

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

课后答案网
www.hackshp.cn

华东理工大学
复变函数与积分变换作业 (第1册)

第一次作业

教学内容: 1.1 复数及其运算 1.2 平面点集的一般概念

1. 填空题:

(1) $\frac{1}{3+2i}$ 的实部 _____ 虚部 _____ 共轭复数 _____
模 _____ 辐角 _____

解

$$\frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{1}{13}(3-2i)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\} = \frac{3}{13}, \quad \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\} = -\frac{2}{13},$$

$$\overline{\frac{1}{3+2i}} = \frac{1}{13}(3+2i), \quad \left|\frac{1}{3+2i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{13},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{3+2i}\right) &= \arg\left(\frac{1}{3+2i}\right) + 2k\pi \\ &= -\arctan \frac{2}{3} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

(2) $i^8 - 4i^{21} + i$ 的实部_____虚部_____共轭复数_____

模_____辐角_____

解

$$\begin{aligned} i^8 - 4i^{21} + i &= (i^2)^4 - 4(i^2)^{10}i + i = (-1)^4 - 4(-1)^{10}i + i \\ &= 1 - 4i + i = 1 - 3i \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\{i^8 - 4i^{21} + i\} = 1, \operatorname{Im}\{i^8 - 4i^{21} + i\} = -3$$

$$\overline{(i^8 - 4i^{21} + i)} = 1 + 3i, \quad |i^8 - 4i^{21} + i| = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(i^8 - 4i^{21} + i) &= \arg(i^8 - 4i^{21} + i) + 2k\pi = \arg(1 - 3i) + 2k\pi \\ &= -\arctan 3 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

(3) $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$ 。

解:

$$\begin{aligned} \frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} &= \frac{[x+1+i(y-3)](5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} \\ &= \frac{5(x+1)+3(y-3)+i[-3(x+1)+5(y-3)]}{34} \\ &= \frac{1}{34}[5x+3y-4] + i[-3x+5y-18] = 1+i \end{aligned}$$

比较等式两端的实、虚部, 得

$$\begin{cases} 5x+3y-4=34 \\ -3x+5y-18=34 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 5x+3y=38 \\ -3x+5y=52 \end{cases}$$

解得 $x=1, y=11$ 。

2. 将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

(1) $1+i\sqrt{3}$;

解:

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(2) $\frac{(\cos 5\phi + i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi - i\sin 3\phi)^3}$.

解:

$$\begin{aligned}\frac{(\cos 5\phi + i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi - i\sin 3\phi)^3} &= \frac{(e^{i5\phi})^2}{(e^{-i3\phi})^3} = e^{i10\phi}/e^{-i9\phi} = e^{i19\phi} \\ &= \cos 19\phi + i\sin 19\phi\end{aligned}$$

3. 求复数 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部

$$\begin{aligned}\text{解: } w = \frac{z-1}{z+1} &= \frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{(z+1)\overline{(z+1)}} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} \\ &= \frac{(z\bar{z} + z - \bar{z} - 1)}{|z+1|^2} = \frac{z\bar{z} - 1}{|z+1|^2} + i\frac{2\operatorname{Im} z}{|z+1|^2}\end{aligned}$$

$$\text{所以, } \operatorname{Re} w = \frac{z\bar{z} - 1}{|z+1|^2}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{2\operatorname{Im} z}{|z+1|^2}$$

4. 求方程 $z^3 + 8 = 0$ 的所有的根.

$$z = (-8)^{\frac{1}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)}, \quad k=0,1,2.$$

即原方程有如下三个解:

$$1+i\sqrt{3}, \quad -2, \quad 1-i\sqrt{3}$$

5. 证明: $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

$$\begin{aligned}\text{解: } |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\&= \overline{z_1} \overline{z_1} - \overline{z_2} \overline{z_1} - \overline{z_1} \overline{z_2} + \overline{z_2} \overline{z_2} \\&= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{z_2} z_1) \\&\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \\&= (|z_1| - |z_2|)^2\end{aligned}$$

6. 设 z_1, z_2 是两个复数, 试证明.

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

并说明此等式的几何意义.

$$\begin{aligned}\text{证 左式} &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\&= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 + z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} - z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 \\&= 2(z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2}) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)\end{aligned}$$

几何意义: 平行四边形对角线平方的和等于其四个边平方的和

7. 求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3} - i)^5$;

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - i)^5 &= \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) \right]^5 = (2e^{-i\pi/6})^5 = 32e^{-i5\pi/6} \\&= 32 \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right] = -16\sqrt{3} - 16i\end{aligned}$$

(2) $(1 - i)^{\frac{1}{3}}$

$$(1-i)^{\frac{1}{3}} = \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt{2} e^{-i\pi/4} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)/3}, \quad k=0,1,2.$$

可知 $(1-i)^{1/3}$ 的 3 个值分别是

$$\sqrt[3]{2} e^{-i\pi/12} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$\sqrt[3]{2} e^{i7\pi/12} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),$$

$$\sqrt[3]{2} e^{i5\pi/4} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

(3) 求 $\sqrt[6]{-1}$ 。

$\sqrt[6]{-1} = (e^{i\pi+2k\pi})^{\frac{1}{6}} = e^{i\pi(2k+1)/6}, k=0,1,2,3,4,5$ 。可知 $\sqrt[6]{-1}$ 的 6 个值分别是

$$\begin{aligned} e^{i\pi/6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, & e^{i\pi/2} &= i, & e^{i5\pi/6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ e^{i7\pi/6} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, & e^{i3\pi/2} &= -i, & e^{i11\pi/6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

8. 化简 $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$

$$= (1-i)^2 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n = -2ie^{\frac{n\pi}{2}i} = -2i^{n+1}$$

9. 指出下列各题中点 z 的存在范围。作图, 并指是有界的还是无界的, 闭的还是开的, 单连的还是多连的。

(1) $|z - z_1| = |z - z_2|$;

垂直与连接点 z_1 与 z_2 的线段, 且过此线段中点的直线; 无界, 开集, 连通。

(2) $\operatorname{Re} z^2 = a^2$ (a 为实常数)

$$\text{令 } z = x + iy, \quad \operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(x^2 + 2xyi - y^2) = x^2 - y^2 = a^2$$

当 $a \neq 0$ 时, 为等轴双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$;

当 $a = 0$ 时, 为一对直线。无界, 开集, 单连通

$$(3) \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1;$$

$$|z-a| < |1-\bar{a}z|$$

$$\Rightarrow |z-a|^2 < |1-\bar{a}z|^2$$

$$\Rightarrow |z|^2 + |a|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z < 1 - |z|^2 |a|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z$$

$$\Rightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 - |z|^2 |a|^2$$

$$\Rightarrow 1 - |z|^2 |a|^2 - |z|^2 - |a|^2 > 0$$

$$\Rightarrow (1-|a|^2)(1-|z|^2) > 0$$

$$\begin{cases} |a| > 1, |z| > 1, \text{单位圆外部, 无界, 多连通} \\ |a| < 1, |z| < 1, \text{单位圆内部, 有界, 单连通} \\ |a| = 1, z \text{ 不存在。} \end{cases}$$

$$(4) \frac{\pi}{6} < \arg(z+2i) < \frac{\pi}{2} \text{ 且 } |z| > 2.$$

$$z+2i = x + (y+2)i$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{y+2}{x}$$

$$\Rightarrow \arg(z+2i) = \arctan \frac{y+2}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0, \frac{\pi}{6} < \arctan \frac{y+2}{x} < \frac{\pi}{2} \\ x < 0, y > 0, \frac{\pi}{6} < \arctan \frac{y+2}{x} + \pi < \frac{\pi}{2} \\ x < 0, y < 0, \frac{\pi}{6} < \arctan \frac{y+2}{x} - \pi < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{y+2}{x} > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{且有 } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 2 \Rightarrow x^2 + y^2 > 4$$

以 $-2i$ 为顶点, 两边分别与正实轴成角度 $\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 的角形域内部, 且以原点为圆心, 半径为 2 的圆外部分. 无界, 开, 单连通。

第二次作业

教学内容: 1.3 复变函数 2.1.1 解析函数概念

1. 求下列方程 (t 是实参数) 给出的曲线。

(1) $z = t + \frac{i}{t}$;

$$z = x + iy = t + \frac{i}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}, \text{ 即为双曲线 } xy = 1;$$

(2) $z = ae^{it} + be^{-it}$

$$\frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1, \text{ 椭圆}$$

2. 函数 $w = \frac{1}{z}$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线 ($z = x + iy; w = u + iv$)?

(1) $x^2 + y^2 = 4$;

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}, \text{ 是 } w \text{ 平面上一圆周}$$

(2) $x = 1$

$$\text{由 } x = 1, \text{ 知 } u = \frac{1}{1 + y^2}, v = \frac{-y}{1 + y^2}, \text{ 从而 } u^2 + v^2 = \frac{1}{1 + y^2} = u$$

$$\text{此为 } \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ 是 } w \text{ 平面上一圆周};$$

3. 试证 $\arg z (-\pi < \arg z \leq \pi)$ 在负实轴上 (包括原点) 不连续, 除此而外在 z 平面上处处连续。

证 设 $f(z) = \arg z$, 因为 $f(0)$ 无定义, 所以 $f(z)$ 在原点 $z=0$ 处不连续。

当 z_0 为负实轴上的点时, 即 $z_0 = x_0 (x_0 < 0)$, 有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^+}} \left(\arctan \frac{y}{x} + \pi \right) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^-}} \left(\arctan \frac{y}{x} - \pi \right) \end{cases} = \begin{cases} \pi \\ -\pi \end{cases}$$

所以 $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z$ 不存在, 即 $\arg z$ 在负实轴上不连续。而 $\arg z$ 在 z 平面上的其它点处的连续性显然。

4. 填空:

(1) 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 的导数 $f'(z) =$ _____

$z \neq 0$ 时导数不存在, $z = 0$ 时, 导数为 0.

(2) 函数 $f(z) = z^n$ 的导数 $f'(z) =$ _____

$$(z^n)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (nz^{n-1} + C_1 z^{n-2} \Delta z + \cdots + \Delta z^{n-1}) = nz^{n-1}$$

(3) 函数 $\frac{z-3}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为 _____

解: $x_1 = -1, x_{2,3} = \pm i$.

5. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域, 并求出其导数;

(1) $(z-1)^5$;

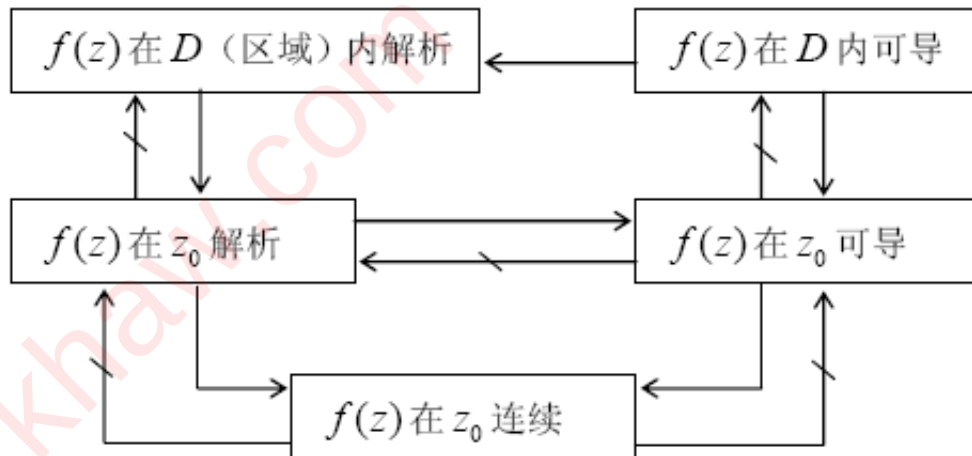
由于 $f'(z) = 5(z-1)^4$, 故 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

(2) $\frac{1}{z^2-1}$

$$\text{由于 } f'(z) = \frac{-2z}{(z^2-1)^2} = -\frac{2z}{(z-1)^2(z+1)^2}$$

知 $f(z)$ 在除去点 $z = \pm 1$ 外的 z 平面上处处可导。处处解析, $z = \pm 1$ 是 $f(z)$ 的奇点。

6. 复变函数的可导性与解析性有什么不同？



7. 判断下述命题的真假，并举例说明。

(1) 如果 $f(z)$ 在 z_0 点连续，那么 $f'(z_0)$ 存在。 ()

命题假。如函数 $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ 在 z 平面上处处连续，除了点 $z=0$ 外处处不可导。

(2) 如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 点解析。 ()

命题假，如函数 $f(z) = |z|^2$ 在点 $z=0$ 处可导，却在点 $z=0$ 处不解析。

(3) 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导。 ()

命题假，如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点。如上例。

(4) 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那么 z_0 也是 $f(z) + g(z)$ 和 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的奇点 ()。

命题假，如 $f(z) = \sin x \cosh y, g(z) = i \cos x \sinh y, z = (\pi/2, 0)$ 为它们的奇点，但不是 $f(z) + g(z)$ 的奇点。

华东理工大学

复变函数与积分变换 作业本 (第2册)

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第三次作业

教学内容: 2.1.2 柯西-黎曼方程

1. 判断函数的解析性有那些方法_____。

解: 1) 利用解析的定义; 2) 利用解析的充要条件。

2. 设函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析, 如果 $f(z)$ 满足下列() 条件, 那么它在 D 内为常数.

(1) $v = u^2$;

(2) $f(z)$ 为实数或纯虚数

(3) $\overline{f(z)}$ 解析;

(4) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数.

解: (1) (2) (3) (4)。

3. 判断下述命题的真假, 并举例说明

(1) 如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可导 (指偏导数存在), 那么 $f(z) = u + iv$ 亦可导.

解: 命题假。如函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z = x^2 + ixy$ 仅在点 $z=0$ 处满足 C-R 条件, 故 $f(z)$ 仅在点 $z=0$ 处可导。

(2) 设 $f(z) = u + iv$ 在区域内是解析的。如果 u 是实常数, 那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数;

如果 v 是实常数, 那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数.

解: 命题真。由 u 是实常数, 根据 C-R 方程知 v 也是实常数, 故 $f(z)$ 在整个 D 内是常数;

4. 设函数 $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 是全平面内的解析函数, 求 l, m, n 的值?

解: $u_x = 2nxy$; $u_y = 3my^2 + nx^2$; $v_x = 3x^2 + ly$; $v_y = 2lxy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

$$\begin{cases} 2n = 2l \\ 3my^2 + nx^2 = -3x^2 - ly^2 \end{cases}$$

$$\text{故 } l = -3, m = 1, n = -3$$

5. 证明: 柯西-黎曼方程的极坐标形式是:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

证 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 利用复合函数求导法则和 u, v 满足 C-R 条件, 得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \theta = \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta = r \frac{\partial u}{\partial r}$$

即 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ 。又

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta = -\frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta$$

$$= -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

总之, 有 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$ 。

第四次作业

教学内容: 2.2 初等函数及其解析性 2.3 解析函数与调和函数的关系

1. 判断下列等式是否正确, 并说明原因。

(1) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

解: 错, 因为 $\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$

2) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

解: 对,

$$\overline{\cos z} = \overline{\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)} = \frac{1}{2} (\overline{e^{iz}} + \overline{e^{-iz}}) = \frac{1}{2} (e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}) = \cos \bar{z}$$

(3) $\operatorname{Ln} z^2 = 2 \operatorname{Ln} z$

解: 错,

$$\operatorname{Ln} z^2 = 2 \ln |z| + i \operatorname{Arg}(2z), \text{ 而 } 2 \operatorname{Ln} z = 2 \ln |z| + 2i \operatorname{Arg}(z)$$

$$(4) \operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} z$$

解: 错,

$$\operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \ln |z| + i \operatorname{Arg}(\sqrt{z}), \text{ 而 } \frac{1}{2} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{2} \ln |z| + \frac{i}{2} \operatorname{Arg}(z)$$

2. 计算下列各函数值:

$$(1) (e^i)^i;$$

$$\text{解: } (e^i)^i = e^{i \ln e^i} = e^{-(1+2k\pi)}$$

$$(2) \operatorname{Ln}(ie);$$

$$\text{解: } \operatorname{Ln}(ie) = \ln e + i \arg(ie) = 1 + \frac{\pi i}{2}$$

$$(3) \operatorname{Ln}(1+i);$$

$$\text{解: } \operatorname{Ln}(1+i) = \ln \sqrt{2} + \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(4) (1+i)^i;$$

$$\begin{aligned} \text{解: } (1+i)^i &= e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i \left(\frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right)} = e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi + i \frac{\ln 2}{2}} = \\ &= e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi} \left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(5) \sin(1+2i)$$

$$\text{解: } \sin(1+2i) = \frac{e^{i(1+2i)} - e^{-i(1+2i)}}{2i} = \frac{1}{2} [(e^2 + e^{-2}) \sin 1 + i(e^2 - e^{-2}) \cos 1]$$

3. 解下列方程:

$$(1) 1 + e^z = 0;$$

解

原方程等价于 $e^z = -1$, 于是它的解为:

$$z = \operatorname{Ln}(-1) = \ln |-1| + i [\arg(-1) + 2k\pi] = i\pi(1+2k) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(2) \sin z + \cos z = 0.$$

解:

由于 $\sin z = -\cos z$, $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, 故

$$e^{2iz} - 1 = -i(e^{2iz} + 1)$$
$$e^{2iz} = \frac{1-i}{1+i}$$
$$z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}(-i) = \frac{1}{2i} [\ln|-i| + i(\arg(-i) + 2k\pi)]$$
$$= \frac{i}{2i} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(k - \frac{1}{4}\right)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

4. 证明下列各式:

(1) $\cos iz = \cosh z$

解: $\cos iz = \frac{e^{iiz} + e^{-iiz}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$.

(2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$;

解: $\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = 1$.

5. 判断下列命题是否正确:

- (1) 设 u 为区域 D 内的调和函数及 $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$, 则 f 是 D 内的解析函数. (对)
- (2) 函数 $v = x + y$ 是 $u = x + y$ 的共轭调和函数. (错)
- (3) 设 u 和 v 都是调和函数, 如果 v 是 u 的共轭调和函数, 那么 u 也是 v 的共轭调和函数. (错)
- (4) 一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数. (对)

6. 由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z) = u + iv$:

(1) $u = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$;

解:

$$u_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2, u_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2, \text{ 则}$$

$$f'(z) = u_x - iu_y = 3x^2 + 6xy - 3y^2 - i(3x^2 - 6xy - 3y^2) = 3(1-i)z^2, \text{ 故}$$

$$f(z) = (1-i)z^3 + ic, c \in \mathbb{R};$$

(2) $v = \arctan \frac{y}{x}, x > 0$;

$$f'(z) = v_y + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}, \text{ 故 } f(z) = \ln z + c, c \in \mathbb{R}$$

(3) $u = f(ax + by)$, a 与 b 为常数;

解:

由 $u_x = af'$, $u_{xx} = a^2 f''$, $u_{yy} = b^2 f''$, 而 $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 则 $f'' = 0$, 即 $f = c_1(ax + by) + c_2$

$$(4) u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

解: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ 故 $u = \frac{\cos 2\theta}{r^2}$ 由 C-R 方程极坐标形式得: $\frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{-2 \cos 2\theta}{r^2}$;

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{r^2} \sin 2\theta + \phi(r);$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r^3} \sin 2\theta + \phi'(r)$$

$$v = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f(z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

7. 设 $u(x, y) = e^{px} \sin y$, 求 p 的值使 $v(x, y)$ 为调和函数, 并求出解析函数 $f(z) = u + iv$ 。

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = pe^{px} \sin y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{px} \cos y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p^2 e^{px} \sin y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{px} \sin y$,

由拉普拉斯方程知 $p = \pm 1$

当 $p = 1$ 时,

$$u(x, y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$v = \int e^x \sin y dy = -e^x \cos y + g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow g(x) = C$$

$$f(z) = e^x \sin y + i(-e^x \cos y + C)$$

当 $p = -1$ 时,

$$u(x, y) = e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \sin y$$

$$v = \int -e^{-x} \sin y dy = e^{-x} \cos y + g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow g(x) = C$$

$$f(z) = e^{-x} \sin y + i(e^{-x} \cos y + C)$$

华东理工大学

复变函数与积分变换作业本 (第3册)

