $e^{z^2}\sin z^2$；　(7) $e^{\frac{z}{z-1}}$；　(8) $\sin\frac{1}{1-z}$

（提示　$\sin\frac{1}{1-z}=\sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=\sin1\cos\left(\frac{z}{1-z}\right)+\cos1\sin\left(\frac{z}{1-z}\right)$）

解　(1) 已知 $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots,(|z|<1)$

上式中的 z 用 z^3 置换：

$$\frac{1}{1+z^3}=1-z^3+z^6-\cdots+(-1)^nz^{3n}-\cdots\qquad(|z^3|<1)$$

$|z^3|<1\Rightarrow|z|<1$

收敛半径 $R=1$

(2) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$

已知 $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots,(|z|<1)$

上式中的 z 用 z^2 置换：

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\cdots+(-1)^nz^{2n}-\cdots\qquad(|z^2|<1)$$

$|z^2|<1\Rightarrow|z|<1$

又 $\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'=\frac{-2z}{(1+z^2)^2}$

所以
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z^2)^2}&=-\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'\\&=-\frac{1}{2z}(1-z^2+z^4-\cdots+(-1)^nz^{2n}-\cdots)'\\&=1-2z^2+3z^4-4z^6+\cdots\qquad(|z|<1)\end{aligned}$$

收敛半径 $R=1$

(3) $\cos z^2$

已知 $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots,(|z|<+\infty)$

上式中的 z 用 z^2 置换：

$\cos z^2=1-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}-\frac{z^{12}}{6!}+\cdots,(|z^2|<+\infty)$

$|z^2|<+\infty\Rightarrow|z|<+\infty$

收敛半径 $R=+\infty$

(4) $\operatorname{sh}z$

$$\operatorname{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,(|z|<+\infty)$$

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots, (|z| < +\infty)$$

$$\text{sh} z = \frac{1}{2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\right]$$

$$= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, (|z| < +\infty)$$

收敛半径 $R = +\infty$

(5) $\text{ch} z$

与上题推导类似：

$$\text{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{ch} z = \frac{1}{2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) + \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, (|z| < +\infty)$$

收敛半径 $R = +\infty$

(6) $e^{z^2} \sin z^2$

$$e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \cdots, (|z| < +\infty)$$

$$\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \cdots, (|z| < +\infty)$$

$$\Rightarrow e^{z^2} \sin z^2 = \left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \cdots\right) \times \left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \cdots\right)$$

$$= z^2 + z^4 + \frac{z^6}{3} + \cdots, (|z| < +\infty)$$

收敛半径 $R = +\infty$

注：上面用到两级数的 Cauchy 乘积，在《高等数学》教材中能查到。

(7) $e^{\frac{z}{z-1}}$

因为 $\frac{z}{z-1} = -\frac{z}{1-z} = -(z + z^2 + z^3 + \cdots)$

$$= -z\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}, \quad (|z| < 1)$$

所以 $e^{\frac{z}{z-1}} = e^{-(z+z^2+z^3+\cdots)}$

$$= 1 - (z + z^2 + z^3 + \cdots) + \frac{1}{2!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^2 - \frac{1}{3!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 + \cdots$$

$$= 1 - z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

收敛半径 $R = 1$

(8) $\sin\frac{1}{1-z}$

$$\sin\frac{1}{1-z} = \sin\left(1 + \frac{z}{1-z}\right) = \sin 1 \cos\frac{z}{1-z} + \cos 1 \sin\frac{z}{1-z}$$

因为 $\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} \quad (|z| < 1)$

所以 $\sin\frac{z}{1-z} = (z + z^2 + z^3 + \cdots) - \frac{1}{3!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 + \frac{1}{5!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^5 - \cdots$

$$= z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \cdots, (|z| < 1)$$

$$\cos\frac{z}{1-z} = 1 - \frac{1}{2!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^2 + \frac{1}{4!}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^4 - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}z^2 - z^3 + \cdots, (|z| < 1)$$

所以 $\sin\frac{1}{1-z} = \sin 1\left(1 - \frac{1}{2}z^2 - z^3 + \cdots\right) + \cos 1\left(z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \cdots\right)$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot z + \left(\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1\right)z^2 + \left(\frac{5}{6}\cos 1 - \sin 1\right)z^3 + \cdots, \quad (|z| < 1)$$

收敛半径 $R = 1$

12. 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\frac{z-1}{z+1}, z_0 = 1$；　　(2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0 = 2$；

(3) $\frac{1}{z^2}, z_0 = -1$；　　(4) $\frac{1}{4-3z}, z_0 = 1 + i$；

(5) $\tan z, z_0 = \frac{\pi}{4}$；　　(6) $\arctan z, z_0 = 0$

解 (1) $\frac{z-1}{z+1} = (z-1)\frac{1}{(z-1+2)} = \frac{z-1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, (|z|<1)$$

上式两边的 z 用 $\left(\frac{z-1}{2}\right)$ 置换：

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = 1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \cdots, \left(\left|\frac{z-1}{2}\right|<1\right)$$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1}{2}\left[1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1} + \cdots\right]$$

$$= \frac{z-1}{2} - \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n$$

$$\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z-1| < 2$$

收敛半径 $R = 2$

(2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = 2$

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{z+2} - \frac{2}{z+1}\right) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

因为 $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{4+(z-2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \frac{z-2}{4} + \left(\frac{z-2}{4}\right)^2 - \cdots\right], \left(\left|\frac{z-2}{4}\right|<1\right)$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{z-2}{3} + \left(\frac{z-2}{3}\right)^2 - \cdots\right], \left(\left|\frac{z-2}{3}\right|<1\right)$$

所以 原式 $= \frac{2}{4}\left(1 - \frac{z-2}{2^2} + \frac{1}{2^{2\cdot 2}}(z-2)^2 + \cdots\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z-2}{3} + \frac{(z-2)^2}{3^2} - \cdots\right)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{2n}} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$$

$\left|\frac{z-2}{4}\right|<1$ 且 $\left|\frac{z-2}{3}\right|<1 \Rightarrow |z-2|<3$

收敛半径 $R = 3$

(3) $\frac{1}{z^2}, z_0 = -1$

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{1-(z+1)}$$

$$= -[1 + (z+1) + (z+1)^2 + \cdots], (|z+1|<1)$$

上式两边求导：

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -[1 + 2(z+1) + 3(z+1)^2 + \cdots + n(z+1)^{n-1} + \cdots], (|z+1|<1)$$

所以 $\frac{1}{z^2} = 1 + 2(z+1) + \cdots + n(z+1)^{n-1} + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \quad (|z+1|<1)$$

收敛半径 $R = 1$

(4) $\frac{1}{4-3z}, z_0 = 1+i$

$$\frac{1}{4-3z} = \frac{1}{4-3[z-(1+i)]-3-3i} = \frac{1}{(1-3i)-3[z-(1+i)]}$$

$$= \frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]}$$

$$= \frac{1}{1-3i}\left\{1 + \frac{3}{1-3i}[z-(1+i)] + \left(\frac{3}{1-3i}\right)^2[z-(1+i)]^2 + \cdots\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n\quad\left(\left|\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right|<1\right)$$

$$\Rightarrow|z-(1+i)|<\frac{|1-3i|}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

收敛半径 $R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

(5) $\tan z, z_0=\dfrac{\pi}{4}$

令 $f(z)=\tan z$, $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

$(\tan z)'=\sec^2 z, (\tan z)'\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2$

$(\tan z)''=2\sec^2 z\tan z$, $(\tan z)''\Big|_{\frac{\pi}{4}}=4$

$(\tan z)'''=2(2\sec^2 z\tan^2 z+\sec^4 z)$, $(\tan z)'''\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2(4+4)=16$

…

由 $C_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 得 $c_0=1, c_1=\dfrac{2}{1!}, c_2=\dfrac{4}{2!}=2, c_3=\dfrac{16}{3!}=\dfrac{8}{3}$,

…

所以 $$\tan z=1+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\quad\left(R=\frac{\pi}{4}\right)$$

收敛半径 $R=\dfrac{\pi}{4}$

(6) $\arctan z, z_0=0$

因为 $$(\arctan z)'=\frac{1}{1+z^2}$$

又 $\dfrac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\cdots,(|z^2|<1$ 即 $|z|<1)$

所以 $$\arctan z=\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^z(1-z^2+z^4-z^6+\cdots)dz$$

$$=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1},|z|<1$$

收敛半径 $R=1$

13. 为什么在区域 $|z|<R$ 内解析且在区间 $(-R,R)$ 取实数值的函数 $f(z)$ 展开成 z 的幂级数时，展开式的系数都是实数？

解 由解析函数展开为泰勒级数的惟一性得：$f(z)$ 在 $|z|<R$ 内的展开式应与 $f(x)$ 在 $|x|<R$ 内展开式一致，$f(x)$ 在 $|x|<R$ 内展开式的系数是实数。

于是，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的展开式的系数 $C_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$C_n$ 均为实数

14. 证明在 $f(z)=\cos\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 以 z 的各次幂表出的洛朗展开式中的各系数为 $\quad c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

[提示 在对应教材公式(4.4.8)中，取 C 为 $|z|=1$，在此圆上设积分变量 $\zeta=e^{i\theta}$，然后证明：c_n 的积分的虚部等于零]

证明 $f(z)=\cos\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\quad(令\ z=e^{i\theta},dz=ie^{i\theta}d\theta,\theta:0\to2\pi,z_0=0)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta})^{n+1}}ie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{in\theta}}id\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)[\cos n\theta-i\sin n\theta]d\theta$$

其虚部为：$-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta$

令 $g(\theta)=\cos(2\cos\theta)\sin n\theta$

由于 $$\cos[2\cos(\theta+2\pi)]=\cos(2\cos\theta)$$
$$\sin n(\theta+2\pi)=\sin(n\theta+2n\pi)=\sin n\theta$$

所以 $$g(\theta+2\pi)=\cos[2\cos(\theta+2\pi)]\sin n(\theta+2\pi)$$
$$=\cos(2\cos\theta)\sin n\theta=g(\theta)$$

$g(\theta)$ 以 2π 为周期

又 $$g(-\theta)=\cos[2\cos(-\theta)]\sin n(-\theta)=\cos(2\cos\theta)(-\sin n\theta)$$
$$=-\cos(2\cos\theta)\cdot\sin n\theta=-g(\theta)$$

$g(\theta)$ 为奇函数

于是虚部 $=-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta=-\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)d\theta=0$

故 $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \cdots)$$

15. 下列结论是否正确？

用长除法得 $$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots,$$
$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

因为 $$\frac{z}{1-z} + \frac{z}{z-1} = 0$$

所以 $$\cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = 0$$

解 不正确。
$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \cdots, |z| < 1$$
$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots, |z| > 1$$

用长除法所得到的两式的取值范围的交集为空集，故不能相加。

16. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数：

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1 < |z| < 2$;

(2) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}, 0 < |z| < 1; 0 < |z-1| < 1$;

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, 0 < |z-1| < 1; 1 < |z-2| < +\infty$;

(4) $\dfrac{1}{e^{1-z}}, 1 < |z| < +\infty$;

(5) $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$，在以 i 为中心的圆环域内；

(6) $\sin\dfrac{1}{1-z}$，在 $z = 1$ 的去心邻域内；

(7) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}, 3 < |z| < 4; 4 < |z| < +\infty$

解 (1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1 < |z| < 2$,

先用待定系数法将上式拆开：

令 $$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = \frac{a}{z+i} + \frac{b}{z-i} + \frac{c}{z-2}$$

则 $$1 \equiv a(z-i)(z-2) + b(z+i)(z-2) + c(z^2+1)$$

上式恒成立，z 取一些特殊值，可分别得 a, b, c。

令 $$z = i \Rightarrow 1 = 2i \cdot b(i-2) \Rightarrow b = \frac{1}{2i(i-2)} = \frac{-1+2i}{10}$$
$$z = 2 \Rightarrow 1 = 5c \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$
$$z = -i \Rightarrow 1 = -2i(-i-2)a \Rightarrow a = \frac{1}{2i(i+2)} = \frac{-1-2i}{10}$$

于是 $$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$$
$$= \frac{-1-2i}{10}\frac{1}{(z+i)} + \frac{-1+2i}{10}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{5}\frac{1}{z-2}$$
$$= \frac{-1-2i}{10}\frac{1}{z\left(1+\frac{i}{z}\right)} + \frac{-1+2i}{10}\frac{1}{z\left(1-\frac{i}{z}\right)} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$
$$= \frac{-1-2i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^{n+1}} + \frac{-1+2i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{-1-2i}{10}\right)(-1)^n + \left(\frac{-1+2i}{10}\right)\right]\frac{i^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$
$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}} + \frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$
$$= \frac{1}{5}\left(\cdots + \frac{2}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} - \cdots\right)$$
$$1 < |z| < 2$$

(2) $\dfrac{1}{z(1-z)^2}$，$0 < |z| < 1$；$0 < |z-1| < 1$

① $0 < |z| < 1$
$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)^2}$$

因为 $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}z^n = 1 + z + z^2 + \cdots, |z| < 1$$

所以 $$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = -\frac{-1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}$$
$$= 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

所以 $$\frac{1}{z(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z}nz^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-2} = \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n$$
$$0<|z|<1$$

② $0<|z-1|<1$

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}\cdot\frac{1}{z}$$

因为 $$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1$$

所以 $$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad |z-1|<1$$

所以 $$\frac{1}{z(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-2}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$$
$$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\quad 0<|z-1|<1$$

(3) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $0<|z-1|<1$;

$1<|z-2|<+\infty$

① $0<|z-1|<1$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)-1}$$
$$=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$
$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

② $1<|z-2|<+\infty$

则 $$\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$
$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$
$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}}$$

(4) $e^{\frac{1}{1-z}}$, $1<|z|<+\infty$

因为 $1<|z|<+\infty$, 所以 $\frac{1}{|z|}<1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$
$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$
$$e^{\frac{1}{1-z}} = 1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots$$

(5) $\frac{1}{z^2(z-i)}$, 在以 i 为中心的圆环域内

① $0<|z-i|<1$

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z-i}\,\frac{1}{(z-i+i)^2}$$
$$=\frac{1}{z-i}\,\frac{1}{i^2\left[1+\frac{(z-i)}{i}\right]^2} = \frac{-1}{z-i}\,\frac{1}{[1-i(z-i)]^2}$$

因为 $$\frac{1}{(1-\zeta)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}n\zeta^{n-1},\ |\zeta|<1$$

所以 $|i(z-i)|<1$ 即 $|z-i|<1$

$$\frac{1}{[1-i(z-i)]^2} = \sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-1}$$

所以 $$\frac{1}{z^2(z-i)} = -\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n-1}(z-i)^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}n\cdot i^2\cdot i^{n-1}(z-i)^{n-2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}ni^{n+1}(z-i)^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{i^{n+1}\cdot i^{n+1}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{i^{2(n+1)}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}n\,\frac{(i^2)^{n+1}}{i^{n+1}}(z-i)^{n-2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}},\ 0<|z-i|<1$$

② $1<|z-i|<+\infty$

$$\frac{1}{(z-i+i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)^2}$$

因为 $\frac{1}{1+\zeta}=1-\zeta+\zeta^2-\zeta^3+\cdots,|\zeta|<1$

所以 $\left(\frac{1}{1+\zeta}\right)'=-\frac{1}{(1+\zeta)^2}=-(-1+2\zeta-3\zeta^2+\cdots)$

所以 $\frac{1}{\left(1+\frac{i}{z-i}\right)^2}=1-2\left(\frac{i}{z-i}\right)^2+3\left(\frac{i}{z-i}\right)^3-4\left(\frac{i}{z-i}\right)^4+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1}$$

所以 $\frac{1}{z^2(z-i)}=\frac{1}{(z-i)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\frac{i^{n-1}}{(z-i)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)i^{n}}{(z-i)^{n+3}},1<|z-i|<+\infty$$

(6) $\sin\frac{1}{1-z}$，在 $z=1$ 的去心邻域内

在 $0<|z-1|<+\infty$

因为 $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots,|z|<+\infty$

所以 $\sin\frac{1}{1-z}=-\sin\frac{1}{z-1}$

$$=-\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots\right]$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

$0<|z-1|<+\infty$

(7) $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$，$3<|z|<4;4<|z|<+\infty$

① $3<|z|<4$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{6}{4-z}-\frac{2}{z-3}=1-\frac{6}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{4}}-\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n-\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}z^n-2\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n,$$

$3<|z|<4$

② $4<|z|<+\infty$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1-\frac{6}{4-z}-\frac{2}{z-3}=1+\frac{6}{z-4}-\frac{2}{z-3}$$

$$=1+\frac{6}{z}\frac{1}{1-\frac{4}{z}}-\frac{2}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$=1+\frac{6}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n-\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot2^{2n-1}-2\cdot3^{n-1})z^{-n}\quad 4<|z|<+\infty$$

