独 创 性 声 明

我呈交的学位论文是在导师指导下个人进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得其它学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。特此声明。

声明人(签名)：谭茂金 06年 4月 10日

关于论文使用授权的说明

本人完全了解石油大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交学位论文的复印件，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存学位论文。特此说明。

说明人(签名)：谭茂金 指导教师(签名)：张庶谦 06年 4月 10日

非轴对称条件下
用模式匹配法计算电阻率测井响应

摘　要

在实际的勘探开发中，尤其是倾斜井和水平井中，井轴总是偏离地层法向，相对于井轴的旋转对称性已经不复存在，必须研究适合非轴对称条件下三维场域的新方法。数值模式匹配法(NMM)是一种半解析、半数值的混合解法，近年来已经在轴对称条件下的电法测井数值模拟中得到了成熟应用。鉴于此，用模式匹配法研究非轴对称条件下三维场域的电测井响应是很有意义的，也是非常必要的。

第 2 章以感应测井为例，详细论述了模式匹配法的原理，并对反射阵和透射阵理论进行了改进，应用电磁场在界面电位和磁感应强度连续条件推导出了上行波和下行波的递推关系，提出了界面转换阵理论。此方法对二层和三层介质非均匀模型进行了计算，结果表明这一方法简单有效，对于精确反演具有重要意义。

第 3 章研究了轴对称条件下基于界面转换阵理论的普通电阻率测井的模式匹配法，应用电位和电流密度的连续性条件推导了各层之间的转换关系，并以二层和三层介质进行了计算，其结果经验证是正确的。而且，根据互易定理，用 B-A-M 电极系代替 A-M-N 电极系，计算速度提高了近一倍。

第 4 章研究了非轴对称条件下普通电阻率测井的模式匹配理论。根据地层模型，选择了合适的坐标系，选定在该坐标系 XOY 平面内用数值方法，在与之垂直的方向上用解析法。在数值部分，选择三角形基函数作为形函数，对所研究的平面域进行了网格划分、单元编号、总体编号和总体矩阵安装；在解析部分，在垂向划分了适当的层，应用电磁场在界面电位和电流密度的连续性条件推导出了上行波和下行波的递推关系；全面完成了三维模式匹配理论的推导。轴对称条件下的计算结果验证了此方法是可行的。此外，还应用此算法研究了各种非轴对称地层模型下普通电阻率测井的数值模拟，系统地考察了井斜角、地层厚度以及椭圆井眼等对普通电阻率测井的影响。

第 5 章深入研究了非轴对称条件下，双侧向测井的模式匹配算法理论。针对双侧向电极棒尺寸不能忽略及其复杂性，在 Z 方向上对电极棒划分了适当的层，并应用电极处的等位面条件和电位和电流密度在界面的连续性条件详细推导出了上行波和下行波的递推关系，形成了一套完整的针对双侧向测井的三维模式匹配理论。针对无井眼两层介质模型进行了计算，初步验证了此方法是正确的。

关键词：非轴对称条件下　数值模式匹配　网格划分　广义特征值　界面转换理论

3-D Numerical Mode-Matching (NMM) Method For Resistivity Logging Responses In Nonsymmetric Conditions

Graduation Student Tan, Mao-jin
(Geology Resource And Geology Engineering)
Dissertation Supervisor Zhang, Geng-ji (professor)
China University Of Petroleum (East China)

Abstract

In field exploration and exploitation, especially in deviated wells and horizon wells, the axis of borehole is departure from the normal of the formation plane, so the symmetry conditions don't exist in general electrical logging stimulation and new method must be probed to fit to the 3-dimension (3-D) and nonsymmetric environment. Numerical Mode-Matching (NMM) method is a hybrid solution of partial analytic and partial numeric for simulation and inversion of resistiviy logs in these years. Therefore, it is profound and impossible to study logging respond with 3 dimension NMM method.

■ In charter 2, taking example for induction log, basic theory of 2-dimension (2-D) NMM is summarized in detail. On the base of those, the vertical analytic method is improved, which firstly derives a boundary transition formula or matrix of each boundary from electromagnetic field's continuous conditions rather than generalized reflection and transmission matrices. The new method is proved right and effect comparison with previous NMM, but it is more concise.

■ In charter 3, NMM of normal resistivity log is improved with boundary transition matrices theory according to continuous conditions of potential and current density. The new method is verified in previous media models. Furthermore, according to reciprocation thoery, A-M-N electrode may be replaced by B-A-M electrode, and the computing speed is one time faster.

■ In charter 4, 3-dimension NMM theory is comprehensively studied in Nonsymmetric conditions. First, an appropriate Descartes's reference frame is set up—the plane of deviated borehole and normal of formation is regard as XOY, and formation trend is regarded Z axis. In XOY plane, finite-element method (FEM) is selected and a series of 2-D generalized eigenvalue problems are solved, whereas vertical analytic is adopted

along Z axis, and borehole, invasion zone and formation is sliced into some layers artificially, which are contracted by Boundary Transition Matrices. In given formation models, the results of 3-D NMM agree well with previous ones of 2-D NMM and FEM in symmetry conditions. Furthermore, the algorithm is also applied into deviated formation and elliptical borehole, some examples illustrate how all kinds of deviated degrees and elliptical borehole affect logging response results. In a word, this 3-D NMM proved ingenious and efficient for normal resistivity log.

■ In charter 5, 3-D NMM theory of dual laterolog is induced and presented in detail, which is different from normal rsistivity log because of diameter and configuration of the sonde, and is more complicated. A new approach to guarantee the equipotential condition on the surface of bulky electrode is adopted. At the same time, meshing and node coding of FEM are complicated in these layers in XOY plane, a new method is devised to cope with the problem. In a model with two layers and no borehole, the results have an excellent agreement with those of 3-D FEM.

Key words: in Nonsymmetric Conditions, 3-D Numerical Mode-Matching (NMM) Method, Meshing, Generalized Eigenvalue Problem, Boundary Transition Matrices

非轴对称条件下
用模式匹配法计算电阻率测井响应

创新点摘要

在深入研究模式匹配法的基本原理基础之上，论文对轴对称条件下电测井的模式匹配解法进行了改进，并重点研究了非轴对称条件下的电阻率测井模式匹配解法。主要创新点如下：

1. 根据电磁场在层界面的连续性条件，对模式匹配法中的反射阵和透射阵理论进行了改进，提出了界面转换阵理论。以感应测井为例，应用电位和磁感应强度在界面的连续条件推导出了上行波和下行波的递推关系，从而摈弃了传统上采用的反射阵和透射阵理论。数值模拟结果表明，这一方法不仅达到了原来的精度，计算效率也有明显的提高。(第 2 章)

2. 针对普通电阻率测井，利用层界面电位和电流强度的连续条件推导出了界面转换阵。而且，根据互易定理定理，用 B-A-M 电极系代替 A-M-N 电极系，由于只需计算一个测量电极 M 的电位，所以其计算速度也提高了近一倍。 (第 3 章)

3. 针对非轴对称条件下的地层模型，设置了巧妙的坐标系，系统研究了非轴对称条件下普通电阻率测井的模式匹配理论。用此方法在各种轴对称条件下的计算结果与文献的结果具有很好的一致性，证明了此方法的可靠性。此外，还完成了普通电阻率测井在斜井地层模型下数值模拟，系统考察了井斜角、地层厚度对视电阻率的影响，同时这一方法还适用于椭圆井眼和仪器偏心等非轴对称条件。目前这一方法国内外还没有人研究。(第 4 章)

4. 深入研究了非轴对称条件下，双侧向测井的模式匹配算法理论。与普通电阻率不同，针对双侧向电极棒尺寸不能忽略及其复杂性，在 Z 方向上对电极棒划分了适当的层，并应用电极处的等位面条件和电位和电流密度在界面的连续性条件详细推导出了上行波和下行波的递推关系。同时，由于电极棒的存在，网格划分与单元编号也是一个难题，为此找到了不同于普通电阻率测井的单元编号、总体编号和总体矩阵的科学安装方法。(第 5 章)

第1章 引 言

1.1 选题依据

在地球物理探测中，电法测井是沿井眼剖面连续测量地层电性参数的一类重要测井方法。要准确求得目的层电阻率必须对电磁场与地下非均匀媒质相互作用的物理过程作深入地研究，电法测井的数值模拟研究显得格外重要。

电阻率测井响应的计算最终可归结求电磁场的定解问题—通过求解拉普拉斯方程或泊松方程，但是利用解析的方法只有在极少数条件下，即介质电阻率只沿轴向或只沿径向阶跃变化时才有可能。在径向和轴向都不均匀的介质中只能用数值解法求解。为了求解的方便，通常假设井轴垂直与地层层面，即具有相对于井轴的旋转对称性[1]-[3]。在地层相对于井眼为轴对称条件下，地层变为二维的不均匀介质。在对二维情况(包括井眼、侵入)进行分析时，目前使用的比较多的数值解法有：有限差分法(FDM)、有限元法(FEM)、积分方程法(IEM)和模式匹配法(NMM)[1]-[7]等。

但对于斜井或水平井等非轴对称条件下，电阻率测井响应不能简化为二维子午面的问题，而只能是三维空间问题。目前较成熟的解决方法是三维有限元法[1] [2][8]和三维有限差分法[1][2][9]。这两个方法在解决非轴对称模型的电测井定解问题和边界条件时具有明显的优势，但是由于测井的边界条件复杂，求解的未知量太多，计算速度太慢满足不了现场实际应用的需求。

电磁场数值计算方法性能各异，对实际具体问题，若用单一方法求解，往往虽然能解，但是绝非最佳，不是精度不高就是效率较低。若能针对问题的特征，集各法之长，往往能构思出精效兼备的求解方案[7]。数值模式匹配法(Numerical Mode-Matching, NMM)就是这样一种方法，该方法把二维数值问题转化为一维解析解和一维数值解的结合，既保证了精度又提高了效率。

鉴于此，开展适合非轴对称条件下三维场域电测井响应的计算方法研究是很有意义的，也是非常必要的。

1.2 电测井响应的计算方法

电磁场数值计算方法的基本特点是把求解整个场域中连续空间位置上的场转化为求解各离散空间位置上的场。在电测井响应的各种数值计算方法中，有限差分法、有限元法和模式匹配法是基于微分方程的数值方法，积分方程方法是基于积分方程的数值方法。目前使用的比较多的是基于微分方程的数值方法[6]。

1.2.1 有限差分法(FDM)[6][11]

有限差分法作为一种有效的数值算法，很早就开始应用在电磁场的数值计算中。有限差分法是以差分原理为基础的一种数值计算方法，采用一定的网格划分格式离散化场域，把实际连续的场离散为有限多个点，用这些离散点上的参数近似描述实际上的连续的场，也就是所谓场的“离散”。基于差分原理的应用，对场域内偏微分方程以及场域边界上的边界条件(包括场域内不同媒质分界面上的边界条件)进行差分离散化处理，即用差商代替偏导数，给出相应的差分计算格式，并获得具有足够精度的解。

利用有限差分法对电阻率测井响应进行模拟计算，实质就是把位场连续域内的问题转化为离散系统的问题，用离散区域各参数点的电位值来逼近连续场域内的真实电位值。具体地说，首先采用一定的网格将连续域划分成离散的形式，利用上述的差分和差商定义，用各离散点上函数的差商来近似该点的偏导数，得到偏微分方程的差分形式，从而把需求解的边值问题转化为一组相应的差分方程问题。最后，利用合适的代数方程组解法求解这个方程组，得到的各离散点上的电位值就是要求的位场的近似值。

自上世纪五十年代以来，有限差分法在地球物理领域得到广泛的应用。在电阻率正演模拟方面，利用有限差分法，Mufti(1976、1980)等人分别模拟了电位和梯度电极系的测井响应，并进行了电阻率反演计算，取得了良好的效果。1966 年，美籍华人 K.S. Yee 提出了时域有限差分法的基本原理[12]。

20 世纪 80 年代后期以来，它备受专家学者青睐，被称为重要的电磁场数值计算方法之一，也被引入非均匀介质电测井场的计算。时域有限差分法以差分原理为基础，直接从概括电磁场普遍规律的 Maxswell 旋度方程出发，将其转换为差分方程组，在一定体积内和一段时间上对连续电磁场的数据取样。它是对电磁场问题的最原始、最本质、最完备的数值模拟，由它所得的结果应该是“完备”的矢量场，由此算出的三维电磁场也应该是“精确”的。因此，目前对于三维介质中的电磁场计算，较为成功的是基于交错网格的有限差分。通常情况下，差分网格为正方形网格。然而，这种正方形网格在处理复杂边界条件时，则显得有些不太灵活，而且差分原理引入的近似也显得比较粗糙。因此，在电法测井正演计算领域内，特别是当地层比较复杂时，利用有限差分法就可能会带来较大的误差，而有限元素法的精度就要高得多。

1.2.2 有限元法(FEM)[11]

有限元法在原理上是有限差分法和变分法中里兹(Rize)法的结合。在早期，有限元法以变分原理为基础，它广泛应用于拉普拉斯方程和泊松方程所描述的各类物理场中，这是由于这类场与泛函的极值问题有着紧密的联系。后来证明，应用加权余量法中的迦辽金法(Gerlikin)或最小二乘法等同样可得到有限元方程，因而有限元法可应用于任何微分方程所描述的各类物理场中，也适合于时变场、非线性场以及分层介质中的电磁场问题的求解。

有限元素法是较早引入电法测井响应正演计算的方法之一。B.Anderson 等人(1982)用之模拟计算了感应测井的响应，R.Chemali 和 S.Gianzero[13](1983)用它研究了双侧向测井的围岩和井眼影响。在国内，李大潜[3](1980)、张庚骥[2](1984)等人自八十年代初期就开始把该方法应用直流电和交流电测井响应的求解过程中，并得到了良好的数值效果。

有限元素法求解电法测井响应的过程如下：首先，将边值问题化为某一泛函的极值问题，然后将求解区域剖分成有限个小单元，称之为元素，在每个元素上建立插值函数，再将插值函数代回泛函中，令泛函取极值，就得到待求节点的电位的线性代数方程组，最后对该方程组求解，得到的各节点的

电位值的就是位场的近似值。由于在有限元素法的求解过程中，元素的划分及插值函数的选取都很灵活，因此可以满足不同的模型及不同边界条件的要求，从而得到期望的精度值。

有限元方法在电测井响应理论研究中占有极为重要的地位，特别在轴对称条件下，利用有限元方法可以较好进行电测井响应数值模拟。Chang(1984)较早利用 FEM 解决二维问题的数值计算，在形成电导阵和电流阵时使用的是数值积分，因此，计算速度很慢。20 世纪 80 年代，国内张庚骥、汪涵明、肖加奇等利用有限元方法并结合改进的前线解法进行感应[14]、侧向测井响应[15]的研究，特别是利用三维有限元方法成功计算了裂缝的双侧向响应[16][17]。然而，利用单纯的有限元方法在解决三维电测井响应时由于三维节点的增大造成了三维有限元计算速度减慢，不连续界面难以处理以及可能也会出现非物理赝解等原因，难以达到现场实时处理的要求。

有限元素法的特点[10][11]。一方面，求解过程复杂，包含的数理概念多，计算时间长；另一方面，有较强的灵活性，数值精度高，适用于具有复杂边界或边界条件、含有复杂媒质的定解问题，此法不受场域边界形状的限制，不同媒质交界面条件不必作单独处理，而且第二类、第三类边界条件自动满足。由于其结果的精度较高，因此常常被做为评价其它数值方法的精度的参照值。

有限差分法和有限元法[11]的比较：第一是两种方法都进行网格划分，但有限元法网格划分更灵活，因而有较强的适应性，并能更好的保证精度。第二是两种方法都通过离散化求解偏微分方程的近似数值解，但两者原理有所不同，差分法直接由场的方程离散为代数方程组，而代数方程组中系数简单；有限元法要利用变分原理把满足事实上边值条件的电磁问题等价为泛函极值问题。因此，有限差分法是一种数学上的近似，而有限元法是一种结构的近似。

当利用上述两种方法计算测井响应时，为了得到较精确的解，在求解区域中往往要划分出足够多的节点，而节点的增加势必会增加解题的难度，积分方程法在一定程度上解决了这个问题。

1.2.3 积分方程法(IEM)

在地球物理勘探中，所遇到的介质常常是分区均匀的，在这种情况下正演模拟所涉及的未知量只分布在不同介质的边界面上。这为利用边界积分方程求解正演问题提供了可能。三维问题的边界是个二维的面，二维问题的边界是一个一维的线。这样，利用边界积分方程就可以降低问题的维数，减少了未知数的个数。

边界积分方程法的基本原理是利用格林函数将偏微分方程的边值问题转化为积分方程，然后再对积分方程进行求解。将该方法应用到求解直流电测井响应中，其具体过程为首先在各层内定义一个格林函数，然后利用各个边界上电位的连续条件，把原椭圆方程的边值问题转化为边界积分方程的形式，求解这个积分方程就可以得到测井响应。

刘福平，李善军，张庚骥[18](1997)对电测井积分方程中的各积分项进行了理论推导，利用任意闭合曲面对曲面外一点所张立体角为零的特点将电势积分项由对柱体侧面的积分转化为对柱体底面的积分，从而使在纵向采用线性插值条件下给出了电势积分项的解析解.对电流积分项进行了化简，使之由曲面积分化为一维数值积分，并利用所得结果计算了双侧向测井仪的井眼校正曲线。张庚骥[19] (2001)提出一种适用于交流电测井响应计算的积分方程，它的数据点只分布在不同介质的分界面上，数据量大大降低，有利于进行数值计算。

1.2.4 模式匹配法(NMM)

数值模式匹配法是一种半解析、半有限元的混合解法，又称混合法。该方法利用分离变量法将定解问题转化为两个偏微分方程，选择没有解析解的一个采用数值分析的方法，另一个用解析的方法；在数值分析时要构造和求解广义特征值问题，在解析部分要推导反射阵和透射阵理论，最后求得地层的电阻率测井响应。由于该方法能够对数值分析实现降维，因而大大减少了计算量，提高了运算速度。本文将详细讨论这个方法。

1.3 国内外研究现状

1.3.1 非轴对称条件下电阻率测井响应研究进展

非轴对称条件下，电阻率测井响应不能简化为二维子午面，而只能是三维空间。目前较成熟的解决方法是三维有限元法。R. Chemali 和 S. Gianzero 等[19](1988)用该方法研究过倾斜高阻地层以及井壁垮塌对侧向测井响应的影响。国内，汪涵明、张庚骥[8] (1994)用该方法研究了倾斜地层的双侧向测井响应，给出了不同地层模型下倾角对电阻率的影响特征；汪涵明、李善军、张庚骥[16][17][18](1996)也用该方法研究了裂缝地层的侧向测井响应；同样，谭永基、于永[20](1997)用该方法研究了水平井和大斜度井双侧向测井数值模拟，并采用自适应三维有限元进行剖分；高杰等[21](2000)用该方法研究了大斜度井，考虑井眼、侵入带、围岩和井斜以及多层情况下的测井响应，并提出了双侧向测井的快速反褶积处理方法。可以看出，这个方法在解决非轴对称模型的电测井定解问题和边界条件时具有明显的优势，但是由于测井的边界条件复杂，求解的未知量太多，计算速度太慢满足不了现场实际应用的需求。

除了有限元法以外，也有人用有限差分法对非轴对称条件下电测井响应进行了探索。Aria Abubakar 和 Peter M. B [22](2000)利用有限差分方法对倾斜地层电极型电阻率测井响应进行了研究，并采用倾斜坐标进行网格划分以减小台阶近似带来的误差，但没有考虑井眼和侧向电极尺寸的影响。而且，肖加奇、张庚骥[14](1995)等通过研究有耗层状介质中任意方向磁偶极子电磁波的辐射与传播，应用 TE 和 TM 分解技术求解倾斜井眼中感应测井响应特征。

1.3.2 电阻率测井中的模式匹配法研究进展

1982 年，Pudensi 等人[23]在研究电磁散射时，把波模的概念与有限元结合起来，提出了一种半解析、半有限元的混合解法，这就是“数值模式匹配法”，又称混合法。该方法把二维数值问题转化为一维解析解和一维数值解的结合，大大减少了计算量，提高了运算速度。这就是模式匹配法的思想。

80 年代中期，W.C.Chew 等[24](1984)用数值模式匹配理论分析了非均匀介质的电磁散射，和 Z. Nie [25](聂在平)(1992)又把该方法成功地应用到交流电测井中，它们将电磁波在地层中地传播过程比作电磁波在不连续介质波导中的反射与透射。Laung Tsang 等人[30](1988)把该方法应用到普通电阻率测井响应的计算中，其效率是有限元的数倍，但只考虑了含一个水平分界面的情形，给出了狭义反射矩阵和狭义透射矩阵的表达式。

Guo-Xin Fan 等[31](2002)用三维NMM主要研究了椭圆井眼和非旋转对称的侵入条件下非均匀介质的电阻率测井响应，采取地层平面上用有限元一轴向上用解析解的模式匹配方法，完成了单一水平裂缝和垂直裂缝的普通电阻率测井的数值模拟，但是没有涉及到倾斜地层。

国内，张庚骥、金勇[32](1988)最早用 NMM 法研究了复杂地层中电磁波测井的响应，所采用的基函数是 Hermit-Gauss 基函数并开发了相应的软件；张庚骥等对 NMM 法进行了改进：用有限元法进行径向的数值分析时采用改进的基函数—幅度基函数和斜度基函数，并得出了反射矩阵和透射矩阵的递推公式，并用此方法先后研究了纵向成层、径向不均匀的地层模型中交流电测井[33](1995)、普通电阻率测井[34](1995)和双侧向测井的数值模拟，其结果不仅达到了有限元方法的精度而且大大加快了运算速度。汪功礼[35](1996)还重点研究了数值模式匹配法中广义特征值问题 A、B 阵元素的递推算法。

聂在平、陈思渊等[36][37](1992)利用 NMM 法和由“δ 环电极”激励的位场格林函数，研究了轴对称条件下非均匀介质的直流电响应特征。

汪宏年等(1998)应用模式匹配算法对水平层状各向异性介质中普通电阻率测井[38]、侧向和微球型聚焦测井[39][40]的响应进行了大量的研究工作，并探索了薄互层的响应与各向异性介质响应的等价性问题，给出了利用侧向和微球型聚焦测井的差异识别和划分各向异性地层的方法。此外，还应用模式匹配算法对非轴对称、无井眼地层模型进行了可贵的探索(由于忽略井眼的影响，地层仍然具有旋转对称性，故在研究中采用的是柱坐标系)，并用 0.5 米电位电极系针对不同的地层模型做了大量的正演计算，系统地考察了井斜角(地层倾角)、地层厚度以及地层的各向异性等对普通电阻率测井的影响。

赵延文[41](1998)在用变形玻恩(Born)迭代法对轴对称二维非均匀介质中

双侧向测井仪的位场数据进行反演时采用了高效数值模式匹配法，它半解析地求出反演中的格林(Green)函数及其偏导数，同时推导出了位场非线性积分方程中积分运算的半解析形式，大大提高了计算效率和反演质量。

陈丽虹、李舟波[42](1999)利用模式匹配法研究了侵入带的三种模式——台阶型、斜坡型、具有低阻环带的侵入带对电位电极系视电阻率的影响，为提高测井解释精度和多电极系电阻率测井方法研究奠定了基础。陈丽虹[43](2000)还利用此法实现了直流电近井眼电阻率成像测井的快速正演模拟，计算了典型地层模型的视电阻率，推导出了具有明确物理意义的反射矩阵和透射矩阵。

沈金松[44](2002)利用垂直数值模式匹配方法研究了轴对称介质模型的电磁测井响应，将电场表示为轴向上的垂直特征模式与径向解析函数的乘积，垂直特征模式用一维有限元方法，并计算了电阻率差较小的水淹层和低电阻率储层的高频电磁测井响应，得到了有意义的结果。

此外，宋维琪、张庚骥等[45](1996)还将NMM应用于电法勘探地电模型的计算中，在纵向上用有限元，在径向上用贝塞尔方程，计算了水平层状介质的电磁场，其计算精度比快速汉克尔变换法大大提高。

1.4 课题研究内容

此项研究在深入理解各种电法测井工作原理和电磁场数值计算的基础之上，旨在用模式匹配法研究非轴对称条件下的电阻率测井的数值模拟，把三维条件下的电测井数值问题转化为二维有限元分析和一维解析方法的结合，并针对高阻薄层、低阻薄层、高阻厚层、低阻厚层、不同侵入等地层模型，研究电阻率在不同倾角下的响应特征。