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第五次作业

教学内容: 3.1 复变函数积分概念 3.2 柯西积分定理

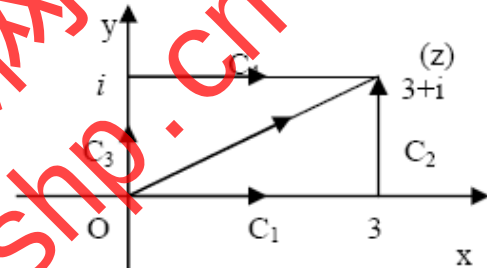
1. 沿下列路线计算积分 $\int_0^{3+i} z^2 dz$ 。

(1) 自原点到 $3+i$ 的直线段;

解 (1) $\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases} 0 \leq t \leq 1$, 故 $z=3t+it, 0 \leq t \leq 1$ 。 $dz=(3+i)dt$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{3+i} z^2 dz &= \int_0^1 (3t+it)^2 (3+i) dt \\ &= (3+i)^3 \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} (3+i)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (3+i)^3 = 6 + \frac{26}{3}i \end{aligned}$$



(2) 自原点沿实轴至 3, 再由 3 沿垂直向上至 $3+i$;

解:

$$\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz. \quad C_1 \text{ 之参数方程为 } \begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1); \quad C_2 \text{ 之参数方程为 } \begin{cases} x=3, \\ y=t, \end{cases} (0 \leq t \leq 1)$$

$$\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 9t^2 \cdot 3dt + \int_0^1 (3+it)^2 \cdot i dt = 6 + \frac{26}{3}i.$$

(3) 自原点沿虚轴至 i , 再由 i 沿水平方向右至 $3+i$ 。

解:

$$\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^i z^2 dz + \int_i^{3+i} z^2 dz = \int_{C_3} z^2 dz + \int_{C_4} z^2 dz.$$

$$C_3: z=it (0 \leq t \leq 1); \quad C_4: z=3t+i \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_0^1 -t^2 \cdot i dt + \int_0^1 (3t+i)^2 \cdot 3dt = 6 + \frac{26}{3}i$$

2. 设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析, C 为 D 内任何一条正向简单闭曲线, 问

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz = \oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz = 0$$

是否成立, 如果成立, 给出证明; 如果不成立, 举例说明。

证:

未必成立。令 $f(z) = z$, $C: |z| = 1$, 则 $f(z)$ 在全平面上解析, 但是

$$\oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[e^{i\theta}] d e^{i\theta} = \int_0^{2\pi} \cos \theta (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = \pi i \neq 0$$

$$\oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[e^{i\theta}] d e^{i\theta} = \int_0^{2\pi} \sin \theta (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = -\pi \neq 0$$

3. 观察得出下列积分的值, 并说明理由。

$$(1) \oint_{|z|=1.5} e^z (z^2 + 1) dz \quad ;$$

解: 0。

$$(2) \oint_{|z|=1.5} \frac{3z+5}{z^2+2z+3} dz \quad ;$$

解: 0。

4. 沿下列指定曲线的正向计算积分 $\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)}$ 值。

$$(1) C: |z| = \frac{1}{2};$$

解: $2\pi i$

$$(2) C: |z| = \frac{3}{2};$$

解: 0

5. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 且不为零, C 为 D 内任何一条简单光滑闭曲线, 判断积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 是否为零? 说明理由。

解: 等于零。因 $f(z)$ 在 D 内解析, 故 $f(z)$ 具有各阶导数且仍为解析函数, 从而 $f'(z)$ 在

D 内也解析, 又因在 D 内 $f(z) \neq 0$, 故 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 D 内解析, 从而在 C 上及 C 的内

部也解析, 于是由 Cauchy-Goursat 定理, $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ 。

6. 设区域 D 为右半平面, z 为 D 内的圆周 $|z|=1$ 上的任意一点, 用在 D 内的任意一条曲线 C 连接原点与 z , 证明:

$$\operatorname{Re} \left[\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2} \right] = \frac{\pi}{4}$$

证明 函数 $\frac{1}{1+\xi^2}$ 在右半平面解析, 故在计算从 0 到 z 沿任意一条曲线 C 的积分时与积分路径无

关。则 $\int_0^z \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^\theta \frac{ie^{i\eta}}{1+e^{2i\eta}} d\eta = \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{2i \cos \eta}{2+2 \cos 2\eta} d\eta$. (分子分母同乘以 $1+e^{-2i\eta}$),

$$\text{故 } \operatorname{Re} \left[\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2} \right] = \frac{\pi}{4}$$

7. 计算下列积分:

$$(1) \int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz;$$

$$\text{解: } \int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz = \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{1 - \cos 2z}{2} dz = \left(\frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4} \right) \Big|_{-\pi i}^{\pi i} = \left(\pi - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\pi \right) i$$

$$(2) \int_1^i \frac{\ln(z+1)}{(z+1)} dz.$$

$$\text{解: } -\frac{1}{8} \left(\frac{\pi^2}{4} + 3 \ln^2 2 \right) + \frac{iz}{8} \ln 2$$

第六次作业

教学内容: 3.3 复合闭路定理 3.4 柯西积分公式

1. 沿指定曲线的正向计算下列各积分。

$$(1) \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz, \quad C: |z-2|=1;$$

解:

$$\text{由 Cauchy 积分公式, } \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=2} = 2\pi e^2 i$$

$$(2) \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz, \quad C: |z-2i| = \frac{3}{2};$$

解:

$$\text{由 Cauchy 积分公式, } \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \oint_C \frac{e^{iz} dz / (z+i)}{z-i} = 2\pi i \frac{e^{iz}}{z+i} \Big|_{z=i} = \pi / e$$

$$(3) \oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}, \quad C: |z-a|=a;$$

$$\text{解 1: } \oint_C \frac{dz}{z^2 - a^2} = \oint_C \frac{z+a}{z-a} dz = 2\pi i \left. \frac{1}{z+a} \right|_{z=-a} = \frac{\pi}{a} i,$$

$$\text{解 2: } \oint_C \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[\oint_C \frac{1}{z-a} dz - \oint_C \frac{1}{z+a} dz \right] = \frac{1}{2a} [2\pi i - 0] = \frac{\pi}{a} i$$

$$(4) \oint_C \frac{dz}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}, \quad C: |z| = \frac{3}{2};$$

解：因被积函数的奇点 $z = \pm i$ 在 C 的内部， $z = \pm 2i$ 在 C 的外部，故由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式有：

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} + \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \\ &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{(z+i)(z^2 + 4)} dz + \oint_{|z+i|=\frac{1}{3}} \frac{1}{(z-i)(z^2 + 4)} dz \\ &= 2\pi i \left. \frac{1}{(z+i)(z^2 + 4)} \right|_{z=i} + 2\pi i \left. \frac{1}{(z-i)(z^2 + 4)} \right|_{z=-i} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$(5) \oint_C \frac{\sin z}{z} dz, \quad C: |z| = 1,$$

解：

$$\text{由 Cauchy 积分公式, } \oint_C \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \sin z \Big|_{z=0} = 0$$

$$(6) \oint_C \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz, \quad C: |z| = 2.$$

解：

$$\text{由高阶求导公式, } \oint_C \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz = 2\pi i (\sin z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$$

2. 证明：当 C 为任何不通过原点的简单闭曲线时， $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$ 。

证：当原点在曲线 C 内部时

$$\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i (1)' \Big|_{z=0} = 0$$

当原点在曲线 C 外部时， $1/z^2$ 在 C 内解析，故 $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$

3. 积分 $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz$ 和积分 $\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz$ 的值是否相等? 说明理由。

解:

$$\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} 2ie^{-i\theta} d\theta = 0; \quad \oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} 4ie^{-i\theta} d\theta = 0$$

故两个积分的值相等。但不能利用闭路变形原理从1) 的值得到, 因 $\frac{\bar{z}}{z}$ 不是一个解析函数

4. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, C 为 D 内的任意一条正向简单闭曲线, 证明: 对在 D 内但不在 C 上

的任意一点 z_0 , 等式: $\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ 成立。

证明 利用 Cauchy 积分公式, 有 $\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$; 而由高阶导数公式

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0), \text{ 故所证等式成立。}$$

华东理工大学

复变函数与积分变换作业本 (第4册)

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第七次作业

教学内容: 4.1 复数项级数 4.2 幂级数

1. 判别下列复数项级数的收敛性, 若收敛, 求其极限, 其中 $n \rightarrow \infty$.

(1) $\alpha_n = \frac{1+ni}{1+n}$;

解:

$$\alpha_n = \frac{1+ni}{1-ni} = \frac{1-n^2}{1+n^2} + \frac{2n}{1+n^2}i, \text{ 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n^2} = 0$$

故 α_n 收敛 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -1$

(2) $\alpha_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}$;

解: 由于 α_n 的实部 $(-1)^n$ 发散, 故 α_n 发散

(3) $\alpha_n = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-n}$

解:

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i\theta}\right)^n, \text{ 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i\theta}\right)^n = 0, \text{ 故 } \alpha_n \text{ 收敛, } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

2. 判别下列级数的收敛情况:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$;

解:

$$\text{由 } i^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \text{ 为收敛的交错项实级数}$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \text{ 收敛, 但 } \left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{1}{n}, \text{ 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| \text{ 发散, 原级数条件收敛}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n};$$

解:

$$\text{因 } \left| \frac{(6+5i)^n}{8^n} \right| = \left(\frac{\sqrt{61}}{8} \right)^n, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{61}}{8} \right)^n \text{ 收敛, 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n} \text{ 绝对收敛}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}.$$

解:

$$\text{因 } \cos in = \operatorname{ch} n, \text{ 而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{2^n} \neq 0, \text{ 故 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n} \text{ 发散}$$

3. 求下列幂级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n;$$

解:

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n+1} = 0$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln in)^n} z^n;$$

解:

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\ln in| = \infty$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n;$$

解:

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 / |1+i| = 1/\sqrt{2}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p};$$

解:

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n.$$

解:

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

4. 把下列函数展开成 z 的幂级数, 并指出它的收敛半径:

$$(1) \frac{1}{(1+z^2)^2};$$

解:

$$\text{因 } \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots, \quad |z| < 1,$$

$$\text{故 } \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots + (-1)^n z^{2n} + \dots, \quad |z| < 1,$$

$$\text{又因 } \left(\frac{1}{1+z^2} \right)' = \frac{-2z}{(1+z^2)^2},$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2z} \left(\frac{1}{1+z^2} \right)' = 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \dots, \quad |z| < 1,$$

