

常微分方程习题 2.1

1. $\frac{dy}{dx} = 2xy$, 并求满足初始条件: $x=0, y=1$ 的特解.

解: 对原式进行变量分离得

$\frac{1}{y} dy = 2x dx$, 两边同时积分得: $\ln|y| = x^2 + c$, 即 $y = c e^{x^2}$ 把 $x=0, y=1$ 代入得

$c=1$, 故它的特解为 $y = e^{x^2}$ 。

2. $y^2 dx + (x+1)dy = 0$, 并求满足初始条件: $x=0, y=1$ 的特解.

解: 对原式进行变量分离得:

$-\frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{y^2} dy$, 当 $y \neq 0$ 时, 两边同时积分得: $\ln|x+1| = \frac{1}{y} + c$, 即 $y = \frac{1}{c + \ln|x+1|}$

当 $y=0$ 时显然也是原方程的解。当 $x=0, y=1$ 时, 代入式子得 $c=1$, 故特解是

$y = \frac{1}{1 + \ln|1+x|}$ 。

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy+x^3y}$

解: 原式可化为:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y} \cdot \frac{1}{x+x^3}$ 显然 $\frac{1+y^2}{y} \neq 0$, 故分离变量得 $\frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{x+x^3} dx$

两边积分得 $\frac{1}{2} \ln|1+y^2| = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \ln|c| (c \neq 0)$, 即 $(1+y^2)(1+x^2) = c x^2$

故原方程的解为 $(1+y^2)(1+x^2) = c x^2$

4: $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$

解: 由 $y=0$ 或 $x=0$ 是方程的解, 当 $xy \neq 0$ 时, 变量分离 $\frac{1+x}{x} dx = \frac{1-y}{y} dy = 0$

两边积分 $\ln|x| + x + \ln|y| - y = c$, 即 $\ln|xy| + x - y = c$,

故原方程的解为 $\ln|xy| = x - y = c; y=0; x=0$.

$$5: (y+x)dy + (y-x)dx = 0$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, \text{ 令 } \frac{y}{x} = u, y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{则 } u + x \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u+1}, \text{ 变量分离, 得: } -\frac{u+1}{u^2+1} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{两边积分得: } \arctan u + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = -\ln|x| + c.$$

$$6: x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$\text{解: 令 } \frac{y}{x} = u, y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}, \text{ 则原方程化为:}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{x^2(1-u^2)}}{x}, \text{ 分离变量得: } \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \operatorname{sgn} x \bullet \frac{1}{x} dx$$

$$\text{两边积分得: } \arcsin u = \operatorname{sgn} x \bullet \ln|x| + \bar{c}$$

$$\text{代回原来变量, 得 } \arcsin \frac{y}{x} = \operatorname{sgn} x \bullet \ln|x| + \bar{c}$$

$$\text{另外, } y^2 = x^2 \text{ 也是方程的解。}$$

$$7: \tan y dx - \cot x dy = 0$$

$$\text{解: 变量分离, 得: } \tan y dy = \cot x dx$$

$$\text{两边积分得: } \ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + c.$$

$$8: \frac{dy}{dx} = -\frac{e^{y^2+3x}}{y}$$

$$\text{解: 变量分离, 得 } \frac{y}{e^{y^2}} dy = -\frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$9: x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$$

$$\text{解: 方程可变为: } -\ln \frac{y}{x} \bullet dy - \frac{y}{x} dx = 0$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}, \text{ 则有: } \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln u}{1+\ln u} d \ln u$$

$$\text{代回原变量得: } cy = 1 + \ln \frac{y}{x}.$$

$$10: \frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

$$\text{解: 变量分离 } e^y dy = e^x dx$$

$$\text{两边积分 } e^y = e^x + c$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

解：变量分离， $e^y dy = e^x dx$

两边积分得： $e^y = e^x + c$

$$11. \frac{dy}{dx} = (x+y)^2$$

解：令 $x+y=t$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + 1$

原方程可变为： $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t^2} + 1$

变量分离得： $\frac{1}{t^2+1} dt = dx$, 两边积分 $\arctan t = x + c$

代回变量得： $\arctan(x+y) = x + c$

$$12. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$$

解

令 $x+y=t$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$, 原方程可变为 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t^2} + 1$

变量分离 $\frac{t^2}{t^2+1} dt = dx$, 两边积分 $t - \arctan t = x + c$, 代回变量

$x+y - \arctan(x+y) = x + c$

$$13. \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y-1}{x-2y+1}$$

解：方程组 $2x-y-1=0, x-2y+1=0$; 的解为 $x=-\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$

令 $x = X - \frac{1}{3}, y = Y + \frac{1}{3}$, 则有 $\frac{dY}{dX} = \frac{2X-Y}{X-2Y}$,

令 $\frac{Y}{X} = U$, 则方程可化为： $X \frac{dU}{dX} = \frac{2-2U+2U^2}{1-2U}$

变量分离

$$14. \frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{x-y-2}$$

解：令 $x-y=5=t$, 则 $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dt}{dx}$,

原方程化为 $1 - \frac{dt}{dx} = \frac{t}{t-7}$, 变量分离 $(t-7)dt - 7dx$

两边积分 $\frac{1}{2}t^2 - 7t = -7x + c$

代回变量 $\frac{1}{2}(x-y+5)^2 - 7(x-y+5) = -7x + c$.

$$15. \frac{dy}{dx} = (x+1)^2 + (4y+1)^2 + 8xy + 1$$

解：方程化为 $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x + 1 + 16y^2 + 8y + 1 + 8xy + 1 = (x+4y+1)^2 + 2$

令 $1+x+4y=u$, 则关于 x 求导得 $1+4\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$, 所以 $\frac{1}{4}\frac{du}{dx} = u^2 + \frac{9}{4}$,

分离变量 $\frac{1}{4u^2+9}du = dx$, 两边积分得 $\arctg(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}y) = 6x + c$, 是

原方程的解。

$$16. \frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2}$$

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{(y^3)^2 - 2x^2}{y^2(2xy^3 + x^2)} = \frac{dy^3}{dx} = \frac{3[(y^3)^2 - 2x^2]}{2xy^3 + x^2}$, , 令 $y^3 = u$, 则原方程化为

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u^2 - 6x^2}{2xu + x^2} = \frac{\frac{3u^2}{x^2} - 6}{2\frac{u}{x} + 1}, \quad \text{这是齐次方程, 令}$$

$$\frac{u}{x} = z, \text{ 则 } \frac{du}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}, \text{ 所以 } \frac{3z^2 - 6}{2z + 1} = z + x \frac{dz}{dx}, \text{ , } x \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - z - 6}{2z + 1}, \dots\dots\dots(1)$$

当 $z^2 - z - 6 = 0$, 得 $z = 3$ 或 $z = -2$ 是 (1) 方程的解。即 $y^3 = 3x$ 或 $y^3 = -2x$ 是方程的解。

当 $z^2 - z - 6 \neq 0$ 时, 变量分离 $\frac{2z + 1}{z^2 - z - 6} dz = \frac{1}{x} dx$, 两边积分的 $(z - 3)^7 (z + 2)^3 = x^5 c$,

即 $(y^3 - 3x)^7 (y^3 + 2x)^3 = x^5 c$, 又因为 $y^3 = 3x$ 或 $y^3 = -2x$ 包含在通解中当 $c = 0$ 时。故原方程的解为 $(y^3 - 3x)^7 (y^3 + 2x)^3 = x^{15} c$

$$17. \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + 3xy + x}{3x^2 y + 2y^3 - y}$$

解: 原方程化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 + 3y^2 + 1)}{y(3x^2 + 2y^2 - 1)}; \dots\dots; \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2x^2 + 3y^2 + 1}{3x^2 + 2y^2 - 1}$

$$\text{令 } y^2 = u, \dots\dots; x^2 = v, \dots\dots; \text{ 则 } \frac{du}{dv} = \frac{2v + 3u + 1}{3v + 2u - 1} \dots\dots(1)$$

方程组 $\begin{cases} 2v + 3u + 1 = 0 \\ 3v + 2u - 1 = 0 \end{cases}$ 的解为 $(1, -1)$; 令 $Z = v - 1$, , $Y = u + 1$,

$$\text{则有 } \begin{cases} 2z + 3y = 0 \\ 3z + 2y = 0 \end{cases}, \dots\dots, \text{ 从而方程 (1) 化为 } \frac{dy}{dz} = \frac{2 + 3\frac{y}{z}}{3 + 2\frac{y}{z}}$$

令

$$t = \frac{y}{z}, \text{ , 则有 } \frac{dy}{dz} = t + z \frac{dt}{dz}, \text{ , 所以 } t + z \frac{dt}{dz} = \frac{2 + 3t}{3 + 2t}, \text{ , } z \frac{dt}{dz} = \frac{2 - 2t^2}{3 + 2t}, \dots\dots\dots(2)$$

当

$2 - 2t^2 = 0$ 时, , 即 $t = \pm 1$, 是方程(2)的解。得 $y^2 = x^2 - 2$ 或 $y^2 = -x^2$ 是原方程的解

当

$2 - 2t^2 \neq 0$ 时, , 分离变量得 $\frac{3 + 2t}{2 - 2t^2} dt = \frac{1}{z} dz$ 两边积分的 $y^2 + x^2 = (y^2 - x^2 + 2)^5 c$

另外

$y^2 = x^2 - 2$, 或 $y^2 = -x^2$, 包含在其通解中, 故原方程的解为 $y^2 + x^2 = (y^2 - x^2 + 2)^5 c$

18. 证明方程 $\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} = f(xy)$ 经变换 $xy = u$ 可化为变量分离方程，并由此求解下列方程

(1). $y(1 + x^2 y^2) dx = x dy$

(2). $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2 + x^2 y^2}{2 - x^2 y^2}$

证明：因为 $xy = u$ ，关于 x 求导得 $y + x \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ ，所以 $x \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - y$

得： $\frac{1}{y} \frac{du}{dx} - 1 = f(u)$ ， $\frac{du}{dx = y(f(u) + 1)} = \frac{u}{x} (f(u) + 1) = \frac{1}{x} (uf(u) + u)$

故此方程为此方程为变程。

解(1)：当 $x = 0$ 或 $y = 0$ 是原方程的解，当 $xy \neq 0$ 时，方程化为 $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = 1 + x^2 y^2$

令 $xy = u$ ，则方程化为 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} (2u + u^3)$ ，变量分离得： $\frac{du}{2u + u^3} = \frac{1}{x} dx$

两边同时积分得： $\frac{u^2}{u^2 + 2} = c x^4$ ，即 $\frac{y^2}{x^2 y^2 + 2} = c x^2$ ， $y = 0$ 也包含在此通解中。

故原方程的解为原 $\frac{y^2}{x^2 y^2 + 2} = c x^2$ ， $x = 0$ 。

解(2)令 $xy = u$ ，则原方程化为 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} (u \frac{2 + u^2}{2 - u^2} + u) = \frac{1}{x} \frac{4u}{2 - u^2}$

分离变量得 $\frac{2 - u^2}{4u} du = \frac{1}{x} dx$ ，两边积分得 $\ln \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{x^2 y^2}{4} + c$ ，这也就是方程的解。

19. 已知 $f(x) \int_0^x f(t) dt = 1, x \neq 0$ ，试求函数 $f(x)$ 的一般表达式。

解：设 $f(x) = y$ ，则原方程化为 $\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{y}$ 两边求导得 $y = -\frac{1}{y^2} y'$

$-y^3 = \frac{dy}{dx}$ ；；；；；；；； $dx = -\frac{1}{y^3} dy$ ；；；；；；；；；两边积分得 $x + c = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2}$ ；；；；；所以 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2x + c}}$

把 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2x + c}}$ 代入 $\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{y}$

$$\pm \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2t+c}} dt = \pm \sqrt{2x+c} - \sqrt{c} = \pm \sqrt{2x+c} - \sqrt{c} \text{ 得 } c=0, \text{ 所以 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

20. 求具有性质 $x(t+s) = \frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$ 的函数 $x(t)$, 已知 $x'(0)$ 存在。

解: 令 $t=s=0$ $x(0) = \frac{x(0)+x(0)}{1-x(0)x(0)} = \frac{2x(0)}{1-x(0)x(0)}$ 若 $x(0) \neq 0$ 得 $x^2 = -1$ 矛盾。

所以 $x(0)=0$. $x'(t) = \lim_{\Delta t} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{x(\Delta t)(1+x^2(t))}{\Delta t[1-x(t)x(\Delta t)]} = x'(0)(1+x^2(t))$

$\frac{dx(t)}{dt} = x'(0)(1+x^2(t))$ $\frac{dx(t)}{1+x^2(t)} = x'(0)dt$ 两边积分得 $\arctg$

$x(t) = x'(0)t + c$ 所以 $x(t) = \tg[x'(0)t + c]$ 当 $t=0$ 时 $x(0)=0$ 故 $c=0$ 所以

$x(t) = \tg[x'(0)t]$

02411 黄罕麟 (41) 甘代祥 (42)

习题 2.2

求下列方程的解

1. $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$

解： $y = e^{\int dx} \left(\int \sin x e^{-\int dx} dx + c \right)$
 $= e^x \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + c \right]$
 $= c e^x - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)$ 是原方程的解。

2. $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$

解：原方程可化为： $\frac{dx}{dt} = -3x + e^{2t}$
所以： $x = e^{\int -3dt} \left(\int e^{2t} e^{-\int -3dt} dt + c \right)$
 $= e^{-3t} \left(\frac{1}{5} e^{5t} + c \right)$
 $= c e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{2t}$ 是原方程的解。

3. $\frac{ds}{dt} = -s \cos t + \frac{1}{2} \sin 2t$

解： $s = e^{\int -\cos t dt} \left(\int \frac{1}{2} \sin 2t e^{\int \cos t dt} dt + c \right)$
 $= e^{-\sin t} \left(\int \sin t \cos t e^{\sin t} dt + c \right)$
 $= e^{-\sin t} (\sin t e^{\sin t} - e^{\sin t} + c)$
 $= c e^{-\sin t} + \sin t - 1$ 是原方程的解。

4. $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{n} y = e^x x^n$, n 为常数.

解：原方程可化为： $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{n} y + e^x x^n$
 $y = e^{\int \frac{x}{n} dx} \left(\int e^x x^n e^{-\int \frac{x}{n} dx} dx + c \right)$
 $= x^n (e^x + c)$ 是原方程的解。

$$5. \frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$$

解：原方程可化为： $\frac{dy}{dx} = -\frac{1-2x}{x^2}y + 1$

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{2x-1}{x^2} dx} (e^{\int \frac{1-2x}{x^2} dx} dx + c) \\ &= e^{(\ln x^2 + \frac{1}{2})} (\int e^{-\ln x^2 - \frac{1}{x}} dx + c) \\ &= x^2(1 + ce^{\frac{1}{x}}) \quad \text{是原方程的解.} \end{aligned}$$

$$6. \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + x^3}{xy^2}$$

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + x^3}{xy^2}$

$$= \frac{x^3}{y^2} + \frac{y}{x}$$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u \quad \text{则 } y = ux \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned} \text{因此：} u + x \frac{du}{dx} &= \frac{x}{u^2} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{u^2} \end{aligned}$$

$$u^2 du = dx$$

$$\frac{1}{3}u^3 = x + c$$

$$u^3 - 3x = x + c \quad (*)$$

将 $\frac{y}{x} = u$ 代入 (*) 中 得： $y^3 - 3x^4 = cx^3$ 是原方程的解.

$$7. \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1} + (x+1)^3$$

$$P(x) = \frac{2}{x+1}, Q(x) = (x+1)^3$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x+1} dx} = (x+1)^2$$

方程的通解为:

$$\begin{aligned} y &= e^{\int P(x)dx} \left(\int e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx + c \right) \\ &= (x+1)^2 \left(\int \frac{1}{(x+1)^2} * (x+1)^3 dx + c \right) \\ &= (x+1)^2 \left(\int (x+1) dx + c \right) \\ &= (x+1)^2 \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c \right) \end{aligned}$$

即: $2y = c(x+1)^2 + (x+1)^4$ 为方程的通解。

$$8. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3}$$

$$\text{解: } \frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y} = \frac{1}{y}x + y^2$$

$$\text{则 } P(y) = \frac{1}{y}, Q(y) = y^2$$

$$e^{\int P(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

方程的通解为:

$$\begin{aligned} x &= e^{\int P(y)dy} \left(\int e^{-\int P(y)dy} Q(y)dy + c \right) \\ &= y \left(\int \frac{1}{y} * y^2 dy + c \right) \\ &= \frac{y^3}{2} + cy \end{aligned}$$