17. 函数 $\tan\frac{1}{z}$ 能否在圆环域 $0<|z|<R$ $(0<R<+\infty)$ 内展开成洛朗级数？为什么？

解 如图 4-1，$f(z)=\tan\frac{1}{z}$

令 $z_k=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$，$k=0,\pm1,\cdots$，$\tan\frac{1}{z_k}=\infty$

所以 $z_k=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ 是 $f(z)=\tan\frac{1}{z}$ 的奇点。

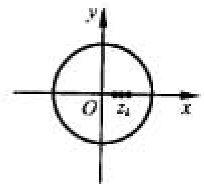


图 4-1

又因为 $\lim_{k\to\infty}z_k=0$

所以 $\{z_k\}$ 以 $z=0$ 为极限，即 $f(z)=\tan\frac{1}{z}$ 在 $z=0$ 处的任意小的去心邻域内，总有不可导的点 z_k，故不能保证 $f(z)=\tan\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<R$ 内处处解析。

所以 $f(z)=\tan\frac{1}{z}$ 不可以在 $0<|z|<R$ 内展开为洛朗级数。

18. 如果 k 为满足关系 $k^2<1$ 的实数，证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos(n+1)\theta = \frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

（**提示** 对 $|z|>k$ 展开 $(z-k)^{-1}$ 成洛朗级数，并在展开式的结果中令 $z=e^{i\theta}$，再令两边的实部与实部相等，虚部与虚部相等。）

证明 在 $|z|>k$ 时

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z\left(1-\frac{k}{z}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}} \quad (k^2<1)$$

令 $z=e^{i\theta}$

则 $$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{\cos\theta-k+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{(\cos\theta-k)^2+i\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2} \qquad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n e^{-(n+1)i\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n[\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta] \qquad (2)$$

(1) = (2)⇒ 两边的实部相等，虚部相等，得证。

19. 如果 C 为正向圆周 $|z|=3$，求积分 $\oint_C f(z)dz$ 的值。设 $f(z)$ 为

(1) $\frac{1}{z(z+2)}$； (2) $\frac{z+2}{(z+1)z}$

(3) $\frac{1}{z(z+1)^2}$； (4) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$

解 (1) 因为 $\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2z}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\cdots\right)$

因为 $\left|\frac{z}{2}\right|<1$， 所以 $|z|<2$

故 $f(z)=\frac{1}{z(z+2)}$ 在域 $C:|z|=3$ 内不全解析。

设 C_1,C_2 为两两互不相交，互不包含的圆周，且各自包围奇点 $z=0, z=-2$

所以 $$\oint_C f(z)dz=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)dz=\oint_{C_1}\frac{1}{z(z+2)}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z(z+2)}dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i+\frac{1}{-2}\cdot 2\pi i=0$$

(2) 因为 $\frac{z+2}{(z+1)z}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{1+z}\right)$

故在 $C:|z|=3$ 内 $f(z)$ 不全解析

设 C_1,C_2 为既不相交又不包含且各自包含奇点 $z=0, z=-1$ 的小圆周。

由柯西积分公式

$$\oint_C\frac{z+2}{z(z+1)}dz=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)dz=2\cdot 2\pi i-2\pi i=2\pi i$$

(3) $\frac{1}{z(z+1)^2}$

设 C_1,C_2 为互不相交，又互不包含的两小圆域，且各自包含着奇点 $z=0, z=-1$

所以 $$\oint_C f(z)dz=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)dz$$
$$=\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)dz+$$
$$\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)dz$$
$$=2\pi i-2\pi i=0$$

(4) **解法 1** 设 C_1,C_2 为互不相交且互不包含的两小圆域，且各自包围着奇点 $z=-1, z=-2$

所以 $$\oint_C\frac{z}{(z+1)(z+2)}dz=\left(\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right)f(z)dz$$
$$=\frac{-1}{-1+2}2\pi i+\frac{-2}{-2+1}2\pi i=2\pi i$$

解法 2 $$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=z\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}\right)$$

因为 $z=-1,-2$ 为奇点，$|z|=3$ 以 0 为中心

所以展开为 z 的幂级数，$f(z)$ 中的 z 不动

在 $1<|z|<2$ 及 $2<|z|<+\infty$ 内 $f(z)$ 解析

而 $|z|=3$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内

所以将 $\frac{1}{z+1},\frac{1}{z+2}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内展为关于 z 的洛朗级数。

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\cdots,\ \left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>1$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\cdots,\ \left|\frac{2}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>2$$

所以 $$\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\cdots\right)-\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{3}{z^3}+\cdots$$

所以 $\dfrac{z}{(z+2)(z+1)}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{3}{z^2}+\cdots$

$C_{-1}=1$

所以 $$\oint_C\frac{z}{(z+1)(z+2)}dz=2\pi i C_{-1}=2\pi i\cdot 1=2\pi i$$

20. 试求积分 $\oint_C\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)dz$ 的值，其中 C 为单位圆 $|z|=1$ 内的任何一条不经过原点的简单闭曲线。

解 $$\sum_{n=-2}^{\infty}z^n=z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 在 $|z|<1$ 内收敛，所以可对其逐项积分：

$$\oint_C\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)dz=\oint_C\left(z^{-2}+z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)dz$$

$$=\oint_C z^{-2}dz+\oint_C z^{-1}dz+\sum_{n=0}^{\infty}\oint_C z^n dz$$

$$=0+2\pi i+0=2\pi i$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{已知：}\ \oint_C\dfrac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 2\pi i & n=0\end{cases}\\ f(z)=z^n\ \text{在}\ |z|<1\ \text{内解析}\end{array}\right]$$

第五章 留 数

> 领悟音乐的人，能从一切世俗的烦恼中超脱出来。
>
> ——贝多芬

导 学

留数理论是复积分和复级数理论相结合的产物，除提供了计算积分的新方法外，本身也是复变函数论的重要理论。本章以洛朗级数为工具，对解析函数的孤立奇点进行分类研究。然后介绍留数定理，应用留数定理可把计算沿闭曲线的积分转化为计算在孤立奇点处的留数，应用留数定理还可计算一些定积分和广义积分。

而算留数无非是算算导数及极限，这就容易多了。高等数学中一些复杂难解的积分，用留数就很快地解了。这表明：复变函数并非是对高等数学的简单"复制"，两大学科之间相互渗透，互为工具。

本章知识结构

- 留数
  - 孤立奇点
    - 1. 可去奇点　2. 极点　3. 本性奇点
    - 4. 零点与极点　5. 无穷远点
  - 留数
    - 定义
    - 留数定理
    - 计算
    - 无穷远点的留数
  - 在定积分计算上的应用
    - 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$
    - 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$
    - 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{aix}\mathrm{d}x(a>0)$
  - 对数留数与辐角原理
    - 对数留数
    - 辐角原理
    - 路西(Rouché)定理

习题全解

1. 下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级：

(1) $\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$　(2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$　(3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$

(4) $\dfrac{\mathrm{Ln}(z+1)}{z}$　(5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+\mathrm{e}^{\pi z})}$　(6) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{z-1}}$

(7) $\dfrac{1}{z^2(\mathrm{e}^z-1)}$　(8) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$(n 为正整数)　(9) $\dfrac{1}{\sin z^2}$

(1) **解法 1** $\dfrac{1}{f(z)}=z(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2$

$z=0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的一级零点，$z=\pm\mathrm{i}$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的二级零点。

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点，$z=\pm\mathrm{i}$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

解法 2 $f(z)=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{(z^2+1)^2}=\dfrac{1}{z}\varphi(z)$　且当 $z=0$ 时，$\varphi(z)\neq 0$

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

$$f(z)=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{z(z+\mathrm{i})^2}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\varphi(z)\text{ 且当 } z=\mathrm{i}\text{ 时},\varphi(z)\neq 0$$

所以 $z=\mathrm{i}$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

同理 $z=-\mathrm{i}$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

(2) $z=0$ 是奇点。

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots$$

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

$$(3)\ \frac{1}{z^3-z^2-z+1}=\frac{1}{z^2(z-1)-(z-1)}=\frac{1}{(z^2-1)(z-1)}=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}$$

所以 $z=-1$ 是 $f(z)$ 的一级极点，$z=1$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

(4) $z=0$ 及 $z=-1$ 均为 $\dfrac{\mathrm{Ln}(z+1)}{z}$ 的奇点。

而 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Ln}(z+1)}{z}=1\Rightarrow z=0$ 为可去奇点。

$\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\mathrm{Ln}(z+1)}{z}$ 不存在且不为 $\infty\Rightarrow z=-1$ 为本性奇点。

(5) $1+z^2=0\Rightarrow z=\pm i$，故 $z=\pm i$ 是 $1+z^2$ 的一级零点。

$1+e^{\pi z}=0\Rightarrow e^{\pi z}=-1$

所以 $\pi z=\ln(-1)=\ln|-1|+i(\pi+2\pi k)=i\pi(2k+1)$

所以 $z_k=i(2k+1)\quad k=0,\pm1,\cdots$

因为 $(1+e^{\pi z})|_{z=i(2k+1)}=0$

$$(1+e^{\pi z})'|_{z=i(2k+1)}=\pi e^{\pi z}|_{z=i(2k+1)}$$
$$=\pi[\cos\pi(2k+1)+i\sin\pi(2k+1)]=-\pi\neq0$$

所以 $z_k=i(2k+1)\quad k=0,\pm1,\cdots$ 是 $1+e^{\pi z}$ 的一级零点。

取 $k=0$，$z_0=i$，取 $k=-1$，$z_{-1}=-i$，因而 $z=\pm i$ 为 $1+e^{\pi z}$ 的一级零点。

综上可知：

$z=\pm i$ 为 $f(z)$ 的二级极点。

$z_k=i(2k+1)$，$k=1,\pm2,\cdots$ 为 $f(z)$ 的一级极点。

(6) **解法 1** $\quad \lim\limits_{z\to1^-}e^{\frac{1}{z-1}}=0\qquad \lim\limits_{z\to1^+}e^{\frac{1}{z-1}}=+\infty$

所以 $\lim\limits_{z\to1}e^{\frac{1}{z-1}}$ 不存在。

所以 $z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点。

解法 2 $\quad e^{\frac{1}{z-1}}=1+\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{(z-1)^2}+\cdots$

因为上式含无穷多个负幂项，所以 $z=1$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

(7) **解法 1** $\quad e^z-1=0\Rightarrow e^z=1$

$z=\ln1=\ln|1|+i(0+2k\pi)=2k\pi i\quad k=0,\pm1,\cdots$

因为 $(e^z-1)|_{z=2k\pi i}=0$

$(e^z-1)'|_{z=2k\pi i}=e^z|_{z=2k\pi i}=1\neq0$

所以 $z_k=2k\pi i$ 是 e^z-1 的一级零点，其中 $k=0$ 时，$z_0=0$。

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点。

$z_k=2k\pi i$，$k=\pm1,\cdots$ 为 $f(z)$ 的一级极点。

解法 2 $\quad e^z-1=\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)-1$

$$=z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=z\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)$$

所以 $z=0$ 是 e^z-1 的一级零点，$z=0$ 为 $f(z)$ 的三极极点。

$$e^z-1=e^{z-2k\pi i+2k\pi i}-1=e^{z-2k\pi i}-1$$
$$=\left(1+(z-2k\pi i)+\frac{(z-2k\pi i)^2}{2!}+\cdots\right)-1$$
$$=(z-2k\pi i)\left[1+\frac{z-2k\pi i}{2!}+\frac{(z-2k\pi i)^2}{3!}+\cdots\right]$$

所以 $z_k=2k\pi i$ 是 e^z-1 的一级零点。

z_k 为 $f(z)$ 的一级极点，$k=\pm1,\pm2,\cdots$

(8) **解法 1** $\quad z^n+1=0\Rightarrow z^n=-1$

所以 $z_k=\sqrt[n]{-1}=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{n}$，$k=0,1,\cdots,n-1$

因为 $\lim\limits_{z\to z_k}\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}=\infty$，　所以 $z=z_k$ 是 $f(z)$ 的极点。

$z_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 是 $z^n+1=0$ 的所有根。

所以 $z^n+1=(z-z_0)\cdots(z-z_{n-1})=0$

所以 $z=z_k$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

解法 2 $\quad$ 令 $P(z)=z^{2n}\quad Q(z)=1+z^n$

设 z_k 满足 $Q(z_k)=0$，则 $P(z)$，$Q(z)$ 在 z_k 解析，且

$$P(z_k)\neq0,Q(z_k)=0,\quad Q'(z_k)=nz_k^{n-1}\neq0$$

所以 $z=z_k$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

(9) $\sin z^2=z^2-\dfrac{(z^2)^3}{3!}+\cdots=z^2\left(1-\dfrac{z^4}{3!}+\cdots\right)$

所以 $z=0$ 是 $\sin z^2$ 的二级零点。

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点。

因为 $\sin z^2=0\Rightarrow z^2=\pm k\pi$，$k=1,2,\cdots$

① $z^2=k\pi\Rightarrow z_k=\pm\sqrt{k\pi}$，$k=1,2,\cdots$

② $z^2=-k\pi=i^2k\pi\Rightarrow z_k=\pm i\sqrt{k\pi}$，$k=1,2,\cdots$

$$(\sin z^2)|_{z=z_k}=0,\quad(\sin z^2)'|_{z=z_k}\neq0$$

所以可知：$z_k=\pm\sqrt{k\pi}$，$z_k=\pm i\sqrt{k\pi}$ $(k=1,2,\cdots)$ 均为 $f(z)$ 的一级极点。

2. 求证：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级零点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

证明 $\quad$ 因为 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点

所以 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq0$

因为 $f'(z) = m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z-z_0)^m\varphi'(z)$

$$= (z-z_0)^{m-1}[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)]$$，$\varphi(z)$ 在 z_0 解析

令 $g(z) = m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)$，则 $g(z)$ 在 z_0 解析，且 $g(z_0)\neq 0$

所以 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

3. 验证：$z = \frac{\pi}{2}i$ 是 chz 的一级零点

证法 1 $\operatorname{ch}z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ 在 $z = \frac{\pi}{2}i$ 解析

$$\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}i = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$(\operatorname{ch}z)'\big|_{z=\frac{\pi}{2}i} = (\operatorname{sh}z)\big|_{z=\frac{\pi}{2}i} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}-e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i \neq 0$$

所以 $z = \frac{\pi}{2}i$ 是 chz 的一级零点

证法 2 $e^z = e^{z-\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}i}e^{z-\frac{\pi}{2}i} = ie^{z-\frac{\pi}{2}i}$

$$= i\left[1 + \left(z-\frac{\pi}{2}i\right) + \frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^2 + \cdots\right]$$

$$e^{-z} = e^{-z+\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{-(z-\frac{\pi}{2}i)} = -ie^{-(z-\frac{\pi}{2}i)}$$

$$= -i\left[1 - \left(z-\frac{\pi}{2}i\right) + \frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^2 - \cdots\right]$$

所以 $e^z + e^{-z} = 2i\left[\left(z-\frac{\pi}{2}i\right) + \frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^3 + \cdots\right]$

$$= 2i\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)\left[1 + \frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^2 + \cdots\right]$$

所以 $\frac{e^z+e^{-z}}{2} = i\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)\left[1 + \frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^2 + \cdots\right]$

所以 $\operatorname{ch}z = \left(z-\frac{\pi}{2}i\right)i\left[1 + \frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^2 + \cdots\right]$

所以 $z = \frac{\pi}{2}i$ 是 chz 的一级零点

4. $z = 0$ 是函数 $(\sin z + \operatorname{sh}z - 2z)^{-2}$ 的几级极点？

解法 1 $\operatorname{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,\quad |z| < +\infty$$

因为 $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

所以 $e^z - e^{-z} = 2z + 2\frac{z^3}{3!} + 2\frac{z^5}{5!} + \cdots$

所以 $\operatorname{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots,\quad |z| < +\infty$

所以 $\sin z + \operatorname{sh}z - 2z = 2\left(\frac{z^5}{5!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{13}}{13!} + \cdots\right)$

所以 $(\sin z + \operatorname{sh}z - 2z)^2 = z^{10}\left(\frac{2}{5!} + \cdots\right)^2$

故 $z = 0$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 10 级零点，$z = 0$ 为 $f(z)$ 的 10 级极点。

解法 2 令 $f(z) = (\sin z + \operatorname{sh}z - 2z)$ $\qquad f(0) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \cos z + \operatorname{ch}z - 2 & f'(0) &= 0\\
f''(z) &= -\sin z + \operatorname{sh}z & f''(0) &= 0\\
f'''(z) &= -\cos z + \operatorname{ch}z & f'''(0) &= 0\\
f^{(4)}(z) &= \sin z + \operatorname{sh}z & f^{(4)}(0) &= 0\\
f^{(5)}(z) &= \cos z + \operatorname{ch}z & f^{(5)}(0) &\neq 0
\end{aligned}$$