具体内容包括：

(1) 深入研究电测井中有限元数值计算方法以及模式匹配方法的原理、应用成果和研究程度；总结出用模式匹配方法进行电测井数值模拟的一般思路，画出其数据流程图。

(2) 选择合适的坐标系，建立地层物理模型，并依据电测井理论写出了正

确的偏微分方程及其相应的边界条件。在选定坐标系的XOY平面内采取数值的方法，推导出平面上的偏微分方程及其相应的等价变分问题。

(3) 先选定三角形元素进行单元分析，构造出所需的形函数，进而推导出单元矩阵$\mathbf{A}^{(e)}$、$\mathbf{B}^{(e)}$的表达式，为总体分析准备条件。

(4) 利用FORTRAN语言编写网格划分程序，既要考虑纵向上地层界面、电极和绝缘层的分界面，又要考虑径向上井壁处和侵入带与原状地层的分界面。探索一个全平面网格划分、节点编号、总体矩阵安装的科学方法，并考虑自然边界条件，最后形成总体矩阵的正确安装。

(5) 编写适合大型稀疏矩阵的广义特征值问题的程序，并利用MATLAB数学工具验证其正确性。

(6) 以《成层介质中的交流电响应》、《普通电阻率的模式匹配法》、《Computation of dual laterolog response with hybrid method》等文献为根本，深入研究轴对称条件下模式匹配问题解析部分，完成非轴对称条件下解析部分的理论和公式推导，形成清晰的思路流程，并编程计算。

(7) 针对轴对称条件下的均匀介质、两层介质、多层介质，分别对无井眼、有井眼、无侵入、有侵入等多种地层模型进行计算实验，并将结果与前人的研究成果进行比较，验证其正确性。然后，假设不同的井斜角(或地层倾角)和不同的厚度，计算电阻率的响应特征，分析其规律。

(8) 针对地层的各项异性这一非轴对称条件进行计算，探索这一方法对这一非轴对称条件的应用效果和适用性。

1.5 拟采取的技术路线

充分利用查阅的大量国内外文献,紧密跟踪国内外电测井数值模拟技术的前沿，对现有轴对称条件NMM方法深挖细琢并反复类比和实验，总结出模式匹配法的一般思路。采取理论分析和数值实验相结合的方法，选择地层模

型时，采取先简单后复杂，先轴对称后非轴对称的研究思路，并与前人的研究成果进行比较，检验方法的正确性，并分析其优劣。

国内外已经有学者用高速数值模式匹配算法研究了轴对称条件下的电阻率测井响应，获得了较好的成果，这种方法也为非轴对称条件下电阻率测井响应研究提供了一个较好的思路：把三维有限元数值问题转化为二维有限元数值解法和一维解析方法的结合。有理由相信，用这种方法必然能够解决非轴对称条件下电测井响应快速计算的难题。

第 2 章　轴对称条件下模式匹配法及其界面转换理论

NMM 理论的基本思想是在一维(例如径向)形成数值本征模式解，而在另一维(例如纵向)应用广义反射矩阵和透射矩阵描述各模式在界面上的相互藕合，用解析递推方法计算各平面分层中的场强。因此，它可灵活应用于纵向有任意多层平面分层而每层又具有任意多径向柱面分层的非均匀介质中的场分析。

按照激励源的不同，电法测井可以分为两大类，一类是以似稳恒电流为激励源，称为直流电测井，如侧向测井、微球聚焦测井和普通电阻率测井，另一类是以一定频率的交流电作为激励源，称为交流电测井，如感应测井、电磁波测井等。模式匹配解法首先被引入交流电测井的数值模拟[24][25][32][33]，它将二维数值解简化为一维数值解和另一维的解析递推，从而大大提高了计算效率(一般情况下形成数十个测试点的地电剖面曲线，计算时间仅为有限元法的百分之一)[48]。

2.1 感应测井的模式匹配法

2.1.1 地层模型和定解问题

采用如图 2-1 所示的地层模型。假设有M个水平分界面，将空间分成 M+1 个层。它们的坐标是：$Z_1 < Z_2 \cdots Z_{m-1} < Z_m \cdots Z_{M-1} < Z_M$，边界面$Z_{m-1}$和$Z_m$之间的层称为第$m$层，每个层都是径向不均匀的，由井、冲洗带、侵入带和原状地层组成。采用柱坐标系(r,φ,z)，发射线圈位于层面z上，用子午面上的一个点(a,z)代表，a是它的半径。这样，发射线圈产生一个轴对称场，电场强度 E 只有φ分量而且大小不随φ变化。不考虑ε随z的变化，在第m层内，E_m满足以下方程[32][33]：

$$\left[\mu_m r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu_m r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_m^2\right](rE_m)=-i\omega u_m Ir\delta(r-r')\delta(z-z') \quad (2\text{-}1)$$

式中，k_m是波数，$k_m=\omega^2\mu_m(r)\left[\varepsilon_m(r)-\frac{i\sigma_m(r)}{\omega}\right]$。这里$\omega$是角频率，$\mu_m(r)$是磁导率，$\varepsilon_m(r)$、$\sigma_m(r)$分别是第$m$层的介电常数和电导率，它们都是径向坐标$r$的函数。

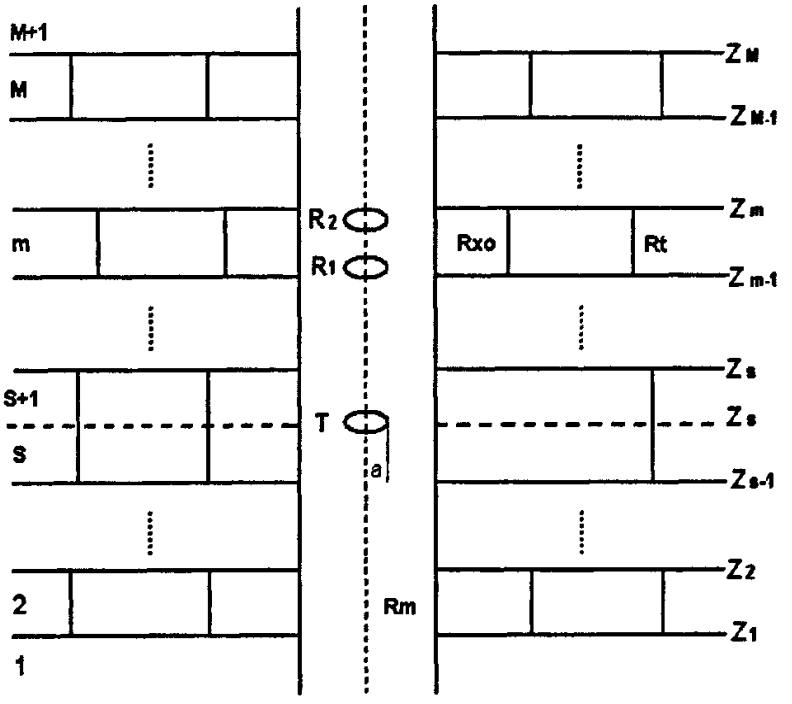


图 2-1　轴对称多层非均匀介质模型

在无源区域内，并且考虑沉积岩中μ_m为常数[33]，式(2-1)变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r}k_m^2\right](rE_m)=0 \tag{2-2}$$

其边界条件为

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{drE_m}{dr}=0\\&\lim_{r\to\infty}rE_m=0\\&\lim_{r\to\infty}E_m=0\end{aligned} \tag{2-3}$$

2.1.2 模式匹配法基本原理

利用分离变量法，令$rE_m(r,z)=f_m(r)u_m(z)$，将其代入上式，得：

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_m}{\partial r}\right)}{f_m}+\frac{1}{r}\frac{\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}}{u_m}+\frac{1}{r}k_m^2=0$$

将上式分离为下列两个方程

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}=\lambda_m^2 u_m \tag{2-4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_m}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}(k_m^2-\lambda_m^2)f_m=0 \tag{2-5}$$

式中，λ_m^2称为本征值；f_m为相应的本征函数。这样经过分离变量后，方程(2-2)就变成了方程(2-4)和(2-5)，边界条件同时转化为：

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{df_m}{dr}=0\\&\lim_{r\to\infty}f_m(r)=0\\&\lim_{r\to\infty}u_m(r)=0\end{aligned} \tag{2-6}$$

对方程(2-4)拟采用有限元素法求得数值解。令$\mathbf{g}_m=(g_{m1},g_{m2},\cdots,g_{mN})^T$为径向上的一组完备的基函数，那么特征函数$\mathbf{f}_m(r)$可以近似地表示成

$$[\mathbf{f}_m(r)]^T=\mathbf{g}_m^T\mathbf{C}_m$$

经化简，方程(2-4)等价于如下矩阵形式的本征值方程：

$$\mathbf{A}_m\mathbf{C}_m=\mathbf{B}_m\mathbf{C}_m\mathbf{A}_m^2 \tag{2-7}$$

其中，$\mathbf{A}_m=\int_0^\infty\frac{1}{r}\mathbf{g}'\mathbf{g}'^T dr-\int_0^\infty\frac{k_m^2}{r}\mathbf{g}\mathbf{g}^T dr$，$\mathbf{B}_m=\int_0^\infty\frac{1}{r}\mathbf{g}\mathbf{g}^T dr$；$\mathbf{C}_m$是由$N$个本征向量$\mathbf{c}_i$组成的特征全矩阵，$\mathbf{A}_m^2=diag(\lambda_{m1}^2,\lambda_{m2}^2\cdots,\lambda_{mN}^2)$。可以证明：

$$\mathbf{C}_m^T\mathbf{B}_m\mathbf{C}_m=\mathbf{I} \tag{2-8}$$

式(2-8)是一个广义特征值问题，通过求解广义特征值问题，可以得到各层的本征值和本征向量。广义特征值问题的算法详见附录 1。

考虑边界条件(2-6)，方程(2-4)的解可以表示成：

$$\mathbf{u}_m(z)=\mathbf{u}_m^+(z)+\mathbf{u}_m^-(z)=e^{-\mathbf{K}_m(z-z')}\mathbf{u}_m^+(z')+e^{\mathbf{K}_m(z-z')}\mathbf{u}_m^-(z') \qquad (2\text{-}9)$$

其中，$\mathbf{u}_m^+(z)$和$\mathbf{u}_m^-(z)$分别为上行波、下行波，$\mathbf{u}_m^+(z')$和$\mathbf{u}_m^-(z')$分别为上行波、下行波在源点z'处的初始值。

因此，由式(2-5)和(2-9)，方程(2-2)的解可以写成：

$$rE_m(r,z)=\mathbf{g}_m^T(r)\mathbf{C}_m[\mathbf{u}_m^+(z)+\mathbf{u}_m^-(z)] \qquad (2\text{-}10)$$

2.1.3 数值分析—网格划分与基函数

网格划分。从线圈半径处为径向上的第一点，然后采用等比递增的方法直到无穷远处。设无穷远处的距离为 100 米。等比系数的选择非常关键，其数值影响着广义特征值的大小。

基函数的选择对于数值模拟的精度和速度起着至关重要的作用[5][6][33]。1995 年，张庚骥等[33]利用模式匹配法研究了纵向成层、径向不均匀介质中轴对称条件下交流电的测井响应时，在基函数的选择上，以原来 Hermit-Gauss 函数为基础，引进了斜度基函数，分别“支撑”起结点上函数的幅度和斜度。

在全部基函数$(g_{m1},g_{m2},\cdots,g_{mN})$中，下标为奇数的是幅度基函数，下标为偶数的是斜度基函数。设r轴上有结点$r_0(=0),r_1,r_2,\cdots,r_n$ (r_n=100)。以结点$r_j(j\neq 0)$为支撑点的基函数分布在区间$[r_{j-1},r_{j+1}]$内，幅度基函数g_{2j-1}，和斜度基函数g_{2j}满足如下条件:

$$\begin{aligned} &g_{2j-k}(r_j)=k,\ \frac{dg_{2j-k}(r)}{dr}\Big|_{r=r_j}=1-k;\\ &g_{2j-k}(r_{j\pm1})=k,\ \frac{dg_{2j-k}(r)}{dr}\Big|_{r=r_{j\pm1}}=1-k \end{aligned} \qquad (2\text{-}11)$$

式中，$k=0,1$

设径向上的某一单元$[r_{j+k-1},r_{j+k}]$内，有给定的函数值和导数值(图 2-2)，则其插值函数如下：

$$L_{j+k,0}(r)=\frac{r_{j+k}-r}{r_{j+k}-r_{j+k-1}} \qquad L_{j+k,1}(r)=\frac{r-r_{j+k-1}}{r_{j+k}-r_{j+k-1}}$$

在此单元内，幅度基函数 g_{2j-1}，和斜度基函数 g_{2j} 可以表示为：

$$\begin{aligned} g_{2j-1}(r)&=-2L^3_{j+k,1-k}+3L^2_{j+k,1-k};\ r_{j+2k-1}\le r\le r_{j+k};k=0,1 \\ g_{2j}&=(r_{j+2k-1}-r_j)L^2_{j+k,1-k}L_{j+k,k};\ ;\ r_{j+2k-1}\le r\le r_{j+k};k=0,1 \end{aligned} \tag{2-12}$$

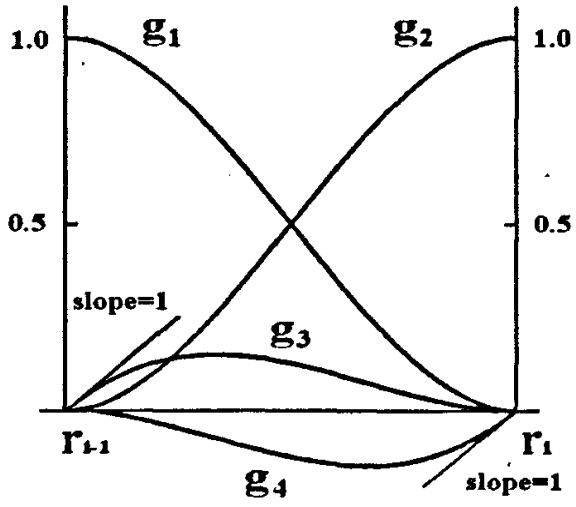


图 2-2　单元内的基函数

实践表明，幅度基函数和斜度基函数是一类比较好的基函数。因此用 6 个幅度基函数和 6 个斜度基函数的基函数就达到了 FEM 的精度，而且速度很快。

2.1.4 解析递推—反射矩阵和透射矩阵理论

对于具有任意多个水平界面的二维地层模型，除了最上层及最下层之外，中间每一层都有上行模式和下行模式，而且每个模式在界面上都要发生透射和反射。这样，任意一层的电场中包含有来自其它各层的反射电场和透射电场。根据层界面的边界条件：电位和电位移连续，确定内部任意一层的位场的相互关系，得到关于反射矩阵和透射矩阵递推公式。

对于 m>s 的各层，上行波 $\mathbf{u}_m^+$ 是入射波，下行波 $\mathbf{u}_m^-$ 是反射波；而对于 m≤s 的各层，上行波和下行波的角色互换(图 2-3)。

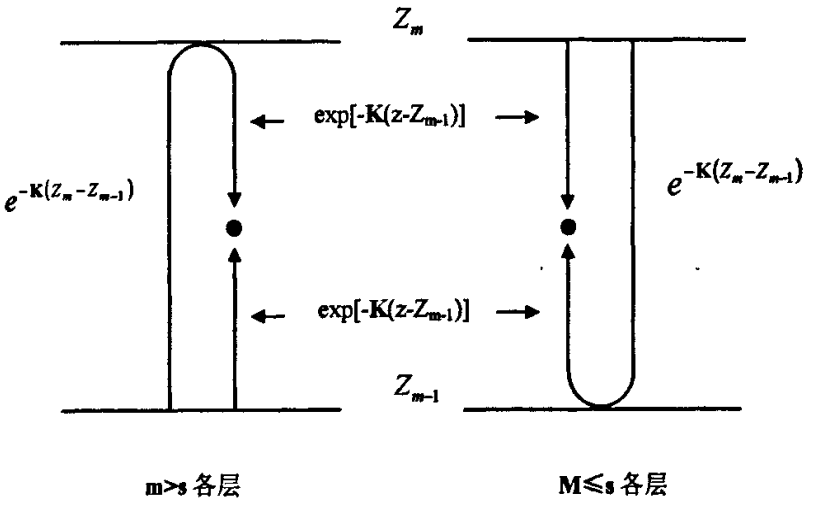


图 2-3　上行波下行波的传播示意图

因此，式(2-2)成为

$$\mathbf{r}E_m(r,z)=\mathbf{g}^T\mathbf{C}_m\left[\mathbf{I}+\mathbf{Q}_m^{\pm}(\mathbf{z})\right]\mathbf{u}_m^{\pm}(\mathbf{z}) \tag{2-13}$$

式中，$\mathbf{Q}_m^+$ 和 $\mathbf{Q}_m^-$ 分别是对上行波和下行波的广义反射阵，它们分别代表 n≥m>s 或 n<m≤s 的所有层面 Z_n 的反射。

$$\mathbf{u}_m^{\pm}(x)=\mathbf{Q}_m^{\pm}(z)\mathbf{u}_m^{\pm}(z) \tag{2-14}$$

公式(2-14)中，正号适用于 m>s，负号适用于 m≤s。根据公式(2-13)，反射阵的传播公式是

$$\mathbf{Q}_m^{\pm}(z)=e^{\pm\Lambda_m(z-z')}\mathbf{Q}_m^{\pm}(z')e^{\pm\Lambda_m(z-z')} \tag{2-15}$$

用下标 $(m)+$ 和 $(m)-$ 分别代表 m 层内的物理量在该层顶面和底面的取值。在层面 $Z_{(m)+}(m>s)$ 或 $Z_{(m)-}(m\le s)$ 的边界条件是

$$\mathbf{g}^T\mathbf{C}_m(\mathbf{I}+\mathbf{Q}_{(m)\pm}^{\pm})\mathbf{u}_{(m)\pm}^{\pm}=\mathbf{g}^T\mathbf{C}_{m\pm1}(\mathbf{I}+\mathbf{Q}_{(m\pm1)\mp}^{\pm})\mathbf{u}_{(m+1)\mp}^{\pm} \tag{2-16a}$$

$$\mathbf{g}^T\mathbf{C}_m\mathbf{\Lambda}_m(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_{(m)\pm}^{\pm})\mathbf{u}_{(m)\pm}^{\pm}=\mathbf{g}^T\mathbf{C}_{m\pm1}\mathbf{\Lambda}_{m\pm1}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_{(m+1)\mp}^{\pm})\mathbf{u}_{(m+1)\mp}^{\pm} \tag{2-16b}$$

根据公式(2-13)和(2-10)可见

$$\mathbf{Q}^{\pm}_{(m)\mp} = e^{-\Lambda_m h_m}\mathbf{Q}^{\pm}_{(m)\pm}e^{-\Lambda_m h_m} \tag{2-17a}$$

$$\mathbf{u}^{\pm}_{(m)\mp} = e^{-\Lambda_m h_m}\mathbf{u}^{\pm}_{(m)\mp} \tag{2-17b}$$

式中，h_m是 m 层厚度：$h_m = Z_m - Z_{m-1}$。由于$e^{-\Lambda_m h_m}$代表传播，从式(2-16a)可以看出，$\mathbf{Q}^{\pm}_{(m)\mp}$代表传播—反射—传播过程。

将(2-16a，b)两式左乘$\frac{1}{r}\mathbf{C}_m^T\mathbf{g}$并对 r 从 0 到∞积分，根据正交归一关系(2-8)得到

$$(\mathbf{I}+\mathbf{Q}^{\pm}_{(m)\pm})\mathbf{u}^{\pm}_{(m)\pm} = \mathbf{P}_{m,m\pm1}(\mathbf{I}+\mathbf{Q}^{\pm}_{(m\pm1)\mp})\mathbf{u}^{\pm}_{(m\pm1)\mp} \tag{2-18a}$$

$$\mathbf{\Lambda}_m(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{\pm}_{(m)\pm})\mathbf{u}^{\pm}_{(m)\pm} = \mathbf{P}_{m,m\pm1}\mathbf{\Lambda}_{m\pm1}(\mathbf{I}+\mathbf{Q}^{\pm}_{(m\pm1)\mp})\mathbf{u}^{\pm}_{(m\pm1)\mp} \tag{2-18b}$$

式中，$\mathbf{P}_{m,m+1} = \mathbf{C}_m^T\mathbf{B}\mathbf{C}_{m\pm1}$。根据正交归一关系(2-8)，容易看出

$$\mathbf{P}_{m,m+1} = \mathbf{P}^{-1}_{m\pm1,m} = \mathbf{P}^T_{m\pm1,m}$$

由式(2-18a,b)可以推导出如下的递推公式

$$\mathbf{Q}^{\pm}_{(m)\pm} = \mathbf{R}_{m,m+1} + \mathbf{T}_{m\pm1,m}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{\pm}_{(m+1)\mp}\mathbf{R}_{m\pm1,m})^{-1}\mathbf{Q}^{\pm}_{(m\pm1)\mp}\mathbf{T}_{m,m+1} \tag{2-19}$$

$$\mathbf{u}^{\pm}_{(m\pm1)\mp} = \mathbf{S}_{(m)\pm}\mathbf{u}^{\pm}_{(m)\mp} \tag{2-20}$$

$$\mathbf{u}^{\pm}_{(m\pm1)\mp} = \mathbf{S}_{(m)\pm}\mathbf{u}^{\pm}_{(m)\pm} \tag{2-21}$$

式中，$\mathbf{S}_{(m)\pm}$是在层面$Z_{(m)\pm}$处向邻层的广义透射阵

$$\mathbf{S}_{(m)\pm} = (\mathbf{I}-\mathbf{R}_{m\pm1,m}\mathbf{Q}^{\pm}_{(m\pm1)\mp})^{-1}\mathbf{T}_{m,m+1} \tag{2-22}$$

公式(2-19)由文献[36]给出。在公式(2-19)和(2-21)中出现的各因子定义如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{m,m\pm1} &= (\mathbf{P}_{m\pm1,m}\mathbf{\Lambda}_m + \mathbf{\Lambda}_{m\pm1}\mathbf{P}_{m\pm1,m})^{-1}(\mathbf{P}_{m\pm1,m}\mathbf{\Lambda}_m - \mathbf{\Lambda}_{m\pm1}\mathbf{P}_{m\pm1,m}) \\ &= (\mathbf{P}_{m,m\pm1}\mathbf{\Lambda}_{m\pm1}^{-1} - \mathbf{\Lambda}_m^{-1}\mathbf{P}_{m,m\pm1})(\mathbf{P}_{m,m\pm1}\mathbf{\Lambda}_{m\pm1}^{-1} + \mathbf{\Lambda}_m^{-1}\mathbf{P}_{m,m\pm1})^{-1}\end{aligned} \tag{2-23}$$

它是 m±1 层对 m 层入射波的狭义反射阵

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{\pm}_{(m\pm1)\mp}\mathbf{R}_{m\pm1,m}\right)^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{Q}^{\pm}_{(m\pm1)\mp}\mathbf{R}_{m\pm1,m} + (\mathbf{Q}^{\pm}_{(m\pm1)\mp}\mathbf{R}_{m\pm1,m})^2 \tag{2-24}$$

可以展现多重反射和透射过程。

在层面Z_s，由于源的存在，边界条件(2-14b)不复成立，代替它的是

$$\mathbf{g}^T\mathbf{C}_S\mathbf{\Lambda}_S(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{+}_{(S+1)-})\mathbf{u}^{+}_{(s+1)-} + \mathbf{g}^T\mathbf{C}_S\mathbf{\Lambda}_S(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{-}_{(S)+})\mathbf{u}^{-}_{(s)+} = i\omega\mu r\xi(r) \tag{2-25}$$

式中，$\xi(r)$是电流在 r 方向上的分布密度。由于Z_s与真正层面相重合只是极偶然的情况，不予考虑。所以，式中左端该用$\mathbf{C}_{s+1}$和$\mathbf{\Lambda}_{s+1}$的地方一律写成$\mathbf{C}_s$和Λ_s。重复(2-16a,b)式前的步骤，得到

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{+}_{(s+1)-}\right)\mathbf{u}^{+}_{(s+1)-}+\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{-}_{(s)+}\right)\mathbf{u}^{-}_{(s)+}=2\mathbf{b}_s \tag{2-26}$$

式中，$\mathbf{b}_s=\dfrac{i\omega\mu}{2}\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\mathbf{C}_s^T\int_0^\infty\xi(r)\mathrm{g}(r)dr$

式(2-18a)变成

$$\left(\mathbf{I}+\mathbf{Q}^{+}_{(s+1)-}\right)\mathbf{u}^{+}_{(s+1)-}-\left(\mathbf{I}+\mathbf{Q}^{-}_{(s)+}\right)\mathbf{u}^{-}_{(s)+}=0 \tag{2-27}$$