而 $R=1$;

$$(2) e^{z^2} \sin z^2;$$

解:

$$\text{因 } e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots, \quad |z| < +\infty, \quad \sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots, \quad |z| < +\infty,$$

$$\text{故 } e^{z^2} \sin z^2 = \left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots \right) \left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots \right) = z^2 + z^4 + \frac{z^6}{3} + \dots, \quad |z| < +\infty,$$

而收敛半径 $R = +\infty$;

$$(3) \sin \frac{1}{1-z}.$$

解:

$$\text{因 } \sin \frac{1}{1-z} = \sin \left(1 + \frac{z}{1-z} \right) = \sin 1 \cos \frac{z}{1-z} + \cos 1 \sin \frac{z}{1-z},$$

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}, |z| < 1,$$

$$\text{故 } \sin \frac{z}{1-z} = (z + z^2 + z^3 + \dots) - \frac{1}{3!} (z + z^2 + z^3 + \dots)^3 + \dots = z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \dots, |z| < 1,$$

$$\cos \frac{z}{1-z} = 1 - \frac{1}{2} (z + z^2 + z^3 + \dots)^2 - \frac{1}{4!} (z + z^2 + z^3 + \dots)^4 + \dots = 1 - \frac{1}{2} z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sin \frac{1}{1-z} &= \sin \left(1 - \frac{1}{2} z^2 - z^3 + \dots \right) + \cos \left(z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 + \dots \right) \\ &= \sin 1 + (\cos 1)z + \left(\cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1 \right) z^2 + \left(\frac{5}{6} \cos 1 - \sin 1 \right) z^3 + \dots, |z| < 1, \end{aligned}$$

而收敛半径 $R=1$ 。

第八次作业

教学内容: 4.3 解析函数的泰勒展开 4.4 洛朗级数

1. 求下列各函数在指定点处的 Taylor 展开式, 并指出它们的收敛半径:

(1) $\frac{z-1}{z+1}, z_0 = 1$;

解:

$$\frac{z-1}{z+1} = (z-1) \frac{1}{(z-1+2)} = \frac{z-1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}}$$

及 $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, |z| < 1$ 。故

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{z-1}{2} \left[1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 - \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{z-1}{2} \right)^{n-1} + \dots \right] \\ &= \frac{z-1}{2} - \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{z-1}{2} \right)^n + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 2 \end{aligned}$$

于是收敛半径 $R=2$ 。

(2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0 = 2$;

解:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{z+2} - \frac{2}{z+1} \right) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

$$\text{及 } \frac{1}{z+2} = \frac{1}{4+(z-2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{z-2}{4} + \left(\frac{z-2}{4} \right)^2 - \cdots \right], \quad |z-2| < 4$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{z-2}{3} + \left(\frac{z-2}{3} \right)^2 - \cdots \right], \quad |z-2| < 3$$

$$\begin{aligned} \text{故原式} &= \frac{2}{4} \left[1 - \frac{z-2}{2^2} + \frac{1}{2^{2^2}} (z-2)^2 - \cdots \right] - \frac{1}{3} \left[1 - \frac{z-2}{3} + \frac{(z-2)^2}{3^2} - \cdots \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{2^{2n}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} (z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (z-2)^n, \quad |z-2| < 3, \text{ 而 } R=3. \end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{z^2}, z_0 = -1;$

解:

$$\text{因 } \frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z} \right)', \text{ 及 } \frac{1}{z} = \frac{1}{-1-(z+1)} = -\left[1 + (z+1) + (z+1)^2 + \cdots \right], \quad |z+1| < 1,$$

$$\text{故 } \frac{1}{z^2} = 1 + 2(z+1) + \cdots + n(z+1)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad |z+1| < 1,$$

而 $R=1$ 。

(4) $\frac{1}{4-3z}, z=1+i;$

解:

$$\begin{aligned} \text{因 } \frac{1}{4-3z} &= \frac{1}{4-3[z-(1+i)]-3-3i} = \frac{1}{1-3i-3[z-(1+i)]} \\ &= \frac{1}{1-3i} \frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}[z-(1+i)]} = \frac{1}{1-3i} \left\{ 1 + \frac{3}{1-3i}[z-(1+i)] + \left(\frac{3}{1-3i} \right)^2 [z-(1+i)]^2 + \cdots \right\}, \end{aligned}$$

其中 $\left| \frac{3}{1-3i} [z-(1+i)] \right| < 1$, 故

$$\frac{1}{4-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}} [z-(1+i)]^n, \quad |z-(1+i)| < \left| \frac{1-3i}{3} \right| = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

且收敛半径 $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 。

(5) $\tan z, z_0 = \frac{\pi}{4}$;

解:

因 $\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}$, 又 $\tan z = \frac{1 + \tan(z - \frac{\pi}{4})}{1 - \tan(z - \frac{\pi}{4})}$, 故

$$\begin{aligned} \tan z &= [1 + \tan(z - \frac{\pi}{4})](1 + \tan(z - \frac{\pi}{4}) + \tan^2(z - \frac{\pi}{4}) + \cdots) \\ &= 1 + 2(z - \frac{\pi}{4}) + 2(z - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(z - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots, \text{ 且收敛半径 } R = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(6) $\arctan z, z_0 = 0$.

解:

因 $(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}$, 又 $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots, |z| < 1$, 故

$$\arctan z = \int_0^z \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1,$$

且收敛半径 $R=1$ 。

2. 把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

(1) $\frac{1}{z(1-z)^2}, 0 < |z| < 1, 0 < |z-1| < 1$;

解:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+1)(z-2)} &= \frac{-\frac{1}{5}z}{z^2+1} + \frac{-\frac{2}{5}}{z^2+1} + \frac{\frac{1}{5}}{z-2} \\ \frac{1}{(z^2+1)(z-2)} &= -\frac{1}{5}z \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{1}{10} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{5}z \cdot \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\
 &= -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2(n+1)}} - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \\
 &= \cdots + \frac{2}{5} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{5} \frac{1}{z^3} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{5} \frac{1}{z} - \frac{1}{10} - \frac{z}{20} - \frac{z^2}{40} - \frac{z^3}{80} - \cdots \quad 1 < |z| < 2 \\
 (2) & \frac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1 < |z| < 2;
 \end{aligned}$$

解:

在 $0 < |z| < 1$ 内,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(1-z)^2} &= \frac{1}{z} (1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)^2 = \frac{1}{z} (1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots) \\
 &= \frac{1}{z} + 2 + 3z + \cdots + (n+1)z^{n-1} + \cdots = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2)z^n
 \end{aligned}$$

在 $0 < |z-1| < 1$ 内,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(1-z)^2} &= \frac{1}{(1-z)^2} \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{(1-z)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
 &= \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n;
 \end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{z^2(z-i)}$, 以 i 为心的单位圆;

解:

在 $1 < |z| < +\infty$ 内, 因

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{-1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } e^{\frac{1}{1-z}} &= 1 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right)^3 + \cdots; \\
 &= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^4} + \cdots
 \end{aligned}$$

(4) $e^{\frac{1}{1-z}}, 1 < |z| < +\infty$.

解:

在 $0 < |z-i| < 1$ 内, 因 $\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n z^{n-1}, |z| < 1$, 故

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{i^2(z-i)(1+\frac{z-i}{i})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}}$$

在 $1 < |z-i| < +\infty$ 内, 因 $\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{(z-i)^3(1+\frac{i}{z-i})^2}$, 故

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n i^{n-1}}{(z-i)^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}}$$

3. 把下列各函数在指定圆环域内展成 Laurent 级数, 且计算其沿正向圆周 $|z|=6$ 的积分值:

(1) $\sin \frac{1}{1-z}, z=1$ 的去心邻域;

解: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z-1)^{-n-1}, I = -2\pi i$;

(2) $\frac{1}{z(z+1)^6}, 1 < |z+1| < \infty$;

解: $\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^{-n-7}, I = 0$;

(3) $\ln\left(\frac{z-i}{z+i}\right), 2 < |z+i| < \infty$.

解: $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^{n+1}}{n+1} (z+i)^{-n-1}, I = 4\pi$

华东理工大学

复变函数与积分变换作业 (第5册)

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第九次作业

教学内容: 5.1 孤立奇点 5.2.1 留数的定义 5.2.2 极点处留数的计算

1. 填空题:

(1) 函数 $f(z) = \frac{1}{e^z - (1+i)}$ 的全部孤立奇点是 $\frac{1}{2} \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k = 0, \pm 1, \dots$

(2) $z=0$ 是 $\frac{1}{\sin z - z}$ 的 三 级极点.

(3) $z=-2$ 是 $\frac{z^3-8}{(z^2-4)^2}$ 的 二 级极点.

(4) 若 $f(z)$ 在 z_0 点解析, z_0 是 $g(z)$ 的本性极点, z_0 是 $f(z) \cdot g(z)$ 的 本性 奇点,
是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的 本性 奇点.

(5) $\text{Res}\left[z \cos \frac{1}{z}, 0\right] = \frac{1}{2}$

2. 指出下列函数的奇点及其类型 (不考虑 ∞ 点), 若是极点, 指出它的级.

(1) $\frac{z^{2n}}{1+z^n}$;

解:

由 $z^n + 1 = 0$, $z^n = -1$, 得 $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) 为原式一级极点。

(2) $\frac{\ln(1+z)}{z}$

解:

a. $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad 0 < |z| < 1, \quad \frac{\ln(1+z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n+1}$ 无负幂项, 故 $z=0$ 为其可去奇点。

b. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1+z)} = 1$, 故 $z=0$ 为可去奇点。

(3) $e^{\frac{z}{1-z}}$

解:

由于 $e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\frac{z-1+1}{1-z}} = e^{-1} e^{\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n}$, 所以 $z=1$ 为本性奇点。

(4) $\frac{\sin z}{z^3}$;

解:

a. $z=0$ 为 $\sin z$ 为的一级零点, 而 $z=0$ 为 z^3 的二级零点。故 $z=0$ 为 $\frac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。

b. $\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$, 故 $z=0$ 为其二级极点,

(5) $\frac{1}{z^2(e^z-1)}$;

解:

因 $e^z - 1 = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = z(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \cdots)$, 故 $z=0$ 为 $z^2(e^z-1)$ 的三级零点,

因而是 $\frac{1}{z^2(e^z-1)}$

的三级极点, 而 $z = 2k\pi i, (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 均为一级极点。

(6) $\frac{e^z \sin z}{z^2}$

解: 由于 $\frac{e^z \sin z}{z^2} = \frac{e^z (z - \frac{z^3}{3!} + \dots)}{z^2} = \frac{e^z (1 - \frac{z^2}{3!} + \dots)}{z}$

所以 $\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^z \sin z}{z^2} = 1$

因此 $z=0$ 是一级极点

3 证明: 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级极点, 那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级极点.