所以 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 5 级零点。

令 $f(z) = z^5 g(z)$ 因为 $g(0) \neq 0$ 且 $g(z)$ 在 $z = 0$ 点解析

于是 $z = 0$ 是 $\frac{1}{\sin z + \operatorname{sh}z - 2z}$ 的 5 级极点

故 $z = 0$ 为 $\frac{1}{(\sin z + \operatorname{sh}z - 2z)^2}$ 的 10 级极点

5. 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\text{（或两端均为 }\infty\text{）}$$

证明 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 z_0 为 $m(\geqslant 1)$ 级与 $n(\geqslant 1)$ 级零点，则 $f(z) = (z-z_0)^m\varphi(z)$，$g(z) = (z-z_0)^n\psi(z)$ 其中 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别在 z_0 解析，且 $\varphi(z)\neq 0$，$\psi(z)\neq 0$。

求导 $f'(z) = m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z-z_0)^m\varphi'(z)$

$$g'(z) = n(z-z_0)^{n-1}\psi(z) + (z-z_0)^n\psi'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{n\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}$$

1° 当 $m>n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$ 均为零，相等。

2° 当 $m=n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$ 均为 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，相等。

3° 当 $m<n$ 时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}$，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$ 均为 ∞。 证毕。

6. 设函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点(或零点)，那么下列三个函数：

(1)$\varphi(z)\psi(z)$；(2)$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$；(3)$\varphi(z)+\psi(z)$ 在 $z=a$ 处各有什么性质？

解 由已知条件，可设 $\varphi(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m}\varphi_1(z)$，$\psi(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n}\psi_1(z)$，其中 $\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$ 都在 $z=a$ 的某邻域内解析，且 $\varphi_1(a)\neq 0$，$\psi_1(a)\neq 0$。

(1)$\varphi(z)\cdot\psi(z)=\dfrac{1}{(z-a)^{m+n}}\varphi_1(z)\cdot\psi_1(z)$

其中 $\varphi_1(z)\cdot\psi_1(z)$ 在 $z=a$ 的某邻域解析，且 $\varphi_1(a)\cdot\psi_1(a)\neq 0$，所以 $z=a$ 为 $\varphi(z)\cdot\psi(z)$ 的 $m+n$ 级极点。

(2) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{1}{(z-a)^{m-n}}\cdot\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$

其中$\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$ 在 $z=a$ 某邻域解析，且$\dfrac{\varphi_1(a)}{\psi_1(a)}\neq 0$，所以

当 $n>m$ 时，$z=a$ 为 $n-m$ 级零点。

$n>m$ 时，$z=a$ 为 $m-n$ 级极点。

$n=m$ 时，$z=a$ 为解析点。

(3)$\varphi(z)+\psi(z)=\dfrac{\varphi_1(z)}{(z-a)^m}+\dfrac{\psi_1(z)}{(z-a)^n}\triangleq F(z)$

若 $m>n$，$F(z)=\dfrac{\varphi_1(z)+(z-a)^{m-n}\psi_1(z)}{(z-a)^m}$ 其分子在 $z=a$ 的某邻域解析，且在 $z=a$ 时不为零，所以 $z=a$ 为 m 级极点。

若 $m<n$，讨论同上知 $z=a$ 为 n 级极点。

若 $m=n$，$F(z)=\dfrac{\varphi_1(z)+\psi_1(z)}{(z-a)^m}$

当 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)\neq 0$ 时，$z=a$ 为 m 级极点。

当 $\varphi_1(a)+\psi_1(a)=0$ 时，设 $z=a$ 为其 k 级零点；

$k<m$，则 $z=a$ 为 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $m-k$ 级极点；若 $k=m$，则 $z=a$ 为解析点(或零点)。

7. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点；这个函数又有下列洛朗展开式：

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},|z-1|>1,$$

所以"$z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点"，又其中不含 $(z-1)^{-1}$ 幂，因此 $\text{Res}[f(z),1]=0$，这些说法对吗？

解 不对。

洛朗展开式应在 $0<|z-1|<1$ 内展开

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z(z-1)^2}\\&=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\\&=\frac{1}{1+z-1}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\\&=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\\&=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\end{aligned}$$

可知：$z=1$ 是 $f(z)$ 的二级极点

且 $\text{Res}[f(z),1]=C_{-1}=-1$

因为孤立奇点的分类必须根据在这个邻域内的洛朗展开式来决定，题中洛朗展开式是在 $|z-1|>1$ 展开的，故不符合要求。

8. 求下列各函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数：

(1) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$ (2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ (3) $\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$ (4) $\dfrac{z}{\cos z}$

(5)$\cos\dfrac{1}{1-z}$ (6)$z^2\sin\dfrac{1}{z}$ (7) $\dfrac{1}{z\sin z}$ (8) $\dfrac{\text{sh}z}{\text{ch}z}$

解 (1)$z=0$ 及 $z=2$ 均为 $f(z)$ 的一级极点。

$$R[f(z),0]=\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{z+1}{z^2-2z}=-\frac{1}{2}$$

$$R[f(z),2]=\lim_{z\to 2}(z-2)\cdot\frac{z+1}{z^2-2z}=\frac{3}{2}$$

(2) **解法 1** $\frac{1-e^{2z}}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left\{1-\left[1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\cdots\right]\right\}$

$$= \frac{1}{z^4}\left[-2z-\frac{2^2z^2}{2!}-\frac{2^3z^3}{3!}-\frac{2^4z^4}{4!}-\cdots\right]$$

$$= -\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{4}{3}\frac{1}{z}-\frac{2}{3}-\cdots$$

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点，z^{-1} 前的系数为 $\left(-\frac{4}{3}\right)$

所以 $\text{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4},0\right]=-\frac{4}{3}$

解法 2 因为 $(1-e^{2z})|_{z=0}=0$，$(1-e^{2z})'|_{z=0}=-2e^{2z}|_{z=0}=-2\neq 0$，

所以 $z=0$ 为 $(1-e^{2z})$ 的一级零点。从而 $z=0$ 为 $f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的三级极点。

$$\text{Res}[f(z),0]=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}\left[z^4\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right]=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}(-8e^{2z})=-\frac{4}{3}$$

(3) $z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的三级极点

所以 $\text{Res}[f(z),i]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\frac{1+z^4}{(z-i)^3(z+i)^3}\right]$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^4+4z^3i-3}{(z+i)^4}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{-12z^2+12}{(z+i)^5}=-\frac{3}{8}i$$

同理可得：$\text{Res}[f(z),-i]=\frac{3}{8}i$

(4) $\cos z=0\Rightarrow z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

令 $P(z)=z$，$Q(z)=\cos z$

$P(z)$，$Q(z)$ 在 $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 均解析

$P(z)|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}\neq 0$ $\quad Q(z)|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=0$

$Q'(z)|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=-\sin z|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=-(-1)^k=(-1)^{k+1}\neq 0$

所以 $z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 是 $f(z)$ 的一级极点。

所以 $\text{Res}[f(z),z_k]=\frac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=(-1)^{k+1}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

(5) $\cos\frac{1}{1-z}=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(1-z)^4}-\cdots$

$(0<|z-1|<+\infty)$

因为不含正幂项，含无穷多负幂项

所以 $z=1$ 是本性奇点

且 $\text{Res}[f(z),1]=C_{-1}=0$

(6) $z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots\right)$

$$=z-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^3}-\cdots$$

因为含无穷多负幂项

所以 $z=0$ 是本性奇点

且 $\text{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{3!}=C_{-1}=-\frac{1}{6}$

(7) $z\sin z=z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)$

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点

$$\text{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{1}{z\sin z}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{\sin z}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-\cos z+z\sin z}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2}=0$$

所以 $\text{Res}[f(z),0]=0$

$\sin z=0\Rightarrow z=k\pi$，$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

$k=0$ 上面已研究，设 $k\neq 0$

因为 $(z\sin z)|_{z=k\pi}=0$

$(z\sin z)'|_{z=k\pi}=(\sin z+z\cos z)|_{z=k\pi}$

$$=\sin k\pi+k\pi\cos k\pi=k\pi(-1)^k\neq 0$$

所以 $z=k\pi$，$k=\pm 1,\cdots$ 是 $f(z)$ 的一级极点

$$\text{Res}[f(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)\frac{1}{z\sin z}=\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{z\sin z}$$

$$=\lim_{z\to k\pi}\frac{1}{\sin z+z\cos z}=\frac{1}{\sin k\pi+k\pi\cos k\pi}$$

$$=\frac{1}{k\pi(-1)^k}=\frac{(-1)^k}{k\pi}，(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

(8) 令 $P(z)=\text{sh}z \quad Q(z)=\text{ch}z$，取 $z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$

$P(z),Q(z)$ 在 z_k 解析，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$P(z_k)=\text{sh}z_k=\text{sh}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]$$

$$Q(z_k)=0$$

$$Q'(z)|_{z=z_k}=\text{sh}z|_{z=z_k}=\text{sh}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]\neq 0$$

所以 $z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$ 是 $f(z)$ 的一级极点

所以 $\text{Res}\left[f(z),\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i\right]=\dfrac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z=z_k}=\dfrac{\text{sh}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]}{\text{sh}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]}=1$

9. 计算下列各积分(利用留数；圆周均取正向)：

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}dz$　　(2) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}dz$(其中 m 为整数)　　(4) $\displaystyle\oint_{|z-2i|=1}\text{th}z dz$；

(5) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\tan\pi z dz$；

(6) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}dz$；($n$ 为正整数，且 $|a|\neq1,|b|\neq1,|a|<|b|$)

解 (1) 因为 $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}=1$ 　所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点

由留数定理得

原式 $=2\pi i\{\text{Res}[f(z),0]\}=2\pi i0=0$

(2) 因为 $z=1$ 是 $f(z)$ 的二级极点

所以 $\text{Res}\left[\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2},1\right]=\dfrac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to1}\dfrac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}\right]$

$=\lim\limits_{z\to1}2e^{2z}=2e^2$

所以原式 $=2\pi i\{\text{Res}[f(z),1]\}=2\pi i2e^2=4e^2\pi i$

(3) $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

$$1-\cos z=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$\frac{1-\cos z}{z^m}=\frac{1}{2!}z^{2-m}-\frac{1}{4!}z^{4-m}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-m}}{(2n)!}+\cdots$$

① 当 $m=3,5,7,\cdots$ 时，C_{-1} 分别为上式中第一项系数，第二项系数，第三项系数…，此时，设 $m=2k+1$，则 $k=1,2,3,\cdots$

$$C_{-1}=(-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{1}{(m-1)!}$$

原式 $=2\pi iC_{-1}=(-1)^{\frac{m-3}{2}}\dfrac{2\pi i}{(m-1)!}$

② 当 m 为偶数或小于 3 的奇数时，$\dfrac{1-\cos z}{z^m}$ 的展开式中，不含 $\dfrac{1}{z}$ 项，即 $C_{-1}=0$，此时，原式 $=0$

(4) $\text{th}z=\dfrac{\text{sh}z}{\text{ch}z}$ 　由 $\text{ch}z=0$ 　即 $\dfrac{e^{-z}+e^z}{2}=0$

$\Rightarrow z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i \quad k\in\mathbf{N}$

令 $P(z)=\text{sh}z \quad Q(z)=\text{ch}z$

所以 $P(z_k)=\text{sh}z_k\neq0 \quad Q(z_k)=\text{ch}z_k=0,\quad Q'(z_k)=\text{sh}z_k\neq0$

所以可知 　$z_k=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$ 是它的一级极点

$C:|z-2i|=i$

只有取 $k=0$，即 $z=\dfrac{\pi i}{2}$ 　在 $C:|z-2i|<1$ 内

所以 $\text{Res}\left[f(z),\dfrac{\pi}{2}i\right]=\dfrac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}i}=\dfrac{\text{sh}z}{\text{sh}z}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=1$

所以 $\displaystyle\oint_{|z-2i|=1}\text{th}z dz=2\pi i\text{Res}\left[f(z),-\frac{\pi}{2}i\right]=2\pi i1=2\pi i$

(5) $\tan\pi z=\dfrac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$

$\cos\pi z=0\Rightarrow\pi z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow z_k=k+\dfrac{1}{2} \quad k=0,\pm1,\cdots$

令 $P(z)=\sin\pi z \quad Q(z)=\cos\pi z$

$P(z_k)\neq0,\quad Q(z_k)=0,\quad Q'(z_k)=-\pi\sin(z_k)\neq0$

所以 $z_k=k+\dfrac{1}{2}$ 是 $f(z)$ 的一级极点

所以 $\text{Res}[f(z),z_k]=\dfrac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z=z_k}=\dfrac{\sin\pi z}{-\pi\sin\pi z}\Big|_{z=z_k}=-\dfrac{1}{\pi}$

因为 $|z|=3$

所以 $z_k=k+\frac{1}{2}, k=0,\pm1,\pm2,-3$，在 $|z|=3$ 内，

即 $z=\pm\frac{1}{2}, z=\pm\frac{3}{2}, z=\pm\frac{5}{2}$

所以 $\oint_{|z|=3}\tan\pi z\mathrm{d}z=2\pi i\sum_k 6\mathrm{Res}[f(z),z_k]=2\pi i6\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-12i$

(6)[提示 试就 $|a|,|b|$ 与 1 的大小关系分别进行讨论]

解 设 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$，则 $z=a,b$ 均为 $f(z)$ 的 n 级极点

① 当 $1<|a|<|b|$ 时

$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内无奇点

$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内处处解析

由柯西-古萨定理知：$\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=0$

② 当 $|a|<|b|<1$ 时

$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内有两个 n 级极点 $z=a, z=b$

所以 $\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),a]+\mathrm{Res}[f(z),b]\}$

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[\frac{1}{(z-a)^n}\frac{1}{(z-b)^n}(z-a)^n\right]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[\frac{1}{(z-b)^n}\right]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-b)^{-n}]^{(n-1)}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots$$

$$[-n-(n-2)]\cdot\lim_{z\to a}\frac{1}{(z-b)^{2n-1}}$$

$$=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),b]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to b}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-b)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\right]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to b}[(z-a)^{-n}]^{(n-1)}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots$$

$$[-n-(n-2)]\lim_{z\to b}\frac{1}{(z-a)^{2n-1}}$$

$$=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-2+2)}{(n-1)!}\frac{1}{(b-a)^{2n-1}}$$

$$=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\frac{(-1)^{2n-1}}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=-\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=-\mathrm{Res}[f(z),a]$$

所以 $\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\{R[f(z),a]+(-R[f(z),a])\}=2\pi i0=0$

③ 当 $|a|<1<|b|$ 时

$f(z)=\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$ 在 $|z|=1$ 内只有 $z=a$ 是其 n 级极点

所以 $\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),a]$

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-a)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\right]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-b)^{-n}]^{(n-1)}$$

$$=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=\frac{(n-1)!(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!(n-1)!}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)n(n+1)\cdots(2n-2)}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

所以 $\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),a]$

$$=2\pi i(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2\pi(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}i$$

10. 判定 $z=\infty$ 是下列各函数的什么奇点？并求出在 ∞ 的留数：

(1) $\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$； (2) $\cos z-\sin z$； (3) $\frac{2z}{3+z^2}$

解(1)$\exp\left(\dfrac{1}{z^2}\right)=1+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2!\,z^4}+\dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{z^6}+\cdots,c<|z|<+\infty$

因为$\lim\limits_{z\to\infty}\exp\left(\dfrac{1}{z^2}\right)=0$

所以 $z=\infty$ 是可去奇点，$C_{-1}=0$

所以 $\text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=0$

(2)$\cos z-\sin z=\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots\right)-\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots\right)$

$$=1-z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}-(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\qquad(0<|z|<+\infty)$$

$\lim\limits_{z\to\infty}[\cos z-\sin z]$不存在。

所以 $z=\infty$ 是本性奇点，$C_{-1}=0$

所以 $\text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=0$

(3) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z}{3+z^2}=0\Rightarrow z=\infty$ 是可去奇点。

$3+z^2=0\Rightarrow z=\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

在 $\sqrt{3}<|z|<+\infty$ 内

$$\frac{2z}{3+z^2}=2z\frac{1}{z^2\left(1+\frac{3}{z^2}\right)}=\frac{2}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z^2}}$$

$$=\frac{2}{z}\left(1-\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^4}-\cdots\right)=\frac{2}{z}-\frac{6}{z^3}+\cdots$$

所以 $C_{-1}=2\text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-2$

11. 求 $\text{Res}[f(z),\infty]$的值

(1)$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$　　(2)$f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$