(2-26)式与(2-27)式联立，可以解出$\mathbf{u}^{-}_{(s)+}$和$\mathbf{u}^{+}_{(s+1)-}$：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{-}_{(s)-}&=\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{+}_{(s+1)-}\mathbf{Q}^{-}_{(S)+}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{Q}^{+}_{(s+1)-}\right)\mathbf{b}_s\\ \mathbf{u}^{+}_{(s+1)-}&=\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{-}_{(s)+}\mathbf{Q}^{+}_{(S+1)-}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{Q}^{-}_{(s)+}\right)\mathbf{b}_s\end{aligned} \tag{2-28}$$

2.1.5 处理流程

至此，解题所用的公式已全部推出。其计算步骤是：从$\mathbf{Q}^{+}_{M+1}=0$和$\mathbf{Q}^{-}_{1}=0$出发，利用式(2-19)递推出$\mathbf{Q}^{+}_{M}$，…，$\mathbf{Q}^{+}_{s+1}$和$\mathbf{Q}^{-}_{2}$，…$\mathbf{Q}^{-}_{s}$，再利用式(2-21)求出$\mathbf{S}_{(M)+}$，…，$\mathbf{S}_{(s+1)^+}$和$\mathbf{S}_{(2)}$，…$\mathbf{S}_{(s)-}$。有了$\mathbf{Q}^{+}_{s+1}$和$\mathbf{Q}^{-}_{s}$，利用式(2-28)求出$\mathbf{u}^{-}_{(s)+}$和$\mathbf{u}^{+}_{(s+1)-}$。有了这两个入射波，利用式(2-20)推出各层的入射波$\mathbf{u}^{-}_{s-1}$，…，$\mathbf{u}^{-}_{1}$和$\mathbf{u}^{+}_{s+2}$，…$\mathbf{u}^{+}_{M+1}$。各层内的反射波利用公式(2-14)求出。

2.2 解析方法的改进—界面转换理论

2.2.1 界面转换理论

设r代表接收线圈所在的层。对于$m>r$的各层，$\mathbf{u}^{+}_{m}$和$\mathbf{u}^{-}_{m}$分别是上行波和下行波在层m底界面的数值。对于$m<r$的各层，$\mathbf{u}^{+}_{m}$和$\mathbf{u}^{-}_{m}$分别是上行波和下行波在层m项界面的数值(如图 2-4)。

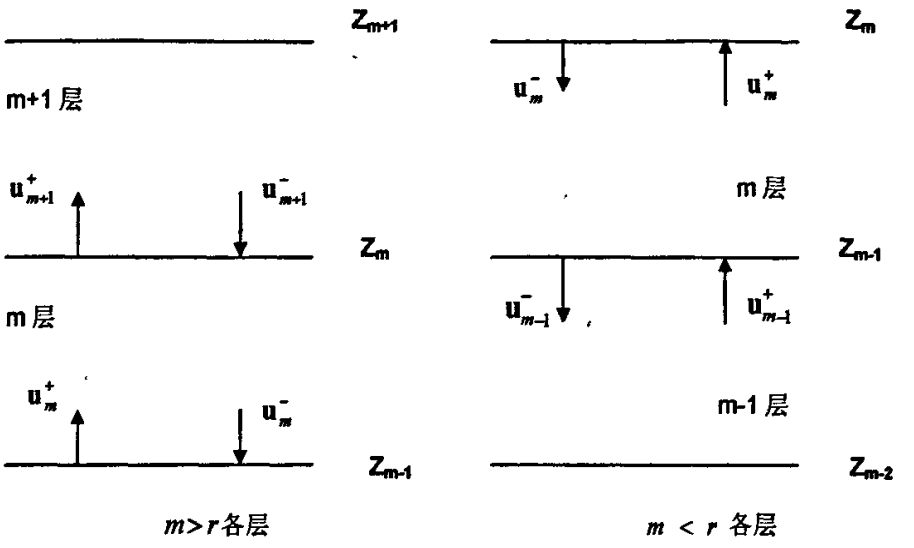


图 2-4　上行波和下行波传播示意图

对于 $m>r$ 的各层。在第 m 层中，电场强度的 φ 分量和磁感应强度的 r 分量表达式分别为

$$E_m(r,z)=\frac{\mathbf{g}_m^T\mathbf{C}_m}{r}[e^{-\Lambda_m(z-z_{m-1})}\mathbf{u}_m^+ + e^{\Lambda_m(z-z_{m-1})}\mathbf{u}_m^-] \tag{2-29}$$

$$B_m(r,z)=-\frac{\mathbf{g}_m^T\mathbf{C}_m}{i\omega r}\Lambda_m\left[e^{-\Lambda_m(z-z_{m-1})}\mathbf{u}_m^+ - e^{\Lambda_m(z-z_{m-1})}\mathbf{u}_m^-\right] \tag{2-30}$$

在第 $m+1$ 层中，电场强度的 φ 分量和磁感应强度的 r 分量表达式分别为

$$E_{m+1}(r,z)=\frac{\mathbf{g}_{m+1}^T\mathbf{C}_{m+1}}{r}[e^{-\Lambda_{m+1}(z-z_m)}\mathbf{u}_{m+1}^+ + e^{\Lambda_{m+1}(z-z_m)}\mathbf{u}_{m+1}^-] \tag{2-31}$$

$$B_{m+1}(r,z)=-\frac{\mathbf{g}_{m+1}^T\mathbf{C}_{m+1}}{i\omega r}\Lambda_{m+1}\left[e^{-\Lambda_{m+1}(z-z_m)}\mathbf{u}_{m+1}^+ - e^{\Lambda_m(z-z_m)}\mathbf{u}_{m+1}^-\right] \tag{2-32}$$

在 $z=Z_m$ 的层界面上，电场强度的 φ 分量和磁感应强度的 r 分量满足连续性条件，即

$$E_{m+1}(r,Z_m)=E_m(r,Z_m)$$

$$B_{m+1}(r,Z_m)=B_m(r,Z_m)$$

令式(2-29)等于式(2-31)，式(2-30)等于式(2-32)，然后将两式等号两边分

别左乘$\mathbf{C}_{m+1}^T\mathbf{g}_{m+1}$，并且从 0 到∞ 对$r$积分，结合正交关系式(2-8)，可以得到

$$\mathbf{u}_{m+1}^+ + \mathbf{u}_{m+1}^- = \mathbf{P}_{m+1,m}\left(e^{-\Lambda_m h_m}\mathbf{u}_m^+ + e^{\Lambda_m h_m}\mathbf{u}_m^-\right) \tag{2-33}$$

$$\mathbf{u}_{m+1}^+ - \mathbf{u}_{m+1}^- = \mathbf{\Lambda}_{m+1}^{-1}\mathbf{P}_{m+1,m}\mathbf{\Lambda}_m\left(e^{-\Lambda_m h_m}\mathbf{u}_m^+ - e^{\Lambda_m h_m}\mathbf{u}_m^-\right) \tag{2-34}$$

式中，$\mathbf{P}_{m+1,m} = \mathbf{C}_{m-1}^T\mathbf{X}_{m+1,m}\mathbf{C}_m$，$\mathbf{X}_{m+1,m} = \int_0^\infty \frac{1}{r}\mathbf{g}_{m+1}\mathbf{g}_m^T dr$。

将式(2-33)(2-34)联立，解得

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{m+1}^+\\ \mathbf{u}_{m+1}^-\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{m+1,m} + \mathbf{\Lambda}_{m+1}^{-1}\mathbf{P}_{m+1,m}\mathbf{\Lambda}_m & \mathbf{P}_{m+1,m} - \mathbf{\Lambda}_{m+1}^{-1}\mathbf{P}_{m+1,m}\mathbf{\Lambda}_m\\ \mathbf{P}_{m+1,m} - \mathbf{\Lambda}_{m+1}^{-1}\mathbf{P}_{m+1,m}\mathbf{\Lambda}_m & \mathbf{P}_{m+1,m} + \mathbf{\Lambda}_{m+1}^{-1}\mathbf{P}_{m+1,m}\mathbf{\Lambda}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\Lambda_m h_m} & 0\\ 0 & e^{\Lambda_m h_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_m^+\\ \mathbf{u}_m^-\end{pmatrix} \tag{2-35}$$

同理，对于$m < r$的各层

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{m-1}^-\\ \mathbf{u}_{m-1}^+\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{m-1,m} + \mathbf{\Lambda}_{m-1}^{-1}\mathbf{P}_{m-1,m}\mathbf{\Lambda}_m & \mathbf{P}_{m-1,m} - \mathbf{\Lambda}_{m-1}^{-1}\mathbf{P}_{m-1,m}\mathbf{\Lambda}_m\\ \mathbf{P}_{m-1,m} - \mathbf{\Lambda}_{m-1}^{-1}\mathbf{P}_{m-1,m}\mathbf{\Lambda}_m & \mathbf{P}_{m-1,m} + \mathbf{\Lambda}_{m-1}^{-1}\mathbf{P}_{m-1,m}\mathbf{\Lambda}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\Lambda_m h_m} & 0\\ 0 & e^{\Lambda_m h_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_m^-\\ \mathbf{u}_m^+\end{pmatrix} \tag{2-36}$$

式中，$\mathbf{P}_{m-1,m} = \mathbf{C}_{m-1}^T\mathbf{X}_{m-1,m}\mathbf{C}_m$，$\mathbf{X}_{m-1,m} = \int_0^\infty \frac{1}{r}\mathbf{g}_{m-1}\mathbf{g}_m^T dr$。

(2-35)和(2-36)两式反映了层$m\pm1$和层m之间的递推关系，因而把上式右端前两项乘积称为界面转换阵。

对于接收线圈所在的r层和临近层$r\pm1$层。设$\mathbf{u}_r^+$为上行波在底部的数值，$\mathbf{u}_r^-$为下行波在顶部的数值；$\mathbf{u}_{r+1}^\pm$为上行波和下行波在$r+1$层底部的数值，$\mathbf{u}_{r-1}^\pm$为上行波和下行波在$r-1$层顶部的数值。类似地，在$r\pm1$层和r层的转换关系

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{r\pm1}^\pm\\ \mathbf{u}_{r\pm1}^\mp\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{r\pm1,r} + \mathbf{\Lambda}_{r\pm1}^{-1}\mathbf{Q}_{r\pm1,r}\mathbf{\Lambda}_r & \mathbf{P}_{r\pm1,r} - \mathbf{\Lambda}_{r\pm1}^{-1}\mathbf{Q}_{r\pm1,r}\mathbf{\Lambda}_r\\ \mathbf{P}_{r\pm1,r} - \mathbf{\Lambda}_{r\pm1}^{-1}\mathbf{Q}_{r\pm1,r}\mathbf{\Lambda}_r & \mathbf{P}_{r\pm1,r} + \mathbf{\Lambda}_{r\pm1}^{-1}\mathbf{Q}_{r\pm1,r}\mathbf{\Lambda}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\Lambda_r h_r} & 0\\ 0 & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_r^\pm\\ \mathbf{u}_r^\mp\end{pmatrix}$$

2.2.2 源所在的层及源项

考虑源所在的层s。对于感应测井来说，源为发射线圈。设$\mathbf{u}_s^+$和$\mathbf{u}_s^-$分别是上行波和下行波在层s中项界面处的数值；$\mathbf{u}_{s+}^+$和$\mathbf{u}_{s+}^-$分别是上行波和下行波传播到发射线圈上部附近时的数值；$\mathbf{u}_{s-}^+$和$\mathbf{u}_{s-}^-$分别是上行波和下行波在

发射线圈下部附近时的数值；$h_{\pm}$ 为发射线圈距层 s 顶、底界面的距离(图 2-5)。

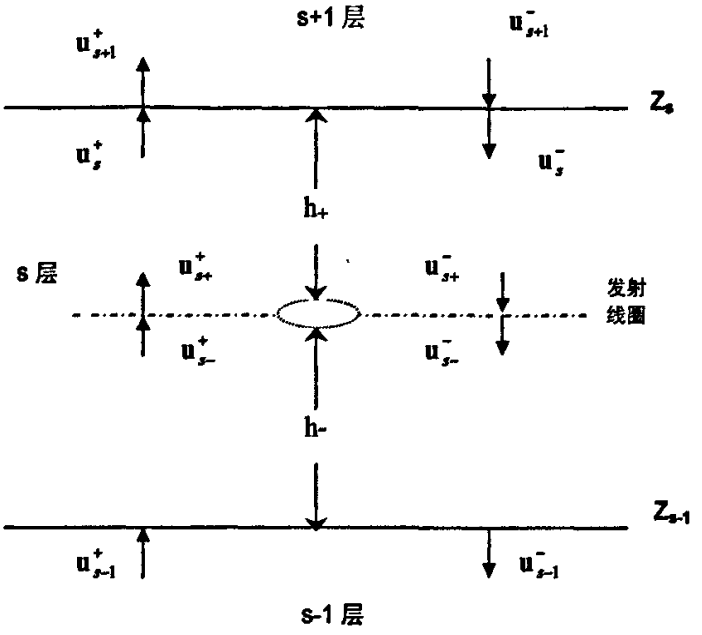


图 2-5　发射线圈所在层的波的传播

设供电电流为 I，在层面 $z=z_s$ 上，电场强度的 φ 分量是连续的

$$\mathbf{g}_s^T\mathbf{C}_s[\mathbf{u}_{s+}^+ + \mathbf{u}_{s+}^-] = \mathbf{g}_s^T\mathbf{C}_s[\mathbf{u}_{s-}^+ + \mathbf{u}_{s-}^-] \tag{2-37}$$

磁感应强度的 r 分量是不连续的，其匹配条件应为：

$$-\frac{\mathbf{g}_s^T}{i\omega\mu r}\mathbf{C}_s\mathbf{K}_s\left(\mathbf{u}_{s+}^+ - \mathbf{u}_{s+}^-\right) + \frac{\mathbf{g}_s^T}{i\omega\mu r}\mathbf{C}_s\mathbf{K}_s\left(\mathbf{u}_{s-}^+ - \mathbf{u}_{s-}^-\right) = \xi(r) \tag{2-38}$$

式中，$\xi(r)$ 是电流沿 r 方向的表面电流。将式(2-37)和式(2-38)两式等号两边分别左乘 $\mathbf{C}_s^T\mathbf{g}_s$，并且从 0 到 ∞ 对 r 积分，结合正交关系式(2-8)，得到

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{s+}^- \\ \mathbf{u}_{s+}^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_{s-}^- \\ \mathbf{u}_{s-}^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{b}_s \\ -\mathbf{b}_s\end{pmatrix} \tag{2-39}$$

其中，$\mathbf{b}_s = \dfrac{i\omega\mu}{2}\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\mathbf{C}_s^T\displaystyle\int_0^\infty \xi(r)\mathbf{g}_s(r)dr$。

参考(2-36)式表达的层间关系，得到 $s-1$ 层和 s 层之间的转换关系

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{s-1}^- \\ \mathbf{u}_{s-1}^+\end{pmatrix} = \mathbf{T}_{s-1,s}\begin{pmatrix}e^{-\Lambda_s h_s} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda_s h_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_s^- \\ \mathbf{u}_s^+\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^{-\Lambda_s h_{s-}} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda_s h_{s-}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{b}_s \\ -\mathbf{b}_s\end{pmatrix}$$

其中，$\mathbf{T}_{s-1,s}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{s-1,s}+\mathbf{\Lambda}_{s-1}^{-1}\mathbf{P}_{s-1,s}\mathbf{\Lambda}_s & \mathbf{P}_{s-1,s}-\mathbf{\Lambda}_{s-1}^{-1}\mathbf{P}_{s-1,s}\mathbf{\Lambda}_s \\ \mathbf{P}_{s-1,s}-\mathbf{\Lambda}_{s-1}^{-1}\mathbf{P}_{s-1,s}\mathbf{\Lambda}_s & \mathbf{P}_{s-1,s}+\mathbf{\Lambda}_{s-1}^{-1}\mathbf{P}_{s-1,s}\mathbf{\Lambda}_s\end{pmatrix}$

考虑源项$\mathbf{b}_s$。由于电流集中在线圈内，$\xi(r)$是一个尖脉冲。令$\xi(r)=I\delta(r-a)$，式中，a是线圈半径，$\delta(r)$为 Dirac 函数。将其代入(2-39)式，得

$$\mathbf{b}_s=\frac{i\omega\mu I}{2}\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\mathbf{C}_s^T\mathbf{g}_s(a)$$

2.2.3 处理流程

整个求解过程从接收线圈开始，这一点与文献[33]根本不同。首先，根据界面转换阵所表达的界面转换关系分别向上、向下进行层层传递，考虑到最上层没有下行波，最下层没有上行波，即：

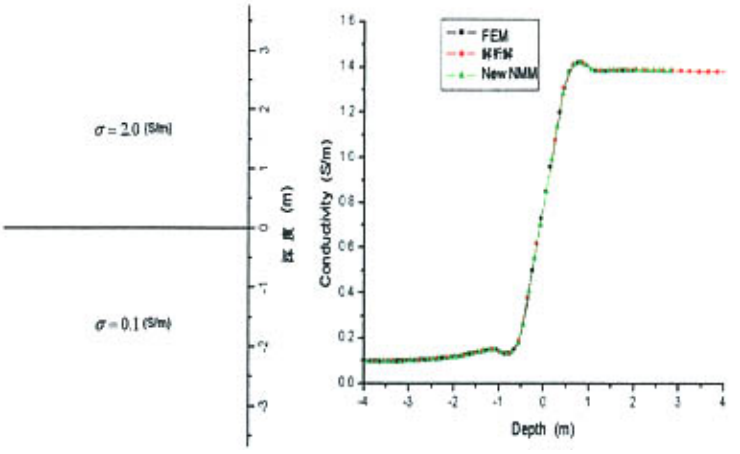
$$\begin{cases}\mathbf{u}_{M+1}^-=0\\ \mathbf{u}_1^+=0\end{cases}\tag{2-40}$$

并组成线性方程组；然后，求解此线性方程组，得到$\mathbf{u}_r^+$和$\mathbf{u}_r^-$；最后，利用波的传播特性求得各层中任意一点的场强。需要特别注意的是，由于传播因子中指数项的影响，此线性方程组的系数矩阵可能容易出现病态，为此必须限制广义特征值最大值的大小，使线性方程组可解。

2.3 结果对比和验证

为便于结果对比，我们仍然选择国产的 0.8m 六线圈系，工作频率为 20kHz。在这个频率下，$k^2\approx -i\omega\mu\sigma$，就是说，波数只与介质电导率有关。各种方法的计算结果取实部并换算成视电导率后进行比较。

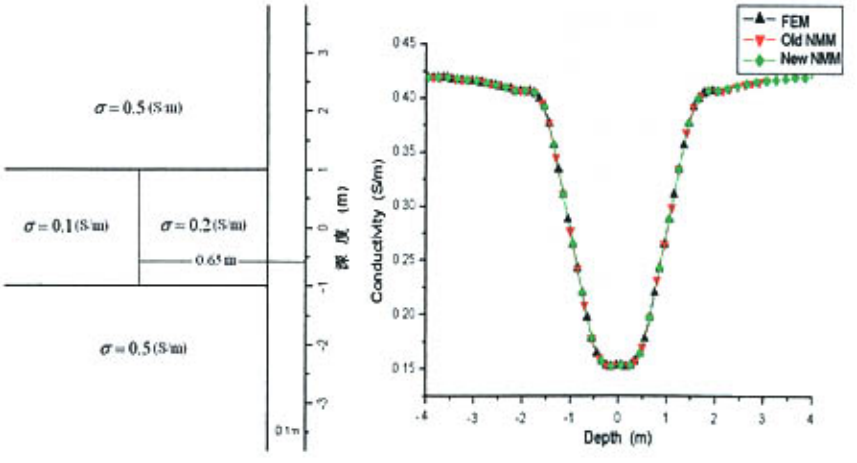
在无井眼、双层均匀地层模型(如图 2-6-a)中，它的响应可以用解析式表达[1][2][5]。选用与文献[33]相同的基函数(10 个幅度基函数和 10 个斜度基函数)用本文方法进行了计算(如图 2-6-b)，此外还和有限元(FEM)结果进行了对比。从对比结果可以看出，本文方法与前人结果完全吻合。



(a)地层模型　　(b) 响应曲线对比

图 2-6　两层均匀介质的响应

当井眼和侵入同时存在时，解析解不存在，于是分别用有限元(FEM)、文献[33]的 NMM 方法和本文所采用的新 NMM 方法对这一模型(图 2-7-a)进行了计算，分别得到三条视电阻率曲线(见图 2-7-b)，由图可见，三种结果是一致的。在 DELL 机(CPU 主频 2.4GHz)上，本文方法的计算时间为 2.54 秒/50 点，文献[33]方法的计算时间为 3.04 秒/50 点。可以看出这种方法的效率有了



(a)地层模型　　(b) 响应曲线对比

图 2-7　三层非均匀介质的响应

明显提高。

同样，由于在各层内最费时的本征方程只需计算一次，因此同一层内点数越多，NMM 方法速度快的优点就越明显，这是两种 NMM 方法的共同优点。而在线圈运动时，本文方法需要重复计算的只是各种界面转换关系和线性方程组，文献[33]的方法则需要计算反射阵和透射阵。

2.4 两种解析方法比较与讨论

纵向上的解析递推有两种方法。一种是广义透射阵和反射阵的方法，另一个是界面转换公式的方法。两种方法都假定：在具有任意多个水平界面的二维地层模型，除了最上层及最下层之外，中间每一层都有上行模式和下行模式，而且每个模式在界面上都要发生透射和反射；而且，都满足其自然边界条件—最上层没有下行波，最下层没有上行波。

第一种方法是从“源”—供电电极所在的层(记为层 s)开始，设 $\mathbf{u}_s^+$ 和 $\mathbf{u}_s^-$ 分别是上行波和下行波在层 s 中顶界面处的数值；然后根据层界面的边界条件：电位和电位移连续，确定内部任意一层的位场的相互关系，得到关于反射矩阵和透射矩阵递推公式；最后根据自然边界条件求出 $\mathbf{u}_s^+$ 和 $\mathbf{u}_s^-$，并根据反射矩阵和透射矩阵递推公式求出接收线圈所在层(记为层 r)的 $\mathbf{u}_r^+$ 和 $\mathbf{u}_r^-$(设 $\mathbf{u}_r^+$ 和 $\mathbf{u}_r^-$ 分别是上行波和下行波在层 r 中底、顶界面处的数值)。

第二种方法是从接收线圈所在层 r 开始，然后根据层界面的边界条件，推导提出了界面转换公式；最后根据自然边界条件，构造关于 $\mathbf{u}_r^+$ 和 $\mathbf{u}_r^-$ 的线性方程组，求解此线性方程组，得到 $\mathbf{u}_r^+$ 和 $\mathbf{u}_r^-$。

两种方法都归结到求 $\mathbf{u}_r^+$ 和 $\mathbf{u}_r^-$，利用波的传播特性从而求得各层中任意一点的电位。前一种算法中涉及一些复杂的求逆运算，而后一种思路简单，但是要求解线性方程组。

2.5 用 NMM 研究电阻率测井的基本思路

从上述用 NMM 法计算直流电测井和交流电测井响应的整个过程以及各

种 NMM 方法的比较，可以总结出用 NMM 研究电阻率测井数值模拟的一般思路：

(1) 根据所研究的地层模型选择合适的坐标系，并写出该坐标系下的定解问题，即偏微分方程和边界条件。

(2) 根据定解问题，确定在一个方向(轴向)上用解析法，在另一个方向(径向)上用数值法；利用分离变量法分解偏微分方程，确定本征值和径向上的本征函数。

(3) 在径向上，利用变分原理和有限元方法求解数值模式解：

① 选择一组完备的基函数，把本征函数近似地表示成级数形式。

② 有限单元的离散。写出本征方程，推导 **A**、**B** 阵。

③ 求解本征方程，得出本征值和相应的本征向量。

(4) 在轴向上，解析出函数表达式，考虑场的行波特征：

① 在激励源所在的层面上推导与上下邻层的关系，并确定源项。

② 根据层面的边界条件，推导各模式的反射系数和透射系数的递推公式或界面转换公式。

③ 从最上和最下层开始，利用递推公式求出每一层的底、顶界面处的数值。

(5) 把径向上的数值解(本征值和本征函数)和轴向上的底、顶界面处的数值代入位场表达式计算每一层的电位。

从模式匹配法的整个过程可以看出：分离变量是模式匹配法的前提和基础，数值分析是模式匹配法的核心和重点，界面的连续性条件条件则是模式匹配法的保证和关键。

总之，模式匹配法是一种快速有效的数值方法，能够把二维数值问题降为一维数值问题，在一维的条件下求出数值模式解，然后再用传播因子(e 的指数)将模式解提高到二维。对于复杂的多层地层模型来说，在不同介质的分界面上边界条件可以用来解释，可以深入理解位场的分布及其变化规律，其物理意义更加明确。