即 $x = \frac{y^3}{2} + cy$ 是方程的通解, 且 $y=0$ 也是方程的解。

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x} + \frac{x+1}{x}, a \text{ 为常数}$$

$$\text{解: } P(x) = \frac{a}{x}, Q(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{a}{x} dx} = x^a$$

$$\text{方程的通解为: } y = e^{\int P(x)dx} (e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx + c)$$

$$= x^a \left(\int \frac{1}{x^a} \frac{x+1}{x} dx + c \right)$$

当 $a=0$ 时, 方程的通解为

$$y = x + \ln|x| + c$$

当 $a=1$ 时, 方程的通解为

$$y = cx + x \ln|x| - 1$$

当 $a \neq 0, 1$ 时, 方程的通解为

$$y = cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}$$

$$10. x \frac{dy}{dx} + y = x^3$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y + x^3$$

$$P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = x^3$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

方程的通解为:

$$y = e^{\int P(x)dx} \left(\int e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx + c \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int x \cdot x^3 dx + c \right)$$

$$= \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$$

$$\text{方程的通解为: } y = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$$

$$11. \frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = -xy + x^3 y^3$$

两边除以 y^3

$$\frac{dy}{y^3 dx} = -xy^{-2} + x^3$$

$$\frac{dy^{-2}}{dx} = -2(-xy^{-2} + x^3)$$

$$\text{令 } y^{-2} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -2(-xz + x^3)$$

$$P(x) = 2x, Q(x) = -2x^3$$

$$e^{\int p(x) dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

方程的通解为:

$$z = e^{\int p(x) dx} \left(\int e^{-\int p(x) dx} Q(x) dx + c \right)$$

$$= e^{x^2} \left(\int e^{-x^2} (-2x^3) dx + c \right)$$

$$= x^2 + ce^{x^2} + 1$$

故方程的通解为: $y^2(x^2 + ce^{x^2} + 1) = 1$, 且 $y = 0$ 也是方程的解。

$$12.(y \ln x - 2)ydx = xdy \frac{c}{4}x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x} y^2 - \frac{2y}{x}$$

两边除以 y^2

$$\frac{dy}{y^2 dx} = \frac{\ln x}{x} - \frac{2y^{-1}}{x}$$

$$\frac{dy^{-1}}{dx} = \frac{\ln x}{x} - \frac{2y^{-1}}{x}$$

$$\text{令 } y^{-1} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z - \frac{\ln x}{x}$$

$$P(x) = \frac{2}{x}, Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

方程的通解为:

$$z = e^{\int P(x)dx} \left(\int e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx + c \right)$$

$$z = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) dx + c \right) = x^2 \left(\int \frac{1}{x^2} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) dx + c \right)$$

$$= \frac{c}{4} x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}$$

方程的通解为: $y \left(\frac{c}{4} x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4} \right) = 1$, 且 $y=0$ 也是解。

13

$$2xydy = (2y^2 - x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x}{2xy} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2y}$$

这是 $n=-1$ 时的伯努利方程。

两边同除以 $\frac{1}{y}$,

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} - \frac{1}{2}$$

$$\text{令 } y^2 = z \quad \frac{dz}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2y^2}{x} - 1 = \frac{2z}{x} - 1$$

$$P(x) = \frac{2}{x} \quad Q(x) = -1$$

由一阶线性方程的求解公式

$$z = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int -e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= x + x^2 c$$

$$y^2 = x + x^2 c$$

$$14 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^y + 3x}{x^2}$$

$$\text{两边同乘以 } e^y \quad e^y \frac{dy}{dx} = \frac{(e^y)^2 + 3xe^y}{x^2}$$

$$\text{令 } e^y = z \quad \frac{dz}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 + 3xz}{x^2} = \frac{3z}{x} + \frac{z^2}{x^2} \quad \text{这是 } n=2 \text{ 时的伯努利方程。}$$

$$\text{两边同除以 } z^2 \quad \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{3}{xz} + \frac{1}{x^2} \quad \text{令 } \frac{1}{z} = T$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{-3T}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$P(x) = \frac{-3}{x} \quad Q(x) = \frac{-1}{x^2}$$

由一阶线性方程的求解公式

$$T = e^{\int \frac{-3}{x} dx} \left(\int \frac{-1}{x^2} e^{\int \frac{3}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= x^{-3} \left(-\frac{1}{2} x^2 + c \right)$$

$$= -\frac{1}{2} x^{-1} + cx^{-3}$$

$$z \left(-\frac{1}{2} x^{-1} + cx^{-3} \right) = 1$$

$$e^y \left(-\frac{1}{2} x^{-1} + cx^{-3} \right) = 1$$

$$-\frac{1}{2} x^2 e^y + ce^y = x^3$$

$$\frac{1}{2} x^2 + x^3 e^{-y} = c$$

$$15 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^3 y^3}$$

$$\frac{dx}{dy} = yx + y^3 x^3$$

这是 $n=3$ 时的伯努利方程。

$$\text{两边同除以 } x^3 \quad \frac{1}{x^3} \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x^2} + y^3$$

$$\text{令 } x^{-2} = z \quad \frac{dz}{dy} = -2x^{-3} \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{2y}{x^2} - 2y^3 = -2yz - 2y^3 \quad P(y) = -2y \quad Q(y) = -2y^3$$

由一阶线性方程的求解公式

$$z = e^{\int -2y dy} \left(\int -2y^3 e^{-\int -2y dy} dy + c \right)$$

$$= e^{-y^2} \left(-\int 2y^3 e^{y^2} dy + c \right)$$

$$= -y^2 + 1 + ce^{-y^2}$$

$$x^2(-y^2 + 1 + ce^{-y^2}) = 1$$

$$x^2 e^{y^2} (-y^2 + 1 + ce^{-y^2}) = e^{y^2}$$

$$e^{y^2} (1 - x^2 + x^2 y^2) = cx^2$$

$$16 \quad y = e^x + \int_0^x y(t) dt$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + y(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y + e^x$$

$$P(x) = 1 \quad Q(x) = e^x \quad \text{由一阶线性方程的求解公式}$$

$$y = e^{\int 1 dx} \left(\int e^x e^{-\int 1 dx} dx + c \right)$$

$$= e^x \left(\int e^x e^{-x} dx + c \right)$$

$$= e^x (x + c)$$

$$e^x (x + c) = e^x + \int_0^x e^x (x + c) dx$$

$$c=1$$

$$y = e^x (x + c)$$

17 设函数 $\varphi(t)$ 于 $-\infty < t < +\infty$ 上连续, $\varphi'(0)$ 存在且满足关系式

$$\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$$

试求此函数。

令 $t=s=0$ 得 $\varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0)$ 即 $\varphi(0) = \varphi(0)^2$ 故 $\varphi(0) = 0$ 或 $\varphi(0) = 1$

$$(1) \quad \text{当 } \varphi(0) = 0 \text{ 时} \quad \varphi(t) = \varphi(t+0) = \varphi(t)\varphi(0) \quad \text{即 } \varphi(t) = 0$$

$$\forall t \in (-\infty, +\infty)$$

$$(2) \quad \text{当 } \varphi(0) = 1 \text{ 时} \quad \varphi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)\varphi(\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)(\varphi(\Delta t) - 1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta t + 0) - \varphi(0)}{\Delta t} \varphi(t)$$

$$= \varphi'(0)\varphi(t)$$

$$\text{于是 } \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(0)\varphi(t) \quad \text{变量分离得 } \frac{d\varphi}{\varphi} = \varphi'(0)dt \quad \text{积分} \quad \varphi = ce^{\varphi'(0)t}$$

$$\text{由于 } \varphi(0) = 1, \text{ 即 } t=0 \text{ 时 } \varphi=1 \quad 1 = ce^0 \Rightarrow c=1$$

$$\text{故 } \varphi(t) = e^{\varphi'(0)t}$$

20. 试证：

(1) 一阶非齐线性方程 (2.28) 的任两解之差必为相应的齐线性方程 (2.3)

之解；

(2) 若 $y = y(x)$ 是 (2.3) 的非零解, 而 $y = \tilde{y}(x)$ 是 (2.28) 的解, 则方程 (2.28) 的通解可表为 $y = cy(x) + \tilde{y}(x)$, 其中 c 为任意常数.

(3) 方程 (2.3) 任一解的常数倍或任两解之和 (或差) 仍是方程 (2.3) 的解.

证明: $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$ (2.28)

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \quad (2.3)$$

(1) 设 y_1, y_2 是 (2.28) 的任意两个解

则 $\frac{dy_1}{dx} = P(x)y_1 + Q(x)$ (1)

$$\frac{dy_2}{dx} = P(x)y_2 + Q(x) \quad (2)$$

(1) - (2) 得

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = P(x)(y_1 - y_2)$$

即 $y = y_1 - y_2$ 是满足方程 (2.3)

所以, 命题成立。

(2) 由题意得:

$$\frac{dy(x)}{dx} = P(x)y \quad (3)$$

$$\frac{d\tilde{y}(x)}{dx} = P(x)\tilde{y}(x) + Q(x) \quad (4)$$

1) 先证 $y = cy + \tilde{y}$ 是 (2.28) 的一个解。

于是 $c \times (3) + (4)$ 得

$$c \frac{dy}{dx} + \frac{d\tilde{y}}{dx} = cP(x)y + P(x)\tilde{y} + Q(x)$$

$$\frac{d(cy + \tilde{y})}{dx} = P(x)(cy + \tilde{y}) + Q(x)$$

故 $y = cy + \tilde{y}$ 是 (2.28) 的一个解。

2) 现证方程 (4) 的任一解都可写成 $cy + \tilde{y}$ 的形式

设 y_1 是 (2.28) 的一个解

$$\text{则 } \frac{dy_1}{dx} = P(x)y_1 + Q(x) \quad (4')$$

于是 (4') - (4) 得

$$\frac{d(y_1 - \tilde{y})}{dx} = P(x)(y_1 - \tilde{y})$$

$$\text{从而 } y_1 - \tilde{y} = ce^{\int P(x)dx} = cy$$

$$\text{即 } y_1 = \tilde{y} + cy$$

所以, 命题成立。

(3) 设 y_3, y_4 是 (2.3) 的任意两个解

$$\text{则 } \frac{dy_3}{dx} = P(x)y_3 \quad (5)$$

$$\frac{dy_4}{dx} = P(x)y_4 \quad (6)$$

$$\text{于是 (5) } \times c \text{ 得 } \frac{cdy_3}{dx} = cP(x)y_3$$

$$\text{即 } \frac{d(cy_3)}{dx} = P(x)(cy_3) \quad \text{其中 } c \text{ 为任意常数}$$

也就是 $y = cy_3$ 满足方程 (2.3)

(5) $\pm$ (6) 得

$$\frac{dy_3}{dx} \pm \frac{dy_4}{dx} = P(x)y_3 \pm P(x)y_4$$

$$\text{即 } \frac{d(y_3 \pm y_4)}{dx} = P(x)(y_3 \pm y_4)$$

也就是 $y = y_3 \pm y_4$ 满足方程 (2.3)

所以命题成立。

21. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程并求解。

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点横坐标和纵坐标的等差中项；

解：设 $p(x, y)$ 为曲线上的任一点，则过 p 点曲线的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x)$$

从而此切线与两坐标轴的交点坐标为 $(x - \frac{y}{y'}, 0), (0, y - xy')$

即 横截距为 $x - \frac{y}{y'}$,

纵截距为 $y - xy'$ 。

由题意得：

$$(5) \quad y - xy' = x^2$$

方程变形为

$$x \frac{dy}{dx} = y - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y - x$$

$$\text{于是} \quad y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int (-x) e^{\int (-\frac{1}{x}) dx} dx + c \right)$$

$$= e^{\ln|x|} \left(\int (-x) e^{-\ln|x|} dx + c \right)$$

$$= |x| \left(\int (-x) |x|^{-1} dx + c \right)$$

$$= x \left(\int (-x \cdot \frac{1}{x}) dx + c \right)$$

$$= x(-x + c)$$

$$= -x^2 + cx$$

所以，方程的通解为 $y = -x^2 + cx$ 。

$$(6) \quad y - xy' = \frac{x+y}{2}$$

方程变形为

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} y - \frac{1}{2}$$

于是 $y = e^{\int \frac{1}{2x} dx} \left(\int \left(-\frac{1}{2}\right) e^{\int \left(-\frac{1}{2x}\right) dx} dx + c \right)$

$$= e^{\frac{1}{2} \ln|x|} \left(\int \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2} \ln|x|} dx + c \right)$$

$$= |x|^{\frac{1}{2}} \left(\int \left(-\frac{1}{2}\right) |x|^{-\frac{1}{2}} dx + c \right)$$

$$= x^{\frac{1}{2}} \left(\int \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}} dx + c \right)$$

$$= x^{\frac{1}{2}} \left(-x^{\frac{1}{2}} + c \right)$$

$$= -x + cx^{\frac{1}{2}}$$

所以, 方程的通解为 $y = -x + cx^{\frac{1}{2}}$ 。

22. 求解下列方程。

(1) $(x^2 - 1)y' - xy + = 0$

解: $y' = \frac{xy - 1}{x^2 - 1} y - \frac{1}{x^2 - 1}$

$$y = e^{\int \frac{x}{x^2-1} dx} \left(\int -\frac{1}{x^2-1} e^{\int \frac{x}{x^2-1} dx} + c \right)$$

$$= / x^2 - 1 / ^{\frac{1}{2}} [\int -\frac{1}{x^2-1} \frac{1}{/ x^2 - 1 / ^{\frac{1}{2}}} dx + c]$$

$$= / x^2 - 1 / ^{\frac{1}{2}} [\int -\frac{dx}{/ x^2 - 1 / ^{\frac{3}{2}}} + c]$$

$$= c \sqrt{1 - x^2} / + x$$

(2) $y' \sin x \cos x - y - \sin^3 x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sin x \cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$P(x) = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad Q(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

由一阶线性方程的求解公式

$$y = e^{\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx} \left(\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} e^{-\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx} dx + c \right)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} (\int \sin x dx + c)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} (-\cos x + c)$$

$$= \tan x - \sin x$$

 题 2.3

1、验证下列方程是恰当方程，并求出方程的解。

1. $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

解: $\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$.

则 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

所以此方程是恰当方程。

凑微分, $x^2 dx - 2y dy + (y dx + x dy) = 0$

得: $\frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = C$

2. $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

解: $\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$.

则 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

所以此方程为恰当方程。

凑微分, $y dx + x dy - 3x^2 dx - 4y dy = 0$

得 $x^3 - xy + 2y^2 = C$

3. $[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}]dx + [\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}]dy = 0$

解: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y(x-y)^2 - 2y^2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \frac{2xy}{(x-y)^3}$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2x(x-y)^2 - 2x^2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2xy}{(x-y)^3}$$

则 $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$.

因此此方程是恰当方程。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \quad (2)$$

对 (1) 做 x 的积分, 则 $u = \int \frac{y^2}{(x-y)^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \varphi(y)$

$$= -\frac{y^2}{x-y} - \ln x + \varphi(y) \quad (3)$$

对 (3) 做 y 的积分, 则 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{-(-1)y^2 + (x-y)2y}{(x-y)^2} + \frac{d\varphi(y)}{dy}$

$$= \frac{-2xy + y^2}{(x-y)^2} + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$
$$= \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

$$\text{则 } \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{y^2 - 2xy}{(x-y)^2} = \frac{1}{y} - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x-y)^2} = \frac{1}{y} - 1$$

$$\varphi(y) = \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = \ln y - y$$

$$u = -\frac{y^2}{x-y} - \ln x + \ln y - y = \ln \frac{y}{x} - \frac{y^2 + xy - y^2}{x-y} = \ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y}$$

故此方程的通解为 $\ln \frac{y}{x} + \frac{xy}{x-y} = C$

4、 $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

解: $\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} .$$

则此方程为恰当方程。

$$\text{凑微分, } 6xy^2dx + 4x^3dx + 6x^2ydy + 3y^2dy = 0$$

$$3d(x^2y^2) + d(x^4) + d(y^3) = 0$$

$$\text{得: } x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$$

$$5. \left(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy = 0$$

$$\text{解: } M = \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \quad N = \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y^3} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y^3} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x}$$

$$\text{所以, } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ 故原方程为恰当方程}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} dx - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + dx + \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} dy - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} dy + \frac{1}{y^2} dy = 0$$

$$d(-\cos \frac{x}{y}) + d(\sin \frac{y}{x}) + dx + d(-\frac{1}{y}) = 0$$

$$\text{所以, } d(\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{x}{y} + x - \frac{1}{y}) = 0$$

$$\text{故所求的解为 } \sin \frac{y}{x} - \cos \frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$$