(1) 解法 1　$f(z)$ 在扩充复平面上有奇点 $z=\pm1,z=\infty$

所以 $\text{Res}[f(z),1]+\text{Res}[f(z),-1]+\text{Res}[f(z),\infty]=0$

而 $z=\pm1$ 是 $f(z)$ 的一级极点

所以 $\text{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{e^z}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{e}{1+1}=\dfrac{e}{2}$

$\text{Res}[f(z),-1]=\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\dfrac{e^z}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{e^{-1}}{-1-1}=-\dfrac{e^{-1}}{2}$

所以 $\text{Res}[f(z),\infty]=-\left(\dfrac{e}{2}-\dfrac{e^{-1}}{2}\right)=-\dfrac{e-e^{-1}}{2}=-\text{sh}1$

解法 2　$f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 展开

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$$

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right)$$

所以$\dfrac{e^z}{z^2-1}=\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{3^3}{3!}+\cdots\right)\left(\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^4}+\dfrac{1}{z^6}+\cdots\right)$

$$=\cdots+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z}+\frac{1}{7!}\frac{1}{z}+\cdots\right)+\cdots$$

$$=\cdots+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\right)+\cdots$$

所以 $C_{-1}=1+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{7!}+\cdots$

因为 $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\cdots$

$e^{-1}=1-1+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\cdots$

所以$\dfrac{e^1-e^{-1}}{2}=\text{sh}1=1+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{7!}+\cdots$

所以 $\text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-\text{sh}1$

(2) 解法 1　将 $f(z)$ 在 $4<|z|<+\infty$ 上展为洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=\frac{1}{z}\frac{1}{z^4\left(1+\frac{1}{z}\right)^4}\frac{1}{z\left(1-\frac{4}{z}\right)}$$

$$=\frac{1}{z^6}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-4}\left(1-\frac{4}{z}\right)^{-1}$$

因为 $C_{-1}=0$

所以 $\text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=0$

解法 2　$f(z)$ 在扩充复平面上有奇点 $z=0,-1,4,\infty$

$\text{Res}[f(z),0]+\text{Res}[f(z),-1]+\text{Res}[f(z),4]+\text{Res}[f(z),\infty]=0$

$z=0,z=4$ 是 $f(z)$ 的一级极点

所以 $\text{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to0}z\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=-\dfrac{1}{4}$

$$\text{Res}[f(z),4]=\lim_{z\to4}(z-4)\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{5^4}$$

$z=-1$ 是 $f(z)$ 的 4 级极点

所以 $\text{Res}[f(z),-1]=\dfrac{1}{3!}\lim\limits_{z\to-1}\left[\dfrac{1}{z(z-4)}\right]^{(3)}$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to-1}\frac{1}{4}\left[\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z}\right]^{(3)}$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to-1}\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{z-4}\right)^{(3)}-\left(\frac{1}{z}\right)^{(3)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}\lim_{z\to-1}\left[\frac{-6}{(z-4)^4}-\frac{-6}{z^4}\right]$$

$$=-\frac{1}{4\cdot5^4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{5^4}+\frac{1}{4}$$

所以 $\text{Res}[f(z),0]+\text{Res}[f(z),-1]+\text{Res}[f(z),4]=0$

$\Rightarrow\text{Res}[f(z),\infty]=-0=0$

12. 计算下列各积分，C 为正向圆周：

(1) $\displaystyle\oint_C\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z$，$C:|z|=3$

(2) $\displaystyle\oint_C\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$，$C:|z|=2$

(3) $\displaystyle\oint_C\frac{z^{2n}}{1+z^n}\mathrm{d}z$（$n$ 为一正整数），$C:|z|=r>1$

解 (1) 令 $z^4+2=0\Rightarrow z_k=\sqrt[4]{-2}$

$$=2^{\frac14}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad k=0,1,2,3$$

$$z_0=2^{\frac14}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_1=2^{\frac14}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=2^{\frac14}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_2=2^{\frac14}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=-2^{\frac14}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_3=2^{\frac14}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right)=-2^{\frac14}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

可见 $z=z_k$　$k=0,1,2,3$ 均在 $|z|=3$ 内且均为 $f(z)$ 的 3 级极点

又 $z^2+1=0$，$z_{4,5}=\pm i$，在 $|z|=3$ 内，且均为 2 级极点

即这 6 个极点均在 $|z|=3$ 内

所以 $$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=0}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]$$

但在整个扩充复平面上有奇点为 z_k，($k=0,\cdots,5$) 及 $z=\infty$

所以 $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]+\text{Res}[f(z),\infty]=0$

所以 $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]=-\text{Res}[f(z),\infty]=-(-C_{-1})=C_{-1}$

为了求 $\text{Res}[f(z),\infty]$，在 $3<|z|<\infty$ 内将 $f(z)$ 展为 z 的洛朗级数

$$f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}=\frac{z^{15}}{z^4\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2z^{12}\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^3}$$

$$=\frac{z^{15}}{z^{16}}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^3}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^{-2}\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^{-3}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\cdots\right)^2\left(1-\frac{2}{z^4}+\frac{4}{z^8}-\frac{8}{z^{12}}+\cdots\right)^3$$

$$=\frac{1}{z}+\cdots$$

所以 $C_{-1}=1$，$\text{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-1$

所以 $$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=0}^{5}\text{Res}[f(z),z_k]$$

$$=2\pi i\{-\text{Res}[f(z),\infty]\}=2\pi i[-(-C_{-1})]=2\pi i$$

(2) 因为 $|z|=2$ 内有两个奇点 $z=0$，$z=-1$

所以 $\displaystyle\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\{\text{Res}[f(z),0]+\text{Res}[f(z),-1]\}$

在 $z=-1$ 处，令 $P(z)=z^3e^{1/z}$，$Q(z)=1+z$

$P(-1)=-e^{-1}\neq0$　$Q(-1)=0$　$Q'(z)|_{z=-1}=1\neq0$

因为 $z=-1$ 是 $f(z)$ 的一级极点

所以 $\text{Res}[f(z),-1]=\dfrac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z=-1}=\dfrac{-e^{-1}}{1}=-\dfrac{1}{e}$

因为 $z=0$ 是奇点

所以在 $z=0$ 的环域 $0<|z|<1$ 内将 $f(z)$ 展开为关于 z 的洛朗级数

$$e^{\frac1z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{4!\,z^4}+\frac{1}{5!\,z^5}+\cdots$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6-\cdots$$

所以 $f(z)=\dfrac{z^3e^{1/z}}{1+z}$

$$=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots\right)\cdot$$
$$(1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6-\cdots)$$

$$=z^3\Big(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots-$$
$$z-1-\frac{1}{2!z}-\frac{1}{3!z^2}-\frac{1}{4!z^3}-\frac{1}{5!z^4}-\frac{1}{6!z^5}-\cdots+$$
$$z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\frac{1}{5!z^3}+\frac{1}{6!z^4}+\cdots-$$
$$z^3-z^2-\frac{z}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!z}-\frac{1}{5!z^2}-\frac{1}{6!z^3}-\cdots+\cdots\Big)$$

$$=z^3\left[\cdots+\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots\right)+\cdots\right]$$

$$=\cdots+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots\right)+\cdots$$

因为含无穷多项负幂项， 所以 $z=0$ 是本性奇点。

$$C_{-1}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots$$

因为 $e^{-z}=1-z+\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^5}{5!}+\cdots$

所以 $e^{-1}=e^{-z}|_{z=1}=1-1+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\cdots$

所以 $\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}-\dfrac{1}{7!}+\cdots=e^{-1}-\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)=e^{-1}-\dfrac{1}{3}$

所以 $C_{-1}=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{3}$

所以 $\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),-1]=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{3}$

所以原式 $=2\pi i\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}\pi i$

(3)① 当 $n=1$ 时，$\displaystyle\oint_C\frac{z^{2n}}{1+z^n}dz=\oint_C\frac{z^2}{1+z}dz=2\pi i$

② 当 $n>1$ 时，令 $1+z^n=0$，$z_k=\sqrt[n]{-1}=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}(k=0,1,\cdots,n-1)$ 共有 n 个一级极点 z_k 全在 $|z|=r>1$ 内

所以 $\displaystyle\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$ 而 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{z^{2n}}{1+z^n}=\infty$。

所以 $z=\infty$ 为奇点

所以在整个扩充复平面上有 $(n+1)$ 个奇点

$z_k,k=0,1,\cdots,n-1,z=\infty$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}[f(z),z_k]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-(-C_{-1})=C_{-1}$$

以下求 C_{-1}：将 $f(z)$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内展开为洛朗级数

$$f(z)=\frac{z^{2n}}{1+z^n}=z^{2n}\frac{1}{1+z^n}=z^{2n}\frac{1}{z^n\left(1+\frac{1}{z^n}\right)}$$

$$=z^n\left(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}-\frac{1}{z^{3n}}+\cdots\right)=z^n-1+\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$$

因为最高次正幂为 z^n，所以 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的 n 级极点，且 $C_{-1}=0$

所以 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=0$

所以 $\displaystyle\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=2\pi i(-\mathrm{Res}[f(z),\infty])$

$$=2\pi i[-(-C_{-1})]=0$$

所以原式 $=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}$

13. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\ (a>b>0)$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$　　(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$

解 令 $z=e^{i\theta}$ 则 $dz=ize^{i\theta}$...

$\sin\theta=\dfrac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\dfrac{z^2-1}{2iz}$

原式 $=\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\dfrac{z^2-1}{2iz}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{10iz+3z^2-3}dz$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{\left(\sqrt{3}\,z + \frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} \mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{\left(\sqrt{3}\,z + \frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{i} - \frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}\,z + \frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{i} + \frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)} \mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{\sqrt{3}\left(z + \frac{\mathrm{i}}{3}\right)\sqrt{3}\,(z + 3\mathrm{i})} \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{z + 3\mathrm{i}}\right)\Bigg|_{z=-\frac{\mathrm{i}}{3}} = \frac{\pi}{2}$$

(2) 原式 $= \displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z - z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)^2}{a + \frac{b}{2}(z + z^{-1})} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$

$$= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)^2}{6z^2\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)} \mathrm{d}z$$

因为 $z^2 + \frac{2a}{b}z + 1 = \left\{z - \left(\frac{-a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)\right\}\left\{z - \left(-\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)\right\}$

$$0 < \left|-\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right| = \frac{1}{1 - \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}} < 1\,(a > b > 0)$$

所以原式 $= -\dfrac{\pi}{b}\left\{\mathrm{Res}\left[\dfrac{(z^2 - 1)^2}{z^2\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)}, 0\right] + \right.$

$$\left.\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2 - 1)^2}{z^2\left(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1\right)}, \left(-\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{-\pi}{b}\left(-\frac{2a}{b} + \frac{2}{b}\sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

(3) 如图 5-1，当 $r > 1$ 时，由留数定理知：

$$\int_0^r \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-r}^r \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{(1 + z^2)^2} + \pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1 + z^2)^2}, \mathrm{i}\right]$$

因为 $\left|\displaystyle\int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{(1 + z^2)^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi r}{(r^2 - 1)} \to 0$

$(r \to +\infty)$

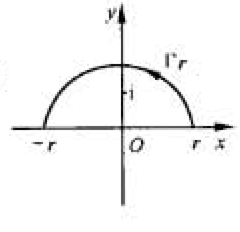


图 5-1

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1 + z^2)^2}, \mathrm{i}\right] = \frac{1}{(2 - 1)!}\left[(z + \mathrm{i})^{-2}\right]^{(2-1)}\Big|_{z=\mathrm{i}}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2}\mathrm{d}x$

$$= 2\lim_{r \to +\infty}\int_0^r \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2} = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{-\mathrm{i}}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(4) 设 $f(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^4}$，它在上半平面内有两个一级极点

$1 + z^4 = 0 \Rightarrow z = \sqrt{-1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi + 2k\pi}{4}\mathrm{i}}\,(k = 0, 1, 2, 3) \Rightarrow z_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ 在上半平面

$$\mathrm{Res}[f(z), z_1] = \frac{z^2}{(1 + z^4)'}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \frac{z^2}{4z^3}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \frac{1}{4z}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_2] = \frac{z^2}{(1 + z^4)'}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}} = \frac{z^2}{4z^3}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}} = \frac{1}{4z}\Bigg|_{z=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}}$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}$$

所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Res}[f(z), z_1] + \mathrm{Res}[f(z), z_2]\}$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}\right)$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

(5) 设 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4z + 5}$，

$$f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{[z - (-2 + \mathrm{i})][z - (-2 - \mathrm{i})]}$$

在上半平面内有一级极点 $z = -2 + \mathrm{i}$，且

$$\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}, -2 + \mathrm{i}] = \lim_{z \to -2+\mathrm{i}} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \cdot [z - (-2 + \mathrm{i})] = \frac{\mathrm{e}^{-1-2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}$$

于是 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 4x + 5}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^4 + 4z + 5}\mathrm{d}z$

$$= \mathrm{Re}[2\pi \mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}, -2+\mathrm{i})]$$

$$= \mathrm{Re}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1-2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}\right]$$

$$= \mathrm{Re}(\pi \mathrm{e}^{-1-2\mathrm{i}}) = \pi \mathrm{e}^{-1}\cos 2$$

(6) 设 $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，分母最高次数比分子最高次数高一次。

因为 $f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\dfrac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$ 在上半平面内有一级奇点 $z=\mathrm{i}$，

$$\mathrm{Res}[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}] = \lim_{z\to \mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\cdot f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$$

于是 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Im}[2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}z},\mathrm{i})]$$

$$= \mathrm{Im}\left(2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}\right) = \pi\mathrm{e}^{-1}$$

14. 试用图 5-2 中的积分路线，求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

由柯西-古萨基本定理有

$$\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z + \int_r^R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x +$$

$$\mathrm{i}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}y)}}{R+\mathrm{i}y}\mathrm{d}y + \int_R^{-R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\pi\mathrm{i})}}{x+\pi\mathrm{i}}\mathrm{d}x +$$

$$\mathrm{i}\int_{\pi}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-R+\mathrm{i}y)}}{-R+\mathrm{i}y}\mathrm{d}y = 0$$

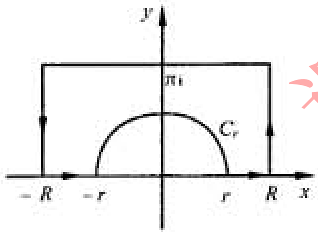


图 5-2

令 $x=-t$，有 $$\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x = \int_R^r\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{t}\mathrm{d}t = -\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x$$

故 $$\int_{-R}^{-r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_r^R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\int_r^R\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}y)}}{R+\mathrm{i}y}\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}R}}{R+\mathrm{i}y}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}R}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{R+\mathrm{i}y}\mathrm{d}y \to 0(R\to\infty)$$

同理 $$\int_{\pi}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-R+\mathrm{i}y)}}{-R+\mathrm{i}y}\to 0(R\to\infty)$$

又 $$\int_R^{-R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\pi)}}{x-\pi}\mathrm{d}x = \int_R^{-R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}}{x-\pi}\mathrm{d}x \to 0(R\to\infty)$$

由例 4 知 $$\lim_{r\to\infty}\int_{Cr}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}$$

故 $$2\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}$$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

***15.** 利用公式(5.4.1)计算下列积分

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}\mathrm{d}z$；　(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}\mathrm{d}z$；

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\tan z\mathrm{d}z$　(4) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}\mathrm{d}z$

解 已知 $\displaystyle\oint_c\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(N-P)$（$N$：$f(z)$ 在 c 零点个数，P：$f(z)$ 在 c 极点个数）

(1) 设 $f(z)=z$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内只有一个 1 级零点

故 $$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z} = 2\pi\mathrm{i}$$

(2) 设 $f(z)=z^2-1$，则 $z=\pm 1$ 是 $f(z)$ 的一级零点

$$\oint_{|z|=3}\frac{z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\frac{2z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\cdot 2 = 2\pi\mathrm{i}$$

(3) 设 $f(z)=\cos z$，则 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内有两个零点

$$\oint_{|z|=3}\tan z\mathrm{d}z = -\oint_{|z|=3}\frac{-\sin z}{\cos z}\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\cdot 2 = -4\pi\mathrm{i}$$

(4) $$\oint_{|z|=3}\left(\frac{1}{z(z+1)}\right)\mathrm{d}z = \oint_{|z|=3}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=3}\frac{1}{z}\mathrm{d}z - \oint_{|z|=3}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z$$

而 z 和 $z+1$ 在 $|z|=3$ 内分别只有一个零点

故 $$\oint_{|z|=3}\frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i},\quad \oint_{|z|=3}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i} = 0$$

***16.** 设 C 为区域 D 内的一条正向简单闭曲线，z_0 为 C 内一点，如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$。在 C 内 $f(z)$ 无其他零点，试证：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=3}\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = z_0$$