第 3 章　普通电阻率测井的新型模式匹配法

普通电阻率测井属于直流电测井。对于直流电测井来说，用模式匹配法求解的原理是类似的。所不同的是电极系的激励条件和偏微分方程存在差异。对于具有任意多个水平界面的二维地层模型，同样也考虑位场的上行模式和下行模式，任意一层的电场中包含有来自其它各层的反射电场和透射电场的叠加。根据层界面的边界条件，来确定内部任意一层的位场的相互关系，得到关于透射矩阵和反射矩阵递推公式或界面转换公式，并在激励源所在的地层层面上利用电流密度的匹配条件得到源项(轴向上场的初始值)，在这一点上，直流电测井要比交流电测井处理起来要简单一些。

在用界面转换理论研究感应测井的响应时，利用的电位和磁感应强度连续条件。而对于点电极的普通电阻率测井则要考虑电位和电流密度的连续条件。而且，由于两种方法的求解顺序不同，在普通电阻率测井的计算中利用互易定理还可以进一步简化计算。

3.1　普通电阻率测井的新型模式匹配法

3.1.1　地层模型及定解问题

采用如图 3-1 所示的地层模型。假设有M个水平分界面，将空间分成$M+1$个层。它们的坐标是：$Z_1<Z_2\cdots Z_{m-1}<Z_m\cdots Z_{M-1}<Z_M$，边界面$Z_{m-1}$和$Z_m$之间的层称为第$m$层，每个层都是径向不均匀的，由井、侵入带和原状地层组成。在每层介质内部的电导率σ只与半径r有关。在柱坐标系下，电势分布与方位角φ无关。在第 m 层中，电势Φ_m满足如下微分方程：

$$\frac{1}{\sigma_m r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_m \rho \frac{\partial \Phi_m}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2}=0 \tag{3-1}$$

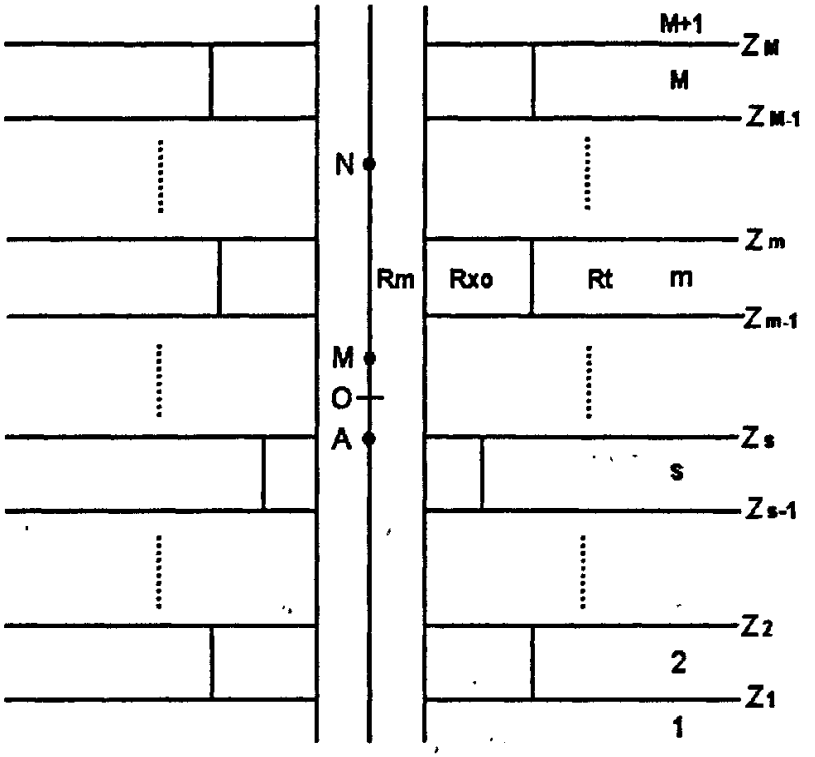


图 3-1　轴对称非均匀介质模型示意图

边界条件和边值关系为:

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{d\Phi_m}{dr}=0\\&\lim_{r\to\infty}\Phi_m=0\\&\Phi_m\text{在}(0-\infty)\text{连续}\end{aligned}\tag{3-2}$$

3.1.2　模式匹配法基本原理

利用分离变量法，并令 $\Phi_m(r,z)=f_m(r)u_m(z)$ 将其代入上式可得到两个方程:

$$\frac{1}{\sigma_m r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_m r\frac{\partial f_m}{\partial r}\right)+K_m^2 f_m=0\tag{3-3}$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}=K_m^2 u_m\tag{3-4}$$

式中，K_m^2 称为本征值；f_m 为相应的本征函数。边界条件和边值关系为:

$$\lim_{r\to 0}\frac{df_m}{dr}=0$$
$$\lim_{r\to\infty}f_m=0 \tag{3-5}$$
$$f_m\text{和}\sigma_m\frac{df_m}{dr}\text{在}(0,+\infty)\text{连续}$$

令$\mathbf{g}_m=(g_{m1},g_{m2},\cdots,g_{mN})^T$为径向上的一组完备的基函数，那么特征函数$\mathbf{f}_m(r)$可以近似地表示成

$$[\mathbf{f}_m(r)]^T=\mathbf{g}_m^T\mathbf{C}_m \tag{3-6}$$

将式(3-3)两端同乘$\sigma_m rg$，并且对r从 0 到$+\infty$积分，得：

$$\mathbf{A}_m\mathbf{C}_m=\mathbf{B}_m\mathbf{C}_m\mathbf{K}_m^2 \tag{3-7}$$

其中，$\mathbf{A}_m=\int_0^\infty\sigma_m rg'g^T dr$，$\mathbf{B}_m=\int_0^\infty\sigma_m rgg^T dr$。$\mathbf{K}_m^2=diag(k_{m1}^2,k_{m2}^2\cdots,k_{mN}^2)$，$\mathbf{C}_m$是由$N$个本征向量组成的矩阵，并且满足：

$$\mathbf{C}_m^T\mathbf{B}_m\mathbf{C}_m=\mathbf{I} \tag{3-8}$$

式(3-4)的解可以表示成：

$$\mathbf{u}_m(z)=\mathbf{u}_m^+(z)+\mathbf{u}_m^-(z)=e^{-\mathbf{K}_m(z-z')}\mathbf{u}_m^+(z')+e^{\mathbf{K}_m(z-z')}\mathbf{u}_m^-(z') \tag{3-9}$$

其中，$\mathbf{u}_m^+(z)$和$\mathbf{u}_m^-(z)$分别为上行波、下行波，$\mathbf{u}_m^+(z')$和$\mathbf{u}_m^-(z')$分别为上行波、下行波在源点z'处的初始值。这样，电势Φ_m可以写成：

$$\Phi_m(r,z)=\mathbf{g}_m^T(r)\mathbf{C}_m[\mathbf{u}_m^+(z)+\mathbf{u}_m^-(z)] \tag{3-10}$$

通过求解广义特征值问题，可以得到各层的本征值和本征向量。其具体算法详见附录 1。

3.1.3 径向上的基函数与单元阵

基函数的选取在很大程度上影响了求解的速度和精度。本文仍然采用文献[34]构造的幅度基函数和斜度基函数。

设径向上的某一单元(第 i 个单元)的两结点(其坐标分别为 r_i，r_{i+1})有给定的函数值和导数值(图 3-2)，则其插值函数为：

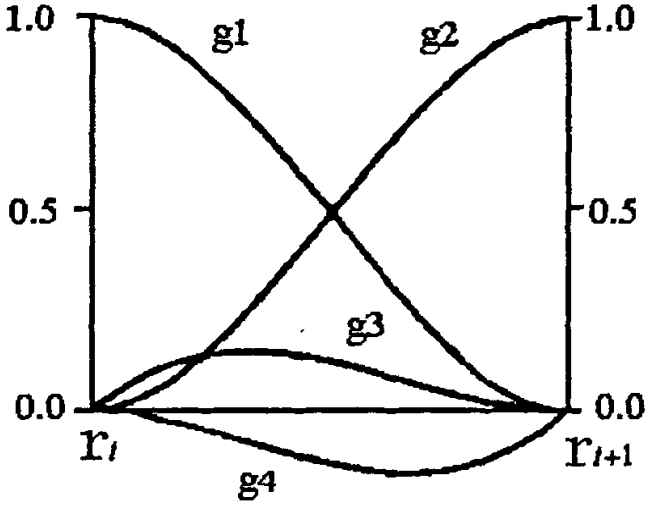


图 3-2　单元内的基函数

对于普通电阻率测井，单元 i 内的基函数 $\mathbf{g}_i$

$$\mathbf{g}_i^T = (g_1, g_2, g_3, g_4)$$

其中，

$$g_1 = -2L_1^3 + 3L_1^2$$

$$g_2 = \frac{(r_{i+1} - r_i)L_1^2 L_2}{\sigma_i}$$

$$g_3 = -2L_2^3 + 3L_2^2$$

$$g_4 = \frac{-(r_{i+1} - r_i)L_2^2 L_1}{\sigma_i}$$

式中，σ_i 为单元 i 的电导率。同时，应用积分方程：

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} L_1^m L_2^n dr = (r_{i+1} - r_i)\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

和方程(3-7)可以得到单元 i 的 4×4 维单元矩阵 $\mathbf{A}_m^{(i)}$ 和 $\mathbf{B}_m^{(i)}$

$$\mathbf{A}_m^{(i)}=\sigma_i\begin{bmatrix} 0.6\dfrac{\sum r}{\Delta r} & \dfrac{r_{i+1}}{10\sigma_i} & -0.6\dfrac{\sum r}{\Delta r} & \dfrac{r_i}{10\sigma_i} \\ & \left(\dfrac{r_i}{10}+\dfrac{r_{i+1}}{30}\right)\dfrac{\Delta r}{\sigma_i^2} & -\dfrac{r_{i+1}}{10\sigma_i} & -\dfrac{\sum r\Delta r}{60\sigma_i^2} \\ & & 0.6\dfrac{\sum r}{\Delta r} & -\dfrac{r_i}{10\sigma_i} \\ \text{对} & \text{称} & & \left(\dfrac{r_i}{30}+\dfrac{r_{i+1}}{10}\right)\dfrac{\Delta r}{\sigma_i^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_m^{(i)}=\sigma_i\begin{bmatrix} \left(\dfrac{2r_i}{7}+\dfrac{3r_{i+1}}{35}\right)\Delta r & \left(\dfrac{r_i}{28}+\dfrac{r_{i+1}}{60}\right)\dfrac{(\Delta r)^2}{\sigma_i} & \dfrac{9}{140}\sum r\Delta r & -\left(\dfrac{r_i}{60}+\dfrac{r_{i+1}}{70}\right)\dfrac{(\Delta r)^2}{\sigma_i} \\ & \left(\dfrac{r_i}{168}+\dfrac{r_{i+1}}{280}\right)\dfrac{(\Delta r)^3}{\sigma_i^2} & \left(\dfrac{r_i}{70}+\dfrac{r_{i+1}}{60}\right)\dfrac{(\Delta r)^2}{\sigma_i} & -\dfrac{\sum r(\Delta r)^3}{280\sigma_i^2} \\ & & \left(\dfrac{3r_i}{35}+\dfrac{2r_{i+1}}{7}\right)\Delta r & -\left(\dfrac{r_i}{60}+\dfrac{r_{i+1}}{28}\right)\dfrac{(\Delta r)^2}{\sigma_i} \\ \text{对} & \text{称} & & \left(\dfrac{r_i}{280}+\dfrac{r_{i+1}}{168}\right)\dfrac{(\Delta r)^3}{\sigma_i^2} \end{bmatrix}$$

其中：$\Delta r=r_{i+1}-r_i$，$\sum r=r_{i+1}+r_i$

数值分析的计算顺序是：首先要进行网格划分和单元、总体编号，然后逐单元计算单元矩阵。总体矩阵$\mathbf{A}_m$、$\mathbf{B}_m$是由不同单元i的单元矩阵$\mathbf{A}_m^{(i)}$、$\mathbf{B}_m^{(i)}$安装而成。总体矩阵中位置数m与某一单元i单元矩阵中位置数n($n=1,2,3,4$)的关系为：

$$m=2i+n-2$$

利用这一关系就可以将每个单元矩阵按序累加形成总体矩阵。

3.1.4　界面转换阵与源项

为了求解各层的上行波和下行波，引入了界面转换阵理论。设r代表测量电极所在的层。对于$m>r$的各层，$\mathbf{u}_m^+$和$\mathbf{u}_m^-$分别是上行波和下行波在层m中底界面的数值。对于$m<r$的各层，$\mathbf{u}_m^+$和$\mathbf{u}_m^-$分别是上行波和下行波在层m中顶界面的数值。(如图 3-3)

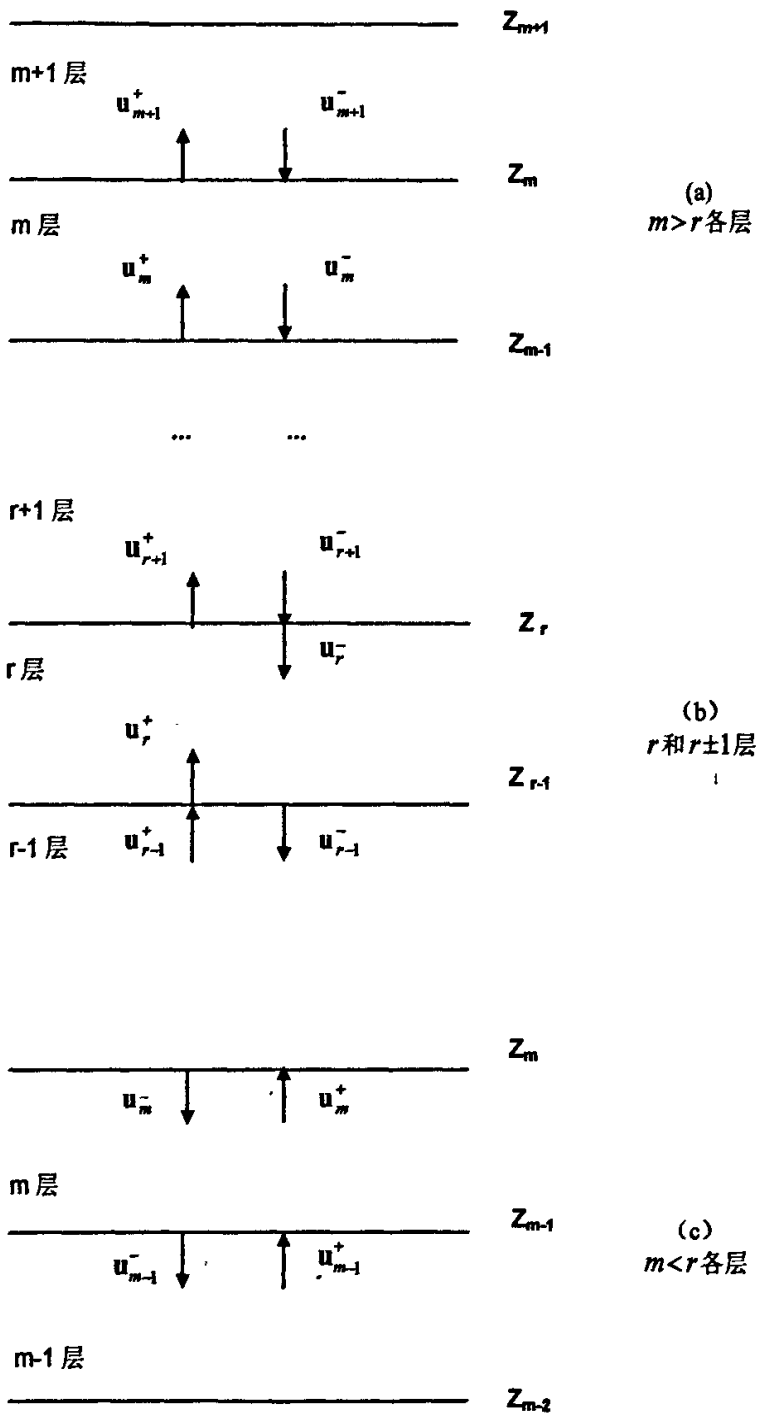


图 3-3　上行波和下行波传播示意图

对于$m>r$的各层。在第m层中，电势和电流密度的z分量表达式分别为

$$\Phi_m(r,z)=\mathbf{g}_m^T\mathbf{C}_m[e^{-\mathbf{K}_m(z-z_{m-1})}\mathbf{u}_m^+ + e^{\mathbf{K}_m(z-z_{m-1})}\mathbf{u}_m^-] \tag{3-11}$$

$$j_m=-\sigma_m\mathbf{g}_m^T\mathbf{C}_m\mathbf{K}_m\left[e^{-\mathbf{K}_m(z-z_{m-1})}\mathbf{u}_m^+ - e^{\mathbf{K}_m(z-z_{m-1})}\mathbf{u}_m^-\right] \tag{3-12}$$

在第$m+1$层中，电势和电流密度的z分量表达式分别为

$$\Phi_{m+1}(r,z)=\mathbf{g}_{m+1}^T\mathbf{C}_{m+1}[e^{-\mathbf{K}_{m+1}(z-z_m)}\mathbf{u}_{m+1}^+ + e^{\mathbf{K}_{m+1}(z-z_m)}\mathbf{u}_{m+1}^-] \tag{3-13}$$

$$j_{m+1}=-\sigma_{m+1}\mathbf{g}_{m+1}^T\mathbf{C}_{m+1}\mathbf{K}_{m+1}\left[e^{-\mathbf{K}_{m+1}(z-z_m)}\mathbf{u}_{m+1}^+ - e^{\mathbf{K}_m(z-z_m)}\mathbf{u}_{m+1}^-\right] \tag{3-14}$$

在$z=Z_m$的层界面上满足边界条件

$$\Phi_m=\Phi_{m+1}$$

$$j_m=j_{m+1}$$

令式(3-11)等于式(3-13)，式(3-12)等于式(3-14)，然后将两式等号两边分别左乘 $\mathbf{C}_{m+1}^T\sigma_{m+1}r\mathbf{g}_{m+1}$和$\mathbf{C}_{m+1}^T r\mathbf{g}_{m+1}$，并且从 0 到∞ 对$r$积分，结合正交关系式(3-8)，得到

$$\mathbf{u}_{m+1}^+ + \mathbf{u}_{m+1}^- = \mathbf{P}_{m+1,m}\left(e^{-\mathbf{K}_m h_m}\mathbf{u}_m^+ + e^{\mathbf{K}_m h_m}\mathbf{u}_m^-\right) \tag{3-15}$$

$$\mathbf{u}_{m+1}^+ - \mathbf{u}_{m+1}^- = \mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m\left(e^{-\mathbf{K}_m h_m}\mathbf{u}_m^+ - e^{\mathbf{K}_m h_m}\mathbf{u}_m^-\right) \tag{3-16}$$

式中，$\mathbf{P}_{m+1,m}=\mathbf{C}_{m+1}{}^T\mathbf{X}_{m+1}\mathbf{C}_m$，$\mathbf{X}_{m+1}=\int_0^\infty \sigma_{m+1}r\mathbf{g}_{m+1}\mathbf{g}_m^T dr$，$\mathbf{Q}_{m+1,m}=\mathbf{C}_{m+1}{}^T\mathbf{Y}_m\mathbf{C}_m$，$\mathbf{Y}_m=\int_0^\infty \sigma_m r\mathbf{g}_{m+1}\mathbf{g}_m^T dr$。

将式(3-15)和(3-16)联立，解得

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{m+1}^+\\ \mathbf{u}_{m+1}^-\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{m+1,m}+\mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m & \mathbf{P}_{m+1,m}-\mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m\\ \mathbf{P}_{m+1,m}-\mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m & \mathbf{P}_{m+1,m}+\mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\mathbf{K}_m h_m} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{K}_m h_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_m^+\\ \mathbf{u}_m^-\end{pmatrix} \tag{3-17}$$

同理，对于$m<r$的各层。

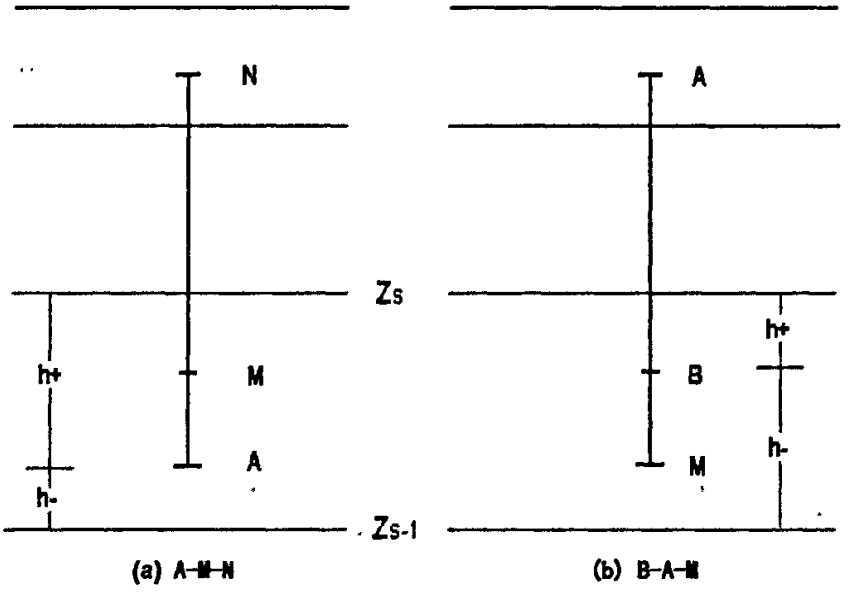
$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{m-1}^-\\ \mathbf{u}_{m-1}^+\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{m-1,m}+\mathbf{K}_{m-1}^{-1}\mathbf{Q}_{m-1,m}\mathbf{K}_m & \mathbf{P}_{m-1,m}-\mathbf{K}_{m-1}^{-1}\mathbf{Q}_{m-1,m}\mathbf{K}_m\\ \mathbf{P}_{m-1,m}-\mathbf{K}_{m-1}^{-1}\mathbf{Q}_{m-1,m}\mathbf{K}_m & \mathbf{P}_{m-1,m}+\mathbf{K}_{m-1}^{-1}\mathbf{Q}_{m-1,m}\mathbf{K}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\mathbf{K}_m h_m} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{K}_m h_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_m^-\\ \mathbf{u}_m^+\end{pmatrix} \tag{3-18}$$

式中，$\mathbf{P}_{m-1,m}=\mathbf{C}_{m-1}{}^T\mathbf{Y}_{m-1}\mathbf{C}_m$，$\mathbf{Y}_{m-1}=\int_0^\infty \sigma_{m-1}r\mathbf{g}_{m-1}\mathbf{g}_m^T dr$，$\mathbf{Q}_{m-1,m}=\mathbf{C}_{m-1}{}^T\mathbf{Y}_m\mathbf{C}_m$，$\mathbf{Y}_m=\int_0^\infty \sigma_m r\mathbf{g}_{m-1}\mathbf{g}_m^T dr$。

(3-17)和(3-18)两式反映了层 $m\pm1$ 和层 m 之间的递推关系，因而把上式右端前两项乘积称为界面转换阵。类似地，$r\pm1$ 层和 r 层的转换关系

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{r\pm1}^{\pm}\\ \mathbf{u}_{r\pm1}^{\mp}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{r\pm1,r}+\mathbf{K}_{r\pm1}^{-1}\mathbf{Q}_{r\pm1,r}\mathbf{K}_r & \mathbf{P}_{r\pm1,r}-\mathbf{K}_{r\pm1}^{-1}\mathbf{Q}_{r\pm1,r}\mathbf{K}_r\\ \mathbf{P}_{r\pm1,r}-\mathbf{K}_{r\pm1}^{-1}\mathbf{Q}_{r\pm1,r}\mathbf{K}_r & \mathbf{P}_{r\pm1,r}+\mathbf{K}_{r\pm1}^{-1}\mathbf{Q}_{r\pm1,r}\mathbf{K}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\mathbf{K}_r h_r} & 0\\ 0 & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_r^{\pm}\\ \mathbf{u}_r^{\mp}\end{pmatrix}$$

考虑源项。设供电电极所在的层为 s 层，$\mathbf{u}_s^+$ 和 $\mathbf{u}_s^-$ 分别是上行波和下行波在层 s 中顶界面处的数值；$\mathbf{u}_{s+}^+$ 和 $\mathbf{u}_{s+}^-$ 分别是上行波和下行波传播到源上部无限小距离处的数值；$\mathbf{u}_{s-}^+$ 和 $\mathbf{u}_{s-}^-$ 分别是上行波和下行波在源下部无限小距离处的数值；$h_\pm$ 为源点距层 s 顶底界面的距离(图 3-4-a)。