证 由题知: $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, 则有

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} \varphi(z) + (z - z_0)^m \varphi'(z) = (z - z_0)^{m-1} [m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)]$$

故 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

4 求下列函数在各有限奇点的留数

(1) $\frac{1 - e^{2z}}{z^4}$;

解:

$f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$, $z=0$ 为分母的四级零点, 是分子的一级零点,

所以是 $f(z)$ 的三级极点。

$$\text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \cdot \frac{1 - e^{2z}}{z^4} \right] = -\frac{4}{3}$$

或展开洛朗级数

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \left[1 - 1 - 2z - \frac{1}{2!} 4z^2 - \frac{1}{3!} 8z^3 \cdots \right]$$

$$\text{知 } \text{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = -\frac{4}{3}$$

$$(2) \frac{\cos z}{z-i};$$

解: $z=i$ 为一级极点

$$\text{Res}\left[\frac{\cos z}{z-i}, i\right] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{\cos z}{z-i} = \cos i = \cosh 1$$

$$(3) \frac{1}{(1+z^2)^3};$$

解: $z = \pm i$ 为三级极点

$$\text{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3}, i\right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-i)^3 \frac{1}{(1+z^2)^3} \right] = \frac{-3i}{16}$$

$$\text{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3}, -i\right] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z+i)^3 \frac{1}{(1+z^2)^3} \right] = \frac{3i}{16}$$

$$(4) z^2 \sin \frac{1}{z};$$

解

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}, |z| > 0, \text{ 知 } \text{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = -\frac{1}{6}$$

5. 判断 $e^{z+\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点的类型, 并求其留数.

解: 函数 $e^{z+\frac{1}{z}}$ 有孤立奇点 $0, \infty$, 而且在 $0 < |z| < +\infty$ 内有如下展开式:

$$\begin{aligned} e^{z+\frac{1}{z}} &= e^z e^{\frac{1}{z}} = \left(1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \cdots\right) \\ &= \cdots + \left\{1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{3!4!} + \cdots\right\} \frac{1}{z} + \cdots \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \operatorname{Res}\left[e^{z+\frac{1}{z}}, 0\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{z+\frac{1}{z}}, \infty\right] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

6 设 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析, z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 且 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = A$, 证明:

$$\operatorname{Res}[f(z)\varphi(z), z_0] = A\varphi(z_0)$$

证明: 因为 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 设 $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$, $g(z)$ 在 z_0 解析, $g(z_0) \neq 0$

$$\text{所以 } \operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{g(z)}{z-z_0} = g(z_0) = A$$

又由于 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析所以 z_0 为 $f(z)\varphi(z)$ 的一级极点。

$$\operatorname{Res}[f(z)\varphi(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{g(z)\varphi(z)}{z-z_0} = A\varphi(z_0)$$

7. 已知 $z=0$ 是函数 $f(z)$ 的 n 级极点, 证明 $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, 0\right] = -n$.

证明: 设 $f(z) = z^{-n}g(z)$, $g(z)$ 在 $z=0$ 解析, 且 $g(0) \neq 0$, 于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-nz^{-n-1}g(z) + z^{-n}g'(z)}{z^{-n}g(z)} = \frac{-n}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} \text{ 在 } z=0 \text{ 解析, 故 } \operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, 0\right] = -n.$$

第十次作业

教学内容 5.2.3 留数定理; 5.2.4 函数在无穷远点的留数

1. 填空题

(1) $\cos z - \sin z$ 在 $z = \infty$ 的留数为 0.

(2) $\frac{2z}{3+z^2}$ 在 $z=\infty$ 的留数为 -2.

2 利用留数定理计算下列积分.

(1) $\oint_C \frac{1}{1+z^4} dz$, $C: x^2 + y^2 = 2x$;

解:

被积函数有四个一级极点, $z_k = e^{\frac{2k\pi + \pi}{4}i}$ ($k=0,1,2,3$) 其中只有 $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_3 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$ 在 C 内

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{1+z^4} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{\pi}{4}i}) + \operatorname{Res}(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{7\pi}{4}i})]; \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{7\pi}{4}i}} \right] \\ &= 2\pi i \left[-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(i-1) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi i. \end{aligned}$$

(2) $\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz$, $C: |z|=4$;

解: 被积函数有三个一级极点, $z=1, z=\pm 3i$, 且都在 C 内

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}, 1) + \operatorname{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}, 3i) \\ &\quad + \operatorname{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}, -3i)] \end{aligned}$$

$$= 2\pi i \left[\lim_{z \rightarrow 1} \frac{3z^3+2}{z^2+9} + \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z+3i)} + \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{3z^3+2}{(z-1)(z-3i)} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2} + \frac{2-81i}{-18-6i} + \frac{2+18i}{-18+6i} \right] = 6\pi i$$

(3) $\oint_C \frac{\sin z}{z} dz$, $C: |z| = \frac{3}{2}$;

解:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1 \text{ 故 } z = 0 \text{ 为 } f(z) \text{ 的可去奇点则}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = c_{-1} = 0$$

故原积分=0。

$$(4) \oint_C \frac{2 \cos z}{(e + e^{-1})(z - i)^3} dz, \quad C: |z - i| = 1;$$

解: 被积函数在 C 内有一个三级极点 $z = i$ 。由留数定理

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{2 \cos z}{(e + e^{-1})(z - i)^3} dz &= 2\pi i \left[\frac{2 \cos z}{(e + e^{-1})(z - i)^3} \right] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{2}{(e + e^{-1})} \cdot (z - i)^3 \cdot \frac{\cos z}{(z - i)^3} \right] \\ &= \frac{2\pi i}{e + e^{-1}} [-\cos i] = -\pi i. \end{aligned}$$

3 计算下列积分, C 为正向圆周:

$$(1) \oint_C \frac{z^{13}}{(z^2 + 5)^3 (z^4 + 1)^2} dz, \quad C: |z| = 3;$$

解:

函数 $\frac{z^{13}}{(z^2 + 1)^2 (z^4 + 2)^3}$ 在 $|z| = 3$ 的外部, 除 ∞ 点外没有其他奇点, 因此根据定理二与规则 IV,

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z^{13}}{(z^2 + 1)^2 (z^4 + 2)^3} dz &= -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right] \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1 + z^2)^2 (1 + 2z^4)^3}, 0\right] = 2\pi i \end{aligned}$$

$$(2) \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz.$$

$$f(z) = \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} \text{ 有奇点, } z = -1, z = 0, z = -1 \text{ 为一级极点,}$$

而 $z=0$ 为本性奇点, 在 $2<|z|<+\infty$ 内展 开 $f(z)$, 则

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^3}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} e^{\frac{1}{z}} = \frac{z^2}{\left(1+\frac{1}{z}\right)} e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right) \\ &= \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right) = z^2 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3} \frac{1}{z} + \dots \end{aligned}$$

得 $-c_{-1} = \frac{1}{3}$, 故原积分 $= 2\pi i(c_{-1}) = -\frac{2}{3}\pi i$.

华东理工大学

复变函数与积分变换作业 (第6册)

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第十一次作业

教学内容: 5.3 利用留数计算实积分; 6.1 共形映射的概念

1. 填空题

(1) 分式线性映射 $w = \frac{z-i}{z+i}$ 在 $z=i$ 处的旋转角为_____.

伸缩率为_____ $-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}$

(2) 在 $w = z^2$ 的映射下, $y = x+1$ 的像曲线为 $v = \frac{1}{2}(u^2-1)$, $y^2 = x^2 + 1$ 的像曲线 $u = -1$

(3) 在映射 $w = \frac{1}{z}$ 下, 区域 $x > 1, y > 0$ 映射为 $(u-\frac{1}{2})^2 + v^2 < (\frac{1}{2})^2, v < 0$.

2 计算下列积分:

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta}, 0 < b < a;$

由于被积函数的分母 $a+b\cos\theta$ 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 内不为零, 因而积分有意义。

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{a+b\frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{i(z^2-1)^2}{2z^2(bz^2+2az+b)} dz$$

$$= 2\pi i \{ \text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}] \}$$

$$\text{又 } \operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{(-1+z^2)(a+3az^2+bz(3+z^2))}{(b+2az+bz^2)^2} \Big|_{z=0} = -\frac{ai}{b^2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}] = \frac{i(z^2-1)^2}{4z(b+3az+2bz^2)} \Big|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{i\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

$$\text{故 } I = \frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx;$$

$$\text{令 } f(z) = \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9} \text{ 则 } f(z) \text{ 在上半平面有两个一级极点 } z_1=i, z_2=3i$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_1] = \frac{z^2-z+2}{(z^4+10z^2+9)'} \Big|_{z=i} = \frac{1}{16}(1+i)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_2] = \frac{z^2-z+2}{(z^4+10z^2+9)'} \Big|_{z=3i} = \frac{-3+7i}{48}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx = 2\pi i \left[\frac{1}{16}(1+i) + \frac{-3+7i}{48} \right] = \frac{5}{12}\pi$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$

$$\text{解：令 } f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} \quad f(z) \text{ 在上半平面上有两个一级极点}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_1] = \frac{z^2}{(1+z^4)'} \Big|_{z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_2] = \frac{z^2}{(1+z^4)'} \bigg|_{z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = 2\pi i \left[\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) - \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) \right] = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx, (a > 0, b > 0);$$

$$\text{解: 令 } f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2 + b^2} dx = 2\pi i [f(z), bi] = 2\pi i \frac{ze^{iaz}}{(z^2 + b^2)'} \bigg|_{z=bi} = \pi i e^{-ab}$$

$$\text{所以 } \int_0^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2 + b^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-ab}$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4x + 5)}$$

$$\text{对于 } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4x + 5} dx, \text{ 令 } R(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 5},$$