证明　因为 z_0 是 $f(z)$ 的一阶零点，故存在 $R_\rho > 0$，当 $0 < |z - z_0| < R_\rho$ 时，$f(z) = (z - z_0)g_\rho(z)$，其中 $g_\rho(z)$ 是 $|z - z_0| < R_\rho$ 内无零点的解析函数。

从而
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{g'_\rho(z)}{g_\rho(z)} \quad (0 < |z - z_0| < R_\rho)$$

故
$$\mathrm{Res}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = z_0$$

又 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ 在 D 内只有奇点 z_0，

故由留数定理有
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Res}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}, z_0\right) = z_0$$

*17. 设 $\varphi(z)$ 在 $C: |z| = 1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)| < 1$，证明：在 C 内只有一个 z_0 使 $\varphi(z_0) = z_0$。

证明　设 $f(z) = -z$，则 $f(z)$ 在 C 上和它的内部解析，且在 C 上满足
$$1 = |f(z)| = |-z| > |\varphi(z)|$$
根据路西定理：$f(z)$ 与 $f(z) + \varphi(z)$ 在 C 内的零点个数相同。因为 $f(z) = -z$ 在 C 内只有一个零点 $z = 0$，所以 $f(z) + \varphi(z) = -z + \varphi(z)$ 在 C 内也只有一个零点 z_0，即 $\varphi(z_0) = z$。

*18. 证明：当 $|a| > e$ 时，方程 $e^z - az^n = 0$ 在单位圆 $|z| = 1$ 内有 n 个根。

证明　设 $f(z) = az^n \quad g(z) = -e^z$

当 $|z| = 1$ 时，$|f(z)| = |a||z|^n = |a| > e$，$|g(z)| = e^{\cos\theta} \leqslant e$

故由路西定理 $e^z - az^n$ 在 $|z| < 1$ 内的零点的个数与 az^n 相同，即有 n 个。

*19. 证明：方程 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根都在 $1 \leqslant |z| \leqslant 2$ 内

证明　(1) 设 $f(z) = z^7 \quad g(z) = -z^3 + 12$

当 $|z| = 2$ 时 $|f(z)| = 2^7 \quad |g(z)| = |-2^3 + 2| = 4$

故 $z^7 - z^3 + 12$ 在 $|z| < 2$ 内的零点个数与 z^7 相同即 7 个

(2) 设 $f(z) = 12,\quad g(z) = z^7 - z^3$

当 $|z| = 1$ 时，$|f(z)| = 12$，$|g(z)| < |z^7| + |z^3| = 2$

从而 $z^7 - z^3 + 12$ 在 $|z| < 1$ 零点个数为 0

由 ①② 可知方程 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根都在圆环域 $1 \leqslant |z| \leqslant 2$ 内。

第六章　共形映射

> 有规则必有例外。
>
> ——塞万提斯

导　学

共形映射是从几何的角度对解析函数的性质和应用进行讨论，它在流体力学、电磁学、热传导理论等领域有广泛的应用，它能把在比较复杂区域上所讨论的问题转化到比较简单区域上讨论。本章先介绍共形映射的概念和性质，然后进一步研究分式线性函数和几个初等函数所构成的共形映射的性质。

复变函数向应用学科的延伸是高等数学无法完全取代的，这昭示着复变函数学科的强大生命力。

本章知识结构

- 共形映射
  - 解析函数的导数的几何意义
  - 共形映射的概念
  - 分式线性映射
    - 保角性
    - 保圆性
    - 保对称性
  - 惟一决定分式线性映射的条件
  - 几个初等函数构成的映射
    - 幂 $w=z^n$
    - 指数 $w=e^z$
    - 儒可夫斯基函数
  - 几个一般性定理
  - 施瓦茨-克里斯托费尔映射
  - 拉普拉斯方程的边值问题

习题全解

1. 求 $w=z^2$ 在 $z=i$ 处的伸缩率和旋转角。问：$w=z^2$ 将经过点 $z=i$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向映射成 w 平面上哪一个方向？并作图。

解 因为 $w'=2z$，$w'|_{z=i}=2i$

所以伸缩率 $|w'(i)|=|2i|=2$

旋转角(即转动角)$\mathrm{Arg}w'(i)=\mathrm{Arg}(2i)=\dfrac{\pi}{2}$

因为 $w=z^2$ 且 $z_0=i$

所以 $w(i)=-1$，并由旋转角意义可知：

过 $z=i$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向 $\xrightarrow{w=z^2}$ 过 $u=-1$ 平行于 v 轴的正向，如图 6-1。

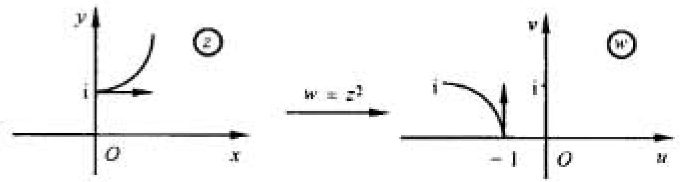


图 6-1

2. 一个解析函数所构成的映射在什么条件下具有伸缩率和旋转角的不变性？映射 $w=z^2$ 在 z 平面上每一点都具有这个性质吗？

解 (1) 由第六章 §1 节定理 1 知条件为：该解析函数的导数不等于 0；

(2) 因为 $w=z^2$ 所以 $w'=2z$

由使 $w'|_{z=0}=2z|_{z=0}=0$ 的点不具有该性质可得

$w=z^2$ 在 $z\neq 0$ 处具有伸缩率与旋转角的不变性。

3. 设 $w=f(z)$ 在 z_0 解析，且 $f'(z_0)\neq 0$。为什么说：曲线 C 经过映射 $w=f(z)$ 后在 z_0 的转动角与伸缩率跟曲线 C 的形状和方向无关？

解 因为曲线 C 经过映射 $w=f(z)$ 后在 z_0 的转动角和伸缩率分别为 $\mathrm{Arg}(f'(z_0))$、$|f'(z_0)|$，只与 $w=f(z)$ 有关

所以与经过 z_0 的曲线 C 的形状及方向无关

4. 在映射 $w = iz$ 下，下列图形映射成什么图形？

(1) 以 $z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = 1$ 为顶点的三角形；

(2) 圆域 $|z-1| \leqslant 1$。

解 (1) 分别将 $z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = 1$ 代入 $w = iz$ 得

$$w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = i$$

因为 $w' = i \neq 0, |w'| = |i| = 1$

所以 $w = iz$ 是整个复平面上的分式线性共形映射，具有保角性及保伸缩性，

$|w| = |iz| = |z|, \mathrm{Arg}w = \mathrm{Arg}z + \frac{\pi}{2}$，辐角增加 $\frac{\pi}{2}$。

直线上的无穷远点会被映射成无穷远点。

$w = iz$ 将直线映射为直线。

映射成的图形是以 $w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = i$ 为顶点的三角形。如图 6-2。

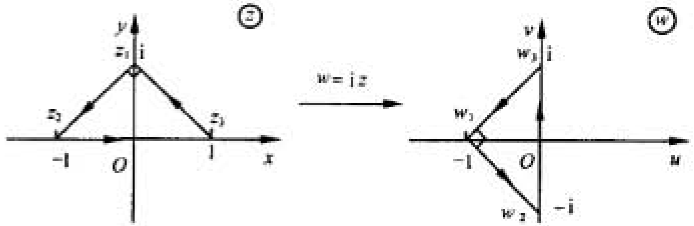


图 6-2

(2) **方法 1**　设 $z = x + iy, w = u + iv$，则 $w = iz$

即
$$u + iv = i(x + iy)$$
$$u + iv = -y + ix$$

所以
$$u = -y, v = x$$

$$|z-1| \leqslant 1 \text{ 即} (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1 \xrightarrow{w=iz} u^2 + (v-1)^2 \leqslant 1$$

即
$$|w - i| \leqslant 1$$

方法 2　因为 $w = iz \quad z = \frac{w}{i}$

所以
$$|z-1| = \left|\frac{w}{i} - 1\right| = \frac{|w-i|}{|i|} = |w-i| \leqslant 1$$

映射成如图 6-3。

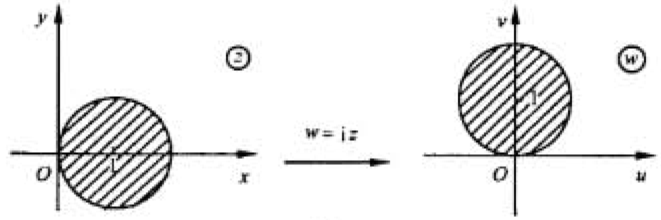


图 6-3

5. 证明：映射 $w = z + \frac{1}{z}$ 把圆周 $|z| = c$ 映射成椭圆：

$$u = \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta, v = \left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta$$

证明　$|z| = c \Rightarrow z = ce^{i\theta} = c(\cos\theta + i\sin\theta)$

则 $\frac{1}{z} = \frac{1}{c}e^{-i\theta} = \frac{1}{c}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = \frac{1}{c}(\cos\theta - i\sin\theta)$

设 $w = u + iv$，则

$$w = z + \frac{1}{z} = c(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{c}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta + i\left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta$$

所以　$u = \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta, v = \left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta$ 得证。

6. 证明：在映射 $w = e^{iz}$ 下，互相正交的直线族 $\mathrm{Re}(z) = c_1$ 与 $\mathrm{Im}(z) = c_2$ 依次映射成互相正交的直线族 $v = u\tan c_1$ 与圆族 $u^2 + v^2 = e^{-2c_2}$。

证明　设 $z = x + iy, w = u + iv$

由 $\mathrm{Re}(z) = c_1$ 可得

$$w = u + iv = e^{i(c_1 + iy)} = e^{-y}(\cos c_1 + i\sin c_1)$$

则　$u = e^{-y}\cos c_1, v = e^{-y}\sin c_1$

得
$$v = u\tan c_1 \text{ 为一直线族}$$

由 $\mathrm{Im}(z) = c_2$ 得

$w = u + iv = e^{iz} = e^{i(x + ic_2)} = e^{-c_2}(\cos x + i\sin x)$

得
$$u = e^{-c_2}\cos x, v = e^{-c_2}\sin x$$

$u^2 + v^2 = (e^{-c_2})^2 = e^{-2c_2}$，为一圆族。

因为 $w' = ie^{iz} \neq 0$ 且 $w = e^{iz}$ 为解析函数，故 $w = e^{iz}$ 是共形映射，有保角性

已知 $\mathrm{Re}(z)=c_1$ 与 $\mathrm{Im}(z)=c_2$ 相互正交，故 $v=u\tan c_1$ 与 $u^2+v^2=e^{-2c_2}$ 也相互正交。

7. 映射 $w=z^2$ 把上半个圆域：$|z|<R,\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成什么？

解 上半个圆域：$|z|<R,\mathrm{Im}(z)>0$ 即 $z<Re^{i\theta}(0<\theta<\pi)$

设 $w=re^{i\varphi}$，则当 z 在圆周上时，$w=z^2=R^2e^{i2\theta}$

故 $r=R^2\quad \varphi=2\theta\Rightarrow 0<\varphi<2\pi$

即 $w=z^2$ 把上半个圆域映射成圆心在原点，半径为 R^2，且沿由 O 到 R^2 的半径有割痕的圆域，图 6-4。

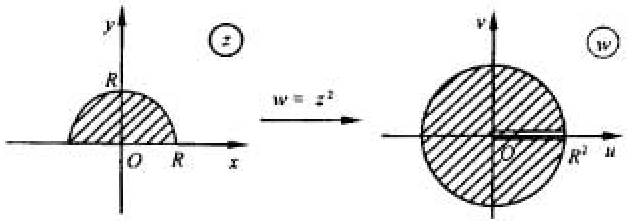


图 6-4

8. 下列区域在指定的映射下映射成什么？

(1)$\mathrm{Re}(z)>0,w=iz+i$；

(2)$\mathrm{Im}(z)>0,w=(1+i)z$；

(3)$0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{1}{2},w=\dfrac{1}{z}$；

(4)$\mathrm{Re}(z)>1,\mathrm{Im}(z)>0,w=\dfrac{1}{z}$；

(5)$\mathrm{Re}(z)>0,0<\mathrm{Im}(z)<1,w=\dfrac{i}{z}$。

解 设 $z=x+iy,w=u+iv$

(1)$\mathrm{Re}(z)>0,w=iz+i$

由 $w=u+iv=iz+i=i(x+iy)+i=-y+i(1+x)$

知 $\begin{cases}u=-y\\ v=x+1\end{cases}$

因为 $\mathrm{Re}(z)=x>0$

所以 $v=x+1>1$

即 $\mathrm{Im}(w)>1$

(2)$\mathrm{Im}(z)>0,w=(1+i)z$

映射成图 6-5。

由 $w=u+iv=(1+i)z=(1+i)(x+iy)=(x-y)+i(x+y)$

知 $\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{v-u}{2}\end{cases}$

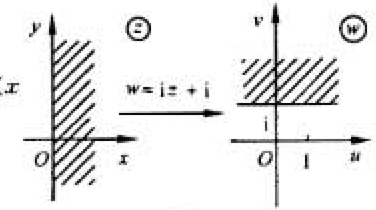


图 6-5

因为 $\mathrm{Im}(z)=y>0$，所以 $\dfrac{v-u}{2}>0$ 即 $v>u,\mathrm{Im}(w)>\mathrm{Re}(w)$

映射成图 6-6。

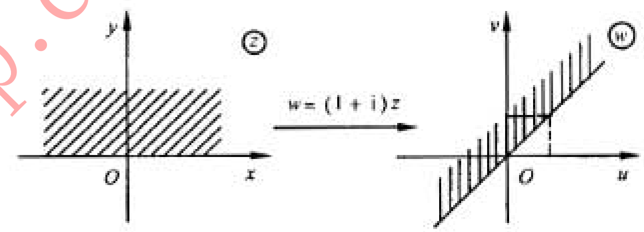


图 6-6

(3)$0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{1}{2},w=\dfrac{1}{z}$

由 $z=\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{u+iv}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}=x+iy$ 知

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

因为 $0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{1}{2}$，所以 $0<\dfrac{-v}{u^2+v^2}<\dfrac{1}{2}$

由 $\dfrac{-v}{u^2+v^2}>0\Rightarrow v<0$ 即 $\mathrm{Im}(w)<0$

由 $\dfrac{-v}{u^2+v^2}<\dfrac{1}{2}\Rightarrow u^2+v^2+2v>0$

即 $u^2+(v+1)^2>1$(以 $(0,-1)$ 为圆心，1 为半径的圆的外部，且 $\mathrm{Im}(w)<0$)

即 $|w+i|>1$ 且 $\mathrm{Im}(w)<0$

映射成图 6-7。

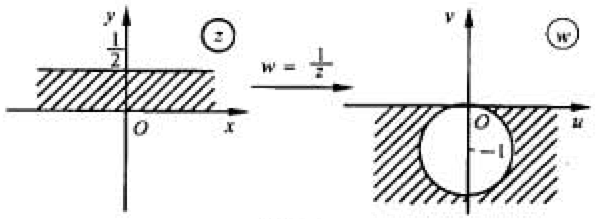


图 6-7

(4) $\mathrm{Re}(z)>1,\mathrm{Im}(z)>0,w=\dfrac{1}{z}$

由 $z=x+\mathrm{i}y=\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{u+\mathrm{i}v}=\dfrac{u-\mathrm{i}v}{u^2+v^2}$ 知

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

因为 $\mathrm{Re}(z)>1,\mathrm{Im}(z)>0$

所以 $\begin{cases}\dfrac{u}{u^2+v^2}>1\\ \dfrac{-v}{u^2+v^2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\\ v<0\end{cases}$

即 $\left|w-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ 且 $\mathrm{Im}(w)<0$

映射成图 6-8。

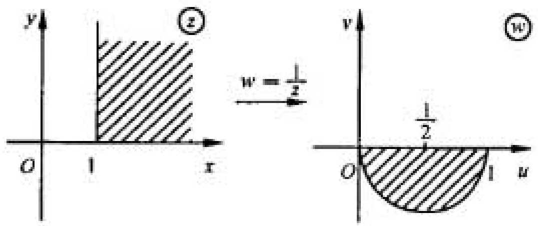


图 6-8

(5) $\mathrm{Re}(z)>0,0<\mathrm{Im}(z)<1,w=\dfrac{\mathrm{i}}{z}$

由 $z=x+\mathrm{i}y=\dfrac{\mathrm{i}}{w}=\dfrac{\mathrm{i}}{u+\mathrm{i}v}=\dfrac{v+\mathrm{i}u}{u^2+v^2}$ 知，$x=\dfrac{v}{u^2+v^2}$，$y=\dfrac{u}{u^2+v^2}$

因为 $\mathrm{Re}(z)>0,0<\mathrm{Im}(z)<1$

所以 $\begin{cases}\dfrac{v}{u^2+v^2}>0\\ 0<\dfrac{u}{u^2+v^2}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u>0\\ v>0\\ \left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+v^2>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases}$