(a) A-M-N　　(b) B-A-M

图 3-4　两种电极系的结构以及与临近层的转换关系

设供电电流为 I，在层面 $z=z_s$ 上，电势和电流密度 z 分量的匹配条件应为：

$$\mathbf{g}_s^T\mathbf{C}_s[\mathbf{u}_s^+ + \mathbf{u}_s^-]=\mathbf{g}_s^T\mathbf{C}_s[\mathbf{u}_{s-}^+ + \mathbf{u}_{s-}^-] \tag{3-19}$$

$$\sigma_s\mathbf{g}_s^T\mathbf{C}_s\mathbf{K}_s\left(-\mathbf{u}_{s+}^+ + \mathbf{u}_{s+}^-\right)-\sigma_s\mathbf{g}_s^T\mathbf{C}_s\mathbf{K}_s\left(\mathbf{u}_{s-}^+ - \mathbf{u}_{s-}^-\right)=\frac{-I\delta(r)}{2\pi r} \tag{3-20}$$

式中，$\delta(r)$ 为 Dirac 函数。参照上面的处理方法，可以得到

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{s+}^{-}\\ \mathbf{u}_{s+}^{+}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{s-}^{-}\\ \mathbf{u}_{s-}^{+}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{b}_s\\ -\mathbf{b}_s\end{pmatrix} \tag{3-21}$$

其中，$\mathbf{b}_s=\frac{I}{4\pi}\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{C}_s^T\mathbf{g}_s(0)=\frac{I}{4\pi}\mathbf{K}_s^{-1}\mathbf{f}_s(0)$。

由(3-18)式，得到$s-1$层和s层之间的转换关系为

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{s-1}^{-}\\ \mathbf{u}_{s-1}^{+}\end{pmatrix}=\mathbf{T}_{s-1,s}\begin{pmatrix}e^{-\mathbf{K}_s h_s} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{K}_s h_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_s^{-}\\ \mathbf{u}_s^{+}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{-\mathbf{K}_s h_{s-}} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{K}_s h_{s-}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{b}_s\\ -\mathbf{b}_s\end{pmatrix} \tag{3-22}$$

其中，$\mathbf{T}_{s-1,s}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{s-1,s}+\mathbf{K}_{s-1}^{-1}\mathbf{Q}_{s-1,s}\mathbf{K}_s & \mathbf{P}_{s-1,s}-\mathbf{K}_{s+1}^{-1}\mathbf{Q}_{s-1,s}\mathbf{K}_s\\ \mathbf{P}_{s-1,s}-\mathbf{K}_{s-1}^{-1}\mathbf{Q}_{s-1,s}\mathbf{K}_s & \mathbf{P}_{s-1,s}+\mathbf{K}_{s-1}^{-1}\mathbf{Q}_{s-1,s}\mathbf{K}_s\end{pmatrix}$

在电阻率测井中，A-M-N 电极系和 B-A-M 是常用的两种电极系。在前一电极系中，A 为供电电极，M、N 为两个测量电极；而在后一电极系中，B、A 为供电电极，M 为测量电极，测量电极在两供电电极的下部(图 3-4-b)。定义$\mathbf{u}_s^{+}$和$\mathbf{u}_s^{-}$分别是上行波和下行波在层 s 中顶界面处的数值，$h_{\pm}$为源点距层 s 顶、底界面的距离。因此，对于每一个供电电极，都可类似地得到供电电极所在层s层与$s+1$层之间的转换关系为

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_{s+1}^{+}\\ \mathbf{u}_{s+1}^{-}\end{pmatrix}=\mathbf{T}_{s+1,s}\begin{pmatrix}e^{-\mathbf{K}_s h_s} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{K}_s h_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_s^{+}\\ \mathbf{u}_s^{-}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{-\mathbf{K}_s h_{s+}} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{K}_s h_{s+}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{b}_s\\ -\mathbf{b}_s\end{pmatrix} \tag{3-23}$$

其中，$\mathbf{T}_{s+1,s}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{s+1,s}+\mathbf{K}_{s+1}^{-1}\mathbf{Q}_{s+1,s}\mathbf{K}_s & \mathbf{P}_{s+1,s}-\mathbf{K}_{s+1}^{-1}\mathbf{Q}_{s+1,s}\mathbf{K}_s\\ \mathbf{P}_{s+1,s}-\mathbf{K}_{s+1}^{-1}\mathbf{Q}_{s+1,s}\mathbf{K}_s & \mathbf{P}_{s+1,s}+\mathbf{K}_{s+1}^{-1}\mathbf{Q}_{s+1,s}\mathbf{K}_s\end{pmatrix}$

至此，解题所用的公式已全部推出，由于最上层没有下行波，最下层没有上行波，即：

$$\begin{cases}\mathbf{u}_{M+1}^{-}=0\\ \mathbf{u}_1^{+}=0\end{cases} \tag{3-24}$$

求解过程从测量电极开始。首先，根据界面转换阵所表达的界面转换关系进行层层传递，并构造(3-24)式，组成线性方程组；然后，求解此线性方程组，得到$\mathbf{u}_r^{+}$和$\mathbf{u}_r^{-}$；最后利用波的传播特性从而求得各层中任意一点的电位。

3.2 方法检验与结果对比

为便于结果对比，仍然采用完全相同的、存在井眼和侵入的三层介质模型和 0.5m 电位电极系—一个发射电极 A 和两个接收电极 M 和 N；接收电极 M、N 离发射电极的距离分别为 0. 5 m 和 4. 25 m(图 3-4)。通过理论计算的电极系常数 K 值，将 M、N 测得的电势差转换成视电阻率。

在无限大均匀介质中，设其电阻率为 1.0 Ω·m 。采用等比网格。总节点数为 10，考虑边界条件后节点数为 9。用本文方法计算的电阻率为 1.01298Ω·m，文献[34]方法计算结果为 0.99987Ω·m。图 3-5 为解析方法和本文方法计算的沿径向的电势分布。

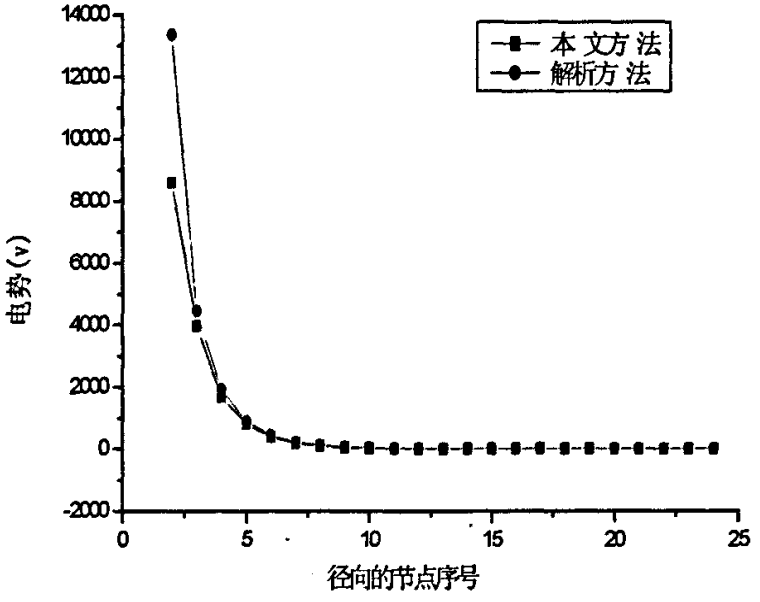


图 3-5　NMM 数值法和解析法电势对比

在两层均匀(只存在一个分界面)介质中，点电极的场分布可以用解析方法分区表示[1]。图 3-6 为本文方法、文献[34]方法和解析法(针对 A-M-N 电极系)的对比图。从图中看出，在界面分界点，本文方法与解析解都有电极距 AM(0.5 米)的常数值，而原来的 NMM 方法不明显。

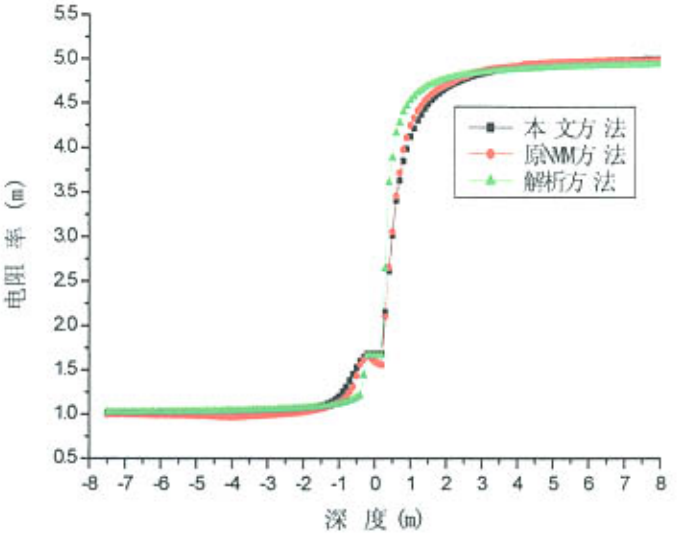


图 3-6　两层均匀介质中的响应

如图 3-7 所示为三层介质模型。

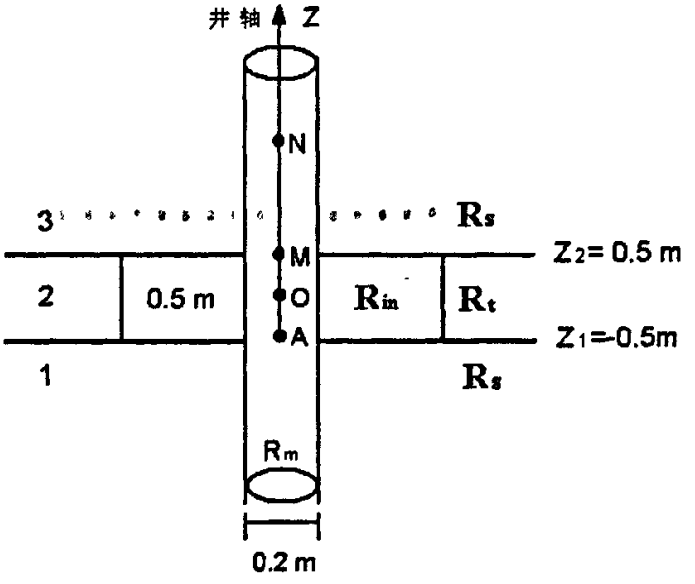


图 3-7 . 三层介质模型

当井眼和侵入都不存在时，这时点电极的场分布可以用解析方法表示出来[1, 2]，图 3-8 所示为解析解、文献[34] 基于 78 个三角形函数的 NMM 方法和本文方法的结果对比情况，可以看出，三种结果在此理想介质模型下结果是一致的。

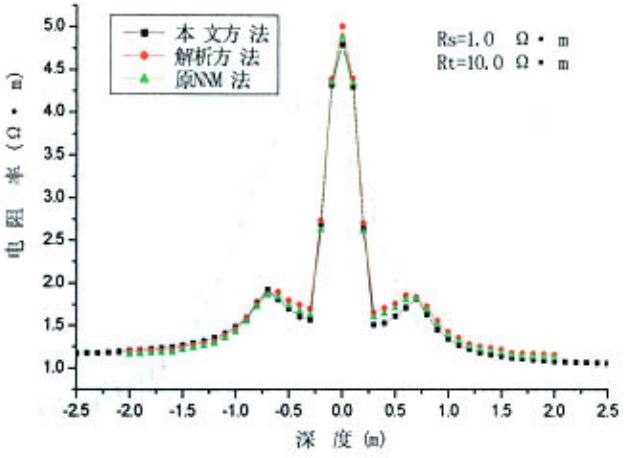


图 3-8　不存在井眼和侵入

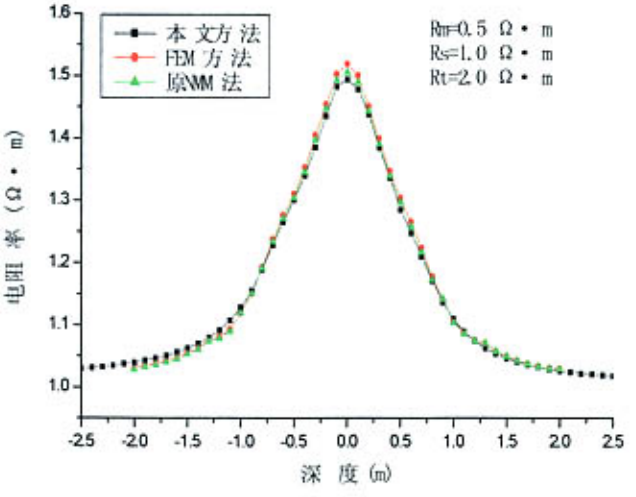


图 3-9　只存在井眼不存在侵入的响应

当只存在井眼(不存在侵入)或井眼和侵入同时存在时，解析解不存在，于是分别用有限元 FEM、文献[34] 的 NMM 方法和本文所采用的新 NMM 方法对这两种模型进行了计算，分别得到三条视电阻率曲线(见图 3-9 和图 3-10)，由图可见，三种结果均吻合得很好。

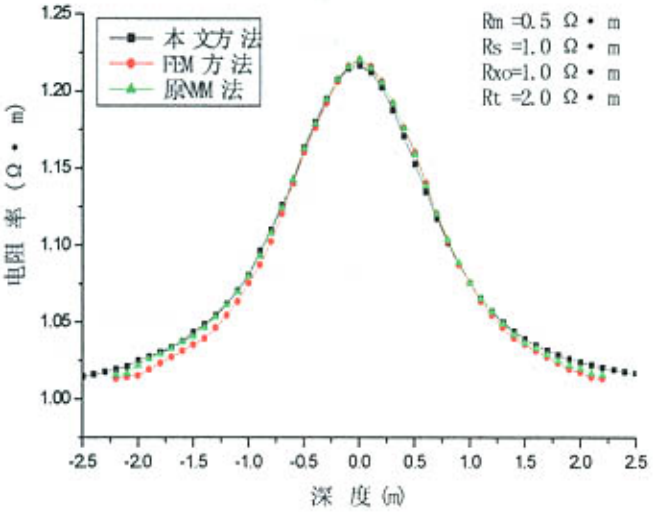


图 3-10　井眼和侵入同时存在

根据电磁场理论中的互易定理，A-M-N 电极系和 B-A-M 电极系具有等价关系。但是，对于每一个深度点，A-M-N 电极系需要分别计算测量电极 M、N 的电位；而 A-M-N 电极系，只需要计算一个测量电极 M 的电位，因此，用 B-A-M 电极系要比用 A-M-N 电极系计算速度提高近一倍。

从计算时间比较，在 DELL 机(CPU 主频 2.4GHz)上，选择 A-M-M 电极时本文方法的计算速度为 3.23 秒/100 点，选择 B-A-M 电极时计算速度为 1.84 秒/100 点。可以看出，用 B-A-M 电极系要比用 A-M-N 电极系计算速度提高近一倍。而文献[34]方法的计算时间为 3.34 秒/100 点。可以看出这种方法的效率有了明显提高。

3.3 数值模式匹配法的展望

在很多情况形下，NMM 方法都是由径向数值解和纵向解析解构成的。这对径向柱面分层较多，纵向平面分层较少的结构的场分析较有利。但是，当结构径向范围不大，特别是测试点在纵向跨越很大范围时(如平面分层极多的薄互层结构)，为了减小计算工作量，在 NNM 中可应用纵向的数值本征模式解和径向的解析解[27][44][49]。

为了提高测井的纵向分辨力，有效地探测薄层和薄互层，聚焦电极系多采用紧贴井壁和偏轴激励工作方式，例如微球聚焦电阻率测井和微侧向测井等。聂在平等[49]将 NMM 方法扩展到这类 2.5 维问题中的三维场分析中，分别采用径向数值解—纵向解析解和径向解析解—纵向数值解两种匹配方法，也获得了位场分布的高效数值解，而且这两种方法的应用结果一致性极好。

国内外学者用数值模式匹配法不仅能够快速模拟轴对称条件下复杂介质的电阻率的测井响应，而且改进了基函数，发展了反射矩阵和透射矩阵的概念或提出了各层转换公式的方法，把模式匹配法在电法测井的应用提高到一个新的水平。随着石油勘探开发技术的不断发展，倾斜地层、大斜度井、水平井使得地层电阻率的各向异性异性对电磁场的分布的影响更为突出，轴对称条件下测井响应不再满足于电测井资料解释、储层评价及相关地质研究的需要，非轴对称条件下电测井响应研究越来越成为人们研究的重点。用模式匹配法解决全三维地层模型的电测井响应将是一个很好的选择。

第 4 章　非轴对称条件下普通电阻率测井的模式匹配法

4.1 非轴对称条件下三维模式匹配法基本原理

4.1.1 坐标系及定解问题

图 4-1 为在非轴对称条件下(水平地层中有一斜井)的地层模型。用模式匹配法求解普通电阻率测井的响应时，设置如图所示的坐标系： x:平行于地层；y:平行于地层法线；z:垂直与地层法线，即平行于地层的走向，并设井轴与地层法线的夹角为θ。在垂直于地层走向的 XOY 平面内，设求解区为 D_{xy}。

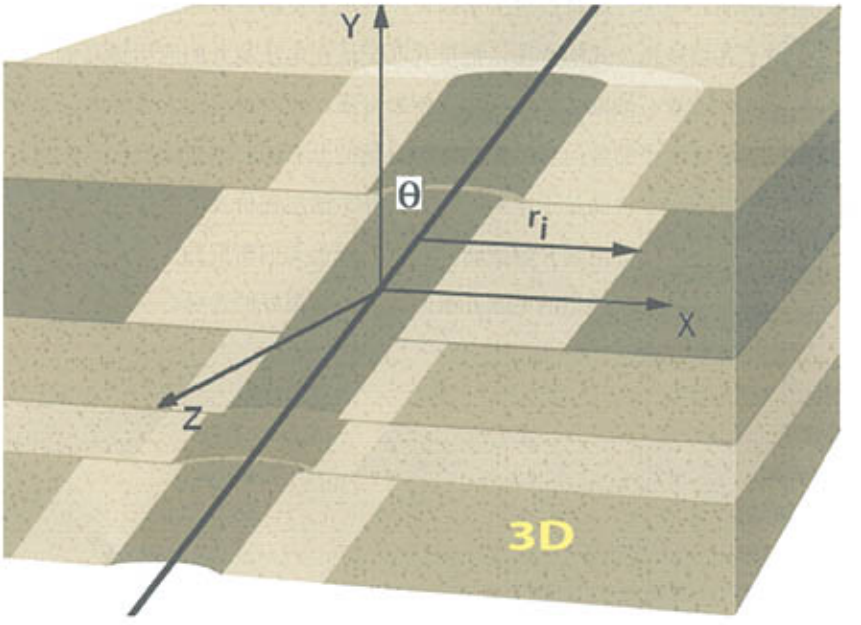


图 4-1　非轴对称条件下三维模式匹配法地层模型及坐标系

在此模型下，求解普通电阻率测井响应所要解决的定解问题是：求出一个连续而且适当光滑的函数Φ，它满足以下各条件：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial z})=0 \tag{4-1}$$

式中，σ 为在不同介质的电导率。

利用分离变量法，并令 $\Phi(x,y,z)=f(x,y)Z(z)$ 将其代入上式可得到两个方程：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=\lambda^2 Z \tag{4-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial f}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma\frac{\partial f}{\partial y})+\lambda^2 f=0 \tag{4-3}$$

式中，λ^2 称为本征值；f 为相应的本征函数。本征函数应满足如下边界条件和边值关系：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{df}{dx}=0\\&\lim_{y\to 0}\frac{df}{dy}=0\end{aligned} \tag{4-4}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=0\\&f(x,y)\text{以及}\sigma\frac{df}{dx},\sigma\frac{df}{dy}\text{ 在}(0,\infty)\text{上连续}\end{aligned} \tag{4-5}$$

在 XOY 平面内用二维数值法求解，在 Z 方向上用解析法求解。

4.1.2 二维有限元法等价变分问题

等价于上述边值问题的变分问题可描述为

$$\begin{cases}\delta F(f)=0\\ f=p \qquad (\text{为常数})\end{cases} \tag{4-6}$$

式中

$$F(f)=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}[\sigma(\frac{\partial f}{\partial x})^2+\sigma(\frac{\partial f}{\partial y})^2-\lambda^2 f^2]dxdy=\min \tag{4-7}$$

下面证明上述变分问题。首先，取 $F(f)$ 对 ϕ 的第一变分，得到

$$\delta F(f)=\iint_{D_{xy}}[\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\delta f}{\partial x}+\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\delta f}{\partial x}-\lambda^2 f\delta f]dxdy \tag{4-8}$$

然后，根据恒等式，

$$\begin{aligned}\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\delta f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\delta f)-[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial f}{\partial x})]\delta f\\ \sigma\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\delta f}{\partial y}&=\frac{\partial\phi}{\partial y}(\sigma\frac{\partial f}{\partial y}\delta f)-[\frac{\partial}{\partial y}(\sigma\frac{\partial f}{\partial y})]\delta f\end{aligned} \tag{4-9}$$

最后，考虑到驻点条件，令 $\delta F(f)=0$，即：

$$\begin{aligned}\delta F(f)=&\iint_{D_{xy}}[\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\delta f)+\frac{\partial f}{\partial y}(\sigma\frac{\partial f}{\partial y}\delta f)]dxdy\\ &-\iint_{D_{xy}}[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial f}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma\frac{\partial f}{\partial y})+\lambda^2 f]\delta f dxdy=0\end{aligned} \tag{4-10}$$

为了使上式对所有容许的变分均成立，则上式的右端第一项中的 $\delta\phi=0$，而且根据变分基本定理，上式的右端第二项中的中括号部分为零，即

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial f}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma\frac{\partial f}{\partial y})+\lambda^2 f=0$$

显然这就是式(4-3)。在这个问题中,式(4-4)是必要边界条件，式(4-5)是自然边界条件，它能自动满足。

4.1.3 广义特征值问题的推导

设 $\mathbf{g}=(g_1,g_2,\ldots,g_N)^T$ 为 XOY 平面上的一组完备的基函数，那么 $f(x,y)$ 可以表示为分域基函数的级数和，即

$$f(x,y)=\sum c_i g_i \tag{4-11}$$

也可以写成向量乘积的两种形式

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(c_1,c_2,\cdots,c_N)(g_1,g_2,\cdots,g_N)^T\\ f(x,y)&=(c_1,c_2,\cdots,c_N)(g_1,g_2,\cdots,g_N)^T\end{aligned} \tag{4-12}$$

将上式对 x,y 分别求偏导

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}&=(c_1,c_2,\cdots,c_N)(\frac{\partial g_1}{\partial x},\frac{\partial g_2}{\partial x},\cdots,\frac{\partial g_N}{\partial x})^T\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}&=(\frac{\partial c_1}{\partial x},\frac{\partial c_2}{\partial x},\cdots,\frac{\partial c_N}{\partial x})(g_1,g_2,\cdots,g_N)^T\end{aligned}$$

同理，$\frac{\partial f}{\partial y}$也有类似的形式，将$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$代入(4-7)上式，得

$$F(f)=\frac{1}{2}(c_1,c_2,\cdots,c_M)\iint\sigma\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\\ \vdots\\ \frac{\partial g_N}{\partial x}\end{pmatrix}(\frac{\partial g_1}{\partial x},\frac{\partial g_2}{\partial x},\cdots,\frac{\partial g_N}{\partial x})+\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial y}\\ \vdots\\ \frac{\partial g_N}{\partial y}\end{pmatrix}(\frac{\partial g_1}{\partial y},\frac{\partial g_2}{\partial y},\cdots,\frac{\partial g_N}{\partial y})\right]dxdy\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

$$-\lambda^2(c_1,c_2,\cdots,c_N)\iint\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_N\end{pmatrix}(g_1,g_2,\cdots,g_N)dxdy\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix} \tag{4-13}$$

$$=(c_1,c_2,\cdots,c_N)\mathbf{A}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_N\end{pmatrix}-\lambda^2(c_1,c_2,\cdots,c_N)\mathbf{B}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_N\end{pmatrix}$$

其中，

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\iint\sigma\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\\ \vdots\\ \frac{\partial g_N}{\partial x}\end{pmatrix}(\frac{\partial g_1}{\partial x},\frac{\partial g_2}{\partial x},\cdots,\frac{\partial g_N}{\partial x})+\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial y}\\ \vdots\\ \frac{\partial g_N}{\partial y}\end{pmatrix}(\frac{\partial g_1}{\partial y},\frac{\partial g_2}{\partial y},\cdots,\frac{\partial g_N}{\partial y})\right]dxdy$$