求下列方程的解:

$$6. 2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2} dy = 0$$

$$\text{解: } \frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^{x^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xe^{x^2}$$

$$\text{所以, } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ 故原方程为恰当方程}$$

$$\text{又 } 2xye^{x^2} dx - 2xdx + e^{x^2} dy = 0$$

所以, $d(ye^{x^2}-x^2)=0$

故所求的解为 $ye^{x^2}-x^2=C$

$$7.(e^x+3y^2)dx+2xydy=0$$

解: $e^x dx+3y^2 dx+2xydy=0$

$$e^x x^2 dx+3x^2 y^2 dx+2x^3 ydy=0$$

所以, $d e^x (x^2-2x+2)+d(x^3 y^2)=0$

即 $d[e^x(x^2-2x+2)+x^3 y^2]=0$

故方程的解为 $e^x(x^2-2x+2)+x^3 y^2=C$

$$8. 2xydx+(x^2+1)dy=0$$

解: $2xydx+x^2 dy+dy=0$

$$d(x^2 y)+dy=0$$

即 $d(x^2 y+y)=0$

故方程的解为 $x^2 y+y=C$

$$9、 ydx-xdy=(x^2+y^2)dx$$

解: 两边同除以 x^2+y^2 得 $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=dx$

$$\text{即, } d\left(\arctg \frac{x}{y}\right)=dx$$

故方程的通解为 $\arg tg\left(\frac{x}{y}\right)=x+c$

$$10、 ydx-(x+y^3)dy=0$$

解: 方程可化为: $\frac{ydx-xdy}{y^2}=ydy$

$$\text{即, } d\left(\frac{x}{y}\right)=ydy$$

故方程的通解为: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}y^2 + c$ 即: $2x = y(y^2 + c)$

同时, $y=0$ 也是方程的解。

11、 $(y-1-xy)dx + xdy = 0$

解: 方程可化为: $ydx + xdy = (1+xy)dx$

$$d(xy) = (1+xy)dx \quad \text{即:} \quad \frac{d(xy)}{1+xy} = dx$$

故方程的通解为: $\ln|1+xy| = x + c$

12、 $(y-x^2)dx - xdy = 0$

解: 方程可化为: $\frac{ydx - xdy}{x^2} = dx$

$$-d\left(\frac{y}{x}\right) = dx$$

故方程的通解为: $\frac{y}{x} = c - x$ 即: $y = x(c - x)$

13、 $(x+2y)dx + xdy = 0$

解: 这里 $M = x + 2y, N = x$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x} \quad \text{方程有积分因子 } \mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

两边乘以 μ 得: 方程 $x(x+2y)dx + x^2dy = 0$ 是恰当方程

故方程的通解为: $\int (x^2 + 2xy)dx + \int \left[x^2 - \frac{\partial}{\partial y} \int (x^2 + 2xy)dx \right] dy = c$

$$\frac{x^3}{3} + x^3y = c$$

即: $x^3 + 3x^2y = c$

14、 $[x \cos(x+y) + \sin(x+y)]dx + x \cos(x+y)dy = 0$

解：这里 $M = x \cos(x+y) + \sin(x+y)$, $N = x \cos(x+y)$

因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \cos(x+y) - x \sin(x+y)$

故方程的通解为：

$$\int [x \cos(x+y) + \sin(x+y)] dx + \int \left[x \cos(x+y) - \frac{\partial}{\partial y} \int [x \cos(x+y) + \sin(x+y)] dx \right] dy = c$$

$$\text{即： } x \sin(x+y) = c$$

$$15、(y \cos x + x \sin x)dx + (y \sin x + x \cos x)dy = 0$$

解：这里 $M = y \cos x - x \sin x$, $N = y \sin x + x \cos x$ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = 1 \quad \text{方程有积分因子：} \mu = e^{\int dy} = e^y \quad \text{两边乘以 } \mu \text{ 得：}$$

方程 $e^y(y \cos x - x \sin x)dx + e^y(y \sin x + x \cos x)dy = 0$ 为恰当方程

$$\text{故通解为：} \int e^y(y \cos x - x \sin x)dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int e^y(y \cos x - x \sin x)dx \right) dy = c$$

$$\text{即：} e^y \sin x(y-1) + e^y \cos x = c$$

$$16、x(4ydx + 2xdy) + y^3(3ydx + 5xdy) = 0$$

解：两边同乘以 x^2y 得：

$$(4x^3y^2dx + 2x^4ydy) + (3x^2y^5dx + 5x^3ydy) = 0$$

$$d(x^4y^2) + d(x^3y^5) = 0$$

$$\text{故方程的通解为：} x^4y^2 + x^3y^5 = c$$

 17、试导出方程 $M(X,Y)dx + N(X,Y)dy = 0$ 具有形为 $\mu(xy)$ 和 $\mu(x+y)$ 的积分因子的充要条件。

解：若方程具有 $\mu(x+y)$ 为积分因子，

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad (\mu(x+y) \text{ 是连续可导})$$

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(-\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$(1) \quad \text{令 } z = x + y$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}.$$

$$M \frac{d\mu}{dz} - N \frac{d\mu}{dz} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

$$(M - N) \frac{d\mu}{dz} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M - N} dz, \quad dz = \varphi(x+y) dz$$

方程有积分因子 $\mu(x+y)$ 的充要条件是: $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M - N}$ 是 $x+y$ 的函数,

此时, 积分因子为 $\mu(x+y) = e^{\int \varphi(z) dz}$.

$$(2) \quad \text{令 } z = x \cdot y$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{d\mu}{dz}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{d\mu}{dz}$$

$$Mx \frac{d\mu}{dz} - Ny \frac{d\mu}{dz} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$(Mx - Ny) \frac{d\mu}{dz} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny}$$

此时的积分因子为 $\mu(xy) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} dz}$

 18. 设 $f(x, y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续, 试证方程 $dy - f(x, y)dx = 0$ 为线性方程的充要

条件是它仅依赖于 x 的积分因子.

证: 必要性 若该方程为线性方程, 则有 $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$,

此方程有积分因子 $\mu(x) = e^{-\int P(x)dx}$, $\mu(x)$ 只与 x 有关.

充分性 若该方程有只与 x 有关的积分因子 $\mu(x)$.

则 $\mu(x)dy - \mu(x)f(x, y)dx = 0$ 为恰当方程,

$$\text{从而 } \frac{\partial(-\mu(x)f(x, y))}{\partial y} = \frac{d\mu(x)}{dx}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)},$$

$$f = -\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dy + Q(x) = -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} y + Q(x) = P(x)y + Q(x).$$

其中 $P(x) = -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$. 于是方程可化为 $dy - (P(x)y + Q(x))dx = 0$

即方程为一阶线性方程.

20. 设函数 $f(u)$, $g(u)$ 连续、可微且 $f(u) \neq g(u)$, 试证方程

$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$

有积分因子 $u = (xy[f(xy) - g(xy)])^{-1}$

证: 在方程 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 两边同乘以 u 得:

$$uyf(xy)dx + uxg(xy)dy = 0$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{\partial uyf}{\partial y} &= uf + uy \frac{\partial f}{\partial y} + yf \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f}{xy(f-g)} + \frac{y \frac{\partial f}{\partial y}}{xy(f-g)} - yf \frac{x(f-g) + xy \frac{\partial f}{\partial y} + xy \frac{\partial g}{\partial y}}{x^2 y^2 (f-g)^2} \\ &= \frac{yf \frac{\partial g}{\partial y} - gy \frac{\partial f}{\partial y}}{xy(f-g)^2} = \frac{f \frac{\partial g}{\partial xy} \frac{\partial xy}{\partial y} - g \frac{\partial f}{\partial xy} \frac{\partial xy}{\partial y}}{x(f-g)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{f \frac{\partial g}{\partial xy} - g \frac{\partial f}{\partial xy}}{(f-g)^2}$$

$$\text{而 } \frac{\partial u x g}{\partial x} = u g + u x \frac{\partial g}{\partial x} + x g \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g}{xy(f-g)} + \frac{x \frac{\partial g}{\partial x}}{xy(f-g)} - x g \frac{y(f-g) + xy \frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial g}{\partial x}}{x^2 y^2 (f-g)^2}$$

$$= \frac{x f \frac{\partial g}{\partial xy} \frac{\partial xy}{\partial x} - x g \frac{\partial f}{\partial xy} \frac{\partial xy}{\partial x}}{xy(f-g)^2} = \frac{f \frac{\partial g}{\partial xy} - g \frac{\partial f}{\partial xy}}{(f-g)^2}$$

故 $\frac{\partial u y f}{\partial y} = \frac{\partial u x g}{\partial x}$ ，所以 u 是方程得一个积分因子

21. 假设方程 (2.43) 中得函数 $M(x, y)$ $N(x, y)$ 满足关系 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} =$

$Nf(x) - Mg(y)$, 其中 $f(x), g(y)$ 分别为 x 和 y 得连续函数, 试证方程 (2.43)

有积分因子 $u = \exp(\int f(x) dx + \int g(y) dy)$

证明: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

$$\text{即证 } \frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x} \Leftrightarrow u \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$u \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow u \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N e^{\int f(x) dx + \int g(y) dy} f(x)$$

$$- M e^{\int f(x) dx + \int g(y) dy} g(y) \Leftrightarrow u \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = e^{\int f(x) dx + \int g(y) dy} (Nf(x) - Mg(y))$$

由已知条件上式恒成立, 故原命题得证。

22、求出伯努利方程的积分因子。

解: 已知伯努利方程为: $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n, y \neq 0;$

两边同乘以 y^{-n} , 令 $z = y^{-n}$,

$\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x)$, 线性方程有积分因子:

$\mu = e^{-\int (1-n)P(x)dx} = e^{(n-1)\int P(x)dx}$, 故原方程的积分因子为:

$$\mu = e^{-\int (1-n)P(x)dx} = e^{(n-1)\int P(x)dx}, \text{ 证毕!}$$

23、设 $\mu(x, y)$ 是方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 的积分因子，从而求得可微函数 $U(x, y)$ ，

使得 $dU = \mu(Mdx + Ndy)$ 。试证 $\tilde{\mu}(x, y)$ 也是方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x, y) = \mu\varphi(U)$ ，其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数。

证明：若 $\tilde{\mu} = \mu\varphi(u)$ ，则

$$\frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\varphi(u)M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u) + \mu M\varphi'(u)\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u) + \mu M\varphi'(u)\mu N$$

又

$$\frac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu\varphi(u)N)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\varphi(u) + \mu N\varphi'(u)\mu M$$

$$= \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u) + \mu N\varphi'(u)\mu M = \frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y}$$

即 $\tilde{\mu}$ 为 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 的一个积分因子。

24、设 $\mu_1(x, y), \mu_2(x, y)$ 是方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 的两个积分因子，且 $\mu_1/\mu_2 \neq \text{常数}$ ，求证 $\mu_1/\mu_2 = c$ （任意常数）是方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 的通解。

证明：因为 μ_1, μ_2 是方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 的积分因子

所以 $\mu_i Mdx + \mu_i Ndy = 0 \quad (i=1,2)$ 为恰当方程

$$\text{即 } N \frac{\partial \mu_i}{\partial x} - M \frac{\partial \mu_i}{\partial y} = \mu_i \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right), \quad i=1,2$$

下面只需证 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 的全微分沿方程恒为零

事实上：

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) &= \frac{\mu_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\mu_1}{\partial y}dy\right) - \mu_1\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\mu_2}{\partial y}dy\right)}{\mu_2^2} \\
&= \frac{\mu_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x}dx - \frac{M}{N}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}dx\right) - \mu_1\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x}dx - \frac{M}{N}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}dx\right)}{\mu_2^2} \\
&= \frac{dx}{N\mu_2^2} \left[\left(N\frac{\partial\mu_1}{\partial x} - M\frac{\partial\mu_1}{\partial y} \right) \mu_2 - \left(N\frac{\partial\mu_2}{\partial x} - M\frac{\partial\mu_2}{\partial y} \right) \mu_1 \right] \\
&= \frac{dx}{N\mu_2^2} \left[\mu_1\mu_2 \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) - \mu_1\mu_2 \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

即当 $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq c$ 时, $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$ 是方程的解。证毕!

习题 2.4



求解下列方程

1、 $xy'^3 = 1 + y'$

解：令 $\frac{dy}{dx} = y' = p = \frac{1}{t}$ ，则 $x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)t^3 = t^3 + t^2$ ，

$$\text{从而 } y = \int p dx + c = \int \frac{1}{t} d(t^3 + t^2) + c = \int (3t + 2) dt + c = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c,$$

于是求得方程参数形式得通解为
$$\begin{cases} x = t^3 + t^2 \\ y = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c \end{cases}.$$

2、 $y'^3 - x^3(1 - y') = 0$

解：令 $\frac{dy}{dx} = y' = p = tx$ ，则 $(tx)^3 - x^3(1 - tx) = 0$ ，即 $x = \frac{t^3 - 1}{t} = t^2 - \frac{1}{t}$ ，

$$\text{从而 } y = \int p dx + c = \int t \left(t^2 - \frac{1}{t}\right) d\left(t^2 - \frac{1}{t}\right) + c$$

$$= \int (t^3 - 1) \left(2t + \frac{1}{t^2}\right) dt + c$$

$$= \int \left(2t^4 - t - \frac{1}{t^2}\right) dt + c$$

$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + c,$$

于是求得方程参数形式得通解为
$$\begin{cases} x = t^2 - \frac{1}{t} \\ y = \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + c \end{cases}.$$

3、 $y = y'^2 e^{y'}$

解：令 $\frac{dy}{dx} = y' = p$ ，则 $y = p^2 e^p$ ，

$$\text{从而 } x = \int \frac{1}{p} d(p^2 e^p) + c$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{p} (2pe^p + p^2 e^p) dp + c \\
&= \int (2e^p + pe^p) dp + c \\
&= (1+p)e^p + c,
\end{aligned}$$

于是求得方程参数形式的通解为 $\begin{cases} x = (1+p)e^p + c \\ y = y^2 e^p \end{cases}$,

另外, $y=0$ 也是方程的解.

4、 $y(1+y'^2)=2a$, a 为常数

解: 令 $\frac{dy}{dx} = y' = tg\varphi$, 则 $y = \frac{2a}{1+tg^2\varphi} = \frac{2a}{\sec^2\varphi} = 2a \cos^2 \varphi$,

$$\begin{aligned}
\text{从而 } x &= \int \frac{1}{p} dy + c = \int \frac{1}{tg\varphi} d(2a \cos^2 \varphi) + c \\
&= -4a \int \cos^2 \varphi d\varphi + c = -4a \int \frac{1+\cos 2\varphi}{2} + c \\
&= -a(2\varphi + \sin 2\varphi) + c,
\end{aligned}$$

于是求得方程参数形式的通解为 $\begin{cases} x = -a(2\varphi + \sin 2\varphi) + c \\ y = 2a \cos^2 \varphi \end{cases}$.

5、 $x^2 + y'^2 = 1$

解: 令 $\frac{dy}{dx} = y' = p = \cos t$, 则 $x = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t$,

$$\begin{aligned}
\text{从而 } y &= \int \cos t d(\sin t) + c \\
&= \int \cos^2 t dt + c = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt + c \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c,
\end{aligned}$$

于是求得方程参数形式的通解为 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c \end{cases}$.