即 $\left|w-\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$，且 $\begin{cases}\mathrm{Im}(w)>0\\ \mathrm{Re}(w)>0\end{cases}$

映射成图 6-9。

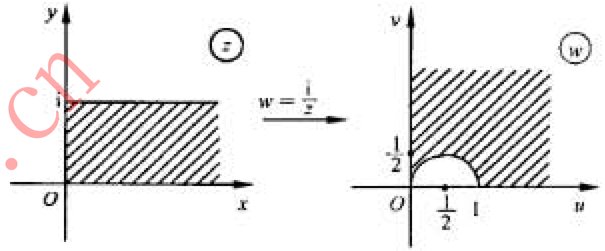


图 6-9

9. 如果分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$，(1) 映射成上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$；(2) 映射成下半平面 $\mathrm{Im}(w)<0$，那么它的系数满足什么条件？

解 对 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，取 $z_k\in R$，即实轴上的点，a,b,c,d 均为实数时，$w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$ 也为实数，故 w 必将实轴仍映射为实轴。

$$w'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

(1) 当 $ad-bc>0$ 即 $w'>0$(a,b,c,d 均为实数，z 也在实轴上变) 时，取 z_k 沿着增大的方向走时，w_k 也沿着增大的方向走，由于在前进方向左侧的区域始终在前进的方向左侧

w 将 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成 $\mathrm{Im}(w)>0$，如图 6-10。

(2) 当 $ad-bc<0$ 即 $w'<0$(a,b,c,d 均为实数，z 也在实轴上变) 时，取 z_k 沿增大方向走时，w_k 沿减小方向走，由于在前进方向左侧的区域始终在前进方向的左侧，且实轴经 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 映射后，前进方向变反(即与 u 轴反向)。

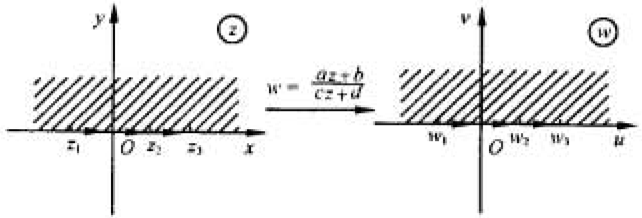


图 6-10

故 w 将 $\mathrm{Im}(z)>0$,映射成 $\mathrm{Im}(w)<0$,如图 6-11。

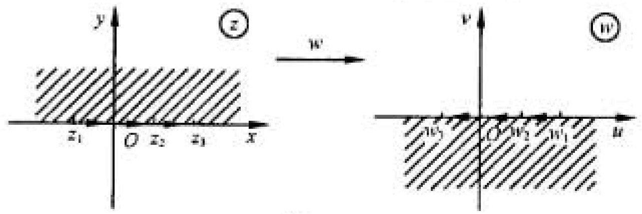


图 6-11

10. 如果分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将 z 平面上的直线映射成 w 平面上的单位圆,那么它的系数应满足什么条件?

解 如果 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 将直线映射成单位圆,则直线上的 $z=\infty$ 点必被映射到单位圆 $|w|=1$ 上,故将 $z=\infty$ 代入 $|w|=\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right|$ 有

$$|w|_{z=\infty}=\left|\frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}\right|_{z=\infty}=\left|\frac{a}{c}\right|=1,\text{即 } |a|=|c|$$

而 $w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$ 即 $ad-bc\neq 0$

所以条件为 $|a|=|c|$ 且 $ad-bc\neq 0$

11. 试证:对任何一个分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可以认为 $ad-bc=1$。

证明 在 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 中由于 $ad-bc\neq 0$ 故可变为

$$w=\frac{\dfrac{a}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}z+\dfrac{b}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{c}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}z+\dfrac{d}{(ad-bc)^{\frac{1}{2}}}} \tag{1}$$

式(1)与原式是等价的。设 $w=\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ (2)

在式(2)中 $a'd'-b'c'=\dfrac{ad}{ad-bc}-\dfrac{bc}{ad-bc}=1$

故对任何一个分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 都可认为

$$ad-bc=1$$

12. 试求将 $|z|<1$ 映射成 $|w-1|<1$ 的分式线性映射。

解 由教材 P204 例 4 知,将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 的分式线性映射的表达式为 $w_1=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right),|\alpha|<1$

$|w_1|<1$ 向右平移一个单位,即得 $|w-1|<1$,如图 6-12。

即 $w=1+w_1=1+e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right),|\alpha|<1$

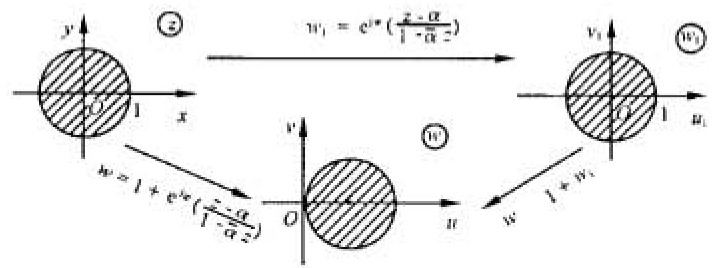


图 6-12

13. 设 $w=e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$,试证:$\varphi=\mathrm{Arg}w'(\alpha)$。

证明 因为 $w'=e^{i\varphi}\dfrac{(1-\bar{\alpha}z)-(z-\alpha)(-\bar{\alpha})}{(1-\alpha\bar{\alpha}z)^2}=e^{i\varphi}\dfrac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$

所以 $w'(\alpha)=e^{i\varphi}\dfrac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\alpha\bar{\alpha})^2}=e^{i\varphi}\dfrac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}$

由于 $1-\alpha\bar{\alpha}$ 是实数,故 $\varphi=\mathrm{Arg}w'(\alpha)$

若 $|\alpha|<1$,且 $0\leqslant\varphi<2\pi$,则 $\varphi=\mathrm{Arg}w'(\alpha)$

14. 试求将圆域 $|z|<R$ 映射成圆域 $|w|<1$ 的分式线性映射。

解 (1) 先把 $|z|<R$ 映射成 $|\xi|<1$

作 $\xi=\dfrac{z}{R}$，因为 $|z|<R$，所以 $|\xi|<1$

(2) 再把 $|\xi|<1$ 映射到 $|w|<1$

即
$$w=e^{i\varphi}\left(\frac{\xi-\alpha}{1-\bar{\alpha}\xi}\right)=e^{i\varphi}\left(\frac{\frac{z}{R}-\alpha}{1-\bar{\alpha}\frac{z}{R}}\right)=e^{i\varphi}\left(\frac{z-R\alpha}{R-\bar{\alpha}z}\right),\ |\alpha|<1$$

映射成图 6-13。

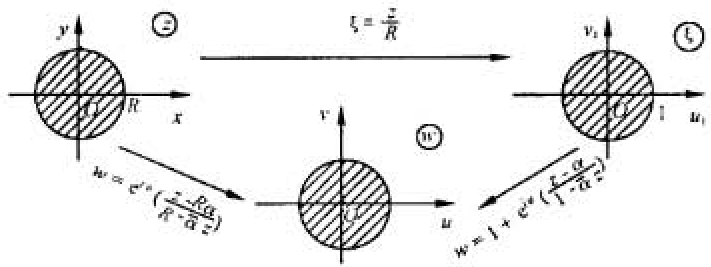


图 6-13

15. 求把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(i)=0,f(-1)=1$；　　(2) $f(i)=0,\mathrm{Arg}f'(i)=0$；

(3) $f(1)=1,f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

解 把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成 $|w|<1$ 的分式线性映射的一般形式为
$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right),\ \mathrm{Im}(\lambda)>0,\theta\in\mathbf{R}$$

(1) $f(i)=0,f(-1)=1$

因为 $f(i)=0$ 表示将 $i\xrightarrow{w}0$ 即将 i 变换为 w 面上的原点，

所以 $\lambda=i,\bar{\lambda}=-i$　故 $w=e^{i\theta}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$

由 $f(-1)=1$ 可得
$$1=e^{i\theta}\left(\frac{-1-i}{-1+i}\right)=e^{i\theta}\frac{(-1-i)^2}{(-1+i)(-1-i)}=e^{i\theta}\cdot\frac{2i}{2}=e^{i\theta}\cdot i$$

故 $e^{i\theta}=-i=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$　所以 $w=-i\dfrac{z-i}{z+i}$

(2) $f(i)=0,\mathrm{Arg}f'(i)=0$

因 $f(i)=0$，所以 $\lambda=i,\bar{\lambda}=-i$

所以
$$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

则
$$w'=e^{i\theta}\frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2}=e^{i\theta}\frac{2i}{(z+i)^2}$$

故
$$w'(i)=e^{i\theta}\frac{2i}{(i+i)^2}=e^{i\theta}\left(-\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{i\theta}\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

因为 $\mathrm{Arg}f'(i)=0$　所以 $\theta-\dfrac{\pi}{2}=0$

即
$$\theta=\frac{\pi}{2}\quad w=i\frac{z-i}{z+i}$$

(3) 设 $\lambda=x+iy$

由 $f(1)=1,f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 可得
$$\begin{cases}1=e^{i\theta}\left(\dfrac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right) & (1)\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{5}}=e^{i\theta}\left(\dfrac{i-\lambda}{i-\bar{\lambda}}\right) & (2)\end{cases}$$

(1) ÷ (2) 得
$$\sqrt{5}=\left(\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right)\left(\frac{i-\bar{\lambda}}{i-\lambda}\right)=\left(\frac{1-x-iy}{1-x+iy}\right)\left(\frac{i-x+iy}{i-x-iy}\right)\qquad(3)$$

整理(3)得
$$\begin{cases}\sqrt{5}(x^2+y^2-x-y)=x^2+y^2-x+y & (4)\\ \sqrt{5}(1-y-x)=1+y-x & (5)\end{cases}$$

由(4)(5)交叉相乘得 $y(x^2+y^2-1)=0$

即 $y=0$ 或 $x^2+y^2=1$　(6)

由(5)(6)得 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ (舍去，因 $w=e^{i\theta}$ 不合题意) 及 $\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}\\[2mm] x=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$

将 x,y 值代入(1)得　$e^{i\theta}=\dfrac{\sqrt{5}+2i}{3}$

所以 $$w=\frac{\sqrt{5}+2\mathrm{i}}{3}\left[\frac{z+\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{i}}{z+\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}}\right]=\frac{3z+(\sqrt{5}-2\mathrm{i})}{(\sqrt{5}-2\mathrm{i})z+3}$$

16. 求把单位圆映射成单位圆的分式线性映射，并满足条件：

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, f(-1)=1$；

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$；

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

(4) $f(a)=a, \operatorname{Arg} f'(a)=\varphi$

解 将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 的映射的一般形式：

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right), (|a|<1, \varphi\in\mathbf{R})$$

(1) 由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 知，所求映射将 $|z|<1$ 内的点 $z=\frac{1}{2}$ 映射成 $|w|<1$ 的中心，可得 $a=\frac{1}{2}$

所以 $$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left[\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)$$

由此并结合 $f(-1)=1$ 得

$$w(-1)=f(-1)$$

即 $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left[\frac{-1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}(-1)}\right]=1$$

所以 $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=-1$$

即 $$\varphi=\pi$$

所以 $$w=-\frac{2z-1}{2-z}=\frac{2z-1}{z-2}$$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 知，所求映射将 $|z|<1$ 内的点 $z=\frac{1}{2}$ 映射成

$|w|<1$ 的中心

所以 $$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left[\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)$$

由此并结合 $\operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ 得

$$w'\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{2(2-z)+(2z-1)}{(2-z)^2}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\Rightarrow \operatorname{Arg} w'\left(\frac{1}{2}\right)=\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\varphi$$

所以 $$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)=\mathrm{i}\,\frac{2z-1}{2-z}$$

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, \operatorname{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

由 (2) 可知 $\operatorname{Arg} w'\left(\frac{1}{2}\right)=\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\varphi=0$

所以 $w=\mathrm{e}^{0}\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)=\frac{2z-1}{2-z}$

(4) $f(a)=a, \operatorname{Arg} f'(a)=\varphi$

思路 将大问题化解为两个易于解决的小问题

(1) 先将 $|z|<1$ 映射到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0, \operatorname{Arg}\xi'(a)=\varphi$；

(2) 再将 $|w|<1$ 映射到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0, \operatorname{Arg}\xi'(a)=0$

由于分式线性映射的逆存在，且也为分式线性映射，设 $\xi=f_1(z)=f_2(w)$，记 $f_2^{-1}=f$，则从 $|\xi|<1$ 到 $|w|<1$ 的映射为 $w=f(\xi)$，故 $w=f(f_1(z))$

$w=f(\xi)$ 将 $|\xi|<1$ 内的 $\xi=0$ 映射到 $|w|<1$ 内的 $w=a$，由于 $w\longrightarrow\xi$ 在 a 点的旋转角为 0，故从 $\xi\longrightarrow w$，在 0 点的旋转角也为 0，则

$$\operatorname{Arg} w'(a)=\operatorname{Arg} f'(\xi_0=0)+\operatorname{Arg}\xi'(z_0=a)=0+\varphi=\varphi$$

这样以 $|\xi|<1$ 为中介，建立起满足题意的从 $|z|<1$ 到 $|w|<1$ 的映射 w

解 (1) 求将 $|z|<1$ 映到 $|\xi|<1$ 的，并使 $\xi(a)=0, \operatorname{Arg}\xi'(a)=\varphi$ 的

映射 $\xi = f_1(z)$，由(3)可知，$\xi = e^{i\varphi}\left(\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$

(2) 求将 $|w|<1$ 映到 $|\xi|<1$，并使 $\xi(a)=0$，$\operatorname{Arg}\xi'(a)=0$ 的映射。

$$\xi = f_2(w)$$

由(2)可知
$$\xi = \frac{w-a}{1-\bar{a}w}$$

故由(1)(2)得
$$\frac{w-a}{1-\bar{a}w} = e^{i\varphi}\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)\qquad 且\ |a|<1$$

见图 6-14。

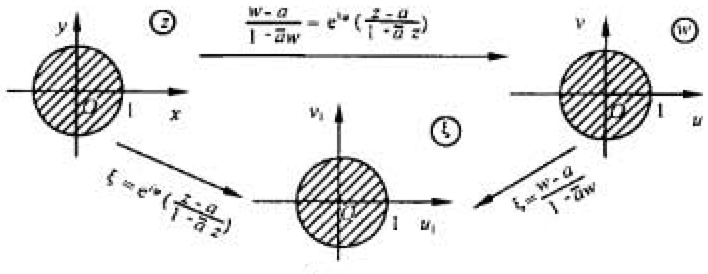


图 6-14

17. 把点 $z=1, i, -i$ 分别映射成点 $w=1, 0, -1$ 的分式线性映射把单位圆 $|z|<1$ 映射成什么？并求出这个映射。

解 将 $\begin{cases} z_1=1 \\ w_1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} z_2=i \\ w_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z_3=-i \\ w_3=-1 \end{cases}$ 代入

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\quad 得$$

$$\frac{w-1}{w-0}\cdot\frac{-1-0}{-1-1}=\frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-i-i}{-i-1}$$

整理得
$$w=\frac{(1+i)(z-i)}{(1+z)+3i(1-z)}$$

因为 $|z|=1$ 上的点 $z=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$ 被 w 映射成 ∞，所以 $|z|=1$ 被 w 映射成直线，并由 $z=1, i, -i$ 分别映射成 $w=1, 0, -1$ 可知，$|z|=1$ 映射成实轴的负向。

因为 $z=0$ 被 w 映射成 $w=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$

所以 $|z|<1$ 映射成下半平面，见图 6-15。

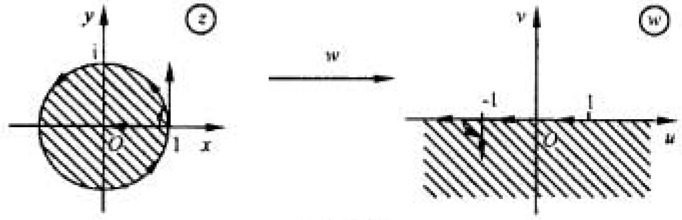


图 6-15

18. 求出一个把右半平面 $\operatorname{Re}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的映射。

解 任取 $\operatorname{Re}(z)>0$ 内的一点 a，作映射 w 使之对应 $w=0$，则根据分式线性映射的保对称点的性质，点 a 关于虚轴的对称点 $-\bar{a}$ 应对应 $w=0$ 关于单位圆周的对称点 ∞。

因此 w 应具有形式：

$$w=k\frac{z-a}{z-(-\bar{a})}=k\frac{z-a}{z+\bar{a}}，其中\ k\ 为常数$$

因为 $z=0$ 对应着 $|w|=1$ 上的一点

所以由 $|w|=|k|\cdot\left|\dfrac{0-a}{0+\bar{a}}\right|=|k|\cdot\left|\dfrac{a}{\bar{a}}\right|=1$