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2}\iint\sigma\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\\ \vdots\\ g_N\end{pmatrix}(g_1,g_2,\cdots,g_N)dxdy$$

考虑到驻点条件，对变分方程(4-13)取极值，即：令$\delta F(f)=0$，得

$$\mathbf{Ac}=\lambda^2\mathbf{Bc} \tag{4-14}$$

经有限元离散化处理，可得如下本征方程：

$$\mathbf{AC}=\mathbf{BCK}^2 \tag{4-15}$$

其中，$\mathbf{K}$是由N个特征值向量$(\lambda_1,\lambda_1,\cdots\lambda_N)$组成的特征值矩阵，它是一个正定的对角阵：$\mathbf{K}^2=diag(\lambda_1^2,\lambda_2^2\cdots,\lambda_N^2)$；$\mathbf{C}$是由$N$个本征向量$(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_1,\cdots\mathbf{c}_N)$组成的特征全矩阵，并且满足正交化条件：

$$\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C}=\mathbf{I} \tag{4-16}$$

式(4-15)就是广义特征值问题，是数值分析的关键。

设在Z方向上被人为地划分了$M+1$层，通过求解广义特征值问题，可以得到各层的本征值和本征向量。其具体算法详见附录 1。因此，各层的特征函数$f(x,y)$可以近似地表示成

$$[f_m(x,y)]^T=\mathbf{g}_m^T\mathbf{C}_m \tag{4-17}$$

这是数值模式匹配法中的数值部分

同时，式(4-2)的解可以表示成：

$$\mathbf{u}_m(z)=\mathbf{u}_m^+(z)+\mathbf{u}_m^-(z)=e^{-\mathbf{K}_m(z-z')}\mathbf{u}_m^+(z')+e^{\mathbf{K}_m(z-z')}\mathbf{u}_m^-(z') \tag{4-18}$$

其中，$\mathbf{u}_m^+(z)$和$\mathbf{u}_m^-(z)$分别为上行波、下行波，$\mathbf{u}_m^+(z')$和$\mathbf{u}_m^-(z')$分别为上行波、下行波在源点z'处的初始值。这便是数值模式匹配法中的解析部分。

这样，求解区域内的电势Φ_m可以写成：

$$\Phi_m(x,y,z)=\mathbf{g}_m^T(x,y)\mathbf{C}_m[\mathbf{u}_m^+(z)+\mathbf{u}_m^-(z)] \tag{4-19}$$

4.2 平面二维场的数值分析方法

4.2.1 网格划分

二维平面的网格划分包括横向划分和纵向划分两部分，皆采用均匀划分和非线性划分相结合的方法。在靠近电极(仪器)的地方，划分的元素要密一些；避免出现尖锐的三角形，保证三角形的质量。

横向网格划分：仪器半径处为第一点；仪器半径到井壁之间均匀划分；井壁处一点；井壁到 100 米处(代表无穷远)采用非线性划分的方法：如果在两点之间有侵入半径的分点，则在侵入半径点处作为一个分点，即增加一个分点。

纵向网格划分：将纵向按照地层界面和电极划将区域划分为几个单元，在每个单元内同样采用非线性划分的方法；保证在地层界面处为一分点；保证在电极处为一分点；最上、下电极到 100 米处(代表无穷远)均采用非线性划分的方法。

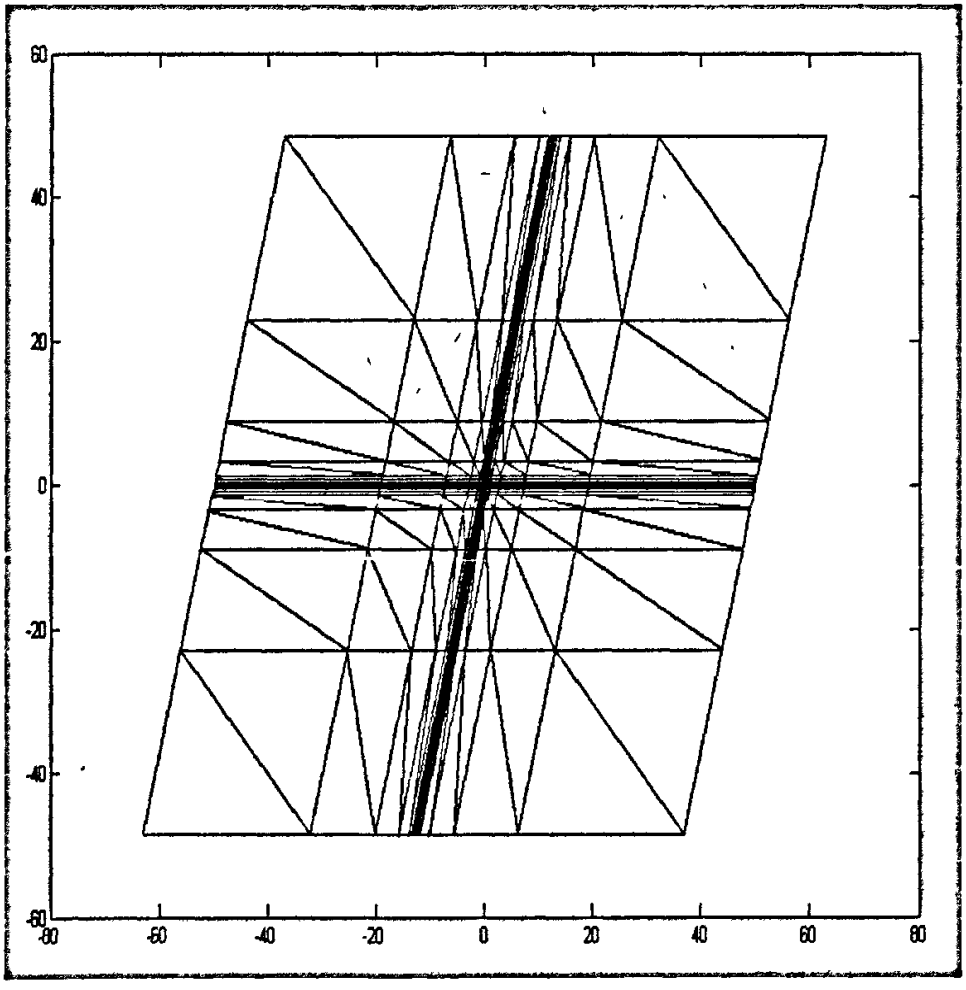


图 4-2　网格划分和单元示意图

4.2.2 节点编号与单元编号

节点编号很重要。节点编号如果相差比较大就会造成元素在总体刚度矩

阵中的位置比较分散，从而增加带宽，这不仅增加了存贮总体刚度矩阵的内存，而且降低了计算速度。为此，针对 X 轴方向划分节点的数目少于 Y 轴方向划分节点的数目[4]-[7]，采取先沿 X 轴后沿 Y 轴进行节点编号、单元编号的方案。

如图 4-2 为求解域内网格划分和单元编号、节点编号示意图，其中所涉及的三角形单元共有两种形态，其顶点编号 i,j,m，如图 4-3 所示。

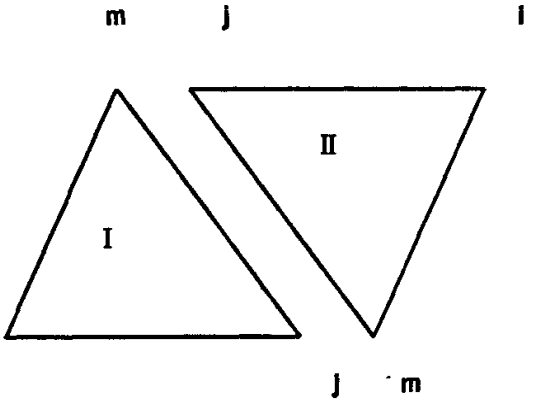


图 4-3　两种三角形单元

由于井斜的原因，虽然划分的区域不规则，在进行节点和单元编号时，可以按行按列进行排序和存储，因为节点编号与坐标位置没有关系。设 X 轴节点总数为 N_x，Y 轴节点总数为 N_y，则单元总数 $2(N_x-1)*(N_y-1)$。设 N_i 和 N_j 分别为节点所在的列号和行号，E 为单元编号，$I(E),J(E)$ 和 $M(E)$ 分别为单元 E 的总体节点编号。

对于 I 型单元

$$
\begin{aligned}
&E=2(N_i-1)*(N_y-1)+N_j\\
&I(E)=(N_i-1)*N_y+N_j\\
&J(E)=I(E)+N_y\\
&M(E)=I(E)+1
\end{aligned}
\tag{4-20}
$$

对于Ⅱ型单元

$$
\begin{aligned}
&E=(2N_i-1)*(N_y-1)+N_j\\
&I(E)=(N_i-1)*N_y+N_j+1\\
&J(E)=I(E)-N_y\\
&M(E)=I(E)-1
\end{aligned}
\tag{4-21}
$$

由于每个单元都不重复，所以顺序执行，就能求出区域内全部E或对应的$I(E)$,$J(E)$和$M(E)$，为单元分析和总体合成作好准备。

4.2.3 三角形基函数与单元分析

选用最简单的三角形单元，并用线性插值函数近似表示每一个单元e，则每一单元内的未知函数 可以表示为

$$\phi^e(x,y)=a^e+b^e x+c^e y \tag{4-22}$$

如图 4-4 所示为按照逆时针方向用i，j，m给出的单元e的节点编码，并用ϕ_i^e、ϕ_j^e和ϕ_m^e分别表示相应的ϕ值，(x_i^e,y_i^e)、(x_j^e,y_j^e)和(x_m^e,y_m^e)分别代表单元e中i，j，m三节点的坐标。根据上式，在这三个节点上分别满足

$$
\begin{cases}
\phi_i^e=a^e+b^e x_i^e+c^e y_i^e\\
\phi_j^e=a^e+b^e x_j^e+c^e y_j^e\\
\phi_m^e=a^e+b^e x_m^e+c^e y_m^e
\end{cases}
\tag{4-23}
$$

求解此方程组(4-23)，解出常系数a^e、b^e和c^e，并将它们带回式(4-22)，得到

$$\phi^e(x,y)=g_i^e\phi_i^e+g_j^e\phi_j^e+g_m^e\phi_m^e$$

式中，g_i^e、g_j^e和g_m^e分别是线性三角形单元 3 个节点的插值函数

$$
\begin{aligned}
&g_i^e(x,y)=\frac{1}{2\Delta}\left(a_i^e+b_i^e x+c_i^e y\right)\\
&g_j^e(x,y)=\frac{1}{2\Delta}\left(a_j^e+b_j^e x+c_j^e y\right)\\
&g_m^e(x,y)=\frac{1}{2\Delta}\left(a_m^e+b_m^e x+c_m^e y\right)
\end{aligned}
\tag{4-24}
$$

其中，$a_i^e=x_j^e y_m^e-x_m^e y_j^e$，$b_i^e=y_m^e-y_j^e$，$c_i^e=x_m^e-x_j^e$；

$a_j^e=x_m^e y_i^e-x_i^e y_m^e$，$b_j^e=y_m^e-y_i^e$，$c_j^e=x_i^e-x_m^e$；

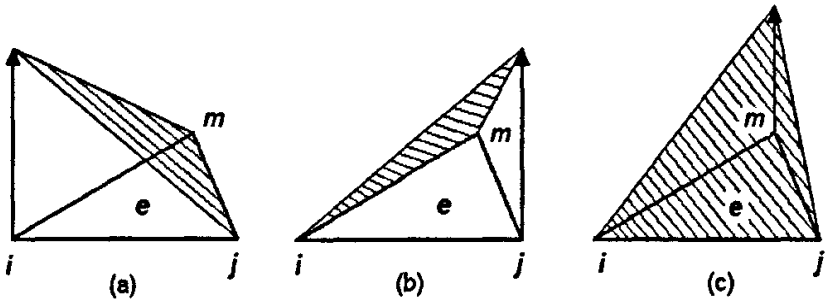
$a_m^e = x_i^e y_j^e - x_j^e y_i^e$，$b_m^e = y_j^e - y_i^e$，$c_m^e = x_j^e - x_i^e$。

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i^e & y_i^e \\ 1 & x_j^e & y_j^e \\ 1 & x_m^e & y_m^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e) = \text{单元}e\text{的面积}$$

容易证明，插值函数具有如下性质：

$$g_i^e(x,y) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

结果，在节点 j 上，上式退化为其节点值。而且，当观察点 (x,y) 位于第 j 个节点的对边时，$g_i(x,y)$ 为零。所以，一个单元边的 ϕ 值与其相对点处的 ϕ 值无关，它与该边两端点的 ϕ 值有关。这一重要性质保证了单元两侧的解的连续性。如图 4-4 为三角形单元的插值函数 g_j^e。



(a) g_i^e；(b) g_j^e；(c) g_m^e

图 4-4　三角形线性插值函数

应用积分方程[5]：

$$\iint_{\Delta^{(e)}} L_i^k L_j^n L_m^l dxdy = 2\Delta \frac{k!n!l!}{(k+n+l+2)!} \tag{4-25}$$

根据式(4-9)和推导出的方程(4-6)中表达的 **A**、**B** 阵，对于所选单元，其单元矩阵为

$$\mathbf{A}^{(e)} = \frac{1}{4\Delta}\sigma \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ \text{对} & \text{称} & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \tag{4-26-a}$$

$$\mathbf{B}^{(e)}=\iint_{e}\sigma\begin{bmatrix} g_i^e g_i^e & g_i^e g_j & g_i^e g_m^e \\ & g_j^e g_j^e & g_j^e g_m^e \\ & & g_m^e g_m^e \end{bmatrix}dxdy=2\sigma\Delta\begin{bmatrix} \frac{2!}{4!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{4!} \\ & \frac{2!}{4!} & \frac{1}{4!} \\ 对 & 称 & \frac{2}{4!} \end{bmatrix} \tag{4-26-b}$$

4.2.4 总体合成及其总体刚度矩阵的形成

总体合成是利用单元分析所建立的单元方程通过累加建立整个定解域上的方程。总体刚度矩阵的维数为全部节点的总数。按照上述介绍的局部编号和总体编号之间的规律(4-20)和(4-21)，由于每个单元都不重复，将单元矩阵顺序累加，就能完成刚度矩阵的整体合成。

总体矩阵安装完成后，通过求解广义特征值问题(本征方程式 4-6)，就能够求出特征值阵 $\mathbf{K}$ 和向量全矩阵 $\mathbf{C}$。三维 NMM 方法的平面数值分析部分计算完毕。

4.3 解析部分的推导

XOY 面通过井轴和层面法线。点电极安置在这个面上。因此这个面是介质和场的对称面。在这个面上有以下两式成立：

$$\begin{aligned} u_+^+ &= u_-^+ + b \\ u_-^- &= u_+^- + b \end{aligned} \tag{4-27}$$

式中，上标+和-分别代表上行波和下行波；下标+和-分别代表 $z=0_+$ 和 $z=0_-$ 处有关量的取值，下同。如果介质参数与 z 无关，我们有

$$\begin{aligned} u_-^+ &= 0 \\ u_+^- &= 0 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_+^+ &= \mathbf{b} \\ \mathbf{u}_-^- &= \mathbf{b} \end{aligned} \tag{4-28}$$

考虑到电源 I 被设置在 XOY 面的(0，0)点上，该面上的电流密度可表为

$$j_{z\pm}=\pm\frac{I}{2}\delta(x)\delta(y)$$

所以

$$\mathbf{b}=\frac{I}{2}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{g}(0,0) \tag{4-29}$$

由于(4-28)式，整个空间的电势可以表示为

$$\Phi(x,y,z)=\mathbf{g}^{T}(x,y)\mathbf{C}e^{-\mathbf{K}|z|}\mathbf{b} \tag{4-30}$$

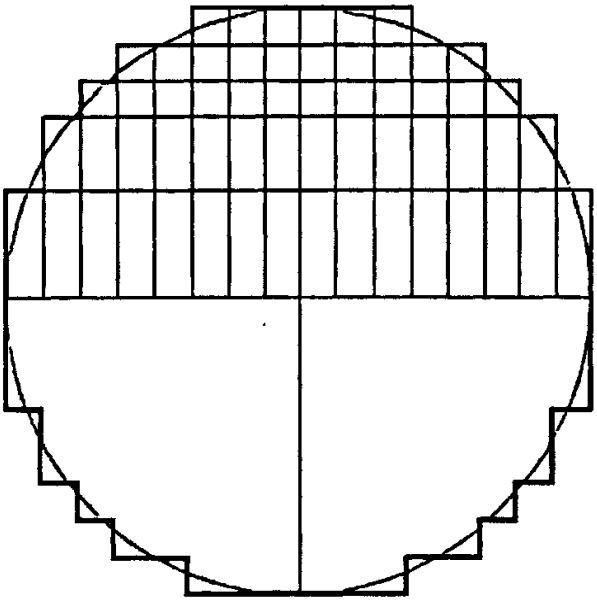


图 4-5　井眼的折线近似

上面提到的“介质参数与 z 无关”这一条件，均匀介质满足；有层面而没有井和侵入带的介质也满足，因为层面垂直于 XOY 面。

在均匀介质的条件下，电位和 Z 方向的电场强度为

$$\Phi(x,y,z)=\mathbf{g}^{T}(x,y)\mathbf{C}e^{-\mathbf{K}|z|}\mathbf{b}=\frac{I}{4\pi\sigma\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}} \tag{4-31}$$

$$E_{z}(x,y,z)=\mathbf{g}^{T}(x,y)\mathbf{C}\mathbf{K}e^{-\mathbf{K}|z|}\mathbf{b}=\frac{I|z|}{4\pi\sigma(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{3/2}} \tag{4-32}$$

(4-31)、(4-32)两式是检查特征向量计算正确与否的重要工具。有层面但没有井的情况也有解析解，它们也可以充当检验工具。

下面讨论在没有解析解的情况。

在有井的情况下（井眼的折线近似如图 4-5），最靠近 $z=0$ 的 XOY 面的两个层分别用下标 1 和-1 表示。在贴近 XOY 面处($|z|\to 0$)，有如下表达式：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^+ &= \mathbf{v}+\frac{\mathbf{b}}{2}, \quad \mathbf{u}_1^- = \mathbf{v}-\frac{\mathbf{b}}{2} \\ \mathbf{u}_{-1}^- &= \mathbf{v}+\frac{\mathbf{b}}{2}, \quad \mathbf{u}_{-1}^+ = \mathbf{v}-\frac{\mathbf{b}}{2} \end{aligned} \tag{4-33}$$

式中，左端的向量代表 1(-1)层底(顶)面的数值。很显然，以上两式满足(4-27)式，并满足 XOY 面上下场对称的条件。由于对称，只考虑 XOY 面以上的场：

$$\Phi_1 = \mathbf{g}^T(x,y)\mathbf{C}_1[(e^{-\mathbf{K}_1 z}+e^{\mathbf{K}_1 z})\mathbf{v}+\frac{1}{2}(e^{-\mathbf{K}_1 z}-e^{\mathbf{K}_1 z})\mathbf{b}] \tag{4-34}$$

$$E_{z1} = \mathbf{g}^T(x,y)\mathbf{C}_1\mathbf{K}_1[(e^{-\mathbf{K}_1 z}-e^{\mathbf{K}_1 z})\mathbf{v}+\frac{1}{2}(e^{-\mathbf{K}_1 z}+e^{\mathbf{K}_1 z})\mathbf{b}] \tag{4-35}$$

显然，在 XOY 面上($z=0$)，由于(4-32)式，$E_{z1}=0$。这正是对称场所应满足的条件。根据层面处电势连续、电流密度 z 分量连续的耦合条件，得到从 m 层到 m+1 层的递推公式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{m+1}^+ \\ \mathbf{u}_{m+1}^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{m+1,m}+\mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m & \mathbf{P}_{m+1,m}-\mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m \\ \mathbf{P}_{m+1,m}-\mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m & \mathbf{P}_{m+1,m}+\mathbf{K}_{m+1}^{-1}\mathbf{Q}_{m+1,m}\mathbf{K}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\mathbf{K}_m h_m} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{K}_m h_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_m^+ \\ \mathbf{u}_m^- \end{pmatrix} \tag{4-36}$$

式中，所有向量都是在有关层底面的值，h_m 是 m 层的厚度，

$$\mathbf{P}_{m+1,m} = \mathbf{C}_{m+1}^T\mathbf{B}_{m+1}\mathbf{C}_m$$

$$\mathbf{Q}_{m+1,m} = \mathbf{C}_{m+1}^T\mathbf{B}_m\mathbf{C}_m$$

假定层面 M 是最上一个层面，其上第 M+1 层到第 1 层的关系式为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{M+1}^+ \\ \mathbf{u}_{M+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}+\frac{\mathbf{b}}{2} \\ \mathbf{v}-\frac{\mathbf{b}}{2} \end{pmatrix} \tag{4-37}$$

式中，S_{ij} 是(4-24)式所示各层内的传播阵和各层间的过渡阵连续相乘而得，并且 u_1^+ 和 u_1^- 用(4-21)式表达。由于 $u_{M+1}^-=0$，有

$$(\mathbf{S}_{21}+\mathbf{S}_{22})\mathbf{v} = (\mathbf{S}_{22}-\mathbf{S}_{21})\frac{\mathbf{b}}{2} \tag{4-38}$$