6、 $y^2(y'-1)=(2-y')^2$

解：令 $2 - y' = yt$ ，则 $1 - y' = yt - 1$ ，得 $y = t + \frac{1}{t}$ ，

$$\text{所以 } dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{2 - yt} = \frac{d\left(t + \frac{1}{t}\right)}{2 - t\left(t + \frac{1}{t}\right)} = \frac{(1 - t^{-2})dt}{1 - t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2(1 - t^2)} dt = -\frac{1}{t^2} dt,$$

$$\text{从而 } x = \int \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt + c = \frac{1}{t} + c,$$

$$\text{于是求得方程参数形式的通解为 } \begin{cases} x = \frac{1}{t} + c \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases},$$

$$\text{因此方程的通解为 } y = \frac{1}{x - c} + x - c.$$

习题 2.5

2. $ydx - xdy = x^2 y dy$

解：两边同除以 x^2 ，得：

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = ydy$$

$$d\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}y^2 + c$$

$$\text{即 } \frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = c$$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$

解：两边同除以 x ，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u$$

$$\text{则 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{即 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - \sqrt{u}}$$

$$\text{得到 } \frac{1}{u} = \left(c - \frac{1}{2} \ln|y| \right)^2,$$

$$\text{即 } x = y \left(c - \frac{1}{2} \ln|y| \right)^2$$

另外 $y = 0$ 也是方程的解。

6. $(xy + 1)ydx - xdy = 0$

解： $ydx - xdy + xydx = 0$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = -x dx$$

$$\text{得到 } d\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\text{即 } \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = c$$

另外 $y = 0$ 也是方程的解。

$$8. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}$$

$$\text{解: 令 } \frac{y}{x} = u$$

$$\text{则: } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = u + \frac{1}{x}u^2$$

$$\text{即 } x \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u^2$$

$$\text{得到 } \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\text{故 } \frac{-1}{u} = \frac{-1}{x} + c$$

$$\text{即 } \frac{1}{y} = \frac{c}{x} + \frac{1}{x^2}$$

另外 $y = 0$ 也是方程的解。

$$10. \quad x \frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$\text{解: 令 } \frac{dy}{dx} = p$$

$$\text{即 } x = \frac{1 + p^2}{p}$$

$$\text{而 } \frac{dy}{dx} = p \text{ 故两边积分得到}$$

$$y = \frac{1}{2}p^2 - \ln|p| + c$$

$$\text{因此原方程的解为 } x = \frac{1 + p^2}{p}, \quad y = \frac{1}{2}p^2 - \ln|p| + c。$$

$$12. e^{-y} \left(\frac{dy}{dx} + 1 \right) = x e^x$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} + 1 = x e^{x+y}$$

令 $x + y = u$

$$\text{则 } 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 = xe^u - 1$$

$$\text{即 } \frac{du}{e^u} = x dx$$

$$-e^{-u} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

故方程的解为

$$e^{x+y} + \frac{1}{2}x^2 = c$$

$$14. \frac{dy}{dx} = x + y + 1$$

解： 令 $x + y + 1 = u$

$$\text{则 } 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\text{那么 } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 = u$$

$$\frac{du}{u+1} = dx$$

$$\text{求得： } \ln(u+1) = x + c$$

$$\text{故方程的解为 } \ln(x+y+1) = x + c$$

$$\text{或可写 为 } x + y + 1 = ce^x$$

$$16. (x+1)\frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$$

解： 令 $e^{-y} = u$ 则 $y = -\ln u$

$$-(x+1)\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 2u - 1$$

$$\frac{1}{u(2u-1)}du = -\frac{1}{x+1}dx$$

$$\frac{2u-1}{u} = \frac{1}{x+1} + c$$

$$\text{即方程的解为 } e^y(x+y) = 2x + c$$

$$18. 4x^2y^2dx + 2(x^3y-1)dy = 0$$

解： 将方程变形后得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 y^2}{2x^3 y - 1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^3 y - 1}{4x^2 y^2} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{4x^2 y^2}$$

$$\text{同除以 } x^2 \text{ 得: } x^2 \frac{dx}{dy} = \frac{x^3}{2y} - \frac{1}{4y^2}$$

$$\text{令 } z = x^3 \quad \text{则} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{3z}{2y} - \frac{3}{4y^2}$$

$$z = \frac{3}{2}y^2 + cy^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{即原方程的解为 } x^3 = \frac{3}{2}y^2 + cy^{\frac{3}{2}}$$

$$19. x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4x = 0$$

$$\text{解: 方程可化为 } 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x, y = \frac{x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x}{2\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

令

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ 则 } y = \frac{xp^2 - 4x}{2p} = \frac{x}{2}p + \frac{2x}{p}, \text{ 两边对 } x \text{ 求导得 } p = \frac{p}{2} + \frac{x}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{2}{p} - \frac{2x}{p^2} \frac{dp}{dx}$$

$$\left(\frac{p}{2} - \frac{2}{p}\right) = \left(\frac{x}{2} - \frac{2x}{p^2}\right) \frac{dp}{dx}, \left(\frac{p}{2} - \frac{2}{p}\right) dx + \left(\frac{x}{2} - \frac{2x}{p^2}\right) dp = 0, (p^3 - 4p) dx + (-xp^2 + 4x) dp = 0$$

$$p(p^2 - 4) dx - x(p^2 - 4) dp = 0 \therefore p^2 = 4 \text{ 或 } p dx - x dp = 0, \text{ 当 } p^2 = 4 \text{ 时 } y = \pm 2x, \text{ 当 } p dx - x dp = 0 \text{ 时,}$$

$$p = \frac{x}{c}, y = \frac{x \cdot \frac{x^2}{c^2} + 4x}{\frac{2x}{c}} = \frac{\frac{x^2}{c^2} + 4}{\frac{2}{c}}, 2yc = c^2 x^2 + 4.$$

$$20. y^2 \left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = 1$$

$$\text{解: 令 } \frac{dy}{dx} = p = \sin \partial, \text{ 则 } y^2 [1 - (\sin \partial)^2] = 1, y = \frac{1}{\cos \partial}, dx = \frac{dy}{p} = \frac{dy}{\sin \partial} = \frac{1}{\sin \partial} \frac{\sin \partial}{\cos^2 \partial} d\partial = \frac{d\partial}{\cos^2 \partial}$$

$$x = \int \frac{d\partial}{\cos^2 \partial} + c = \int \sec^2 \partial d\partial + c = \tan \partial + c \text{ 所以方程的解为 } y^2 = (x + c)^2 + 1, \text{ 另外由 } p = 0 \text{ 得 } y = \pm 1$$

$$21. (1 + e^{\frac{x}{y}}) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

$$\text{解: 令 } \frac{x}{y} = z \text{ 则 } x = yz, \frac{dx}{dy} = z + y \frac{dz}{dy} \text{ 方程为 } (1 + e^z) dx = (z - 1) e^z dy,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(z - 1) e^z}{1 + e^z} = \frac{ze^z + z - z - e^z}{1 + e^z} = z - \frac{z + e^z}{1 + e^z} = z + y \frac{dz}{dy}, \frac{1 + e^z}{z + e^z} dz = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln |z + e^z| = -\ln |y|, y(z + e^z) = c, y\left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}\right) = c \text{ 所以方程的解为 } x + ye^{\frac{x}{y}} = c$$

$$22. \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

$$\text{解: } 2xy dx + (y^2 - 3x^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \frac{\partial N}{\partial x} = -6x, \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-2xy} = \frac{8x}{-2xy} = -\frac{4}{y} \text{ 所以方程有积分因子 } e^{\int -\frac{4}{y} dy} = y^{-4}$$

$$2xy^{-3} dx + (y^{-2} - \frac{3x^2}{y^4}) dy = 0, d\frac{x^2}{y^3} - d\frac{1}{y} = 0 \text{ 所以方程的解为 } \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c \text{ 即 } x^2 - y^2 = cy^3$$

$$23. y dx - (1 + x + y^2) dy = 0$$

$$\text{解: } y dx - x dy = (1 + y^2) dy, \text{ 两边同除以 } y^2 \text{ 得 } \frac{y dx - x dy}{y^2} = \frac{1 + y^2}{y^2} dy, d\frac{x}{y} = \frac{1 + y^2}{y^2} dy$$

$$\text{所以方程的解为 } \frac{x}{y} = -\frac{1}{y} + y + c \text{ 即 } (x + 1) = y(y + c), \text{ 另外 } y = 0 \text{ 也是解。}$$

$$24. [y - x(x^2 + y^2)] - x dy = 0$$

$$\text{解: 方程可化为 } \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = x dx, \operatorname{darctg} \frac{x}{y} = x dx \text{ 所以方程的解为 } \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{x^2}{2} + c.$$

$$25. \frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}} - x = 0$$

$$\text{解: 令 } \frac{dy}{dx} = p = t, x = t + e^t \text{ 由 } dy = p dx \text{ 得 } y = \int t(1 + e^t) dt + c = \frac{t^2}{2} + e^t t - e^t + c$$

$$25. \frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}} - x = 0$$

解：令 $\frac{dy}{dx} = p = t$ 则 $x = t + e^t$ 由 $dy = p dx$ 得 $y = \int t(1+e^t) dt + c = \frac{t^2}{2} + e^t t - e^t + c$

所以方程的解为： $x = t + e^t, y = \int t(1+e^t) dt + c = \frac{t^2}{2} + e^t t - e^t + c$

$$26. (2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$$

解： $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2, \frac{\partial N}{\partial x} = 2x, \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{x^2 + y^2} = 1$ 所以方程有积分因子 e^x 方程两边同乘 e^x 得

$$d(3e^x x^2 y + e^x y^3) = 0 \text{ 所以方程的解为: } 3e^x x^2 y + e^x y^3 = c$$

$$27. \frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$$

解：令 $u = 2x + 3y, \frac{du}{dx} = 2 + 3 \frac{dy}{dx} = 2 + 3 \frac{u+4}{2u+5}$ ，则

$$\frac{du}{dx} = \frac{7u+22}{2u+5}$$

$$\frac{2u+5}{7u+22} du = dx,$$

$$1 - \frac{9}{14} \frac{1}{u + \frac{22}{7}} = \frac{7}{2} dx,$$

两边积分得 $9 \ln \left| 2x + 3y + \frac{22}{7} \right| = 14(3y - \frac{3}{2}x) + c$

即为方程的通解。

另外， $7u + 22 = 0$ ，即 $2x + 3y + \frac{22}{7} = 0$ 也是方程的解。

$$28. x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2 y(y^2 - x^2)$$

解：两边同除以 x ，方程可化为：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2xy(y^2 - x^2)$$

令 $\frac{y}{x} = u$ ，则

$$x \frac{du}{dx} + u = u + 2ux^2(u^2 x^2 - x^2)$$

即

$$\frac{du}{dx} = 2x^3(u^3 - u),$$

$$\frac{du}{u^3 - u} = 2x^3 dx$$

$$\left(\frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{u}\right) du = 2x^3 dx$$

两边积分得

$$1 - \frac{1}{u^2} ce^{x^4}$$

即

$$x^2 - y^2 = cy^2 e^{x^4}$$

为方程的解。

$$29. \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{xy}$$

解: 令 $e^{xy} = u$, 则 $y = \frac{\ln u}{x}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{u} \frac{du}{dx} - \ln u}{x^2},$$

那么

$$\frac{1}{ux} \frac{du}{dx} - \frac{\ln u}{x^2} + \frac{\ln u}{x^2} = u$$

即

$$\frac{du}{u^2} = x dx$$

两边积分得

$$\frac{1}{2} x^2 + e^{-xy} = c$$

即为方程的解。

$$30. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 2xy^3 + 2x}{3x^2y^2 - 6y^5 + 3y^2}$$

解: 方程可化为 $(4x^3 - 2xy^3 + 2x)dx - (3x^2y^2 - 6y^5 + 3y^2)dy = 0$

$$d(x^4 + x^2) - (y^3 dx^2 + x^2 dy^3) + d(y^6 - y^3) = 0$$

两边积分得

$$x^4 + x^2 + y^6 - y^3 - x^2 y^3 = c$$

即

$$x^4 + x^6 + c = (x^2 + 1)(y^3 - 1)$$

为方程的解。

$$31. \quad y^2(xdx + ydy) + x(ydx - xdy) = 0$$

解: 方程可化为

$$y^2 x dx + y^3 dy + xy dx - x^2 dy = 0$$

两边同除以 y^2 , 得

$$x dx + y dx + \frac{x(y dx - x dy)}{y^2} = 0$$

即
$$\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + x \frac{dx}{dy} = 0$$

令 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 则

$$\rho d\rho + \rho \cos \theta d\theta = 0$$

即
$$\rho d\rho - \frac{d \sin \theta}{\sin^2 \theta} = 0$$

两边积分得
$$\rho = -\frac{1}{\sin \theta} + c$$

将 $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\rho}{y}$ 代入得,
$$\rho = -\frac{\rho}{y} + c$$

即
$$\rho^2(y+1)^2 = c^2 y^2$$

故
$$(x^2 + y^2)(y^2 + 1)^2 = c^2 y^2$$

32.
$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+xy^3}{1+x^3y} = 0$$

解: 方程可化为
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-xy^3}{1+x^3y}$$

两边同加上1, 得
$$\frac{d(x+y)}{dx} = \frac{xy(x^2-y^2)}{1+x^3y} \quad (*)$$

再由 $d(xy) = xdy + ydx$, 可知

$$\frac{d(xy)}{dx} = x \frac{dy}{dx} + y = \frac{(x-y)(x^2y^2-1)}{1+x^3y} \quad (**)$$

将 $(*) / (**) \text{ 得}$
$$\frac{d(x+y)}{d(xy)} = \frac{xy(x+y)}{x^2y^2-1}$$

即
$$\frac{du}{dv} = \frac{uv}{v^2-1}$$

整理得
$$\frac{du}{u} = \frac{v}{v^2-1} dv$$

两边积分得
$$\sqrt{v^2-1} = cu$$

即
$$c(x+y) = \sqrt{x^2y^2-1}$$

另外, $x+y=0$ 也是方程的解。

33. 求一曲线, 使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标。

解: 设 $p(x, y)$ 为所求曲线上的任一点, 则在 p 点的切线 l 在 y 轴上的截距为:

$$y - x \frac{dy}{dx}$$

由题意得

$$y - x \frac{dy}{dx} = x$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y - 1$$

也即

$$-ydx + xdy = -dx$$

两边同除以 x^2 , 得

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2} = -\frac{dx}{x}$$

即

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = -d \ln|x|$$

即

$$y = cx + x \ln|x|$$

为方程的解。

34. 摩托艇以 5 米/秒的速度在静水运动, 全速时停止了发动机, 过了 20 秒钟后, 艇的速度减至 $v_1 = 3$ 米/秒。确定发动机停止 2 分钟后艇的速度。假定水的阻力与艇的运动速度成正比。

解: $F = ma = m \frac{dv}{dt}$, 又 $F = k_1 v$, 由此

$$m \frac{dv}{dt} = k_1 v$$

即

$$\frac{dv}{dt} = kv$$

其中 $k = \frac{k_1}{m}$, 解之得

$$\ln|v| = kt + c$$

又 $t = 0$ 时, $v = 5$; $t = 2$ 时, $v = 3$ 。

故得

$$k = \frac{1}{20} \ln \frac{3}{5}, \quad c = \ln 5$$

从而方程可化为

$$v = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{20}}$$

当 $t = 2 \times 60 = 120$ 时, 有 $v(20) = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{120}{20}} = 0.23328$ 米/秒

即为所求的确定发动机停止 2 分钟后艇的速度。

35. 一质量为 m 的质点作直线运动, 从速度等于零的时刻起, 有一个和时间成正比 (比例系数为 k_1) 的力作用在它上面, 此质点又受到介质的阻力, 这阻力和速

度成正比（比例系数为 k_2 ）。试求此质点的速度与时间的关系。

解：由物理知识得： $a = \frac{F_{\text{合}}}{m}$ （其中 a 为质点的加速度， $F_{\text{合}}$ 为质点受到的合外力）

根据题意： $F_{\text{合}} = k_1 t - k_2 v$

$$\text{故： } m \frac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v (k_2 > 0)$$

$$\text{即： } \frac{dv}{dt} = \left(\frac{-k_2}{m}\right)v + \frac{k_1}{m}t \quad (*)$$

(*) 式为一阶非齐线性方程，根据其求解公式有

$$\begin{aligned} V &= e^{\int \frac{-k_2}{m} dt} \left(\int \frac{k_1}{m} t \cdot e^{\int \frac{k_2}{m} dt} dt + c \right) \\ &= e^{\frac{-k_2}{m}t} \left(\frac{k_1}{k_2} t \cdot e^{\frac{k_2}{m}t} - \frac{mk_1}{k_2^2} e^{\frac{k_2}{m}t} + c \right) \end{aligned}$$

$$\text{又当 } t=0 \text{ 时, } V=0, \text{ 故 } c = \frac{mk_1}{k_2^2}$$

$$\text{因此, 此质点的速度与时间的关系为: } V = \frac{mk_1}{k_2^2} e^{\frac{-k_2}{m}t} + \frac{k_1}{k_2} \left(t - \frac{m}{k_2}\right)$$

36. 解下列的黎卡提方程

$$(1) \quad y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$$

解：原方程可转化为： $y' = -e^x y^2 + 2e^{2x} y + e^x - e^{3x}$, (*)

观察得到它的一个特解为： $y = e^x$ ，设它的任意一个解为 $y = e^x + z$ ，

$$\text{代入 (*) 式得到: } \frac{d(e^x + z)}{dx} = -e^x (e^x + z)^2 + 2e^{2x} (e^x + z) + e^x - e^{3x} \quad (**)$$

$$\text{由 (**) - (*) 得: } \frac{dz}{dx} = -e^x z^2$$

$$\text{变量分离得: } \frac{dz}{z^2} = -e^x dx$$

$$\text{两边同时积分: } -\frac{1}{z} = -e^x + c$$

$$\text{即: } z = \frac{1}{e^x + c}$$

$$\text{故原方程的解为 } y = e^x + \frac{1}{c + e^x}$$

$$(2) \quad y' + y^2 - 2y \sin x = \cos x - \sin^2 x$$

解：原方程可化为： $y' = -y^2 + 2y \sin x + \cos x - \sin^2 x$

由观察得，它的一个特解为 $\bar{y} = \sin x$ ，设它的任意一个解为 $y = \sin x + z$ ，故

$$\frac{dz}{dx} = (-2 \sin x + 2 \sin x)z - z^2 = -z^2$$

变量分离再两边同时积分得： $\frac{1}{z} = x + c$ 即 $z = \frac{1}{x + c}$

故原方程的解为 $y = \sin x + \frac{1}{x + c}$

$$(3) \quad x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$$

解：原方程可化为： $y' = y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}$

由观察得到，它的一个特解为 $\bar{y} = -\frac{1}{x}$ ，设它的任一个解为 $y = -\frac{1}{x} + z$ ，故

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}z + z^2, \text{ 该式是一个 } n=2 \text{ 的伯努利方程}$$

两边同除以 z^2 得到： $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1$

$$\text{即： } \frac{d \frac{1}{z}}{dx} = \frac{1}{x} \frac{1}{z} - 1, \text{ 令 } \frac{1}{z} = u,$$

则： $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u - 1$ ，根据一阶非齐线性方程的求解公式得：