则 $z = -2 + i$ 为上半平面内的 $R(z)$ 的一级极点,

$$\text{故有: } \operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, i] = \frac{e^{iz}}{2z + 4} \bigg|_{z=-2+i} = -\frac{e^{-1}(\sin 2 + i \cos 2)}{2},$$

$$\text{则原积分} = \operatorname{Re}\{2\pi i \operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, -2 + i]\} = \pi e^{-1} \cos 2.$$

第十二次作业

教学内容: 6.2 分式线性映射; 6.3 几种常见的分式线性映射

1. 填空

(1) 把 $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$; 映射为 $w_1 = -1, w_2 = i, w_3 = 1$ 的分式线性映射为 $w = \frac{z-6i}{3iz-2}$

(2) 由三点 $z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = 0$ 到 $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$ 的分式线性映射为 $w = \frac{z+2+i}{z+2-i}$

2 求把上半平面 $\text{Im } z > 0$ 映射成单位圆域 $|w| < 1$ 的分式线性映射 $w = f(z)$, 并满足条件:

$$(1) f(i) = 0, \quad \arg f'(i) = -\frac{\pi}{2};$$

解: $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-i}{z+i}$, 则 $f'(z) = e^{i\theta} \frac{zi}{(z+i)^2}$

$$f'(i) = e^{i\theta} \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) = e^{i\theta} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$\text{由于 } \arg f'(i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{所以 } \theta - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta = 0$$

$$\text{所求映射为 } f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

$$(2) f(i) = 0, \quad f(-1) = 1;$$

解: 因为 $f(i) = 0$, 则 $f(-i) = \infty$,

$$f(z) = k \frac{z-i}{z+i}$$

$$\text{又 } f(-1) = k \frac{-1-i}{-1+i} = ki = 1$$

$$k = -1$$

$$\text{所求映射为 } f(z) = -i \frac{z-i}{z+i}$$

$$(3) f(2i) = 0, \quad \arg f'(2i) = 0;$$

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-2i}{z+2i}$$

$$f'(2i) = e^{i\theta} \cdot \left(-\frac{2i}{9}\right) = e^{i\theta} \cdot \frac{2}{9} e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$\theta - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{所求映射为 } f(z) = i \frac{z-2i}{z+2i}$$

3 求把单位圆 $|z| < 1$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的分式线性映射 $w = f(z)$, 并满足条件:

$$(1) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f(-1) = 1;$$

$$\text{解: 令 } f(z) = k \frac{2z-1}{z-2}$$

$$\text{由 } f(-1) = 1 \text{ 得, } k = 1$$

$$\text{故 } f(z) = \frac{2z-1}{z-2}$$

$$(2) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{解: } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ 则 } f(2) = \infty$$

$$\text{令 } f(z) = k \frac{z - \frac{1}{2}}{z-2}$$

$$|f(1)| = \left| \frac{k}{2} \right| = 1, \quad |k| = 2$$

$$f(z) = 2e^{i\theta} \frac{z - \frac{1}{2}}{z-2}$$

$$f'(z) = 2e^{i\theta} \frac{-3}{2(z-2)^2}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} e^{i\theta+\pi i}$$

$$\theta + \pi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{所以 } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(z) = -2i \frac{z - \frac{1}{2}}{z-2} = -i \frac{2z-1}{z-2}.$$

华东理工大学

复变函数与积分变换作业 (第7册)

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第十三次作业

教学内容: 7.1 Fourier 积分公式 7.2 Fourier 变换

1、求下列函数的 Fourier 积分

$$(1) f(t) = \begin{cases} -1 & -1 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解:

$$\text{函数 } f(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \text{ 是奇函数, 满足傅氏积分定理的条件,}$$

其傅氏积分公式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 1 \cdot \sin \omega t dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t d\omega \end{aligned}$$

在 $f(t)$ 的间断点 $t_0 = -1, 0, 1$ 处以 $\frac{f(t_0+0) + f(t_0-0)}{2}$ 代替。

$$(2) f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

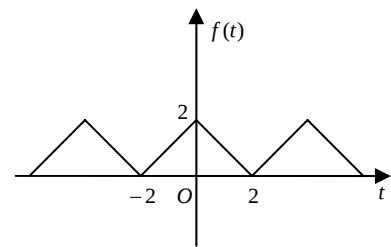
解:

函数 $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ 满足傅氏积分定理的条件,

傅氏积分公式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^1 (1-t^2) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 (1-t^2) \cos \omega t dt e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega} \left(\frac{2t \cos \omega t}{\omega^2} - \frac{2 \sin \omega t}{\omega} + \frac{t^2 \sin \omega t}{\omega} \right) \right]_0^1 e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(\sin \omega - \omega \cos \omega)}{\omega^3} e^{i\omega t} d\omega = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \cos \omega t d\omega \end{aligned}$$

2. 求如图所示三角形脉冲函数的频谱函数.



第2题

$$\text{解 } f(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \tau/2 \\ -\frac{2A}{\tau}t + A, & 0 \leq t \leq \tau/2 \\ \frac{2A}{\tau}t + A, & -\tau/2 \leq t \leq 0 \end{cases}, \text{ 则 } f(t) \text{ 的频谱函数为}$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\tau/2}^0 \left(\frac{2A}{\tau}t + A\right)e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\tau/2} \left(-\frac{2A}{\tau}t + A\right)e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{2A}{\tau} \left[\frac{2 - 2e^{\frac{i\omega\tau}{2}} + i\omega\tau}{2\omega^2} - \frac{-2 + 2e^{\frac{i\omega\tau}{2}} + i\omega\tau}{2\omega^2} \right] = \frac{4A}{\tau\omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega\tau}{2} \right)$$

3 求下列函数的 Fourier 变换, 并证明所列的积分等式

(1) $f(t) = e^{-|t|} \cos t$, 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t$

解:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos t e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{[1+i(1-\omega)]t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{[1-i(1+\omega)]t} dt + \int_0^{+\infty} e^{[-1+i(1-\omega)]t} dt + \int_0^{+\infty} e^{[-1-i(1+\omega)]t} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{[1+i(1-\omega)]t}}{1+i(1-\omega)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{[1-i(1+\omega)]t}}{1-i(1+\omega)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{[-1+i(1-\omega)]t}}{-1+i(1-\omega)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{e^{[-1-i(1+\omega)]t}}{-1-i(1+\omega)} \Big|_0^{+\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+i(1-\omega)} + \frac{1}{1-i(1+\omega)} + \frac{1}{-1-i(1-\omega)} + \frac{1}{-1+i(1+\omega)} \right] = \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4}$$

$f(t)$ 的积分表达式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega$$

因此有 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega = \frac{\pi}{2} f(t) = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t$

(2) $f(t) = e^{-\beta|t|} (\beta > 0)$, 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$

解：

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|} e^{-i\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos \omega t dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} [e^{-(\beta-i\omega)t} + e^{-(\beta+i\omega)t}] dt = \frac{e^{-(\beta-i\omega)t} \Big|_0^{+\infty}}{-(\beta-i\omega)} + \frac{e^{-(\beta+i\omega)t} \Big|_0^{+\infty}}{-(\beta+i\omega)} \\ &= \frac{1}{\beta-i\omega} + \frac{1}{\beta+i\omega} = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$f(t)$ 的积分表达式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} \cos \omega t d\omega \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$$

第十四次作业

教学内容：7.3 δ 函数及其 Fourier 变换；7.4 Fourier 变换的性质

1. 填空

(1) 矩形脉冲函数 $f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega) = \frac{A(1-e^{-i\omega\tau})}{i\omega}$.

(2) 函数 $F(\omega) = \omega \sin \omega t_0$ 的 Fourier 逆变换为 $\frac{1}{2} \delta'(t-t_0) - \delta'(t+t_0)$

(3) 函数 $F(\omega) = \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ 的 Fourier 逆变换为 $\cos \omega_0 t$

2. 若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ，证明

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2i}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

$$\text{证 } \mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)];$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)];$$

3. 求下列函数的 Fourier 变换

(1) $f(t) = \sin t \cos t$

$$\begin{aligned} \text{解 } F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t \sin t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{4j} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - 2)t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega + 2)t} dt \right] = -\frac{1}{4j} [2\pi\delta(\omega + 2) - 2\pi\delta(\omega - 2)] \\ &= \frac{\pi j}{2} [\delta(\omega + 2) - \delta(\omega - 2)] \end{aligned}$$

(2) $f(t) = e^{2jt} \sin t$

解：因为 $\mathcal{F}[\sin t] = j\pi[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)]$ ，由位移性质得

$$\mathcal{F}[e^{2it} \sin t] = i\pi[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega - 3)]$$

$$(3) f(t) = \sin^2 t$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \mathcal{F}[\sin^2 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[1] - \frac{1}{2}\mathcal{F}[\cos 2t] \\ &= 2\pi\delta(\omega) - \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2)] \end{aligned}$$

$$(4) f(t) = e^{i\omega_0 t} u(t)$$

解:

由像函数的位移性质及 $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$ 得

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} u(t)] = \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$(5) f(t) = e^{-\beta t} u(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

解:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t} u(t) \cos \omega_0 t e^{i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(e^{-(\beta + i(\omega - \omega_0))t} + e^{-(\beta + i(\omega + \omega_0))t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\beta + i(\omega + \omega_0)} \right) \\ &= \frac{\beta + i\omega}{(\beta + i\omega)^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

5 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, a 为非零常数, 试证明

$$(1) \mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

$$(2) \mathcal{F}[f(t_0 - at)] = \frac{1}{|a|} F\left(-\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

证明: (1) 由定义有

$$\mathcal{F}[f(at-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at-t_0)e^{-i\omega t} dt \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

$$(\text{令 } at-t_0 = u, \text{ 且 } a > 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega \frac{u+t_0}{a}} \frac{1}{a} du$$

$$(\text{u 换为 t}) = \frac{1}{a} e^{-i\frac{\omega}{a}t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\frac{\omega}{a}t} dt$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } \mathcal{F}[f(at-t_0)] = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

$$\text{因此 } \mathcal{F}[f(at-t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

注: 也可以由位移性质和相似性质加以证明。例如令 $g(t) = f(at)$ 由位移性质得

$$\mathcal{F}[f(at-t_0)] = \mathcal{F}\left[f\left[a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right]\right] = \mathcal{F}\left[g\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right] = \mathcal{F}\left[g(t)e^{-i\omega \frac{t_0}{a}}\right]$$

$$= \mathcal{F}\left[f(at)e^{-i\omega \frac{t_0}{a}}\right] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0} \quad (\text{相似性质})$$