从此式解出 v，就可以根据(4-22)式求出 XOY 面上各点的电势。

4.4 计算流程框图

图 4-6 为程序设计和计算流程。

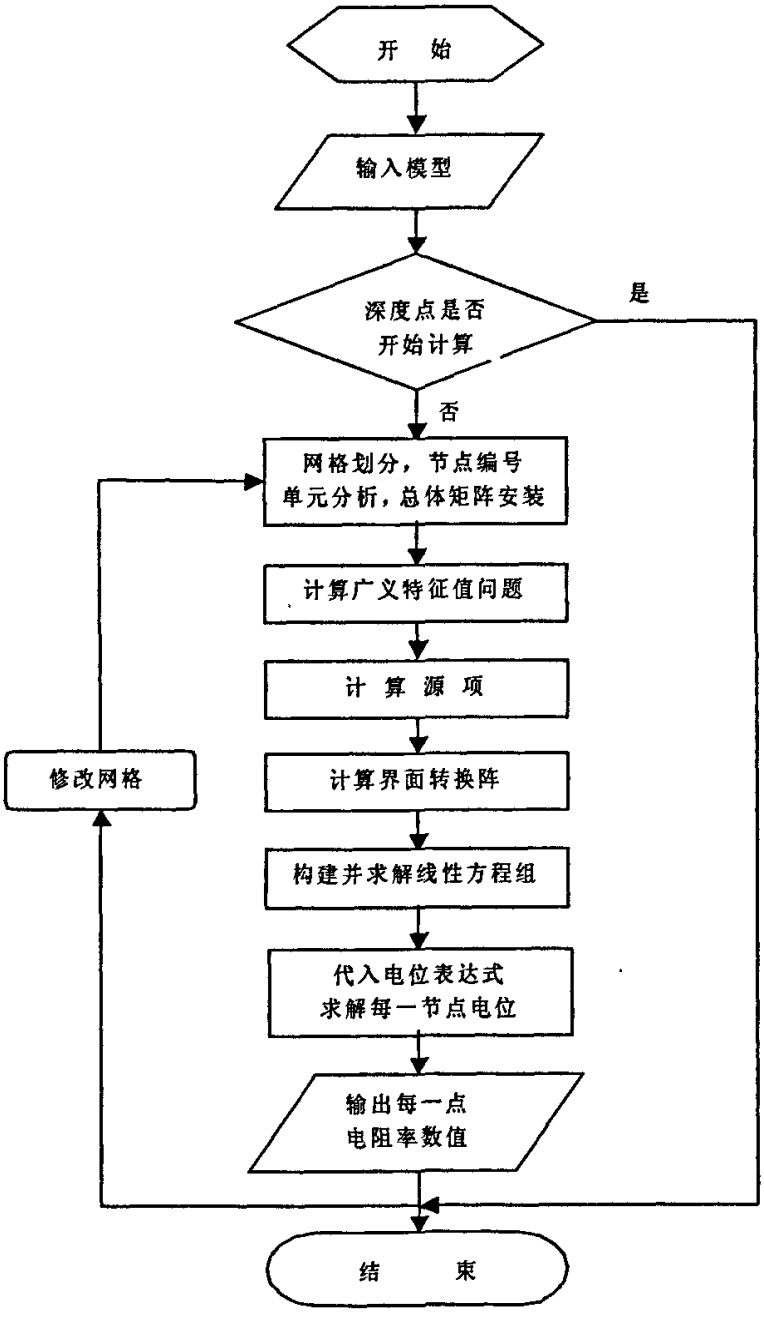


图 4-6　计算流程框图

4.5 计算结果与检验

4.5.1 轴对称均匀地层模型

（1） 1/4 区域的研究结果

如图 4-7 为平面 1/4 区域的网格划分。

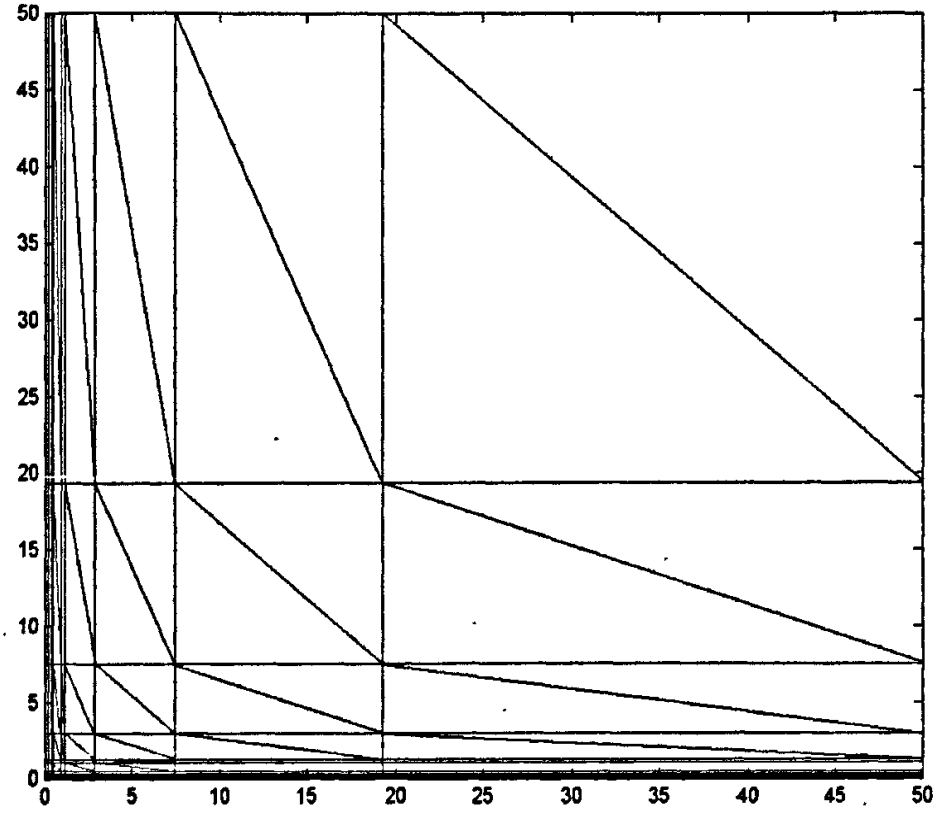


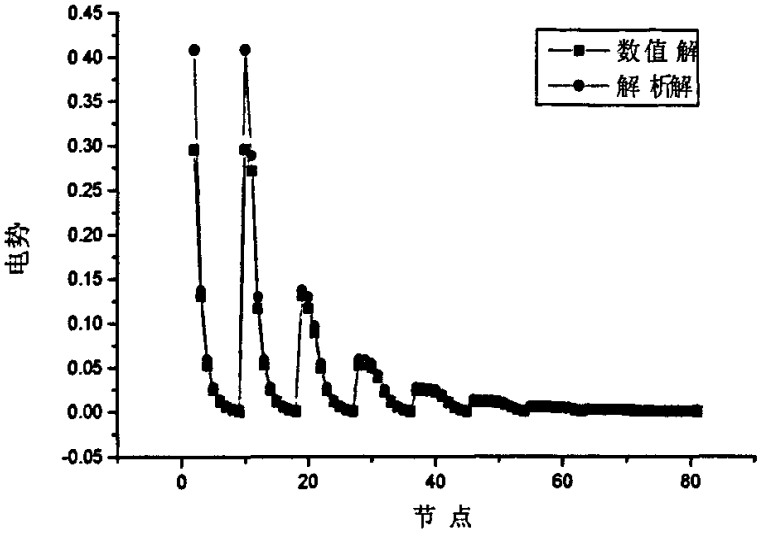
图 4-7　1/4 区域的网格划分

X 轴和 Y 轴均采用等比网格。总节点数$10\times10=100$，考虑边界条件压缩后为 100-19=81。电阻率设 1.0ohmm。其数值模拟结果如表 4-1。从表中看出，在靠近电极和远离电极处相对误差较大，而在适中距离处相对误差较小。这是因为：在靠近电极解析解趋于无穷大，而数值解是有限的，所以误差较大；在远离电极处，解析解趋于零，用趋于零的解析解除绝对误差，得出的相对误差当然大。电极系的长度恰好在“适中距离”处，其精度是得到保证的。

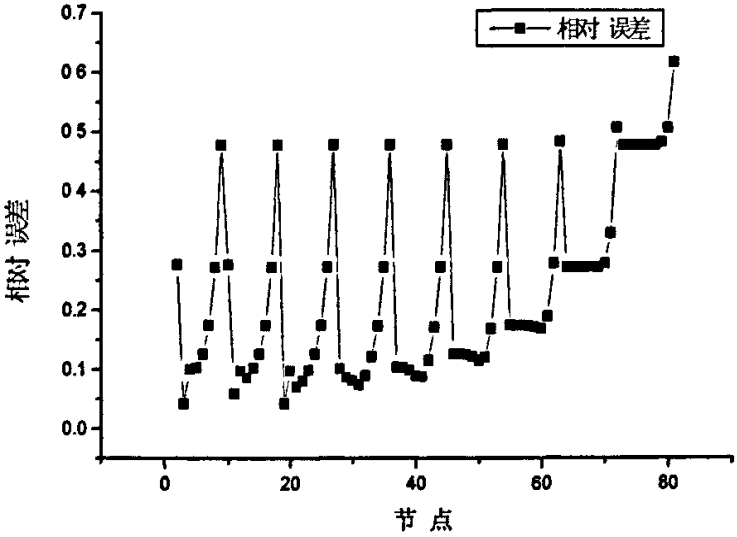
表 4-1　等比网格的数值与解析结果对比

压缩后序号	原始序号	节点 X 轴坐标	节点 Y 轴坐标	数值解	解析解	相对误差
2	2	.00000	.19569	.29428509E+00	.40664090E+00	.27630
3	3	.00000	.58708	.12990529E+00	.13554697E+00	.04162
4	4	.00000	1.36986	.52292954E-01	.58091557E-01	.09982
5	5	.00000	2 93542	.24317926E-01	.27109393E-01	.10297
6	6	.00000	6.06654	.11479027E-01	.13117448E-01	.12490
7	7	.00000	12.32877	.53342674E-02	.64546174E-02	.17357
8	8	.00000	24 85323	.23319004E-02	.32018968E-02	.27171
9	9	.00000	49 90215	.83410633E-03	.15946702E-02	.47694
10	11	.19569	.00000	.29428509E+00	.40664090E+00	.27630
11	12	.19569	.19569	.27064351E+00	.28753854E+00	.05876
12	13	.19569	.58708	.11618676E+00	.12859114E+00	.09646
13	14	.19569	1.36986	.52601789E-01	.57507707E-01	.08531
14	15	.19569	2 93542	.24280638E-01	.27049350E-01	.10236
15	16	.19569	6 06654	.11470062E-01	.13110629E-01	.12513
16	17	.19569	12.32877	.53348436E-02	.64538045E-02	.17338
17	18	.19569	24 85323	.23317352E-02	.32017976E-02	.27174
18	19	.19569	49 90215	.83410687E-03	.15946579E-02	.47694
19	21	.58708	.00000	.12990529E+00	.13554697E+00	.04162
20	22	.58708	.19569	.11618676E+00	.12859114E+00	.09646
21	23	.58708	.58708	.89170919E-01	.95846179E-01	.06965
22	24	.58708	1.36986	.49139103E-01	.53394566E-01	.07970
23	25	.58708	2 93542	.23997535E-01	.26582947E-01	.09726
24	26	.58708	6 06654	.11433248E-01	.13056452E-01	.12432
25	27	.58708	12.32877	.53304026E-02	.64473117E-02	.17324
26	28	.58708	24 85323	.23312463E-02	.32010039E-02	.27171
27	29	.58708	49 90215	.83403736E-03	.15945598E-02	.47695
28	31	1.36986	.00000	.52292954E-01	.58091557E-01	.09982
29	32	1.36986	.19569	.52601789E-01	.57507707E-01	.08531
30	33	1.36986	.58708	.49139103E-01	.53394566E-01	.07970
31	34	1.36986	1.36986	.38080597E-01	.41076934E-01	.07294
32	35	1.36986	2.93542	.22398065E-01	.24566075E-01	.08825
33	36	1.36986	6 06654	.11251775E-01	.12795297E-01	.12063
34	37	1.36986	12.32877	.53081592E-02	.64151393E-02	.17256
35	38	1.36986	24.85323	.23285084E-02	.31970442E-02	.27167
36	39	1.36986	49 90215	.83370460E-03	.15940697E-02	.47700
37	41	2.93542	.00000	.24317926E-01	.27109393E-01	.10297
38	42	2.93542	.19569	.24280638E-01	.27049350E-01	.10236
39	43	2 93542	.58708	.23997535E-01	.26582947E-01	09726
40	44	2.93542	1.36986	.22398065E-01	.24566075E-01	.08825

压缩后序号	原始序号	节点 X 轴坐标	节点 Y 轴坐标	数值解	解析解	相对误差
41	45	2.93542	2.93542	.17503484E-01	.19169236E-01	.08690
42	46	2.93542	6.06654	.10466035E-01	.11807792E-01	.11363
43	47	2.93542	12.32877	.52112216E-02	.62790920E-02	.17007
44	48	2.93542	24.85323	.23164112E-02	.31797945E-02	.27152
45	49	2.93542	49 90215	.83221433E-03	.15919184E-02	.47723
46	51	6.06654	.00000	.11479027E-01	.13117448E-01	.12490
47	52	6.06654	.19569	.11470062E-01	.13110629E-01	.12513
48	53	6 06654	.58708	.11433248E-01	.13056452E-01	.12432
49	54	6 06654	1.36986	.11251775E-01	.12795297E-01	.12063
50	55	6 06654	2 93542	.10466035E-01	.11807792E-01	.11363
51	56	6.06654	6 06654	.81635963E-02	.92754367E-02	.11987
52	57	6 06654	12.32877	.48215116E-02	.57914538E-02	.16748
53	58	6.06654	24.85323	.22665585E-02	.31105703E-02	.27134
54	59	6.06654	49 90215	.82599802E-03	.15830155E-02	.47821
55	61	12.32877	.00000	.53342674E-02	.64546174E-02	.17357
56	62	12.32877	.19569	.53348436E-02	.64538045E-02	.17338
57	63	12.32877	.58708	.53304026E-02	.64473117E-02	.17324
58	64	12.32877	1.36986	.53081592E-02	.64151393E-02	.17256
59	65	12.32877	2.93542	.52112216E-02	.62790920E-02	.17007
60	66	12.32877	6.06654	.48215116E-02	.57914538E-02	.16748
61	67	12.32877	12.32877	.37038371E-02	.45641038E-02	.18849
62	68	12.32877	24 85323	.20721708E-02	.28683665E-02	.27758
63	69	12.32877	49.90215	.80103417E-03	.15481228E-02	.48258
64	71	24 85323	.00000	.23319004E-02	.32018968E-02	.27171
65	72	24 85323	.19569	.23317352E-02	.32017976E-02	.27174
66	73	24 85323	.58708	.23312463E-02	.32010039E-02	.27171
67	74	24 85323	1.36986	.23285084E-02	.31970442E-02	.27167
68	75	24 85323	2 93542	.23164112E-02	.31797945E-02	.27152
69	76	24 85323	6.06654	.22665585E-02	.31105703E-02	.27134
70	77	24.85323	12.32877	.20721708E-02	.28683665E-02	.27758
71	78	24.85323	24.85323	.15198257E-02	.22640830E-02	.32872
72	79	24 85323	49.90215	.70500388E-03	.14274342E-02	.50610
73	81	49.90215	.00000	.83410633E-03	.15946702E-02	.47694
74	82	49.90215	.19569	.83410687E-03	.15946579E-02	.47694
75	83	49 90215	.58708	.83403736E-03	.15945598E-02	.47695
76	84	49.90215	1.36986	.83370460E-03	.15940697E-02	.47700
77	85	49.90215	2.93542	.83221433E-03	.15919184E-02	.47723
78	86	49.90215	6.06654	.82599802E-03	.15830155E-02	.47821
79	87	49.90215	12.32877	.80103417E-03	.15481228E-02	.48258
80	88	49.90215	24 85323	.70500388E-03	.14274342E-02	.50610
81	89	49 90215	49.90215	.43262849E-03	.11276021E-02	.61633



(a)网格中各节点电势的数值解与解析解



(b)各节点数值解与解析解的相对误差

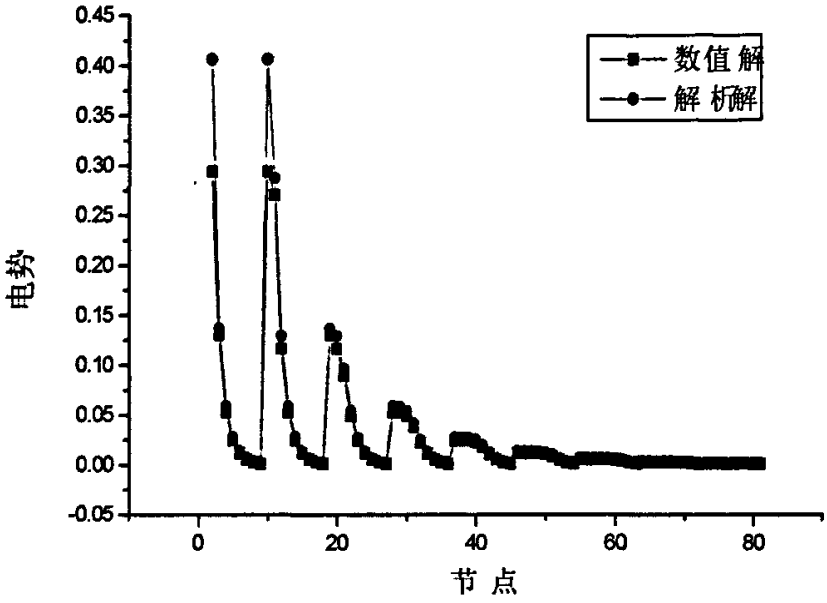
图 4-8　数值解与解析解的比较

采用均匀-等比网格。井眼内为均匀网格，侵入带和原形地层为等比网格。总节点数和压缩后节点数都不变。其数值模拟结果如下表：

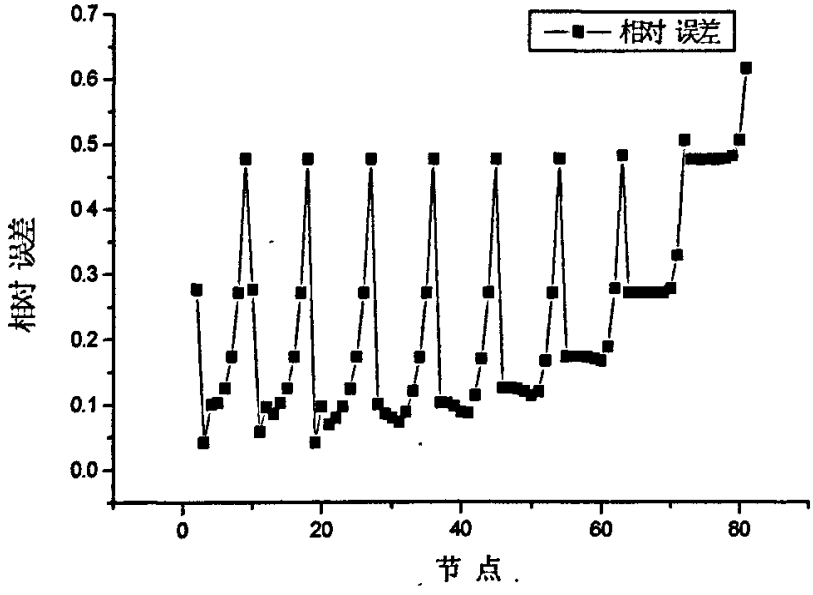
表 4-2　均匀-等比网格的数值与解析结果对比

压缩后序号	原始序号	节点 X 轴坐标	节点 Y 轴坐标	数值解	解析解	相对误差
2	2	.00000	.16667	.78795182E+00	.47746485E+00	0 6503
3	3	.00000	.33333	.21395856E+00	.23873243E+00	.10377
4	4	.00000	.50000	.12506554E+00	.15915495E+00	.21419
5	5	.00000	2.07937	.34939933E-01	.38270084E-01	.08702
6	6	.00000	5.23810	.13454121E-01	.15192063E-01	.11440
7	7	.00000	11.55556	.57170097E-02	.68865123E-02	.16983
8	8	.00000	24.19048	.24092892E-02	.32896200E-02	.26761
9	9	.00000	49.46032	.84651996E-03	.16089156E-02	.47386
10	11	.03962	.00000	.13855487E+01	.20083151E+01	.31009
11	12	.03962	.16667	.27194005E+00	.46451751E+00	.41458
12	13	.03962	.33333	.17128231E+00	.23706338E+00	.27748
13	14	.03962	.50000	.12584740E+00	.15865753E+00	.20680
14	15	.03962	2.07937	.34941439E-01	.38263137E-01	.08681
15	16	.03962	5.23810	.13449833E-01	.15191629E-01	.11465
16	17	.03962	11.55556	.57174211E-02	.68864718E-02	.16976
17	18	.03962	24.19048	.24093202E-02	.32896156E-02	.26760
18	19	.03962	49.46032	.84649974E-03	.16089151E-02	.47387
19	21	.07925	.00000	.78724568E+00	.10041576E+01	.21601
20	22	.07925	.16667	.23519545E+00	.43120168E+00	.45456
21	23	.07925	.33333	.17388060E+00	.23225876E+00	.25135
22	24	.07925	.50000	.12571283E+00	.15719278E+00	.20026
23	25	.07925	2.07937	.34976518E-01	.38242320E-01	.08540
24	26	.07925	5.23810	.13449426E-01	.15190325E-01	.11461
25	27	.07925	11.55556	.57169073E-02	.68863504E-02	.16982
26	28	.07925	24.19048	.24093923E-02	.32896024E-02	.26757
27	29	.07925	49.46032	.84648892E-03	.16089135E-02	.47388
28	31	.11887	.00000	.32606452E+00	.66943838E+00	.51293
29	32	.11887	.16667	.22461508E+00	.38872277E+00	.42217
30	33	.11887	.33333	.16636498E+00	.22486183E+00	.26015
31	34	.11887	.50000	.12593225E+00	.15483917E+00	.18669
32	35	.11887	2.07937	.35009816E-01	.38207701E-01	.08370
33	36	.11887	5.23810	.13446297E-01	.15188153E-01	.11469
34	37	.11887	11.55556	.57169100E-02	.68861479E-02	.16980
35	38	.11887	24.19048	.24093657E-02	.32895803E-02	.26758
36	39	.11887	49.46032	.84648674E-03	.16089109E-02	.47388
37	41	1.70429	.00000	.26808291E-01	.46692540E-01	.42585
38	42	1.70429	.16667	.32230973E-01	.46470859E-01	.30643
39	43	1.70429	.33333	.34779545E-01	.45824293E-01	.24102
40	44	1.70429	.50000	.36390973E-01	.44804174E-01	.18778

压缩后序号	原始序号	节点 X 轴坐标	节点 Y 轴坐标	数值解	解析解	相对误差
41	45	1.70429	2.07937	.26431953E-01	.29598554E-01	.10698
42	46	1.70429	5 23810	.12838963E-01	.14446624E-01	.11128
43	47	1.70429	11.55556	.56831064E-02	.68128140E-02	.16582
44	48	1.70429	24 19048	.24045573E-02	.32814861E-02	.26724
45	49	1.70429	49 46032	.84595905E-03	.16079613E-02	.47389
46	51	4 87512	.00000	.15501492E-01	.16323196E-01	.05034
47	52	4 87512	.16667	.14979596E-01	.16313665E-01	.08178
48	53	4 87512	.33333	.14657996E-01	.16285173E-01	.09992
49	54	4 87512	.50000	.14398694E-01	.16238016E-01	.11327
50	55	4 87512	2.07937	.13178535E-01	.15014480E-01	.12228
51	56	4 87512	5 23810	.97881882E-02	.11120812E-01	.11983
52	57	4 87512	11.55556	.53172709E-02	.63449628E-02	.16197
53	58	4 87512	24 19048	.23664797E-02	.32247853E-02	.26616
54	59	4 87512	49 46032	.84145559E-03	.16011565E-02	.47447
55	61	11 21678	.00000	.57058515E-02	.70945057E-02	.19574
56	62	11.21678	.16667	.57631139E-02	.70937227E-02	.18758
57	63	11 21678	.33333	.58002195E-02	.70913752E-02	.18207
58	64	11 21678	.50000	.58278372E-02	.70874677E-02	.17773
59	65	11 21678	2.07937	.58057163E-02	.69756565E-02	.16772
60	66	11 21678	5 23810	.53746097E-02	.64281306E-02	.16389
61	67	11 21678	11 55556	.40384730E-02	.49413955E-02	.18273
62	68	11 21678	24 19048	.21757057E-02	.29843986E-02	.27097
63	69	11 21678	49 46032	.81908640E-03	.15690722E-02	.47798
64	71	23.90009	.00000	.24602768E-02	.33295885E-02	.26109
65	72	23 90009	.16667	.24532100E-02	.33295076E-02	.26319
66	73	23.90009	.33333	.24477971E-02	.33292647E-02	.26476
67	74	23 90009	.50000	.24433097E-02	.33288601E-02	.26602
68	75	23.90009	2.07937	.24296088E-02	.33170581E-02	.26754
69	76	23.90009	5 23810	.23863262E-02	.32523922E-02	.26629
70	77	23 90009	11 55556	.21844616E-02	.29976026E-02	.27126
71	78	23.90009	24 19048	.15871055E-02	.23401156E-02	.32178
72	79	23.90009	49 46032	.72370790E-03	.14486512E-02	.50043
73	81	49.26673	.00000	.84794976E-03	.16152377E-02	.47503
74	82	49.26673	.16667	.84886036E-03	.16152284E-02	.47446
75	83	49 26673	.33333	.84954383E-03	.16152007E-02	47403
76	84	49.26673	.50000	.85006312E-03	.16151545E-02	.47370
77	85	49 26673	2.07937	.85003589E-03	.16138009E-02	.47327
78	86	49 26673	5.23810	.84476027E-03	.16061849E-02	.47406
79	87	49.26673	11 55556	.82123352E-03	.15725603E-02	.47777
80	88	49.26673	24.19048	.72419770E-03	.14498884E-02	.50051
81	89	49 26673	49 46032	.44313709E-03	.11399037E-02	.61125



(a)网格中各节点电势的数值解与解析解



(b)各节点数值解与解析解的相对误差

图 4-9　数值解与解析解的比较

将网格加密到 20*20=400，压缩后为 361 维的实验，变化规律与前述相同。从两种网格划分结果对比看，加密网格的计算结果与解析解的误差变小。在(0.0, 0.5)这个点，100 节点是 0.125， 加密网格是 0.128， 解析解是 0.159。此外，还改变网格中的对角线的划分方法，并进行了实验，但是结果没有什么改善。