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + c \right) = x(c - e \ln |x|)$$

$$\text{故： } z = \frac{1}{x(c - e \ln |x|)}$$

$$\text{因此：原方程的解为： } xy = \frac{1}{c - e \ln |x|} - 1$$

$$(4) \quad 4x^2(y' - y^2) = 1$$

解：原方程可化为： $y' = y^2 + \frac{1}{4x^2}$

由观察得到，它的一个特解为 $\bar{y} = -\frac{1}{2x}$ ，设它的任一个解为 $y = -\frac{1}{2x} + z$ ，于是

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}z + z^2, \text{ 这是 } n=2 \text{ 的伯努利方程}$$

两边同除以 z^2 得到: $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1$

$$\text{即: } \frac{d\frac{1}{z}}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} - 1$$

$$\text{则: } \frac{1}{z} = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -e^{\int \frac{1}{x} dx} + c \right) = x(c - \ln|x|)$$

$$\text{即: } z = \frac{1}{x(c - \ln|x|)}$$

$$\text{故: 原方程的解为: } 2xy = \frac{2}{c - \ln|x|} - 1$$

$$(5) \quad x^2(y' + y^2) = 2$$

解: 原方程可化为: $y' = -y^2 + \frac{2}{x^2}$

由观察得, 它的一个特解为 $\bar{y} = -\frac{1}{x}$, 故设它的任一个解为 $y = -\frac{1}{x} + z$, 于是

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z - z^2, \text{ 这是 } n=2 \text{ 的伯努利方程}$$

两边同除以 z^2 得到: $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} - 1$

$$\text{即: } \frac{d\frac{1}{z}}{dx} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1$$

$$\text{则: } \frac{1}{z} = e^{\int \frac{-2}{x} dx} \left(\int e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + c \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3}{3} + c \right)$$

$$\text{故: 原方程的解为: } y = \frac{3x^2}{x^3 + c} - \frac{1}{x}, \text{ 即 } xy = \frac{2x^3 - c}{c + x^3}.$$

$$(6) \quad x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0$$

解: 原方程可化为: $y' = -y^2 + \frac{4}{x} y - \frac{4}{x^2}$

由观察得到它的一个特解为 $\bar{y} = \frac{1}{x}$, 设它的任一个解为 $y = \frac{1}{x} + z$, 于是

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z - z^2, \text{ 这是 } n=2 \text{ 的伯努利方程}$$

两边同除以 z^2 得到: $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} - 1$

$$\text{即: } \frac{d\frac{1}{z}}{dx} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1$$

$$\text{则: } \frac{1}{z} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} \left(\int e^{\frac{2}{x}} dx + c \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3}{3} + c \right)$$

$$\text{从而: } \frac{1}{z} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} \left(\int e^{\frac{2}{x}} dx + c \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3}{3} + c \right)$$

$$\text{故原方程的解为: } y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + c} = \frac{4x^3 + c}{x(x^3 + c)}$$

$$\text{即: } xy = \frac{4x^3 + c}{x(x^3 + c)}$$

$$(7) \quad y' = (x-1)y^2 + (1-2x)y + x$$

解: 由观察得到它的一个特解为 $\bar{y} = 1$, 故设它的任一个解为 $y = 1 + z$, 于是

$$\frac{dz}{dx} = -z + (x-1)z^2, \text{ 这是 } n=2 \text{ 的伯努利方程,}$$

$$\text{两边同除以 } z^2 \text{ 得: } \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z} + (x-1)$$

$$\text{即: } \frac{d\frac{1}{z}}{dx} = \frac{1}{z} + (1-x)$$

$$\begin{aligned} \text{从而: } \frac{1}{z} &= e^{\int dx} \left(\int (1-x)e^{\int -dx} dx + c \right) \\ &= e^x (xe^{-x} + c) = x + ce^x \end{aligned}$$

$$\text{故原方程的解为: } y = 1 + z = 1 + \frac{1}{x + ce^x}$$

习题 3.1

- 1 求方程 $\frac{dy}{dx} = x + y^2$ 通过点 (0, 0) 的第三次近似解;

解: 取 $\varphi_0(x) = 0$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_0^x (x + y_0^2) dx = \int_0^x x dx = \frac{1}{2} x^2$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_0^x [x + \varphi_1^2(x)] dx = \int_0^x [x + (\frac{1}{2}x^2)^2] dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= y_0 + \int_0^x [x + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5)^2] dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{160} x^8 + \frac{1}{4400} x^{11} \end{aligned}$$

- 2 求方程 $\frac{dy}{dx} = x - y^2$ 通过点 (1, 0) 的第三次近似解;

解: 令 $\varphi_0(x) = 0$

$$\text{则 } \varphi_1(x) = y_0 + \int_0^x (x - y_0^2) dx = \int_0^x x dx = \frac{1}{2} x^2$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_0^x [x - \varphi_1^2(x)] dx = \int_0^x [x - (\frac{1}{2}x^2)^2] dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{20} x^5$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= y_0 + \int_0^x [x - (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5)^2] dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{160} x^8 - \frac{1}{4400} x^{11} \end{aligned}$$

- 3 题 求初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \quad \text{R: } |x+1| \leq 1, |y| \leq 1$$

的解的存在区间, 并求解第二次近似解, 给出在解的存在空间的误差估计;

解: 因为 $M = \max\{|x^2 - y^2|\} = 4$ 则 $h = \min(a, \frac{b}{M}) = \frac{1}{4}$

则解的存在区间为 $|x - x_0| = |x - (-1)| = |x + 1| \leq \frac{1}{4}$

令 $\Psi_0(X) = 0$;

$$\Psi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x (x^2 - 0) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3};$$

$$\Psi_2(x) = y_0 + \int_{-1}^x [x^2 - (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3})^2] dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x}{9} - \frac{x^4}{18} - \frac{x^7}{63} + \frac{11}{42}$$

$$\text{又 } \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq 2 = L$$

$$\text{则: 误差估计为: } |\Psi_2(x) - \Psi(x)| \leq \frac{M^* L^2}{(2+1)^2} h^3 = \frac{11}{24}$$

4 题 讨论方程: $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件,

并求通过点 (0, 0) 的一切解;

解: 因为 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}}$ 在 $y \neq 0$ 上存在且连续;

而 $\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在 $|y| \geq \sigma > 0$ 上连续

由 $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 有: $|y| = (x+c)^{\frac{3}{2}}$

又 因为 $y(0)=0$ 所以: $|y| = x^{\frac{3}{2}}$

另外 $y=0$ 也是方程的解;

故 方程的解为: $|y| = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

或 $y=0$;

6 题 证明格朗瓦耳不等式:

设 K 为非负整数, $f(t)$ 和 $g(t)$ 为区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上的连续非负函数,

且满足不等式:

$$f(t) \leq k + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds, \alpha \leq t \leq \beta$$

$$\text{则有: } f(t) \leq k \exp\left(\int_{\alpha}^t g(s)ds\right), \alpha \leq t \leq \beta$$

证明: 令 $R(t) = \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds$, 则 $R'(t) = f(t)g(t)$

$$R'(t) - R(t)g(t) = f(t)g(t) - R(t)g(t)$$

$$\leq kg(t) \quad R'(t) - R(t)g(t) \leq kg(t);$$

两边同乘以 $\exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right)$ 则有:

$$\begin{aligned} R'(t) \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right) - R(t)g(t) \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right) \\ \leq kg(t) \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right) \end{aligned}$$

两边从 α 到 t 积分:

$$R(t) \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right) \leq -\int_{\alpha}^t kg(s)ds \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(r)dr\right)ds$$

$$\text{即 } R(t) \leq \int_{\alpha}^t kg(s)ds \exp\left(-\int_s^t g(r)dr\right)ds$$

$$\text{又 } f(t) \leq 1 \leq k + R(t) \leq k + k \int_{\alpha}^t g(s) \exp\left(-\int_s^t g(r)dr\right)ds$$

$$\leq k(1 - \exp\left(-\int_s^t g(r)dr\right)) = k \exp\left(\int_t^s g(r)dr\right)$$

$$\text{即 } f(t) \leq k \int_{\alpha}^t g(r)dr;$$

7 题 假设函数 $f(x, y)$ 于 (x_0, y_0) 的领域内是 y 的不增函数, 试证方程

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解于 $x \geq x_0$ 一侧最多只有一个解;

证明: 假设满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解于 $x \geq x_0$ 一侧有两个 $\psi(x), \varphi(x)$

则满足:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \psi(x)) dx$$

不妨假设 $\varphi(x) > \psi(x)$, 则 $\varphi(x) - \psi(x) \geq 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \psi(x) &= \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, \psi(x)) dx \\ &= \int_{x_0}^x [f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))] dx\end{aligned}$$

又因为 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的领域内是 y 的增函数, 则:

$$f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) \leq 0$$

$$\text{则 } \varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^x [f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))] dx \leq 0$$

$$\text{则 } \varphi(x) - \psi(x) \leq 0$$

$$\text{所以 } \varphi(x) - \psi(x) = 0, \quad \text{即 } \varphi(x) = \psi(x)$$

则原命题方程满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解于 $x \geq x_0$ 一侧最多只有一个解;

习题 3.4

(一)、解下列方程，并求奇解（如果存在的话）：

1、 $y = 2x \frac{dy}{dx} + x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4$

解：令 $\frac{dy}{dx} = p$ ，则 $y = 2xp + x^2 p^4$ ，

两边对 x 求导，得 $p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} + 2xp^4 + 4x^2 p^3 \frac{dp}{dx}$

$$(1 + 2xp^3) \left(2x \frac{dp}{dx} + p \right) = 0$$

从 $1 + 2xp^3 = 0$ 得 $p \neq 0$ 时， $x = -\frac{1}{2p^3}, y = -\frac{3}{4p^2}$ ；

从 $2x \frac{dp}{dx} + p = 0$ 得 $x = \frac{c}{p^2}, y = \frac{2c}{p} + c^2$ ，

$p \neq 0$ 为参数， $c \neq 0$ 为任意常数。

经检验得 $\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} \\ y = \frac{2c}{p} + c^2 \end{cases}$ ， $(p \neq 0)$ 是方程奇解。

2、 $x = y - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$

解：令 $\frac{dy}{dx} = p$ ，则 $y = x + p^2$ ，

两边对 x 求导，得 $p = 1 + 2p \frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p-1}{2p},$$

解之得 $x = 2p + \ln(p-1)^2 + c$ ，

所以 $y = 2p + p^2 + \ln(p-1)^2 + c$ ，

且 $y=x+1$ 也是方程的解，但不是奇解。

$$3、 y = x \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

解：这是克莱洛方程，因此它的通解为 $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$ ，

$$\text{从} \begin{cases} y = cx + \sqrt{1 + c^2} \\ x - \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} = 0 \end{cases} \text{中消去 } c,$$

得到奇解 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 。

$$4、 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

解：这是克莱洛方程，因此它的通解为 $y = cx + c^2$ ，

$$\text{从} \begin{cases} y = cx + c^2 \\ x + 2c = 0 \end{cases} \text{中消去 } c,$$

得到奇解 $y^2 + 4y = 0$ 。

$$5、 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

解：令 $\frac{dy}{dx} = p$ ，则 $y = 2xp + p^2$ ，

两边对 x 求导，得 $p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx}$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - 2，$$

解之得 $x = -\frac{2}{3}p + cp^{-2}$ ，

所以 $y = -\frac{1}{3}p^2 + cp^{-1}$ ，

可知此方程没有奇解。

$$6、 x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

解：原方程可化为 $y = x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ，

这是克莱罗方程，因此其通解为 $y = cx - \frac{1}{c^2}$ ，

从 $\begin{cases} y = cx - \frac{1}{c^2} \\ x + 2c^{-3} = 0 \end{cases}$ 中消去 c ，得奇解 $27x^2 + 4y^3 = 0$ 。

$$7、 y = x \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

解：令 $\frac{dy}{dx} = p$ ，则 $y = x(1+p) = p^2$ ，

两边对 x 求导，得 $x = ce^{-p} - 2p + 2$ ，

所以 $y = c(p+1)e^{-p} - p^2 + 2$ ，

可知此方程没有奇解。

$$8、 x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (x-a)^2 = 0$$

解： $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{(x-a)^2}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x-a}{\sqrt{x}}$$

$$dy = \pm \left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$y = \pm \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2ax^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$9(y+c)^2 = 4x(x-3a)^2$$

可知此方程没有奇解。

$$9、 y = 2x + \frac{dy}{dx} - \frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^3$$

解：令 $\frac{dy}{dx} = p$ ，则 $y = 2x + p - \frac{1}{3} p^3$ ，

两边对 x 求导，得 $p = 2 + \frac{dp}{dx} - p^2 \frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p-2}{1-p^2}$$

解之得 $x = -\frac{(p+2)^2}{2} - 3\ln|p-2| + c,$

所以 $y = -\frac{1}{3}p^3 - p^2 - 3p - 4 - 6\ln|p-2| + c,$

且 $y = 2x - \frac{2}{3}$ 也是方程的解, 但不是方程的奇解.

10、 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x+1)\frac{dy}{dx} - y = 0$

解: $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

这是克莱罗方程, 因此方程的通解为 $y = cx + c + c^2,$

从 $\begin{cases} y = cx + c + c^2 \\ x + 1 + 2c \end{cases}$ 中消去 $c,$

得方程的奇解 $(x+1)^2 + 4y = 0.$

(二) 求下列曲线族的包络.

1、 $y = cx + c^2$

解: 对 c 求导, 得 $x + 2c = 0, \quad c = -\frac{x}{2},$

代入原方程得, $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4},$

经检验得, $y = -\frac{x^2}{4}$ 是原方程的包络.

2、 $c^2y + cx^2 - 1 = 0$

解: 对 c 求导, 得 $2yc + x^2 = 0, c = -\frac{x^2}{2y},$

代入原方程得 $\frac{x^4}{4y^2}y - \frac{x^4}{2y} - 1 = 0,$ 即 $x^4 + 4y = 0,$

经检验得 $x^4 + 4y = 0$ 是原方程的包络.

$$3、(x-c)^2 + (y-c)^2 = 4$$

解：对 c 求导，得 $-2(x-c)-2(y-c)=0$, $c = \frac{x+y}{2}$,

代入原方程得 $(x-y)^2 = 8$.

经检验,得 $(x-y)^2 = 8$ 是原方程的包络.

$$4、(x-c)^2 + y^2 = 4c$$

解：对 c 求导，得 $-2(x-c)=4$, $c=x+2$,

代入原方程得 $4+y^2 = 4(x+2)$, $y^2 = 4(x+1)$,

经检验，得 $y^2 = 4(x+1)$ 是原方程的包络.

(三) 求一曲线,使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数 c .

解：设所求曲线方程为 $y=y(x)$,以 $X、Y$ 表坐标系，则曲线上任一点 $(x,y(x))$ 的切线方程为 $(Y-y(x))=y'(x)(X-x)$,

它与 X 轴、 Y 轴的截距分别为 $X = x - \frac{y}{y'}$, $Y = y - xy'$,

按条件有 $x - \frac{y}{y'} + y - xy' = a$, 化简得 $y = xy' - \frac{ay'}{1-y'}$,

这是克莱洛方程，它的通解为一族直线 $y = cx - \frac{ac}{1-c}$,

$$\text{它的包络是} \begin{cases} y = cx - \frac{ac}{1-c} \\ 0 = x - \frac{a}{1-c} - \frac{ac}{(1-c)^2} \end{cases},$$

消去 c 后得我们所求的曲线 $4ax = (x-y+a)^2$.

(四) 试证：就克莱洛方程来说， p -判别曲线和方程通解的 c -判别曲线同样是方程通解的包络，从而为方程的奇解.

证：克莱洛方程 $y=xp+f(p)$ 的 p -判别曲线就是用 p -消去法，

从 $\begin{cases} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{cases}$ 中消去 p 后而得的曲线；

c -判别曲线就是用 c -消去法，从通解及它对求导的所得的方程

$\begin{cases} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{cases}$ 中消去 c 而得的曲线，

显然它们的结果是一致的，是一单因式，

因此 p -判别曲线是通解的包络，也是方程的通解.