(2) 在结论 (1) 中取 a, t_0 分别为 $-a, -t_0$ 即得。

注: 此题也可由定义出发证明, 或利用位移性质和相似性质证明。

6 已知 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 利用 Fourier 变换的性质求下列函数的 Fourier 变换

(1) $tf(t)$

解: 由像函数的微分性质, 有 $\mathcal{F}[tf(t)] = -\frac{1}{i}F'(\omega)$

(2) $(t-2)f(t)$

解: 由线性性质及像函数的微分性质

$$\mathcal{F}[(t-2)f(t)] = \mathcal{F}[tf(t)] - 2\mathcal{F}[f(t)] = -\frac{1}{i}F'(\omega) - 2F(\omega)$$

(3) $tf'(t)$

解: 由微分性质

$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$, 再由像函数的微分性质, 有

$$\mathcal{F}[tf'(t)] = -\frac{1}{i} \frac{d}{d\omega} [i\omega F(\omega)] = -F(\omega) - \omega F'(\omega).$$

(4) $f(1-t)$

解: 由相似性质 $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$

再由位移性质

$$\mathcal{F}[f(1-t)] = e^{-i\omega} F(-\omega)$$

7. 求函数 $f(t) = \sin(5t + \frac{\pi}{3})$ 的 Fourier 变换

$$\begin{aligned} \text{解 } F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(5t + \frac{\pi}{3}) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin 5t + \sqrt{3} \cos 5t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} i \pi [\delta(\omega + 5) - \delta(\omega - 5)] + \frac{\sqrt{3}}{2} \pi [\delta(\omega + 5) + \delta(\omega - 5)] \\ &= \frac{\pi}{2} [(\sqrt{3} + i) \delta(\omega + 5) + (\sqrt{3} - i) \delta(\omega - 5)] \end{aligned}$$

解二: 由于 $f(t) = \sin(5t + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin 5t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5t$

$$\text{所以 } \mathcal{F}[f(t)] = \frac{i\pi}{2} [\delta(\omega + 5) - \delta(\omega - 5)] + \frac{\sqrt{3}}{2} \pi [\delta(\omega + 5) + \delta(\omega - 5)]$$

华东理工大学

复变函数与积分变换作业 (第8册)

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第十五次作业

教学内容: 7.5 Fourier 的卷积性质; 8.1 拉普拉斯变换的概念 8.2 拉普拉斯变换的性质。

1. 若 $f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$, $f_2(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ 求 $f_1(t) * f_2(t)$

解 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} f_2(t-\tau) d\tau$

(*)

当 $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ 时, (*) 式为

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_0^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau} \frac{e^{i(t-\tau)} - e^{-i(t-\tau)}}{2i} d\tau \\ &= \frac{1}{2i} \left[e^{it} \int_0^t e^{-(1+i)\tau} d\tau - e^{-it} \int_0^t e^{-(1-i)\tau} d\tau \right] = \frac{1}{2i} \left[e^{it} \frac{e^{-(1+i)\tau}}{-(1+i)} \Big|_0^t - e^{-it} \frac{e^{-(1-i)\tau}}{-(1-i)} \Big|_0^t \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{it} \frac{e^{-(1+i)t} - 1}{-(1+i)} - e^{-it} \frac{e^{-(1-i)t} - 1}{-(1-i)} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{it} - e^{-t}}{1+i} + \frac{e^{-t} - e^{-it}}{1-i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{e^{it} - e^{-t} - i e^{it} + i e^{-t} + e^{-t} - e^{-it} + i e^{-t} - i e^{-it}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} - \frac{i(e^{it} + e^{-it})}{2i} + \frac{2i e^{-t}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}) \end{aligned}$$

当 $t > \frac{\pi}{2}$ 时, (*) 式为

$$\begin{aligned}
 f_1(t) * f_2(t) &= \int_{t-\frac{\pi}{2}}^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2i} \left[e^{i\tau} \frac{e^{-(1+i)\tau} \Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^t}{-(1+i)} - e^{-i\tau} \frac{e^{-(1-i)\tau} \Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^t}{-(1-i)} \right] \\
 &= \frac{1}{2i} \left[e^{it} \frac{e^{-(1+i)(t-\frac{\pi}{2})} - e^{-(1+i)t}}{1+i} + e^{-it} \frac{e^{-(1-i)(t-\frac{\pi}{2})} - e^{-(1-i)t}}{1-i} \right] \\
 &= \frac{1}{2i} e^{-t} \left(\frac{ie^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1+i} + \frac{1+ie^{\frac{\pi}{2}}}{1-i} \right) = \frac{e^{-t}}{2i} \cdot \frac{ie^{\frac{\pi}{2}} - 1 + e^{\frac{\pi}{2}} + i + 1 + ie^{\frac{\pi}{2}} + i - e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \\
 &= \frac{e^{-t}}{2} \left(1 + e^{\frac{\pi}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

当 $t < 0$ 时, (*) 式为 0.

故有

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \leq 0 \text{ 时} \\ \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}), & \text{当 } 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时} \\ \frac{e^{-t}}{2} \left(1 + e^{\frac{\pi}{2}} \right), & \text{当 } t > \frac{\pi}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

2. 已知 $f(t) = \cos \omega_0 t \cdot u(t)$, 求 $\mathcal{F}[f(t)]$.

解: 已知 $\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$ 又

$$f(t) = \cos \omega_0 t \cdot u(t) = \frac{1}{2} [e^{i\omega_0 t} u(t) + e^{-i\omega_0 t} u(t)]$$

由位移性质有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{2} [\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{i(\omega + \omega_0)}] \\
 &= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] - \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

3. 填空

$$(1) f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < 2 \\ -3 & 2 \leq t < 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases} \text{ 的 Laplace 变换为 } F(s) = \frac{1}{s}(3 - 4e^{-2t} + e^{-4t})$$

$$(2) f(t) = e^{2t} + 5\delta(t) \text{ 的 Laplace 变换为 } F(s) = \frac{5s - 9}{s - 2}$$

$$(3) f(t) = \cos t \cdot \delta(t) - \sin t \cdot u(t) \text{ 的 Laplace 变换为 } F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1}$$

$$(4) f(t) = 1 - te^t \text{ 的 Laplace 变换为 } F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

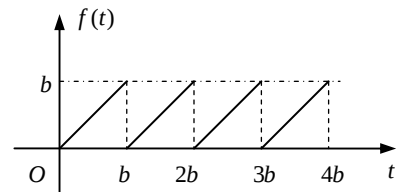
$$(5) f(t) = t^3 - 2t + 1 \text{ 的 Laplace 变换为 } F(s) = \frac{1}{s^4}(s^3 - 2s^2 + 6)$$

$$(6) f(t) = e^{-2t} \cos 6t \text{ 的 Laplace 变换为 } F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 36}$$

4. 求下列周期函数的 Laplace 变换

$$f(t) = t, 0 \leq t < b \text{ 且 } f(t+b) = f(t) \text{ (如图)}$$

解:



由图易知 $f(t)$ 是周期为 b 的函数, 且在一个周期内的表达式为

$$f(t) = t, \quad 0 \leq t < b$$

由公式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1-e^{-bs}} \int_0^b te^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-bs}} \left[-\frac{1}{s} te^{-st} \Big|_0^b - \left(-\frac{1}{s} \right) \int_0^b e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-bs}} \left[-\frac{be^{-bs}}{s} - \frac{1}{s^2} (e^{-bs} - 1) \right] = \frac{1}{1-e^{-bs}} \cdot \frac{bs - bs e^{-bs} + 1 - e^{-bs} - bs}{s^2} \\ &= \frac{1+bs}{s^2} - \frac{b}{s(1-e^{-bs})} \end{aligned}$$

5. 求下列函数的 Laplace 变换.

$$(1) f(t) = (t-1)^2 e^{2t}$$

解：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[(t-1)^2 e^t] = \mathcal{L}[(t^2 - 2t + 1)e^t] = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[e^t] + 2 \frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^t] + \mathcal{L}[e^t] \\ &= \frac{s^2 - 4s + 5}{(s-1)^3}\end{aligned}$$

$$(2) f(t) = t \cos 3t$$

解：

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t \cos at] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos at] = -\left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right)' = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$(3) f(t) = t^n e^{at} \quad (n \text{ 为正整数})$$

解：

$$\text{利用 } \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ 及位移性质得}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$(4) f(t) = \sin t \cdot u(t-2)$$

解：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[\sin(t)u(t-2)] = \mathcal{L}[\sin(t-2)u(t-2)\cos 2 + \sin 2 \cos(t-2)u(t-2)] \\ &= \cos 2 \mathcal{L}[\sin(t-2)u(t-2)] + \sin 2 \mathcal{L}[\cos(t-2)u(t-2)] \\ &= \frac{\cos 2 + s \sin 2}{s^2 + 1} e^{-2s}\end{aligned}$$

6. 求下列函数的 Laplace 变换

$$(1) f(t) = t \int_0^t e^{-3\tau} \sin 2\pi \tau d\tau$$

解：

由积分性质

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-3\tau} \sin 2\tau d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[e^{-3t} \sin 2t] = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{(s+3)^2 + 4}$$

再由像函数的微分公式

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[t \int_0^t e^{-3\tau} \sin 2\tau d\tau\right] = -\frac{d}{ds} \left\{ \frac{2}{s[(s+3)^2 + 4]} \right\} = \frac{2(3s^2 + 12s + 13)}{s^2[(s+3)^2 + 4]^2}$$

$$(2) f(t) = \frac{\sin at}{t} \quad (a \text{ 为实数})$$

解: 利用像函数的积分性质

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right] = \int_s^\infty L[\sin kt] ds = \int_s^\infty \frac{a}{s^2 + a^2} ds = \arctan \frac{s}{a} \Big|_s^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{a} = \operatorname{arc cot} \frac{s}{a}. \end{aligned}$$

$$(3) f(t) = \int_0^t te^{-3t} \sin 2tdt$$

解:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t te^{-3t} \sin 2tdt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[te^{-3t} \sin 2t] = \frac{4(s+3)}{s[(s+3)^2 + 4]^2}$$

$$(4) f(t) = \int_0^t \frac{e^{-2t} \sin 3t}{t} dt$$

解:

$$F(s) = \frac{1}{s} L\left[\frac{e^{-2t} \sin 3t}{t}\right] = \frac{1}{s} \int_s^\infty L[e^{-2t} \sin 3t] ds = \frac{1}{s} \int_s^\infty \frac{3}{(s+2)^2 + 9} ds = \frac{1}{s} \arctan \frac{s+2}{3}$$