可知 $|k|=1$，可以令 $k=e^{i\theta}(\theta\in\mathbf{R})\Rightarrow w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z+\bar{a}}$

19. 把图 6-16 ~ 图 6-29 中阴影部分所示（边界为直线段或圆弧）的域共形地且互为单值地映射成上半平面，求出实现各映射的任一个函数：

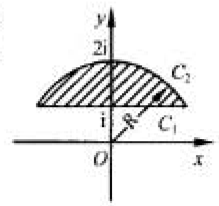


图 6-16

(1) $\operatorname{Im}(z)>1, |z|<2$

(2) $|z|>2, |z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$

(3) $|z|>2, 0<\operatorname{Arg}z<\dfrac{\pi}{4}$

(4) $|z|>2, 0<\operatorname{Arg}z<\dfrac{3\pi}{2}$

(5) 沿连结点 $z=0$ 和 $z=ai$ 的线段有割痕上半平面

(6) 单位圆的外部，且沿虚轴由 i 到 ∞ 有割痕

(7) 单位圆的内部，且沿由 0 到 1 的半径有割痕的域。

(8) $|z|<2, |z-1|>1$

(9) $a < \mathrm{Re}(z) < b$

(10) $\mathrm{Re}(z) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z) < a$

解 (1) 由已知可解出 C_1 与 C_2 的交角 $\alpha = \frac{\pi}{3}$

先将 C_1 与 C_2 的交点 $(-\sqrt{3}, i)$，$(\sqrt{3}, i)$ 分别映射成 ξ 平面中的 $\xi = 0$ 与 $\xi = \infty$，并使所围区域映射成角形域

$0 < \mathrm{Arg}\xi < \frac{\pi}{3}$，可得

$$\xi = k\left[\frac{z-(-\sqrt{3}+i)}{z-(\sqrt{3}+i)}\right]，k \text{ 为常数}$$

ξ 应把 C_1 上的 $z = i$ 映射到实轴的正半轴上

故 $\xi = k\left[\frac{i-(-\sqrt{3}+i)}{i-(\sqrt{3}+i)}\right] = -k$，取 $k = -1$ 使 $\xi = 1$ 落在实轴的正半轴上

再通过 $w = \xi^3$ 将角形域 $0 < \mathrm{Arg}\xi < \frac{\pi}{3}$ 映射成上半平面，故所求映射为

$$w = -\left[\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right]^3$$

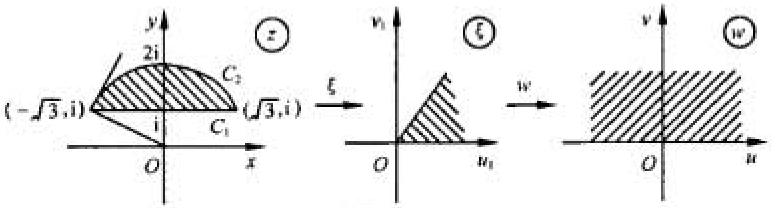


图 6-17

(2) 由已知可解得 C_1 与 C_2 交点是 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}i)$，$(\sqrt{2}, \sqrt{2}i)$，在 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}i)$，C_1 与 C_2 交角为 $\frac{\pi}{4}$

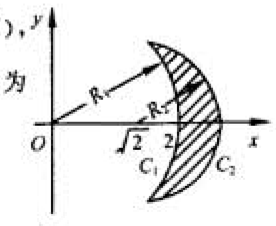


图 6-18

作映射 $\xi = k\left[\frac{z-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{z-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}\right]$

$$= k\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}，k \text{ 为常数}$$

该映射将 z 平面上的 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}i)$，$(\sqrt{2}, \sqrt{2}i)$ 分别映到 ξ 平面上的 $0, \infty$，将所围区域映射到角形域 $0 < \mathrm{Arg}\xi < \frac{\pi}{4}$

则 C_2 上的点于 $z = 2\sqrt{2}$ 应映射成

$$\xi = k\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}(1-i)}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}(1+i)} = ki \text{ 应落在正实轴上，故取 } k = -i$$

再通过 $w = \xi^4$ 将角形域 $0 < \mathrm{Arg}\xi < \frac{\pi}{4}$ 映射成上半平面，最终得到

$$w = \xi^4 = \left[-i\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4 = \left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4$$

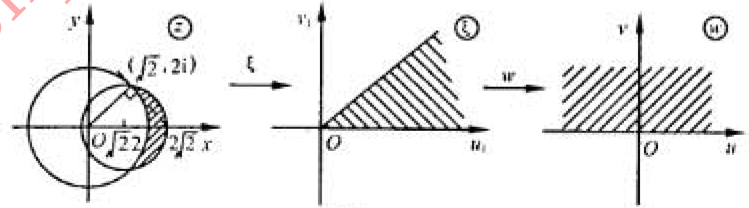


图 6-19

(3) 先作映射 $\xi = z^4$ 将扇形域变成上半圆域，再作 $\zeta = k\frac{\xi+16}{\xi-16}$ 将 C_1, C_2 的交点 $(-16,0)$，$(16,0)$ 分别映射成 ζ 平面上的 $0, \infty$，把上半圆域映射成角形域 $0 < \mathrm{Arg}\zeta < \frac{\pi}{2}$

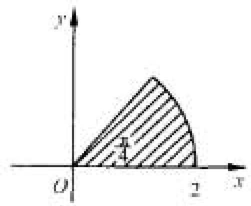


图 6-20

ζ 应将 C_1 上的点 $\xi = 0$ 映射成：

$$\zeta = k\frac{0+16}{0-16} = -k \text{ 正实轴上一点，故可取 } k = -1$$

最后作 $w = \zeta^2$ 将角形域 $0 < \mathrm{Arg}\,\zeta < \frac{\pi}{2}$ 映射为上半平面。所以所求映射为

$$w = \zeta^2 = \left(-\frac{\xi+16}{\xi-16}\right)^2 = \left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2.$$

(4) 先作映射 $\xi = z^{\frac{2}{3}}$，将区域 $|z| > 2, 0 < \mathrm{Arg}z < \frac{3}{2}\pi$ 映射成上半圆的

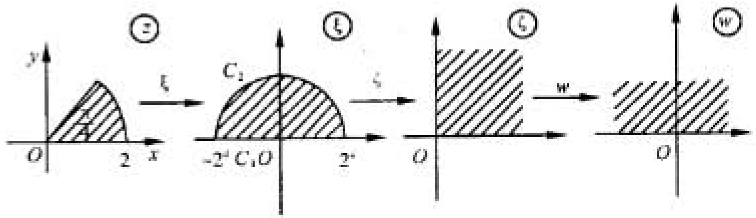


图 6-21

外域 $|\xi| > 2^{\frac{2}{3}}, 0 < \operatorname{Arg}\xi < \pi$

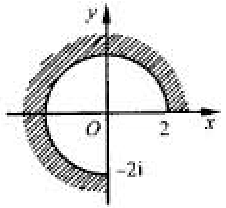


图 6-22

再作映射 $\eta = k\dfrac{\xi + 2^{\frac{2}{3}}}{\xi - 2^{\frac{2}{3}}}$，$k$ 为常数，将 C_1 与 C_2 的交点 $\xi_1 = -2^{\frac{2}{3}}, \xi_2 = 2^{\frac{2}{3}}$ 分别映射成 η 面上的 $0, \infty$。把上半圆的外域映射成角形域 $0 < \operatorname{Arg}\eta < \dfrac{\pi}{2}$

把 C_1 上的点 0 映射成 η 面上正实轴上一点，则

$$\eta = k\frac{0 + 2^{\frac{2}{3}}}{0 - 2^{\frac{2}{3}}} \qquad \text{取 } k = -1 \text{ 使 } \eta = 1$$

最后作映射 $w = \eta^2$ 将角形域 $0 < \operatorname{Arg}\eta < \dfrac{\pi}{2}$ 映射成上半平面。故所求映射为

$$w = \eta^2 = \left(\frac{\xi + 2^{\frac{2}{3}}}{\xi - 2^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = \left(\frac{z^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}}\right)^2$$

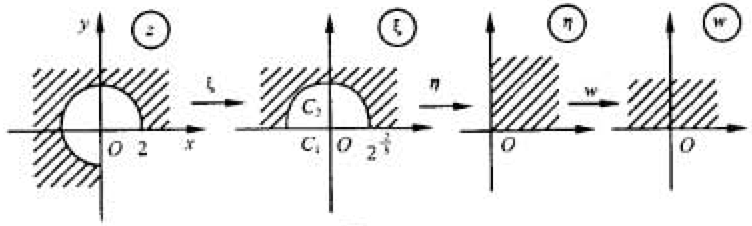


图 6-23

(5) 先应用映射 $\xi = z^2$，便得到一个具有割痕 $-a^2 \leqslant \operatorname{Re}(\xi) < +\infty, \operatorname{Im}(\xi) = 0$ 的 ξ 平面，

再把 ξ 平面向右作一距离为 a^2 的平移：$\zeta = \xi + a^2$ 便得到了去掉正实轴的 ζ 平面

最后通过映射 $w = \sqrt{\zeta}$，便得到上半 w 平面

故所求映射为 $\quad w = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\xi + a^2} = \sqrt{z^2 + a^2}$

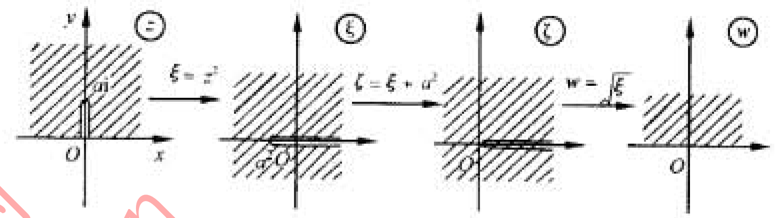


图 6-24

(6) 首先，通过映射 $z_1 = \mathrm{i}\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$ 将已知区域映射成一个具有割痕 $\operatorname{Re}(z_1) = 0, 0 \leqslant \operatorname{Im}(z_1) \leqslant 1$ 的上半平面，再应用映射 $z_2 = z_1^2$，便得到一个具有割痕 $-1 \leqslant \operatorname{Re}(z_2) < +\infty, \operatorname{Im}(z_2) = 0$ 的 z_2 平面

把 z_2 平面向右作一距离为 1 的平移：$z_3 = z_2 + 1$，便得到去掉了正实轴的 z_3 平面

最后通过 $z_4 = \sqrt{z_3}$，便得到上半 z_4 平面。

故所求映射为

$$z_4 = \sqrt{z_3} = \sqrt{1 + z_2} = \sqrt{1 + z_1^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right)^2}$$

(7) 首先通过 $z_1 = z^{\frac{1}{2}}$ 将已知域映射成 z_1 平面上的上半单位圆，

再应用 $z_2 = -\dfrac{z_1 + 1}{z_1 - 1}$ 将上半单位圆映射成角形域 $0 < \operatorname{Arg}z_2 < \dfrac{\pi}{2}$，

最后用 $z_3 = z_2^2$ 将角形域 $0 < \operatorname{Arg}z_2 < \dfrac{\pi}{2}$ 映射成上半平面，

故所求映射为

$$w = z_3 = z_2^2 = \left(-\frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1}\right)^2$$

(8)① 应用 $z_1 = \dfrac{1}{z - 2}$ 将切点 $z = 2, z = 0, z = -2$ 分别映射成 $\infty, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}$，则 $|z| < 2, |z - 1| < 1$ 映射成带形域 $-\dfrac{1}{2} < \operatorname{Re}(z) < -\dfrac{1}{4}$

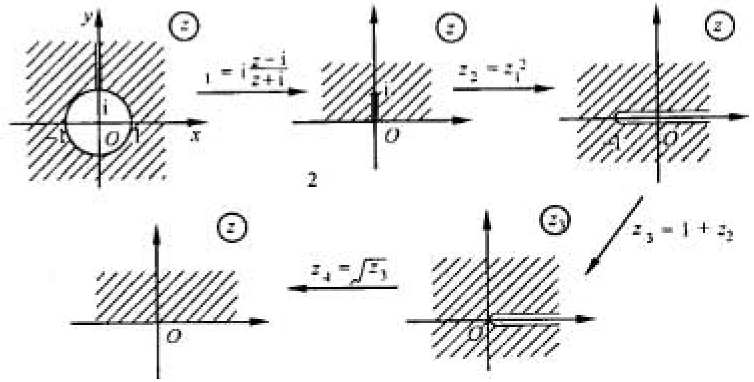


图 6-25

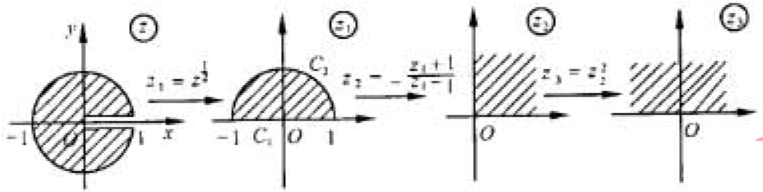


图 6-26

② 平移：$z_2 = z_1 + \frac{1}{2}$

③ 旋转：$z_3 = e^{\frac{\pi}{2}i} z_2 = i z_2$

④ 放大：$z_4 = 4\pi z_3$

⑤ 应用 $z_5 = e^{z_4}$ 将水平带形域 $0 < \mathrm{Im}(z_4) < \pi$ 映射成角形域 $0 < \mathrm{Arg}(z_5) < \pi$ 即上半平面

综上得 $z_5 = e^{z_4} = e^{4\pi z_3} = e^{4\pi i z_2} = e^{4\pi i\left(z_1+\frac{1}{2}\right)} = e^{4\pi i\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2}\right)} = e^{2\pi i\left(\frac{z}{z-2}\right)}$

(9) ① 向左平移 a 个单位：$z_1 = z - a$

② 旋转：$z_2 = i z_1$

③ 放大（缩小）：$z_3 = \frac{\pi}{b-a} z_2$

④ 应用 $z_4 = e^{z_3}$ 将水平带形域：$0 < \mathrm{Im}(z_3) < \pi$ 映射成上半平面

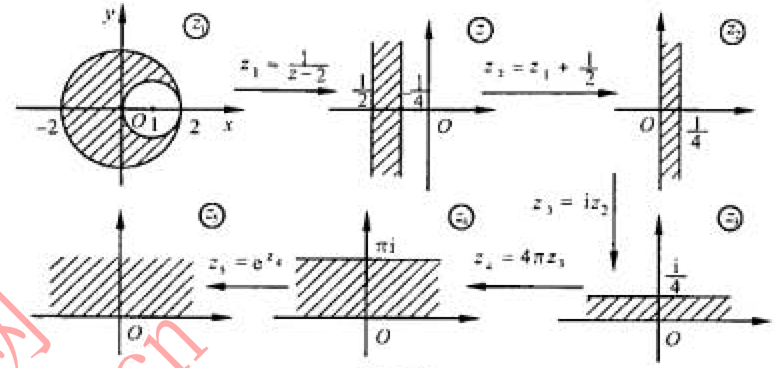


图 6-27

综上可得 $z_4 = e^{z_3} = e^{\frac{\pi}{b-a} z_2} = e^{\frac{\pi}{b-a} i z_1} = e^{\frac{\pi}{b-a} i(z-a)}$

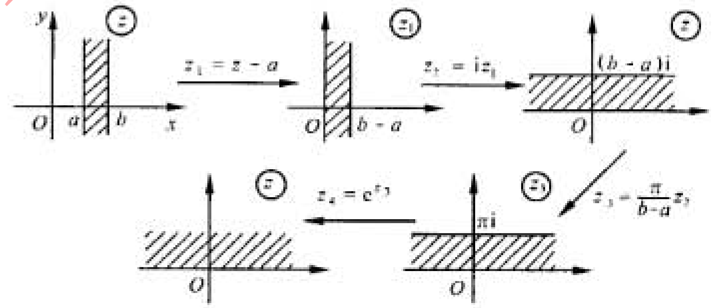


图 6-28

(10) ① 放缩：$z_1 = \frac{\pi}{a} z$

② $z_2 = -e^{-z_1}$ 将 $\mathrm{Re}(z_1) > 0, 0 < \mathrm{Im}(z_1) < \pi$ 映射成上半单位圆

③ 应用 $z_3 = -\frac{z_2+1}{z_2-1}$ 便得到角形域 $0 < \mathrm{Arg} z_3 < \frac{\pi}{2}$

④ 应用 $z_4 = z_3^2$ 便得到上半平面

综上得 $z_4 = z_3^2 = \left(-\frac{z_2+1}{z_2-1}\right)^2 = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{a}z}-1}{e^{-\frac{\pi}{a}z}+1}\right)^2$.