习题 4.1

1. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $a \leq t \leq b$ 上的连续函数, 证明: 如果在区间 $a \leq t \leq b$ 上有 $\frac{x(t)}{y(t)} \neq$ 常数或 $\frac{y(t)}{x(t)}$ 常数, 则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 上线形无关。

证明: 假设在 $x(t)$, $y(t)$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 上线形相关

则存在不全为零的常数 α , β , 使得 $\alpha x(t) + \beta y(t) = 0$

那么不妨设 $x(t)$ 不为零, 则有 $\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{\alpha}{\beta}$

显然 $-\frac{\alpha}{\beta}$ 为常数, 与题矛盾, 即假设不成立 $x(t)$, $y(t)$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 上线形无关

2. 证明非齐线形方程的叠加原理: 设 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别是非齐线形方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_1(t) \quad (1)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_2(t) \quad (2)$$

的解, 则 $x_1(t) + x_2(t)$ 是方程 $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_1(t) + f_2(t)$ 的解。

证明: 由题可知 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别是方程 (1), (2) 的解

$$\text{则: } \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x_1(t) = f_1(t) \quad (3)$$

$$\frac{d^n x_2(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_2(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x_2(t) = f_2(t) \quad (4)$$

那么由 (3) + (4) 得:

$$\frac{d^n (x_1(t) + x_2(t))}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} (x_1(t) + x_2(t))}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)(x_1(t) + x_2(t)) = f_1(t) + f_2(t)$$

即 $x_1(t) + x_2(t)$ 是方程 $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_1(t) + f_2(t)$ 的解。

3. 试验证 $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ 的基本解组为 e^t, e^{-t} ，并求方程 $\frac{d^2x}{dt^2} - x = \cos t$ 的通解。

证明：由题将 e^t 代入方程 $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ 得： $e^t - e^t = 0$ ，即 e^t 是该方程的解，

同理求得 e^{-t} 也是该方程的解

又显然 e^t, e^{-t} 线形无关，故 e^t, e^{-t} 是 $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ 的基本解组。

由题可设所求通解为： $x(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}$ ，则有：

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \\ c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \cos t \end{cases}$$

解之得： $c_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}(\cos t - \sin t) + c_1$ ； $c_2(t) = -\frac{1}{4}e^t(\cos t + \sin t) + c_2$

故所求通解为： $x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$

4. 试验证 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t}x = 0$ 有基本解组 t, e^t ，并求方程

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t}x = t-1$ 的通解。

解：由题将 t 代入方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t}x = 0$ 得：

$$\frac{d^2t}{dt^2} + \frac{t}{1-t}\frac{dt}{dt} - \frac{1}{1-t}t = \frac{t}{1-t} + \frac{t}{1-t} = 0, \text{ 即 } t \text{ 为该方程的解}$$

同理 e^t 也是该方程的解，又显然 t, e^t 线形无关，

故 t, e^t 是方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t}x = 0$ 的基本解组

由题可设所求通解为 $x(t) = c_1(t)t + c_2(t)e^t$ ，则有：

$$\begin{cases} c_1'(t)t + c_2'(t)e^t = 0 \\ c_1'(t) + c_2'(t)e^t = t-1 \end{cases}$$

解之得: $c_1(t) = -t + c_1, c_2(t) = -(te^{-t} + e^{-t}) + c_2$

故所求通解为 $x(t) = c_1 t + c_2 e^t - (t+1)^2$

5. 以知方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0$ 的基本解组为 e^t, e^{-t} , 求此方程适合初始条件

$x(0)=1, x'(0)=0$ 及 $x(0)=0, x'(0)=1$ 的基本解组 (称为标准基本解组, 即有 $w(0)=1$)

并求出方程的适合初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x_0'$ 的解。

解: e^t, e^{-t} 时间方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0$ 的基本解组, 故存在常数 c_1, c_2 使得: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

于是: $x'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$

令 $t=0$, 则有方程适合初始条件 $x(0)=1, x'(0)=0$, 于是有:

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 = 1 \\ c_1 e^0 - c_2 e^0 = 0 \end{cases} \text{解得: } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{故 } x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t}$$

又该方程适合初始条件 $x(0)=0, x'(0)=1$, 于是:

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \\ c_1 e^0 - c_2 e^0 = 1 \end{cases} \text{解得: } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{故 } x(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$$

显然 $x_1(t), x_2(t)$ 线性无关, 所以此方程适合初始条件的基本解组为:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t}, \quad x(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$$

而此方程同时满足初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x_0'$, 于是:

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 = x_0 \\ c_1 e^0 - c_2 e^0 = x_0' \end{cases}, \text{解得: } c_1 = \frac{x_0 + x_0'}{2}, c_2 = \frac{x_0 - x_0'}{2}$$

故 $x(t) = \frac{x_0 + x_0'}{2} e^t + \frac{x_0 - x_0'}{2} e^{-t}$ 满足要求的解。

6. 设 $x_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$ 是齐线性方程 (4.2) 的任意 n 个解。它们所构成的伏朗斯行列式

记为 $w(t)$, 试证明 $w(t)$ 满足一阶线性方程 $w' + a_1(t)w = 0$, 因而有:

$$w(t) = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} \quad t \in (a, b)$$

$$\text{解: } \because w'(t) = \begin{vmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\text{又 } x_i(t) (i=1,2,\cdots,n) \text{ 满足 } \frac{d^n x_i}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_i}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x_i = 0$$

$$\text{即 } \frac{d^n x_i}{dt^n} = - \left(a_1(t) \frac{d^{n-1} x_i}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x_i \right)$$

$w'(t)$ 中第 k 行都乘以 $a_k(t)$, 加到最后一行 ($k=1,2,\cdots, n-1$)

$$\text{则: } w'(t) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} (-a_1(t)) = -a_1(t) w(t)$$

$$\text{即 } w' + a_1(t)w = 0 \quad \text{则有: } \frac{w'(t)}{w(t)} = -a_1(t)dt$$

$$\text{两边从 } t_0 \text{ 到 } t \text{ 积分: } \ln|w(t)| \Big|_{t_0}^t = -\int_{t_0}^t a_1(s) ds, \text{ 则}$$

$$\ln|w(t)| - \ln|w(t_0)| = -\int_{t_0}^t a_1(s) ds$$

$$\text{即: } w(t) = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} \quad t \in (a, b)$$

7. 假设 $x_1(t) \neq 0$ 是二阶齐线性方程 $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$ (*) 的解, 这里 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$

在区间 $[a, b]$ 上连续, 试证: (1) $x_2(t)$ 是方程的解的充要条件为:

$w'[x_1, x_2] + a_1 w[x_1, x_2] = 0$; (2) 方程的通解可以表示为:

$$x = x_1 \left[c_1 \int \frac{1}{x_1^2} \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(s) ds\right) dt + c_2 \right], \text{ 其中 } c_1, c_2 \text{ 为常}$$

数, $t_0, t \in [a, b]$

$$\text{证: (1) } w'[x_1, x_2] + a_1 w[x_1, x_2] = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x_1 x_2'' - x_1'' x_2' + a_1 x_1 x_2' - a_1 x_1' x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 x_2'' + a_1 x_1' x_2 + a_1 x_1 x_2' + a_1 x_1 x_2' - a_1 x_1' x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 (x_2'' + a_1 x_2' + a_1 x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_2'' + a_1 x_2' + a_1 x_2 = 0, (x_1 \neq 0) \\ &\text{即 } x_2 \text{ 为 (*) 的解。} \end{aligned}$$

(2) 因为 x_1, x_2 为方程的解, 则由刘维尔公式

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}, \text{ 即:}$$

$$x_1 x_2' - x_1' x_2 = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}$$

$$\text{两边都乘以 } \frac{1}{x_1^2} \text{ 则有: } \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{dt} = \frac{w(t_0)}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}, \text{ 于是:}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} dt + c_2$$

$$\text{即: } x_2 = \left(c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} dt + c_2 \right) x_1$$

$$\text{取 } c_1 = 1, c_2 = 0, \text{ 得: } x_2 = x_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} dt,$$

$$\text{又: } w(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} \neq 0$$

从而方程的通解可表示为：

$$x = x_1 \left[c_1 \int \frac{1}{x_1^2} \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(s) ds\right) dt + c_2 \right], \text{ 其中 } c_1, c_2 \text{ 为常}$$

数, $t_0, t \in [a, b]$ 。



8. 试证 n 阶非齐线形微分方程 (4.1) 存在且最多存在 $n+1$ 个线形无关解。

证：设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为 (4.1) 对应的齐线形方程的一个基本解组， $\bar{x}(t)$ 是 (4.1)

的一个解，则： $x_1(t) + \bar{x}(t), x_2(t) + \bar{x}(t), \dots, x_n(t) + \bar{x}(t), \bar{x}(t)$, (1)，均为 (4.1) 的解。同时 (1) 是线形无关的。

事实上：假设存在常数 $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ ，使得：

$$c_1(x_1(t) + \bar{x}(t)) + c_2(x_2(t) + \bar{x}(t)) + \dots + c_n(x_n(t) + \bar{x}(t)) + c_{n+1}(\bar{x}(t)) = 0$$

$$\text{即: } \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) + \bar{x}(t) \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$$

$$\text{我们说: } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$$

$$\text{否则, 若 } \sum_{i=1}^{n+1} c_i \neq 0, \text{ 则有: } \bar{x}(t) = -\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n+1} c_i} x_i(t)$$

(*) 的左端为非齐线形方程的解，而右端为齐线形方程的解，矛盾！

$$\text{从而有 } \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0$$

又 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为 (4.1) 对应的齐线形方程的一个基本解组，

故有： $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, 进而有： $c_{n+1} = 0$

即 (1) 是线形无关的。

习题 4.2

1. 解下列方程

$$(1) \quad x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0$$

解：特征方程 $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ 有根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1$

故通解为 $\mathbf{x} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^t + c_4 e^{-t}$

$$(2) \quad x''' - 3ax'' + 3a^2 x' - a^3 x = 0$$

解：特征方程 $\lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3a^2\lambda - a^3 = 0$

有三重根 $\lambda = a$

故通解为 $\mathbf{x} = c_1 e^{at} + c_2 t e^{at} + c_3 t^2 e^{at}$

$$(3) \quad x^{(5)} - 4x''' = 0$$

解：特征方程 $\lambda^5 - 4\lambda^3 = 0$

有三重根 $\lambda = 0, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = -2$

故通解为 $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t^2 + c_4 t + c_5$

$$(4) \quad x'' + 2x' + 10x = 0$$

解：特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ 有复数根 $\lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i$

故通解为 $x = c_1 e^{-t} \cos 3t + c_2 e^{-t} \sin 3t$

$$(5) \quad x'' + x' + x = 0$$

解：特征方程 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ 有复数根 $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$,

故通解为 $x = c_1 e^{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$(6) \quad s'' - a^2 s = t + 1$$

解：特征方程 $\lambda^2 - a^2 = 0$ 有根 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -a$

当 $a \neq 0$ 时，齐线性方程的通解为 $s = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}$

$\tilde{s} = A + Bt$ 代入原方程解得 $A = B = -\frac{1}{a^2}$

故通解为 $s = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} - \frac{1}{a^2}(t-1)$

当 $a=0$ 时, $\tilde{s} = t^2(\gamma_1 t + \gamma_2)$ 代入原方程解得 $\gamma_1 = \frac{1}{6}, \gamma_2 = \frac{1}{2}$

故通解为 $s = c_1 + c_2 t - \frac{1}{6}t^2(t+3)$

(7) $x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 2t + 3$

解：特征方程 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ 有根 $\lambda_1 = 2$, 两重根 $\lambda = 1$

齐线性方程的通解为 $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 t e^t$

又因为 $\lambda = 0$ 不是特征根，故可以取特解行如 $\tilde{x} = A + Bt$ 代入原方程解得 $A = -4, B = -1$

故通解为 $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 t e^t - 4 - t$

(8) $x^{(4)} - 2x'' + x = t^2 - 3$

解：特征方程 $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$ 有2重根 $\lambda = 1$, 2重根 $\lambda = -1$

故齐线性方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$

取特解行如 $\tilde{x} = At^2 + Bt + c$ 代入原方程解得 $A = 1, B = 0, C = 1$

故通解为 $x = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + t^2 + 1$

(9) $x''' - x = \cos t$

解：特征方程 $\lambda^3 - 1 = 0$ 有复数根 $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \lambda_3 = 1$

故齐线性方程的通解为 $x = c_1 e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t$

取特解行如 $\tilde{x} = A \cos t + B \sin t$ 代入原方程解得 $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$

故通解为 $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$

(10) $x'' + x' - 2x = 8\sin 2t$

解：特征方程 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ 有根 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$

故齐线性方程的通解为 $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$

因为 $+2i$ 不是特征根

取特解行如 $\tilde{x} = A\cos 2t + B\sin 2t$ 代入原方程解得 $A = -\frac{2}{5}, B = -\frac{6}{5}$

故通解为 $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{6}{5}\sin 2t$

(11) $x''' - x = e^t$

解：特征方程 $\lambda^3 - 1 = 0$ 有复数根 $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \lambda_3 = 1$

故齐线性方程的通解为 $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t$

$\lambda = 1$ 是特征方程的根，故 $\tilde{x} = Ate^t$ 代入原方程解得 $A = \frac{1}{3}$

故通解为 $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t + \frac{1}{3}te^t$

(12) $s'' + 2as' + a^2s = e^t$

解：特征方程 $\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = 0$ 有 2 重根 $\lambda = -a$

当 $a = -1$ 时，齐线性方程的通解为 $s = c_1 e^t + c_2 te^t$,

$\lambda = 1$ 是特征方程的 2 重根，故 $\tilde{x} = At^2 e^t$ 代入原方程解得 $A = \frac{1}{2}$

通解为 $s = c_1 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{2}t^2$,

当 $a \neq -1$ 时，齐线性方程的通解为 $s = c_1 e^{-at} + c_2 te^{-at}$,

$\lambda = 1$ 不是特征方程的根，故 $\tilde{x} = Ae^t$ 代入原方程解得 $A = \frac{1}{(a+1)^2}$

故通解为 $s = c_1 e^{-at} + c_2 t e^{-at} + \frac{1}{(a+1)^2} e^t$

$$(13) \quad x'' + 6x' + 5x = e^{2t}$$

解：特征方程 $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$ 有根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$

故齐线性方程的通解为 $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$

$\lambda = 2$ 不是特征方程的根，故 $\tilde{x} = A e^{2t}$ 代入原方程解得 $A = \frac{1}{21}$

故通解为 $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{21} e^{2t}$

$$(14) \quad x'' - 2x' + 3x = e^{-t} \cos t$$

解：特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ 有根 $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i, \lambda_2 = -1 - \sqrt{2}i$

故齐线性方程的通解为 $x = c_1 e^t \cos \sqrt{2}t + c_2 e^t \sin \sqrt{2}t$

$-1 \pm i$ 不是特征方程的根，取特解行如 $\tilde{x} = (A \cos t + B \sin t) e^{-t}$ 代入

原方程解得 $A = \frac{5}{41}, B = -\frac{4}{41}$

故通解为 $x = c_1 e^t \cos \sqrt{2}t + c_2 e^t \sin \sqrt{2}t + (\frac{5}{41} \cos t - \frac{4}{41} \sin t) e^{-t}$

$$(15) \quad x'' + x = \sin t - \cos 2t$$

解：特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$ 有根 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

故齐线性方程的通解为 $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$x'' + x = \sin t, \lambda_1 = i$ 是方程的解 $\tilde{x} = t(A \cos t + B \sin t)$ 代入原方程解得

$A = -\frac{1}{2}, B = 0$ 故 $\tilde{x} = -\frac{1}{2} t \cos t$

$x'' + x = -\cos 2t \quad \tilde{x} = A \cos 2t + B \sin 2t$ 代入原方程解得

$A = \frac{1}{3}, B = 0$ 故 $\tilde{x} = \frac{1}{3} \cos 2t$

故通解为 $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{3} \cos 2t$

习题 5.1

1. 给定方程组

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (*)$$

a) 试验证 $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ 分别是方程组 (*) 的满足初始条件

$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解.

b) 试验证 $\mathbf{w}(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t)$ 是方程组 (*) 的满足初始条件 $\mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

的解, 其中 c_1, c_2 是任意常数.