7 计算下列积分

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t} dt$$

$$\text{解: } = \int_0^\infty L[e^{-t} \sin t] ds = \int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^2 + 1} ds = \arctan(s+1) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t} dt$$

解:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t} dt = \int_0^\infty \mathcal{L}[e^{-t}(1 - \cos t)] ds = \int_0^\infty \left[\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} \right] ds$$

$$= \ln \frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+1}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$(3) \int_0^{+\infty} t e^{-3t} \sin 2t dt$$

解:

$$\text{已知 } \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\text{再由微分性质 } \mathcal{L}[t \sin 2t] = -\left(\frac{2}{s^2+4}\right)' = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$\text{得 } \int_0^{+\infty} t e^{-3t} \sin 2t dt = \frac{4s}{(s^2+4)^2} \Big|_{s=3} = \frac{12}{169}$$

第十六次作业

教学内容: 8.3 拉普拉斯逆变换 8.4 拉普拉斯变换的应用

1. 填空

$$(1) \text{ 已知 } F(s) = \ln \frac{s^2+1}{s^2}, \text{ 则 } \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = F(s) = \frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$$

$$(2) \text{ 已知 } F(s) = \frac{2s}{(s-1)^2}, \text{ 则 } \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = F(s) = \frac{\arccot \frac{s}{a}}{a}$$

$$(3) \text{ 已知 } F(s) = \frac{1}{s^4}, \text{ 则 } \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = F(s) = \frac{1}{s} \frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}$$

$$(4) \text{ 已知 } F(s) = \frac{1+e^{-2s}}{s^2}, \text{ 则 } \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = F(s) = \frac{1}{s} \arccot \frac{s+2}{3}$$

2 求下列卷积

$$(1) t * t$$

解:

$$t * t = \int_0^t \tau(t-\tau) d\tau = t \int_0^t d\tau - \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{1}{2} t^3 - \frac{1}{3} t^3 = \frac{1}{6} t^3$$

$$(2) \sin kt * \sin kt \quad (k \neq 0)$$

解:

$$\begin{aligned}\sin kt * \sin kt &= \int_0^t \sin k\tau \cdot \sin k(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \cos(2k\tau - kt) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \cos ktd\tau \\ &= \frac{1}{2k} \sin kt - \frac{1}{2} t \cos kt\end{aligned}$$

3. 设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 利用卷积定理证明 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \mathcal{L}[f(t) * u(t)] = \frac{F(s)}{s}$

$$\text{证 } \frac{F(s)}{s} = F(s) \cdot \frac{1}{s} = \mathcal{L}[f(t) * u(t)] = \int_0^t f(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t)dt$$

4. 求下列函数的逆变换

$$(1) F(s) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}$$

解法 1

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right] \\ &= \text{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s-a)(s-b)}, a\right] + \text{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s-a)(s-b)}, b\right] \\ &= \frac{ae^{at}}{a-b} + \frac{be^{bt}}{b-a} = \frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})\end{aligned}$$

解法 2

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a} - \frac{b}{s-b}\right)\right] \\ &= \frac{1}{a-b} \left(a \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] - b \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right] \right) = \frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})\end{aligned}$$

$$(2) F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

解法 1

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+4} \right] \right) = \frac{1}{3} (\cos t - \cos 2t)$$

解法 2

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \right]$$

$$= \text{Res} \left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}, i \right] + \text{Res} \left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}, -i \right]$$

$$+ \text{Res} \left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}, 2i \right] + \text{Res} \left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)}, -2i \right]$$

$$= \frac{ie^{it}}{2i(i^2+4)} + \frac{-ie^{-it}}{-2i(i^2+4)} + \frac{2ie^{2it}}{(4i+1)4i} + \frac{-2ie^{-2it}}{(4i+1)(-4i)}$$

$$= \frac{e^{it}}{6} + \frac{e^{-it}}{6} + \frac{e^{2it}}{6} + \frac{e^{-2it}}{6} = \frac{1}{3} (\cos t - \cos 2t)$$

$$(3) F(s) = \frac{s+1}{9s^2+6s+5}$$

解：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{9s^2+6s+5} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{9 \left(s + \frac{1}{3} \right)^2 + 4} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \frac{1}{3}}{\left(s + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{\left(s + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left(\cos \frac{2}{3}t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} + \sin \frac{2}{3}t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \right) = \frac{1}{9} \left(\sin \frac{2}{3}t + \cos \frac{2}{3}t \right) e^{-\frac{1}{3}t}$$

$$(4) \quad F(s) = \frac{2s^2 + s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

解:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s^2 + s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s^2 + s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] \\ &= \text{Res} \left[\frac{(2s^2 + s + 5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)}, -1 \right] + \text{Res} \left[\frac{(2s^2 + s + 5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)}, -2 \right] + \text{Res} \left[\frac{(2s^2 + s + 5)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)}, -3 \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{2s^2 + s + 5}{(s+2)(s+3)} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -2} \frac{2s^2 + s + 5}{(s+1)(s+3)} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -3} \frac{2s^2 + s + 5}{(s+1)(s+2)} e^{st} \\ &= 3e^{-t} - 11e^{-2t} + 10e^{-3t} \end{aligned}$$

5. 解下列微分方程

$$(1) \quad y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t, y(0) = y'(0) = 0;$$

解:

对方程两边取拉氏变换, 且代入初始条件得

$$s^2 Y(s) - 2sY(s) + 2Y(s) = 2 \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

解出 $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2 + 1)^2}$$

取拉氏逆变换得到原方程解

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[- \left(\frac{1}{(s-1)^2 + 1} \right)' \right] = te^t \sin t$$

$$(2) \quad y'' - y' = 4 \sin t + 5 \cos 2t, y(0) = -1, y'(0) = -2;$$

解:

方程两边取拉氏变换, 并代入初始条件, 得

$$s^2 Y(s) + s + 2 - Y(s) = \frac{4}{s^2 + 1} + \frac{5s}{s^2 + 4}$$

整理后, 得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{4}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)} + \frac{5s}{(s^2 - 1)(s^2 + 4)} - \frac{s + 2}{s^2 - 1} \\ &= -\frac{2}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

取拉氏逆变换得

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] = -2 \sin t - \cos 2t$$

$$(3) \quad y''' + y' = e^{2t}, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$

解:

对方程两边取拉氏变换得

$$s^3 Y(s) + s Y(s) = \frac{1}{s - 2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s - 2)s(s^2 + 1)}$$

部分分式

$$\frac{1}{(s - 2)s(s^2 + 1)} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}$$

用待定系数法得

$$A = \frac{1}{10}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{2}{5}, D = -\frac{1}{5}$$

因此

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)s(s^2+1)}\right] \\
 &= \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{2}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \\
 &= \frac{1}{10} e^{2t} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t
 \end{aligned}$$

(4) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0, y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, y''(0) = 1;$

解:

对方程两边取拉氏变换, 且代入初始条件得

$$s^4 Y(s) - s + 2s^2 Y(s) + Y(s) = 0$$

解出 $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

取拉氏逆变换得到原方程解

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right] = \frac{1}{2} t \sin t$$

6. 求解下列积分方程及微分积分方程

$$y' + 2y = \sin t - \int_0^t y(\tau) d\tau, y(0) = 0$$

解: 两端取拉氏变换, 并由微分和积分性质, 有

$$sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s} Y(s)$$

$$\text{即 } (s+2+\frac{1}{3})Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\text{因此 } y(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} te^{-t}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin t - te^{-t})$$

7. 求解下列方程组

$$(1) \begin{cases} x'' - x + 2y' = e^t & x(0) = -\frac{3}{2}, x'(0) = \frac{1}{2} \\ x' - y'' - 2y = t^2 & y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

解: 设 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s), \mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$

在方程组两边去 Laplace 变换, 并应用初始条件得

$$\begin{cases} s^2 X(s) + \frac{3}{2}s - \frac{1}{2} - X(s) - 2sY(s) + 2 = \frac{1}{s-1} \\ sX(s) + \frac{3}{2} - s^2 Y(s) + s - \frac{1}{2} - 2Y(s) = \frac{2}{s^3} \end{cases}$$

解方程组, 得

$$\begin{cases} X(s) = -\frac{3}{2(s-1)} + \frac{2}{s^2} \\ Y(s) = -\frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{s^3} + \frac{3}{2s} \end{cases}$$

求它们的逆变换得

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{3}{2}e^t + 2t \\ y(t) = -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y' - 2z' = F(t) \\ y'' - z'' + z = 0 \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0$$

解:

对方程组两边取拉氏变换并代入初始条件, 设

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)], Z(s) = \mathcal{L}[z(t)], F(s) = \mathcal{L}[F(t)], \text{ 得}$$

$$\begin{cases} sY(s) - 2sZ(s) = F(s) \\ s^2 Y(s) - s^2 Z(s) + Z(s) = 0 \end{cases}$$

整理后, 解之得

$$\begin{cases} Y(s) = \frac{F(s)}{s} - 2 \frac{sF(s)}{s^2+1} \\ Z(s) = -\frac{sF(s)}{s^2+1} \end{cases}$$

取拉氏逆变换得到原方程组的解为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot F(s)\right] - 2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} \cdot F(s)\right]$$

$$= 1 * F(t) - 2 \cos t * F(t) = (1 - 2 \cos t) * F(t)$$

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z(s)] = - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} \cdot F(s)\right] = -\cos t * F(t)$$

即解为

$$\begin{cases} y(t) = (1 - 2 \cos t) * F(t) \\ z(t) = -\cos t * F(t) \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} (2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0 & x(0) = x'(0) = 1 \\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0 & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

解：

方程组中每个方程两边取拉氏变换，得

$$\begin{cases} (2s^2 - s + 9)X(s) - (s^2 + s + 3)Y(s) = 1 + 2s \\ (2s^2 + s + 7)X(s) - (s^2 - s + 5)Y(s) = 3 + 2s \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 2X(s) - Y(s) = \frac{2s+2}{s^2+4} \\ X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} X(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4} \\ Y(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4} \end{cases}$$

再取拉氏逆变换得到其解为

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t \\ y(t) = \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\sin 2t \end{cases}$$