*20. 求把上半 z 平面映射成 w 平面中如图 6-30 所示的阴影部分的映射，并使 $x=0$ 对应于 A 点，$x=-1$ 对应于 B 点。

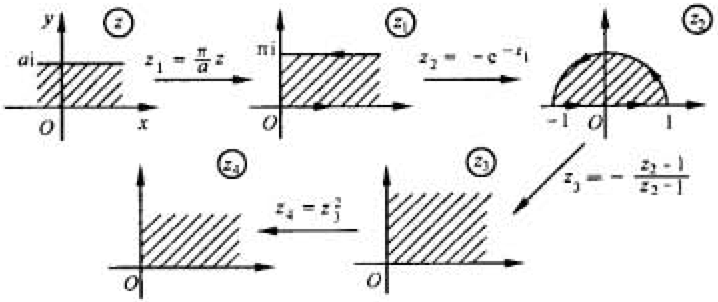


图 6-29

解 作 z_i 与 w_i 的对应如表 6-1：

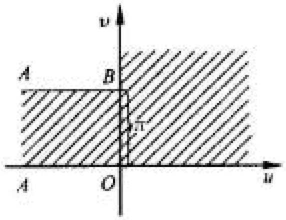


图 6-30

表 6-1

i	z_i	w_i	α_i
1	0	∞	0
2	x_2	0	π
3	∞	∞	$-\frac{\pi}{2}$
4	-1	πi	$\frac{3}{2}\pi$

因此

$$w = k\int (z-0)^{\frac{0}{\pi}-1}\cdot(z-x_2)^{\frac{\pi}{\pi}-1}\times(z+1)^{\frac{\frac{3}{2}\pi}{\pi}-1}\mathrm{d}z + c$$

$$= k\int \frac{1}{z}(z+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z + c = k\left[2\sqrt{z+1} + \mathrm{Ln}\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right]+c$$

$$= k\left[2\sqrt{z+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right| + \mathrm{iArg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right)\right]+c$$

为了确定常数 k 与 c，把上式改写成

$$u+\mathrm{i}v = (k_1+\mathrm{i}k_2)-\left\{2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\left[\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]+\mathrm{Ln}\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+\mathrm{iArg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right)\right\}+c_1+\mathrm{i}c_2 \qquad (j=0,1)$$

即 $u = c_1 +$

$$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\left[k_1\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)-k_2\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]+ k_1\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+k_2\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right) \qquad (j=0,1)$$

$v = c_2 +$

$$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\left[k_1\sin\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)+k_2\cos\left(\frac{\mathrm{Arg}z+2j\pi}{2}\right)\right]+ k_2\ln\left|\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right|+k_1\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}\right) \qquad (j=0,1)$$

当 w 沿实轴上的 $OC\longrightarrow\infty$ 时，z 沿 $OC'\longrightarrow\infty$，$\mathrm{Arg}z=0$，$y=0$，得到

$v=0$

$$= c_2+\lim_{x\to\infty}\left\{2\sqrt{(x+1)^2+0^2}\left[k_1\sin\left(\frac{2j\pi}{2}\right)+k_2\cos\left(\frac{2j\pi}{2}\right)\right]+ k_2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+k_1\mathrm{Arg}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{+1}+1}\right]\right\}$$

$$= c_2+\infty\cdot k_2+0\cdot k_2+k_1\cdot 0\cdot\infty+k_1\cdot 0$$

$$= c_2+\infty\cdot k_2$$

所以 $c_2=k_2=0$

当 w 沿 $CB\to\pi\mathrm{i}$ 时，z 沿 $C'B'\to-1$，$\mathrm{Arg}z=\pi$，$y=0$

$u=0$

$$= c_1+\lim_{x\to-1^-}\left\{2\sqrt{(x+1)^2+0^2}\left[k_1\cos\left(\frac{\pi+2j\pi}{2}\right)- k_2\sin\left(\frac{\pi+2j\pi}{2}\right)\right]+k_1\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|- k_2\mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\right\}$$

$$= c_1-k_2\pi=c_1$$

$v=\pi=c_2+k_1\pi=k_1\pi$，即 $\quad k_1=1$

所以 $\qquad k=1, c=0$

所求映射为 $w = 2\sqrt{z+1} + \mathrm{Ln}\dfrac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}$

见图 6-31。

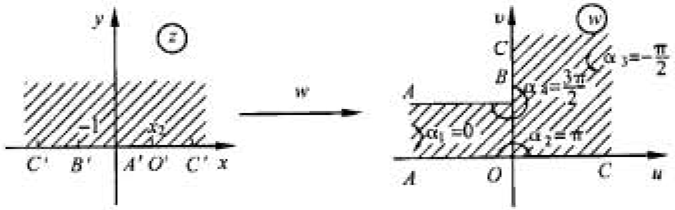


图 6-31

*21. 求把图 6-32 所示的阴影部分映射成上半平面的映射，并使 A 点对应于 $z=-1$，O 点对应于 $z=1$。

解 作 z_i 与 w_i 的对应如表 6-2：

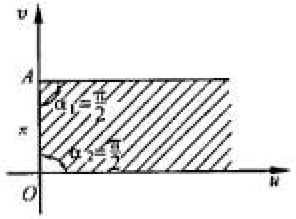


图 6-32

表 6-2

i	z_i	w_i	α_i
1	-1	πi	$\frac{\pi}{2}$
2	1	0	$\frac{\pi}{2}$
3	∞	∞	0

故可得

$$w = k\int (z+1)^{\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1}(z-1)^{\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}-1}\mathrm{d}z + c = k\int \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\mathrm{d}z + c$$

$$= k\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1}) + c$$

$$= k\ln|z+\sqrt{z^2-1}| + \mathrm{i}k\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1}) + c$$

为确定常数 k 与 c 将上式改写成

$$u + \mathrm{i}v = (k_1 + k_2\mathrm{i})\ln|z+\sqrt{z^2-1}| + \mathrm{i}(k_1 + \mathrm{i}k_2)\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1}) + c_1 + \mathrm{i}c_2$$

即 $\quad u = c_1 + k_1\ln|z+\sqrt{z^2-1}| - k_2\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})$

$$v = c_2 + k_2\ln|z+\sqrt{z^2-1}| + k_1\mathrm{Arg}(z+\sqrt{z^2-1})$$

当 w 沿 $BA \to \pi\mathrm{i}$ 时，z 沿 $B'A' \to -1$，$\mathrm{Arg}z = \pi, y = 0$

所以 $u = 0$

$$= \lim_{x\to -1^-}\{c_1 + k_1\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - k_2\mathrm{Arg}(x+\sqrt{x^2-1})\}$$

$$= c_1 + k_1\ln 1 - k_2\cdot 0 = c_1$$

$$v = 0 = \lim_{x\to -1^-}\{c_2 + k_2\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + k_1\mathrm{Arg}(x+\sqrt{x^2-1})\}$$

$$= c_2 + k_2\cdot\ln 1 + k_1\cdot 0 = c_2$$

所以 $c = c_1 + \mathrm{i}c_2 = 0$

当 $w = \pi\mathrm{i}$ 时，$z = -1$，故有下式成立：

$$\pi\mathrm{i} = k\ln|-1+\sqrt{(-1)^2-1}| + \mathrm{i}k\mathrm{Arg}(-1+\sqrt{(-1)^2-1}) + c$$

$$= k\cdot\ln 1 + \mathrm{i}k\pi + 0 = \mathrm{i}k\pi$$

即 $k = 1$

所以 $w = \mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$

由上式整理得 $\quad z+\sqrt{z^2-1} = \mathrm{e}^w$

$$z^2 - 1 = \mathrm{e}^{2w} + z^2 - 2\mathrm{e}^w z$$

$$z = \frac{1+\mathrm{e}^{2w}}{2\mathrm{e}^w} = \frac{\mathrm{e}^w+\mathrm{e}^{-w}}{2} = \mathrm{ch}w$$

见图 6-33。

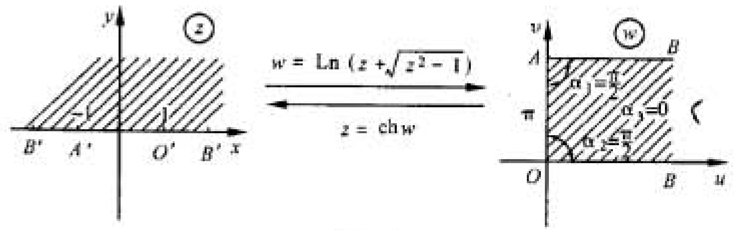


图 6-33

*22. 求出附录中 6,9 与 12 三个关于区域变换的映射

(1) 6. $w = \sin z$ (2) 9. $w = \dfrac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$

(3)12. $w = \mathrm{Ln}\dfrac{z-1}{z+1}$

解 ① 旋转：$z_1=(-\mathrm{i})z$ 得到区域 $\mathrm{Re}(z_1)>0$，$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}(z_1)<\frac{\pi}{2}$

② 上移：$z_2=z_1+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ 得到区域 $\mathrm{Re}(z_2)>0$，$0<\mathrm{Im}(z_2)<\pi$

③ 由上题知 $w=\mathrm{ch}z_2$，将区域 $\mathrm{Re}(z_2)>0$，$0<\mathrm{Im}(z_2)<\pi$ 映射成上半平面。

综上得
$$w=\mathrm{ch}z_2=\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}=\frac{e^{z_1}\cdot e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}+e^{-z_1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}{2}$$
$$=\frac{e^{-z_1}-e^{z_1}}{2\mathrm{i}}=\frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\sin z$$

见图 6-34。

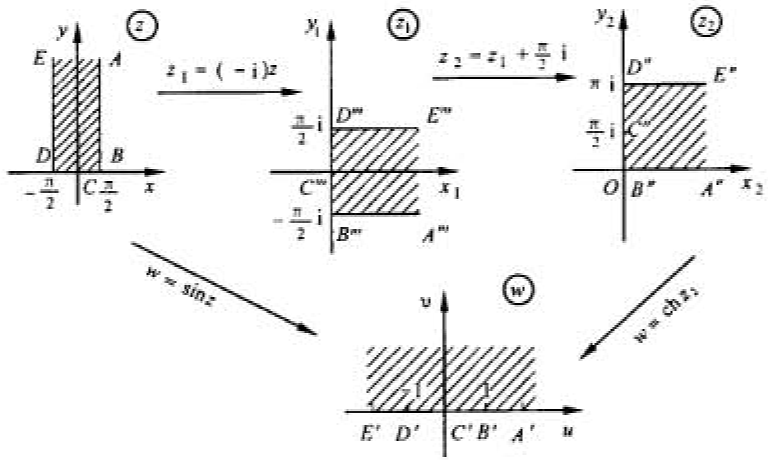


图 6-34

（2）将上半平面映射成单位圆内部的映射的一般形式为

$$w=e^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right),\theta\in\mathbf{R}$$

将 $\begin{cases}z_1=\infty\\w_1=-1\end{cases}$ $\begin{cases}z_2=0\\w_2=1\end{cases}$ $\begin{cases}z_3=1\\w_3=\mathrm{i}\end{cases}$ 分别代入上式可得

$$-1=e^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\infty-\lambda}{\infty-\bar{\lambda}}\right)=e^{\mathrm{i}\theta}\tag{1}$$

$$1=e^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)=\frac{-\lambda}{\bar{\lambda}}\tag{2}$$

$$\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\theta}\left(\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\right)=-\frac{1-\lambda}{1-\bar{\lambda}}\tag{3}$$

设 $\lambda=x+\mathrm{i}y$，由式(2)可得 $x-\mathrm{i}y=-(x+\mathrm{i}y)$ 即 $x=0$，$\lambda=\mathrm{i}y$

将 $\lambda=\mathrm{i}y$ 代入式(3)得 $\mathrm{i}=-\frac{1-\mathrm{i}y}{1+\mathrm{i}y}$

即 $\mathrm{i}-y=-1+\mathrm{i}y$

即 $y=1$，$\lambda=\mathrm{i}$

所以所求映射为 $w=(-1)\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$

见图 6-35。

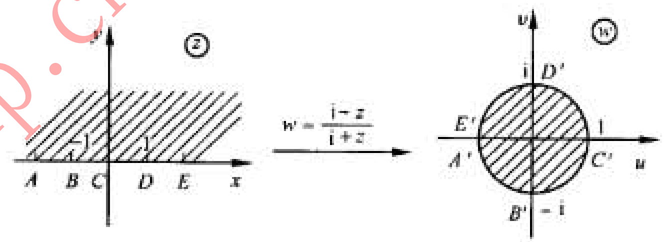


图 6-35

（3）作 z_i 与 w_i 对应如表 6-3：

表 6-3

i	z_i	w_i	α_i
1	∞	0	π
2	-1	∞	0
3	1	∞	0

所以
$$w=k\int(z+1)^{\frac{0}{\pi}-1}\cdot(z-1)^{\frac{0}{\pi}-1}\mathrm{d}z+c$$
$$=k\int\frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z+c=\frac{k}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+c$$
$$=\frac{k}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+\mathrm{i}\frac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+c$$

$w=0$ 时，$z=\infty$，因此 $0=\frac{k}{2}\ln\left|\frac{\infty-1}{\infty+1}\right|+\mathrm{i}\frac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{\infty-1}{\infty+1}\right)+c$

$$= \frac{k}{2}\ln 1 + i\frac{k}{2}\mathrm{Arg}1 + c$$

$$= c$$

$w = \pi i$ 时，$z = 0$，因此 $\pi i = \frac{k}{2}\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right| + i\frac{k}{2}\mathrm{Arg}\left(\frac{0-1}{0+1}\right) + c$

$$= \frac{k}{2}\ln 1 + i\frac{k}{2}\mathrm{Arg}(-1) + 0$$

$$= i\frac{k}{2}\pi$$

所以，$k = 2$，$w = \mathrm{Ln}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

见图 6-36。

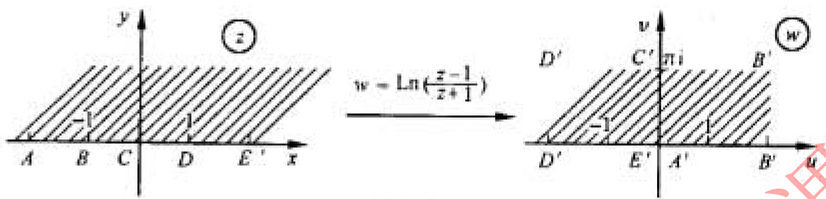


图 6-36

*23. 求出在 w 平面中第一象限外部的等温线方程。

已知在正实轴上的温度 $T = 100$℃，在正虚轴上的温度 $T = 0$℃（图 6-37）。

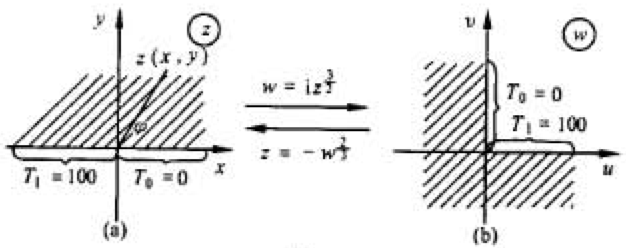


图 6-37

解 所求的等温线方程必满足拉普拉斯方程：$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0$，满足二、三、四象限边界上的条件。为便于求解，用 $z = -w^{\frac{2}{3}}$ 将 w 平面中的二、三、四

象限变为 z 平面中的上半平面，这使问题变为在 z 平面中的上半平面内，按新的边界条件解拉普拉斯方程。

由图 6-37(a) 可知，z 的极角 φ 满足 $0 < \varphi < \pi$，不难看出

$$T = T_0 + \frac{1}{\pi}(T_1 - T_0)\varphi \tag{1}$$

当 z 取实数值时，显然取得边值，它可看做是函数

$$iT_0 + \frac{1}{\pi}(T_1 - T_0)\mathrm{Ln}w \tag{2}$$

的虚部，而这函数在上半平面是处处解析的，所以由(1)得

$$T = 0 + \frac{1}{\pi}(100 - 0)\varphi = \frac{100}{\pi}\varphi \tag{3}$$

这里 $0 < \varphi < \pi$，$\tan\varphi$ 是拉普拉斯方程在 z 平面中的解，为了回到 w 平面，把式(3)两边同除以 $\frac{100}{\pi}$，并取正切得

$$\tan\frac{\pi}{100}T = \tan\varphi \tag{4}$$

设 $w = re^{i\theta}$，由 $z = -w^{\frac{2}{3}}$ 可知，$\varphi = \pi + \frac{2\theta}{3}$，将之代入(4)整理得

$$T = \frac{100}{\pi}\left(\frac{2}{3}\theta + \pi\right) \qquad \theta \text{ 是 } w \text{ 的极角，} -\frac{3}{2}\pi < \theta < 0$$