解: a)
$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

又
$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} \sin 0 \\ \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t)$$

因此 $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ 分别是给定初值问题的解.

b)
$$\mathbf{w}(0) = c_1 \mathbf{u}(0) + c_2 \mathbf{v}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}'(t) = c_1 \mathbf{u}'(t) + c_2 \mathbf{v}'(t)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ -c_1 \cos t - c_2 \sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t)$$

因此 $\mathbf{w}(t)$ 是给定方程初值问题的解.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题:

a) $x'' + 2x' + 7tx = e^{-t}, x(1)=7, x'(1)=-2$

b) $x^{(4)} + x = te^t, x(0)=1, x'(0)=-1, x''(0)=2, x'''(0)=0$

c) $\begin{cases} x'' + 5y' - 7x + 6y = e^t \\ y'' - 2y + 13y' - 15x = \cos t \end{cases}$

$$x(0)=1, x'(0)=0, y(0)=0, y'(0)=1$$

解: a) 令 $x_1 = x, x_2 = x'$, 得

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = -7tx_1 - 2x_2 + e^{-t} \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7t & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } x_1 = x(1)=7 \quad x_2(1) = x'(1)=-2$$

于是把原初值问题化成了与之等价的一阶方程的初值问题:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

b) 令 $x_1 = x \quad x_2 = x' \quad x_3 = x'' \quad x_4 = x'''$ 则得:

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = x_3 \\ x_3' = x''' = x_4 \\ x_4' = -x + te^t = -x_1 + te^t \end{cases}$$

$$\text{且 } x_1(0)=x(0)=1, x_2=x'(0)=-1, x_3(0)=x''(0)=2,$$

$$x_4(0)=x'''(0)=0$$

于是把原初值问题化成了与之等价的一阶方程的初值问题:

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ te^t \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

c) 令 $w_1=x$, $w_2=x'$, $w_3=y$, $w_4=y'$, 则原初值问题可化为:

$$\begin{cases} w_1' = x' = w_2 \\ w_2' = x'' = -5w_4 + 7w_1 - 6w_3 + e^t \\ w_3' = y' = w_4 \\ w_4' = y'' = 2w_3 - 13w_4 + 15w_1 + \cos t \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} w_1(0) = x(0) = 1 \\ w_2(0) = x'(0) = 0 \\ w_3(0) = y(0) = 0 \\ w_4(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{即 } w' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 2 & -13 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$w(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{其中 } w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

3. 试用逐步逼近法求方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

满足初始条件

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的第三次近似解.

$$\text{解: } \psi_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\psi_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 - \frac{s^2}{2} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{6} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

习题 5.2

02412—02 02412—03

1. 试验证 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$

是方程组 $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 在任何不包含原点的区间 $a \leq t \leq b$ 上

的基解矩阵。

解: 令 $\Phi(t)$ 的第一列为 $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$, 这时 $\varphi_1'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \varphi_1(t)$ 故

$\varphi_1(t)$ 是一个解。同样如果以 $\varphi_2(t)$ 表示 $\Phi(t)$ 第二列, 我们有 $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \varphi_2(t)$ 这样 $\varphi_2(t)$ 也是一个解。因此 $\Phi(t)$ 是解矩阵。又因为

$\det \Phi(t) = -t^2$ 故 $\Phi(t)$ 是基解矩阵。

2. 考虑方程组 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ (5.15) 其中 $\mathbf{A}(t)$ 是区间 $a \leq t \leq b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵, 它的元素为 $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$

a) 如果 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是 (5.15) 的任意 n 个解, 那么它们的伏朗斯基行列式 $W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \equiv W(t)$ 满足下面的一阶线性微分方程

$$W' = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)]W$$

b) 解上面的一阶线性微分方程, 证明下面公式:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t [a_{11}(s) + a_{22}(s) + \dots + a_{nn}(s)] ds} \quad t_0, t \in [a, b]$$

解: $W'(t) = \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{vmatrix}$

=

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2} & \dots & a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \\
+ \dots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_{11} + \dots + a_{nn}x_{n1} & a_{n1}x_{21} + \dots + a_{nn}x_{n2} & \dots & a_{n1}x_{n1} + \dots + a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & \dots & a_{11}x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}x_{n1} & a_{nn}x_{n2} & \dots & a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{整理后原式变为}$$

$$(a_{11} + \dots + a_{nn}) \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11} + \dots + a_{nn}) w(t)$$

$$= (a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)) w(t)$$

b) 由于 $w'(t) = [a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)] w(t)$, 即 $\frac{dw(t)}{w(t)} = [a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)] dt$

两边从 t_0 到 t 积分 $\ln |w(t)| - \ln |w(t_0)| = \int_{t_0}^t [a_{11}(s) + \dots + a_{nn}(s)] ds$ 即

$$w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t [a_{11}(s) + \dots + a_{nn}(s)] ds}, t \in [a, b]$$

3. 设 $A(t)$ 为区间 $a \leq t \leq b$ 上的连续 $n \times n$ 实矩阵, $\Phi(t)$ 为方程 $x' = A(t)x$ 的基解矩阵, 而 $x = \varphi(t)$ 为其一解, 试证:

a) 对于方程 $y' = -A^T(t)y$ 的任一解 $y = \Psi(t)$ 必有 $\Psi^T(t) \varphi(t) = \text{常数}$;

b) $\Psi(t)$ 为方程 $y' = -A^T(t)y$ 的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵 C , 使 $\Psi^T(t) \varphi(t) = C$.

解 a) $[\Psi^T(t) \varphi(t)]' = \Psi^T \varphi'(t) + \Psi^T \varphi'(t) = \Psi^T \varphi(t) + \Psi^T(t) A(t) \varphi$

又因为 $\Psi' = -A^T(t) \Psi(t)$, 所以 $\Psi^T = -\Psi^T(t) A(t)$

$$[\Psi^T(t) \varphi(t)]' = -\Psi^T(t) \varphi(t) A(t) + \Psi^T(t) A(t) \varphi(t) = 0,$$

所以对于方程 $y' = -A^T(t)y$ 的任一解 $y = \Psi(t)$ 必有 $\Psi^T(t) \varphi(t) = \text{常数}$

b) “ $\Leftarrow$ ” 假设为方程 $y' = -A^T(t)y$ 的基解矩阵, 则

$$\begin{aligned} [\Psi^T(t) \varphi(t)]' &= [\Psi^T(t)]' \varphi(t) + \Psi^T(t) \varphi'(t) = [-A^T(t) \Psi(t)] \varphi(t) + \\ &\Psi^T(t) A^T(t) \varphi(t) + \Psi^T(t) [A(t) \varphi(t)] = -\Psi^T(t) A^T(t) \varphi(t) + \Psi^T(t) A^T(t) \\ &\varphi(t) = 0, \text{故 } \Psi^T(t) \varphi(t) = C \end{aligned}$$

“ $\Rightarrow$ ” 若存在非奇异常数矩阵 C , $\det C \neq 0$, 使 $\Psi^T(t) \varphi(t) = C$,

$$\begin{aligned} \text{则} [\Psi^T(t) \varphi(t)]' &= \Psi^T \varphi'(t) + \Psi^T \varphi'(t) = 0, \text{故 } \Psi^T(t) \varphi(t) = -\Psi^T(t) \\ &\varphi(t) A(t) \quad \Psi^T(t) = -\Psi^T(t) A(t) \text{ 所以 } \Psi^T(t) = -\Psi^T(t) A(t), \Psi'(t) = - \\ &\Psi^T(t) A^T(t) \text{ 即 } \Psi(t) \text{ 为方程 } y' = -A^T(t)y \text{ 的基解矩阵} \end{aligned}$$

4. 设 $\Phi(t)$ 为方程 $x' = Ax$ (A 为 $n \times n$ 常数矩阵) 的标准基解矩阵 (即 $\Phi(0) = E$), 证明:

$$\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t - t_0) \text{ 其中 } t_0 \text{ 为某一值.}$$

证明: (1) $\Phi(t), \Phi(t - t_0)$ 是基解矩阵。

(2) 由于 $\Phi(t)$ 为方程 $x' = Ax$ 的解矩阵, 所以 $\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0)$ 也是 $x' = Ax$ 的解矩阵, 而当 $t = t_0$ 时, $\Phi(t_0) \Phi^{-1}(t_0) = E$, $\Phi(t - t_0) = \Phi(0) = E$. 故由解的存在唯一性定理, 得 $\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t - t_0)$

5. 设 $A(t), f(t)$ 分别为在区间 $a \leq t \leq b$ 上连续的 $n \times n$ 矩阵和 n 维列向量, 证明方程组 $x' = A(t)x + f(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解。

证明: 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 $x' = A(t)x$ 的 n 个线性无关解, $\bar{x}$ 是 $x' = A(t)x + f(t)$ 的一个解, 则 $x_1 + \bar{x}, x_2 + \bar{x}, \dots, x_n + \bar{x}, \bar{x}$ 都是非齐线性方程的解, 下面来证明它们线性无关, 假设存在不全为零的常数

$$C_i, (i=1, 2, \dots, n) \text{ 使得 } \sum_{i=1}^n C_i (x_i + \bar{x}) + C_{n+1} \bar{x} = 0, \text{ 从而 } x_1 + \bar{x}, x_2 + \bar{x}, \dots,$$

$x_n + \bar{x}, \bar{x}$ 在 $a \leq t \leq b$ 上线性相关, 此与已知矛盾, 因此 $x_1 + \bar{x}, x_2 + \bar{x}, \dots, x_n + \bar{x}, \bar{x}$ 线性无关, 所以方程组 $x' = A(t)x + f(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解。

6、试证非齐线性微分方程组的叠加原理:

$$x' = A(t)x + f_1(t)$$

$$x' = A(t)x + f_2(t)$$

的解, 则 $x_1(t) + x_2(t)$ 是方程组

$$x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$$

的解。

证明: $x' = A(t)x + f_1(t)$ (1) $x' = A(t)x + f_2(t)$ (2)

分别将 $x_1(t), x_2(t)$ 代入 (1) 和 (2)

则 $x_1' = A(t)x_1 + f_1(t)$ $x_2' = A(t)x_2 + f_2(t)$

则 $x_1' + x_2' = A(t)[x_1(t) + x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$

$[x_1(t) + x_2(t)]' = A(t)[x_1(t) + x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$

令 $x = x_1(t) + x_2(t)$

即证 $x' = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$

7. 考虑方程组 $x' = Ax + f(t)$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

a) 试验证 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ 是 $x' = Ax$ 的基解矩阵;

b) 试求 $x' = Ax + f(t)$ 的满足初始条件 $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的解 $\varphi(t)$ 。

证明: a) 首先验证它是基解矩阵

以 $\varphi_1(t)$ 表示 $\phi(t)$ 的第一列 $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{则 } \varphi_1'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \varphi_1(t)$$

故 $\varphi_1(t)$ 是方程的解

如果以 $\varphi_2(t)$ 表示 $\phi(t)$ 的第二列 $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

$$\text{我们有 } \varphi_2'(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \varphi_2(t)$$

故 $\varphi_2(t)$ 也是方程的解

从而 $\phi(t)$ 是方程的解矩阵

$$\text{又 } \det \phi(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0$$

故 $\phi(t)$ 是 $x' = Ax$ 的基解矩阵;

b) 由常数变易公式可知, 方程满足初始条件 $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的解

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\eta + \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}f(s)ds$$

$$\text{而 } \phi^{-1}(t) = \frac{\begin{pmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}{e^{4t}} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\therefore \varphi(t) = \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{25}(-15t+27)e^{2t} - \frac{1}{25}\cos t - \frac{1}{25}\sin t \\ -\frac{3}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t \end{pmatrix}$$

8、试求 $x' = Ax + f(t)$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

满足初始条件

$$\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

的解 $\phi(t)$ 。

解：由第 7 题可知 $x' = Ax$ 的基解矩阵 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

$$\text{则 } \phi^{-1}(s) = \frac{\begin{pmatrix} e^{2s} & -se^{2s} \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}}{e^{4s}} = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2s}$$

若方程满足初始条件 $\varphi(0) = 0$

$$\text{则有 } \varphi(t) = \varphi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s) f(s) ds = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2s} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{若 } \varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

则有

$$\varphi(t) = \phi(t) \phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s) f(s) ds = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t+\frac{1}{2}t^2)e^{2t} \\ (t-1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

9、试求下列方程的通解：

$$\text{a) } x'' + x = \sec t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

解：易知对应的齐线性方程 $x'' + x = 0$ 的基本解组为

$$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$$

$$\text{这时 } W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

由公式得

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\sin t \cos s - \cos t \sin s}{1} \sec s ds = \int_0^t (\sin t - \cos t \tan s) ds = t \sin t + \cos t \ln \cos t$$

$$\therefore \text{通解为 } x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \sin t + \cos t \ln t$$

b) $x''' - 8x = e^{2t}$

解：易知对应的齐线性方程 $x''' - 8x = 0$ 的基本解组为 $x_1(t) = e^{2t}$.

$$x_2(t) = e^{-t} \cos \sqrt{3}t, x_3(t) = e^{-t} \sin \sqrt{3}t$$

$\therefore \lambda = 2$ 是方程的特征根

故方程有形如 $x = Ate^{2t}$ 的根

代入得 $A = \frac{1}{12}$

故方程有通解 $x = (c_1 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t)e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{12}te^{2t}$

c) $x'' - 6x' + 9x = e^t$

解：易知对应的齐线性方程 $x'' - 6x' + 9x = 0$ 对应的特征方程为

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \lambda_{1,2} = 3$ 故方程的一个基本解组为 $x_1(t) = e^{3t}, x_2(t) = te^{3t}$

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t}$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{te^{3t}e^{3s} - e^{3t} \cdot se^{3s}}{e^{6s}} \cdot e^s ds = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t}$$

因为 te^{3t}, e^{3t} 是对应的齐线性方程的解

故 $\varphi_1(t) = \frac{1}{4}e^t$ 也是原方程的一个解

故方程的通解为 $x = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} + \frac{1}{4}e^t$

10、给定方程 $x'' + 8x' + 7x = f(t)$ 其中 $f(t)$ 在 $0 \leq t < +\infty$ 上连续，试利用常数变易公式，证明：

a) 如果 $f(t)$ 在 $0 \leq t < +\infty$ 上有界，则上面方程的每一个解在 $0 \leq t < +\infty$ 上有界；

b) 如果当 $t \rightarrow \infty$ 时， $f(t) \rightarrow 0$ ，则上面方程的每一个解 $\varphi(t) \rightarrow 0$ (当

$t \rightarrow \infty$ 时)。

证明: a) $\because f(t)$ $0 \leq t < +\infty$ 上有界

$\therefore$ 存在 $M > 0$, 使得 $|f(t)| \leq M, \forall t \in [0, +\infty)$

又 $\because x = e^{-t}, x = e^{-7t}$ 是齐线性方程组的基本解组

$\therefore$ 非齐线性方程组的解

$$\therefore \varphi(t) = \int_0^t \frac{e^{-7t}e^{-s} - e^{-t}e^{-7s}}{\begin{vmatrix} e^{-s} & e^{-7s} \\ -e^{-s} & -7e^{-7s} \end{vmatrix}} f(s) ds = \int_0^t \frac{e^{-7s}e^{-s} - e^{-t}e^{-7s}}{-6e^{-8s}} f(s) ds$$

$$\therefore |\varphi(t)| \leq \frac{M}{6} \int_0^t |e^{-7t}e^{7s} - e^{-t}e^s| ds \leq \frac{M}{6} \left(\frac{8}{7} - \frac{1}{7}e^{-7t} - e^{-t} \right) \leq \frac{4}{21}M$$

又对于非齐线性方程组的满足初始条件的解 $x(t)$, 都存在固定的常数 c_1, c_2

使得 $x(t) = c_1e^{-7t} + c_2e^{-t} + \varphi(t)$

$$\text{从而 } |x(t)| \leq |c_1e^{-7t}| + |c_2e^{-t}| + |\varphi(t)| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{4}{21}M$$

故上面方程的每一个解在 $0 \leq t < +\infty$ 上有界

b) $\because t \rightarrow \infty$ 时, $f(t) \rightarrow 0$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ 当 } t > N \text{ 时 } |f(t)| < \varepsilon$$

由 a) 的结论

$$|x(t)| \leq |c_1e^{-7t}| + |c_2e^{-t}| + |\varphi(t)| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{4}{21}M \leq \frac{4}{21}, (t \rightarrow \infty)$$

故 $t \rightarrow \infty$ 时, 原命题成立

11、给定方程组 $x' = A(t)x$ (5.15)

这里 $A(t)$ 是区间 $a \leq x \leq b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵, 设 $\phi(t)$ 是 (5.15) 的一个基解矩阵, n 维向量函数 $F(t, x)$ 在 $a \leq x \leq b, \|x\| < \infty$ 上连续, $t_0 \in [a, b]$ 试

证明初值问题:
$$\begin{cases} x' = A(t)x + F(t, x) \\ \varphi(t_0) = \eta \end{cases} \quad (*)$$

的唯一解 $\varphi(t)$ 是积分方程组

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_{t_0}^t \phi(t)\phi^{-1}(s)F(s, x(s))ds \quad (**)$$

的连续解。反之，(**) 的连续解也是初值问题 (8) 的解。

证明：若 $\varphi(t)$ 是 (*) 的唯一解

则由非齐线性方程组的求解公式

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds$$

即 (*) 的解满足 (**))

反之，若 $\varphi(t)$ 是 (**) 的解，则有

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds$$

两边对 t 求导：

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \phi'(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi'(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds + \phi(t)\phi^{-1}(t)F(t, \varphi(t)) \\ &= \phi'(t)[\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds] + F(t, \varphi(t)) \\ &= A(t)\phi(t)[\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds] + F(t, \varphi(t)) \\ &= A(t)\varphi(t) + F(t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

即 (**) 的解是 (*) 的解

习题 5.3

1、假设 $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵，试证：

a) 对任意常数 c_1, c_2 都有

$$\exp(c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}) = \exp c_1 \mathbf{A} \cdot \exp c_2 \mathbf{A}$$

b) 对任意整数 k , 都有

$$(\exp \mathbf{A})^k = \exp k \mathbf{A}$$

$$(\text{当 } k \text{ 是负整数时, 规定 } (\exp \mathbf{A})^k = [(\exp \mathbf{A})^{-1}]^{-k})$$

证明: a) $\because (c_1 \mathbf{A}) \cdot (c_2 \mathbf{A}) = (c_2 \mathbf{A}) \cdot (c_1 \mathbf{A})$

$$\therefore \exp(c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}) = \exp c_1 \mathbf{A} \cdot \exp c_2 \mathbf{A}$$

b) $k > 0$ 时, $(\exp \mathbf{A})^k = \exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{A} \cdots \exp \mathbf{A}$

$$= \exp (\mathbf{A} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A})$$

$$= \exp k \mathbf{A}$$

$k < 0$ 时, $-k > 0$

$$(\exp \mathbf{A})^k = [(\exp \mathbf{A})^{-1}]^{-k} = [\exp(-\mathbf{A})]^{-k} = \exp(-\mathbf{A}) \cdot \exp(-\mathbf{A}) \cdots \exp(-\mathbf{A})$$

$$= \exp[(-\mathbf{A})(-k)]$$

$$= \exp k \mathbf{A}$$

故 $\forall k$, 都有 $(\exp \mathbf{A})^k = \exp k \mathbf{A}$

2、试证: 如果 $\varphi(t)$ 是 $x' = \mathbf{A}x$ 满足初始条件 $\varphi(t_0) = \eta$ 的解, 那么

$$\varphi(t) = [\exp \mathbf{A}(t - t_0)] \eta$$

证明: 由定理 8 可知 $\varphi(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \eta + \Phi(t) \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s) f(s) ds$

又因为 $\Phi(t) = \exp \mathbf{A}t$, $\Phi^{-1}(t_0) = (\exp \mathbf{A}t_0)^{-1} = \exp(-\mathbf{A}t_0)$, $f(s) = 0$,

又因为矩阵 $(\mathbf{A}t) \cdot (-\mathbf{A}t_0) = (-\mathbf{A}t_0) \cdot (\mathbf{A}t)$

所以 $\varphi(t) = [\exp \mathbf{A}(t - t_0)] \eta$

3、试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

解: a) $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$

$$\therefore \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1$$

对应于 $\lambda_1 = 5$ 的特征向量 $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}, (\alpha \neq 0)$

对应于 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量 $v = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}, (\beta \neq 0)$

b) $\det(\lambda E - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$$\therefore \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -2$$

对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量 $u_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\alpha \neq 0)$

对应于 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量 $u_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\beta \neq 0)$

对应于 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量 $u_3 = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\gamma \neq 0)$

c) $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3) = 0$

$$\therefore \lambda_1 = -1 \text{ (二重)}, \quad \lambda_2 = 3$$

$$\text{对应于 } \lambda_1 = -1 \text{ (二重) 的特征向量 } \mathbf{u} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\text{对应于 } \lambda_2 = 3 \text{ 的特征向量 } \mathbf{v} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (\beta \neq 0)$$

$$\text{d) } \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

$$\text{对应于 } \lambda_1 = -1 \text{ 的特征向量 } \mathbf{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\text{对应于 } \lambda_2 = -2 \text{ 的特征向量 } \mathbf{u}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (\beta \neq 0)$$

$$\text{对应于 } \lambda_3 = -3 \text{ 的特征向量 } \mathbf{u}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad (\gamma \neq 0)$$

4、试求方程组 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的一个基解矩阵，并计算 $\exp \mathbf{A}t$ ，其中 $\mathbf{A}$ 为：

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{解: a) } \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0 \text{ 得 } \lambda_1 = \sqrt{3}, \lambda_2 = -\sqrt{3}$$

$$\text{对应于 } \lambda_1 \text{ 的特征向量为 } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \alpha, \quad (\alpha \neq 0)$$

对应于 λ_2 的特征向量为 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \beta$, ($\beta \neq 0$)

$\therefore u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 是对应于 λ_1 , λ_2 的两个线性无关的特征向量

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{3}t} & e^{-\sqrt{3}t} \\ (2 + \sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} & (2 - \sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$ 是一个基解矩阵

$$\text{ExpAt} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -(2 - \sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} + (2 + \sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} & e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t} \\ -e^{\sqrt{3}t} + e^{-\sqrt{3}t} & (2 + \sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} - (2 - \sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$$

b) 由 $\det(\lambda E - A) = 0$ 得 $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$

解得 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是对应于 λ_1 , λ_2 的两个线性无关的特征向量

则基解矩阵为 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \exp \mathbf{A}t = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5t} + 2e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-t} & 2e^{5t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

c) 由 $\det(\lambda E - A) = 0$ 得 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$

解得基解矩阵 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & 0 \end{pmatrix}$

$$\Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \exp \mathbf{A}t = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} + e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-2t} & -e^{2t} + e^{-2t} + e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-2t} & -e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

d) 由 $\det(\lambda E - A) = 0$ 得 $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{7}$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{7}$

$$\text{解得基解矩阵 } \Phi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

则 $\exp At = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) =$

$$\frac{1}{4\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t} + \frac{-2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{56\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{32\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

5、试求方程组 $x' = Ax$ 的基解矩阵，并求满足初始条件 $\varphi(0) = \eta$ 的解 $\varphi(t)$

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解：a) 由第4题(b)知，基解矩阵为 $\begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

$$\eta = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

所以 $\alpha = 2$, $\beta = 1$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} + e^{-t} \\ 4e^{5t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

b) 由第 4 题 (d) 知, 基解矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{e^{(2-\sqrt{7})t}}{3} \\ 7e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

所以

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \frac{52\sqrt{7}}{3}e^{-3t} + \frac{4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ -\frac{364\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{-748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ -\frac{208\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{-178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

c) 由 3 (c) 可知, 矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$ (二重)

$$\lambda_1 \text{ 对应的特征向量为 } u_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\frac{4\beta+2\gamma}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\frac{4\beta+2\gamma}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \therefore v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = e^{3t}Ev_1 + e^{-t}[E + t(A+E)]v_2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

6、求方程组 $x' = Ax + f(t)$ 的解 $\varphi(t)$:

$$a) \quad \varphi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \varphi(0) = 0, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \varphi(0) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix}$$

解: a) 令 $x' = Ax$ 的基解矩阵为 $\Phi(t)$

$$p(\lambda) = \det(\lambda E - A) = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\text{所以 } \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$$

$$\text{解得 } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}, \text{ 则 } \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{-3e^{4t}} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -2e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(0) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{求得 } \varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{20}e^{5t} - e^{-t} - \frac{1}{4}e^t - \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10}e^{5t} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

b) 由 $\det(\lambda E - A) = 0$ 得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$

设 λ_1 对应的特征向量为 v_1 , 则

$$(\lambda_1 E - A)v_1 = 0, \text{ 得 } v_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

$$\text{取 } v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 同理可得 } v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{从而解得 } \varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} \\ -2e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{5}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} \\ 4e^{-2t} - \frac{9}{4}e^{-3t} - \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} \end{pmatrix}$$

c) 令 $x' = Ax$ 的基解矩阵为 $\Phi(t)$

由 $\det(\lambda E - A) = 0$ 得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$$\text{解得对应的基解矩阵为 } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{3}{2}e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Phi^{-1}(t) = -2 \begin{pmatrix} e^{-t} & -\frac{3}{2}e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{从而 } \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \phi(t)\phi^{-1}(0)\varphi(0) + \phi(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)f(s)ds \\ \therefore &= \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t + e^t(-4 - 2\eta_1 + 3\eta_2) + 3e^{2t}(1 + \eta_1 - \eta_2) \\ 2\cos t - 2\sin t + e^t(-4 - 2\eta_1 + 3\eta_2) + 2e^{2t}(1 + \eta_1 - \eta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7、假设 m 不是矩阵 A 的特征值。试证非齐线性方程组

$$x' = Ax + ce^{mt}$$

有一解形如

$$\varphi(t) = pe^{mt}$$

其中 c, p 是常数向量。

证：要证 $\varphi(t) = pe^{mt}$ 是否为解，就是能否确定常数向量 p

$$pme^{mt} = Ape^{mt} + ce^{mt}$$

$$\text{则 } p(mE - A) = c$$

由于 m 不是 A 的特征值

$$\text{故 } |mE - A| = 0$$

$mE - A$ 存在逆矩阵

那么 $p = c(mE - A)^{-1}$ 这样方程就有形如 $\varphi(t) = pe^{mt}$ 的解

8、给定方程组

$$\begin{cases} x_1'' - 3x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0 \\ x_1' - 2x_1 + x_2' + x_2 = 0 \end{cases}$$

a) 试证上面方程组等价于方程组 $u' = Au$, 其中

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) 试求 a) 中的方程组的基解矩阵

c) 试求原方程组满足初始条件

$$x_1(0)=0, \quad x_1'(0)=1, \quad x_2(0)=0$$

的解。

证: a) 令 $u_1 = x_1, u_2 = x_1', u_3 = x_2$ 则方程组①化为

$$\begin{cases} u_1' = x_1' = u_2 \\ u_2' = x_1'' = 3u_2 - 2u_1 - u_3' + u_3 \\ u_3' = x_2' = -u_2 + 2u_1 - u_3 \end{cases}$$

$$\text{即 } u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} u \quad u' = Au \quad \text{①}$$

反之, 设 $x_1 = u_1, x_1' = u_2, x_2 = u_3$ 则方程组②化为

$$\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + 4x_1' + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_1' - x_2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1'' = 2x_1' - 2x_1 - x_2' + x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_1' - x_2 \end{cases}$$

b) 由 $\det(\lambda E - A) = 0$ 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

$$\text{由 } \begin{cases} -u_2 = 0 \\ 4u_1 - 4u_2 - 2u_3 = 0 \\ -2u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \text{ 得 } u_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

同理可求得 u_2 和 u_3

$$\text{取 } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2e^{2t} \\ 2 & \frac{1}{2}e^t & 0 \end{pmatrix} \text{ 是一个基解矩阵}$$

c) 令 $u_1 = x_1, u_2 = x_1', u_3 = x_2$, 则①化为等价的方程组①且初始条件变为

$u_1(0) = 0, u_2(0) = 1, u_3(0) = 0$. 而②满足此初始条件的解为:

$$e^{At}\eta = e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{2t} \\ -2e^t + 3e^{2t} \\ 1 - e^t \end{pmatrix} \quad \text{③}$$

于是根据等价性, ①满足初始条件的解为③式

9、试用拉普拉斯变换法解第5题和第6题。

证明: 略。

10、求下列初值问题的解:

$$a) \begin{cases} x_1' + x_2' = 0 \\ x_1' - x_2' = 1 \end{cases} \quad \varphi_1(0) = 1, \varphi_2(0) = 0$$

$$b) \begin{cases} x_1'' + 3x_1' + 2x_1 + x_2' + x_2 = 0 \\ x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0 \end{cases} \quad \varphi_1(0) = 1, \varphi_1'(0) = -1, \varphi_2(0) = 0$$

$$c) \begin{cases} x_1'' - m^2 x_2 = 0 \\ x_2'' + m^2 x_1 = 0 \end{cases} \quad x_1(0) = \eta_1, x_1'(0) = \eta_2, x_2(0) = \eta_3, x_2'(0) = \eta_4$$

解: a) 根据方程解得 $x_1' = \frac{1}{2}$, $x_2' = -\frac{1}{2}$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}t + c_1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}t + c_2$$

$$\therefore \varphi_1(0) = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 0 + c_1 = 1 \quad \therefore c_1 = 1 \quad \therefore x_1 = \frac{1}{2}t + 1$$

$$\therefore \varphi_2(0) = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \times 0 + c_2 = 0 \quad \therefore c_2 = 0 \quad \therefore x_2 = -\frac{1}{2}t$$

$$\text{综上: } x_1 = \frac{1}{2}t + 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}t$$

b) 对方程两边取拉普拉斯变换, 得

$$\begin{cases} s^2 X_1(s) - s + 1 + 3(sX_1(s) - 1) + 2X_1(s) + sX_2(s) + X_2(s) = 0 \\ sX_1(s) - 1 + 2X_1(s) + sX_2(s) - X_2(s) = 0 \end{cases}$$

解得

$$X_1(s) = \frac{s^2 - 3}{(s+1)(s+2)(s-2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$X_2(s) = \frac{-s-2}{(s+1)(s+2)(s-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{2t} \\ \therefore \varphi_2(t) &= \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{2t}) \end{aligned}$$

c) 对方程两边取拉普拉斯变换, 得

$$\begin{cases} s^2 X_1(s) - s\eta_1 - \eta_2 - m^2 X_2(s) = 0 \\ s^2 X_2(s) - s\eta_3 - \eta_4 + m^2 X_1(s) = 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} s^2 X_1(s) - m^2 X_2(s) = s\eta_1 + \eta_2 \\ m^2 X_1(s) + s^2 X_2(s) = s\eta_3 + \eta_4 \end{cases}$$

$$\text{解得 } X_1(s) = \frac{\eta_1 s^3 + \eta_2 s^2 + m^2 s \eta_3 + \eta_4 m^2}{s^4 + m^4}$$

$$X_2(s) = \frac{\eta_3 s^3 + \eta_4 s^2 - m^2 \eta_1 s - m^2 \eta_2}{s^4 + m^4}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \left[\left(\frac{1}{2}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + \left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \sin \frac{m}{\sqrt{2}}t \right] \cdot e^{-\frac{m}{2}t} \\
&\quad + \left[\left(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + \left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \sin \frac{m}{\sqrt{2}}t \right] \cdot e^{\frac{m}{2}t} \\
\varphi_2(t) &= \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + \left(\frac{1}{2}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \sin \frac{m}{\sqrt{2}}t \right] \cdot e^{-\frac{m}{2}t} \\
&\quad + \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + \left(-\frac{1}{2}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \sin \frac{m}{\sqrt{2}}t \right] \cdot e^{\frac{m}{2}t}
\end{aligned}$$

11、 假设 $y = \varphi(x)$ 是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解，试证 $y = \int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$ 是方程

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

的解，这里 $f(x)$ 为已知连续函数。

证明： $y = \int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$

$$\because y' = \varphi(0)f(x) + \int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt = \int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt$$

$$y'' = \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)dt + \varphi'(0)f(x) = \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)dt + f(x)$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}
y'' + ay' + by &= \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)dt + f(x) + a \int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt + b \int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt \\
&= \int_0^x [\varphi''(x-t) + a\varphi'(x-t) + b\varphi(x-t)]f(t)dt + f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

02412-04 丁晶晶

02412-05 徐雪辉

习题 6.3

1. 试求出下列方程的所有奇点,并讨论相应的驻定解的稳定性态

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x-y) \\ \frac{dy}{dt} = 1/4y(2-3x-y) \end{cases}$$

解: 由 $\begin{cases} x(1-x-y) = 0 \\ 1/4y(2-3x-y) = 0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(0,2),(1,0),(1/2,1/2)

对于奇点(0,0), $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ 由 $|\lambda E - A| = 0$ 得 $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 1/2 > 0$

所以不稳定

对于奇点(0,2), 令 $X=x, Y=y-2$, 则 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$

所以渐进稳定

同理可知,对于奇点(1,0),驻定解渐进稳定

对于奇点(1/2,1/2),驻定解渐进不稳定

$$(2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 9x - 6y + 4xy - 5x^2 \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 6y - 5xy + 4y^2 \end{cases}$$

解: 由 $\begin{cases} 9x - 6y + 4xy - 5x^2 = 0 \\ 6x - 6y - 5xy + 4y^2 = 0 \end{cases}$ 得奇点(0,0),(1,2),(2,1)

对于奇点(0,0)可知不稳定

对于奇点(1,2)可知不稳定

对于奇点(2,1)可知渐进稳定

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \mu(y - x^2), \mu > 0 \end{cases}$$

解: 由 $\begin{cases} y = 0 \\ -x + \mu(y - x^2) = 0, \mu > 0 \end{cases}$ 得奇点(0,0), $(-1/\mu, 0)$

对于奇点(0,0) 驻定解不稳定

对于奇点 $(-1/\mu, 0)$ 得驻定解不稳定

$$(4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x \\ \frac{dy}{dt} = y - x^2 - (x - y)(y^2 - 2xy + 2/3 x^3) \end{cases}$$

$$\text{解: 由} \begin{cases} y - x = 0 \\ y - x^2 - (x - y)(y^2 - 2xy + 2/3 x^3) = 0 \end{cases} \text{得奇点}(0,0), (1,1)$$

对于奇点(0,0)得驻定解不稳定

对于奇点(1,1)得驻定渐进稳定

2. 研究下列纺车零解的稳定性

$$(1) \frac{d^3 x}{dt^3} + 5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\text{解: } a_0 = 1 > 0, a_1 = 5 > 0, a_2 = 6 > 0$$

$$\Delta_2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} > 0 \quad a_3 = 1 > 0 \quad \text{所以零解渐进稳定}$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = \mu x - y, \frac{dy}{dt} = \mu y - z, \frac{dz}{dt} = \mu z - x (\mu \text{为常数})$$

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ -1 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{由 } |\lambda E - A| = 0 \text{ 得 } \lambda^3 - 3\mu \lambda^2 + 3\mu^2 \lambda - \mu^3 + 1 = 0$$

$$\text{得 } \lambda_1 = \mu - 1, \quad \lambda_2 = \mu + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

i) $\mu + 1/2 < 0$ 即 $\mu < -1/2$, 渐进稳定

ii) $\mu + 1/2 > 0$ 即 $\mu > -1/2$ 不稳定

iii) $\mu + 1/2 = 0$ 即 $\mu = -1/2$ 稳定