(1)　1/2 区域的研究结果

采用井眼内均匀-井眼外等比的网格划分方法。网格划分时，在 Y〈0 的方向对称地增加图 4-7 所示的网格。

(2)　全平面的研究结果

如图 4-10 为轴对称条件下全平面的网格划分。

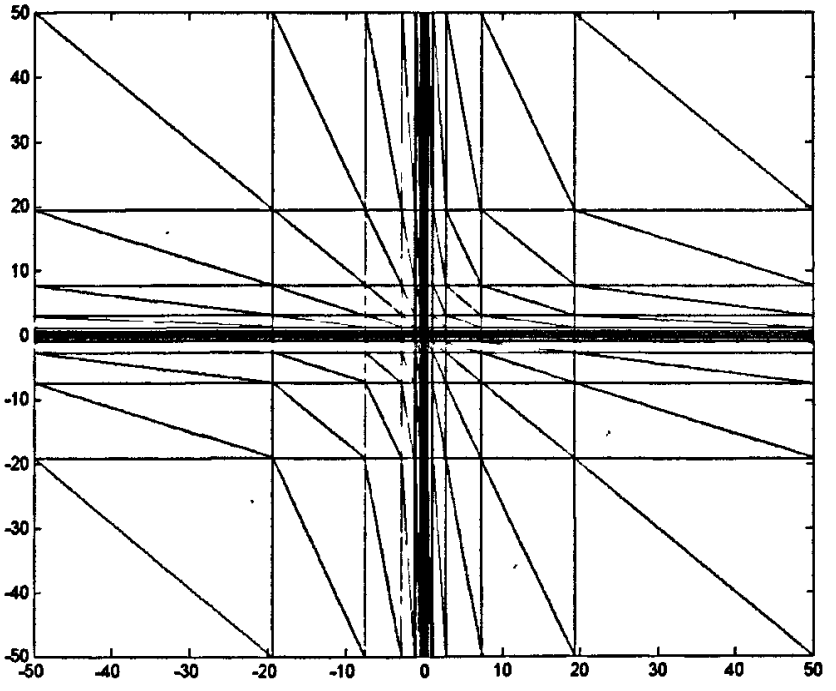


图 4-10　轴对称全平面的网格划分

如图 4-11 为均匀介质中，针对不同研究区域的计算结果。从计算结果可以看出，随着网格数目地增加，计算精度也越来越高。

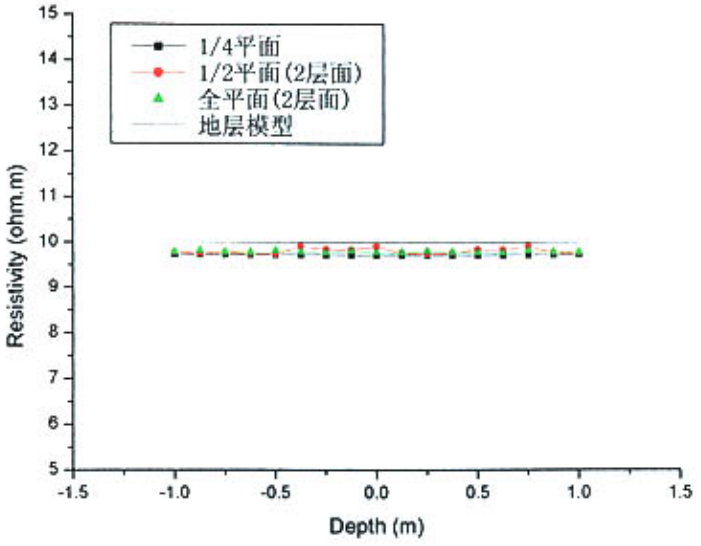


图 4-11　均匀介质不同研究区域的计算结果

4.5.2 无井眼地层模型

(1)　有一地层界面的实验结果

单地层界面测井响应的特征是理解存在多地层界面时测井响应的关键。考虑二层介质情况，假设另一侧电阻率(Rs)为 1Ω·m，一侧地层介质电阻率(Rt)为 10Ω·m。如图 4-12 为有一个地层界面情形时，3-D NMM 与 2-D NMM 和解析方法的对比情况。可以看出，3-D NMM 方法对界面的分辨很准确，而且其特征比 2-D NMM 略好。

针对不同的井斜角计算得到的视电阻率响应如图 4-13(a)和图 4-1(b)所示。从图中可以看出在井斜角不大于 15 度的范围内，仪器的测井响应几乎不受井斜角的影响；当井斜角大于 15 度以后，随着井斜角的增大，测井响应对地层界面的反应越来越于迟钝，响应曲线在地层界面处的分辨率越来越低；当井斜角达到 90 度时(水平井情形)，测井响应均为一条直线。因为水平井中，随着仪器在井眼内移动，仪器周围的介质相对于仪器并没有改变。

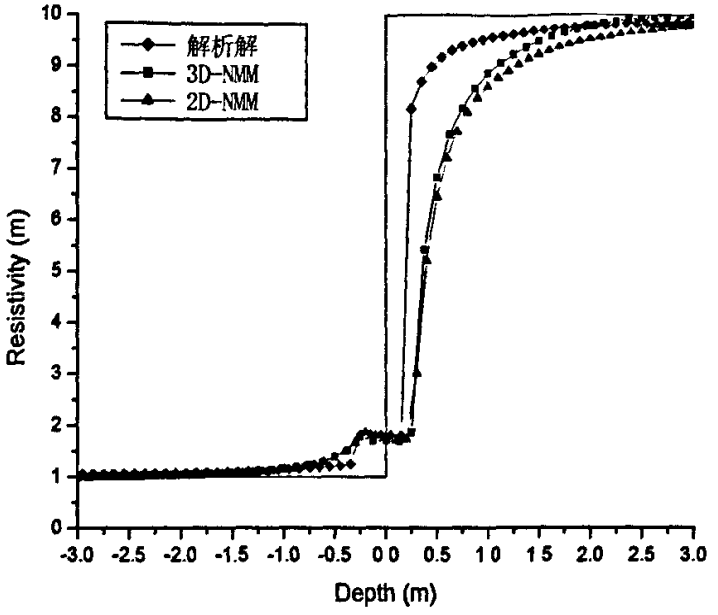


图 4-12　有一个地层界面的实验结果

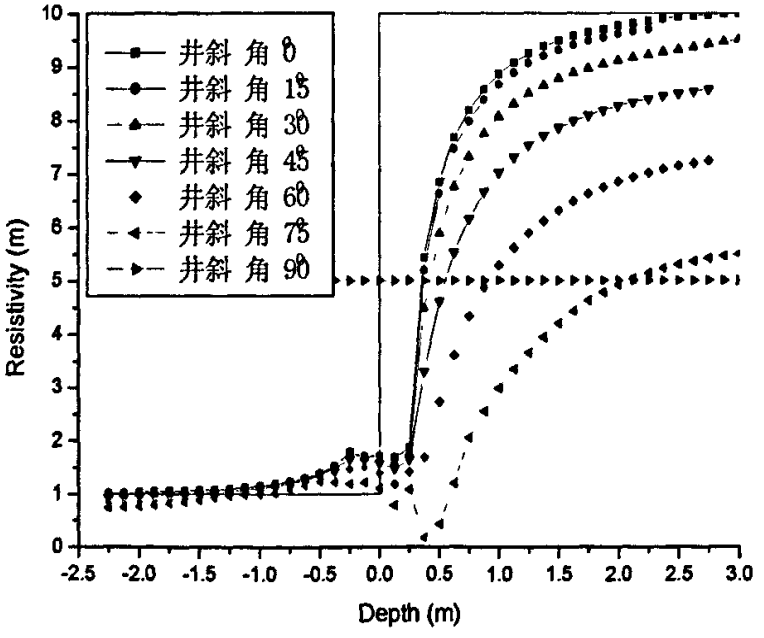


图 4-13　一个地层界面不同井斜的实验结果

(2)　有两个地层界面的实验结果

对于三层介质情况，中间为目的层，上下为低阻围岩，原状地层电阻率(Rt)为 10Ω·m，围岩电阻率(Rs)为 1Ω·m，地层的上下界面分别为-0.5 米和 0.5 米，即地层厚度为 1.0 米。

图 4-14 为在此三层模型中，3-D NMM 和 2-D NMM 实验结果。通过对比可以看出，3-D NMM(三维模式匹配)方法的结果在地层中点的数值比点比 2-D NMM(二维模式匹配)要高，这说明 3-D NMM 方法比 2-D NMM 受上下围岩的影响要小。

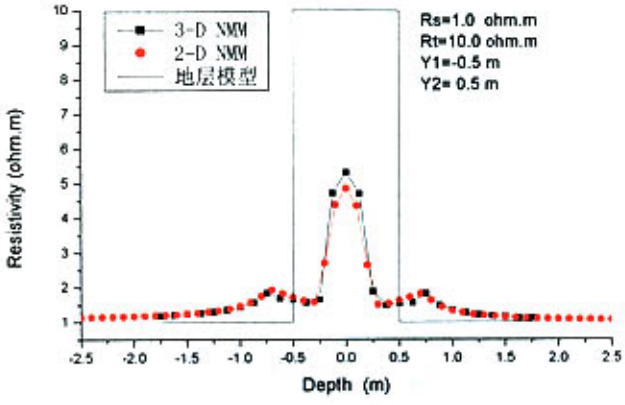
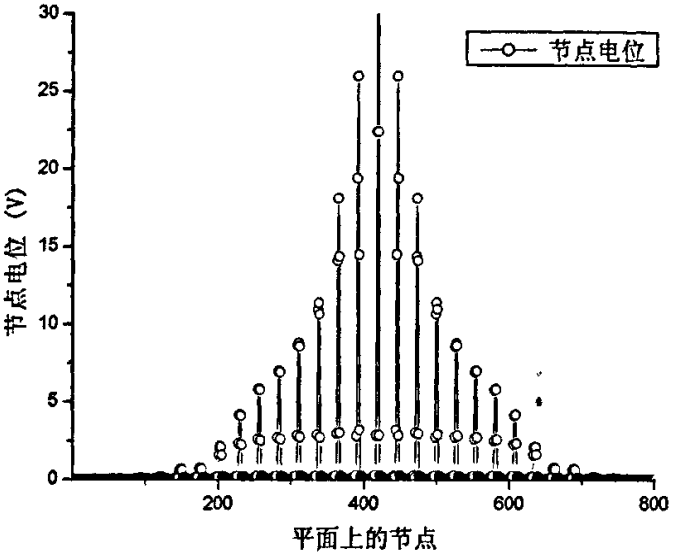


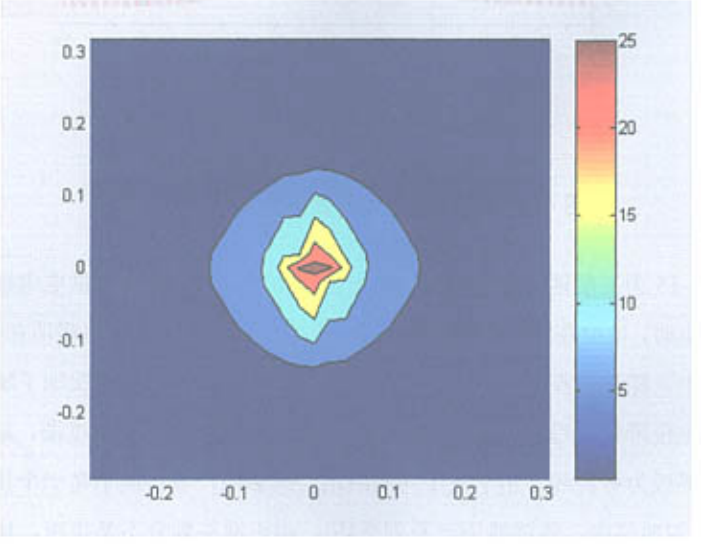
图 4-14　有两个地层界面的实验结果对比

图 4-15 为三层地层模型平面上的电位分布图。图 5-15(a)为供电电极位于地层中点时，电位在随节点的变化规律。电位最大的点为供电电极所在处点。可以看出，随着节点行列的顺序变化，电位数值呈震荡变化，反映了随距离的增加电位降低的趋势。图 4-15(b)为电位随空间位置变化的灰度图，其中颜色的分界线为等势线，由于受中间高阻地层的影响，等势面不是一个规则的圆(在均匀地层中，等势线为一系列圆环)。由于网格划分不是很密，所以只是显示了 XOY 平面中从-0.3 米到 0.3 米的电位的变化。在 X 方向等位线比较密，在 Y 方向等位线比较疏密，说明 X 方向的电场强度比 Y 方向的电场强

度大。在 Y=0 时，因为在 X 方向电阻率比 Y 方向的电阻率高，根据式(4-28)可以得出一致的结果。



(a) 平面上节点的电位变化



(b) 数值计算的电势平面灰度图

图 4-15　在三层地层模型平面的电位分布图

在三层介质模型中，不同的厚度受围岩的影响程度是不同的。图 4-16 为上下围岩电阻率为 1.0 欧姆米，地层电阻率为 10.0 欧姆米，地层厚度分别为 1.0 米，2.0 米，4.0 米的结果对比。可以看出，地层厚度越大受围岩的影响就越小；反之，地层厚度越小，受围岩的影响也越大。

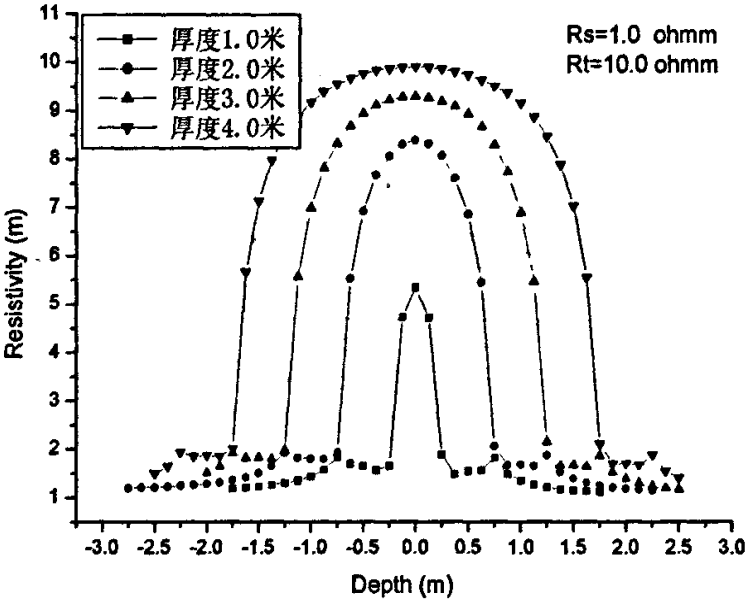


图 4-16　不同厚度的响应特征

如图 4-17 为不同井斜角时地层视电阻率的响应特征。当井斜角为 15-30°时，计算的地层视电阻率与轴对称条件下相差不多。随着井斜角的增加，地层受围岩影响的程度越来越大，地层上下界面的判断也不准确，视厚度增大，计算的地层视电阻率也有所降低。当井斜角为 75°时，计算的地层视电阻率在层的中部略小于 60°的数值，在地层界面处的数值也小于围岩的数值。这种不合理的结果，一方面说明受井斜的影响较大，同时这主要是大井斜角使得网格划分的菱形区域比较狭长造成的。当为 90°时，也就是在水平井中，划分的网格又变成了直角三角形，地层的视电阻率并不随位置的变化而变化，所以为一条直线。

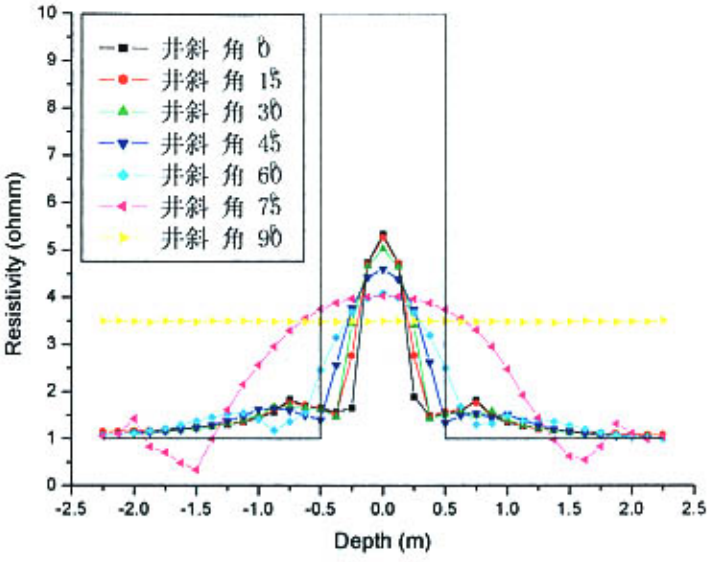


图 4-17　不同井斜角的响应特征

(3)　有多个地层界面的实验结果

如图 4-18 所示，为多个地层界面、不同井斜角的电阻率响应。可以看出，由井斜角时，各层的电阻率数值比没有井斜角时有所降低，并随着井斜角的增加，视电阻率数值降低得也越多。同时，由视电阻率曲线划分地层界面的偏差也越来越大，即分辨率越来越低，并向深度增大得方向偏移,其厚度也越来越大。如图中的-0.5-0.5 米这一层，当井斜角为 0 度时，反映层面的跳点很明显；当井斜角为 30 度时，反映层面的跳点逐渐变平缓；当井斜角为 45 度时，反映层面已经很不明显，同时由于层的厚度较薄，所以受围岩电阻率的影响很大，其数值比模型电阻率偏高。

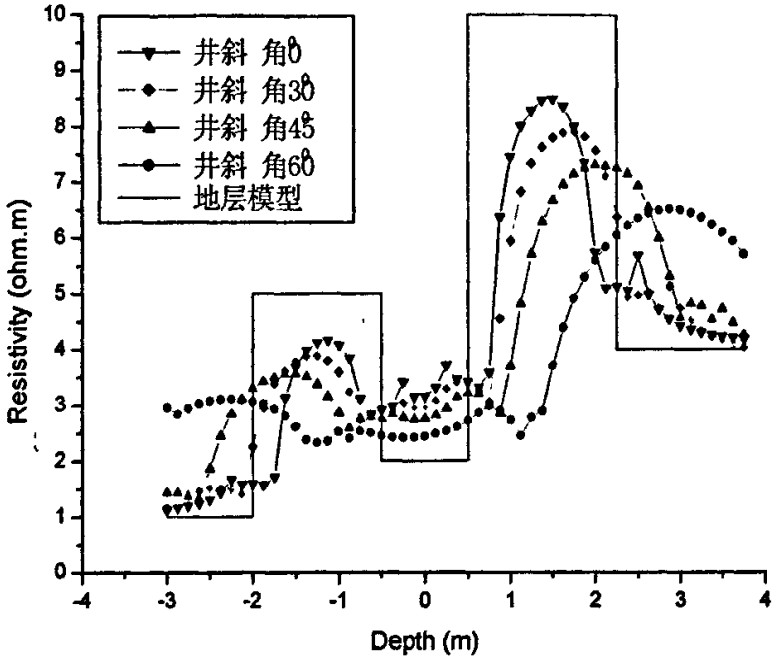


图 4-18　多个地层界面、不同井斜角的电阻率响应

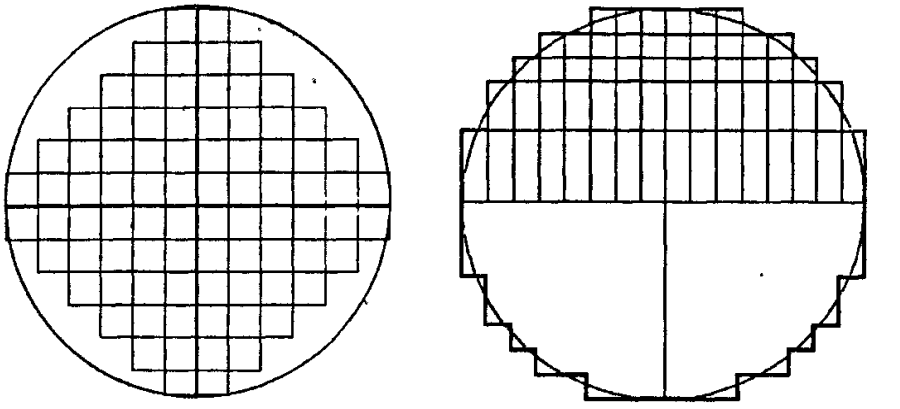
4.5.3 有井眼无侵入的地层模型

当地层中含有井眼时，必须对井井眼在 Z 方向上划分进行“层的划分”，使得井眼折线近似的为一个圆。当 XOY 平面的井眼中的划分和 Z 方向上划分都为均匀时，不能准确的表达井眼，计算的结果偏大，并且有时出现数值跳尖。如果采取 XOY 平面井眼中的均匀划分和 Z 方向上不均匀划分，则就能准确的表示井眼，计算的结果就更加准确。3-D NMM(a)为井眼 X 向均匀划分为 7 个节点，Z 向均匀划分 6 层的网格(图 4-19-a)。3-D NMM(b)为井眼 X 向均匀划分为 9 个节点，Z 向均匀划分 5 层的网格(图 4-19-b)。

(1)　有一地层界面的实验结果

如图 4-20 所示为含有井眼时单个地层界面的情形。2-D NMM 为二维模式匹配法的计算结果。可以看出，3-D NMM(a)比 3-D NMM(b)和 2-D NMM 的结果都偏大。就是说，如果近似井眼偏小，则受井眼的影响就小，数值有

所增大。如果近似井眼偏大，则受井眼的影响就大，数值有所降低。



(a)　X 均匀 7 节点-Z 向等厚 6 层　　(b)　X 均匀 9 节点-Z 向不等厚 5 层

图 4-19　井眼折线近似的两种情形

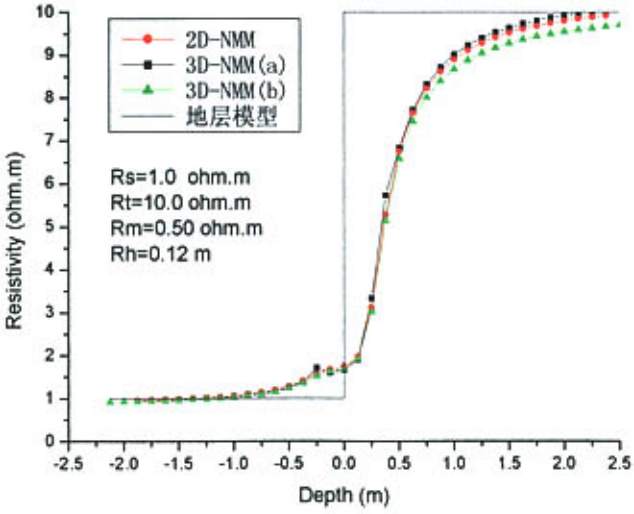
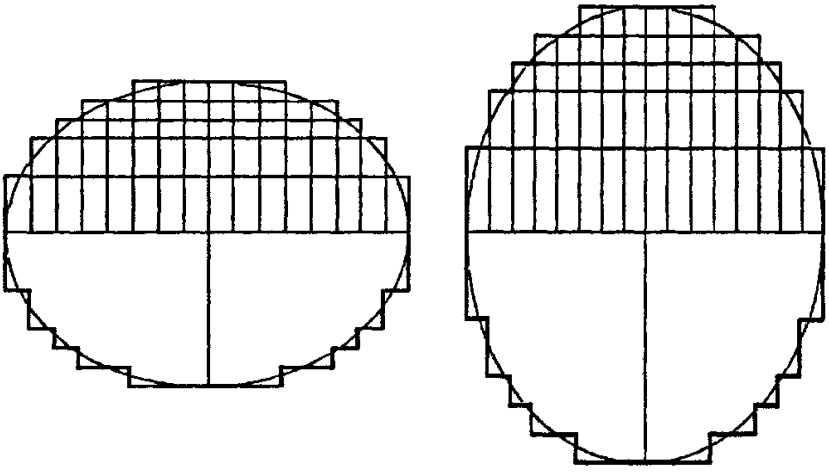


图 4-20　一个地层界面、不同计算方法的结果对比

由于在 XOY 平面内进行数值分析时的网格划分和电阻率分区赋值比较自由，所以，本方法也适用于椭圆井眼。如图 4-21 为两种椭圆井眼的情形，

如图 4-22 为两种椭圆井眼条件下的计算结果。可以看出，由于椭圆井眼比圆偏大，所以计算的结果比圆形井眼要稍微偏小，其受影响的程度与目的层的



(a) X 方向为椭圆长轴（0.20cm）
Z 方向为椭圆短轴(0.12cm)

(b) Z 方向为椭圆长轴（0.20cm）
X 方向为椭圆短轴(0.12cm)

电阻率大小数值有关。对于高阻地层几乎不受影响，对于低阻地层影响稍大。

图 4-21　两种椭圆井眼情形

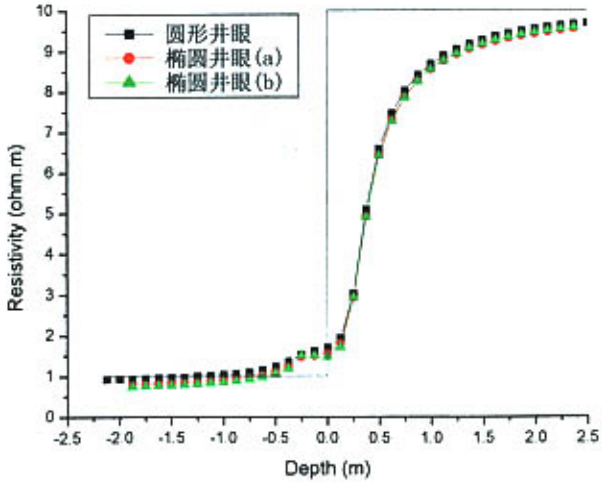


图 4-22　椭圆井眼对电阻率响应的影响

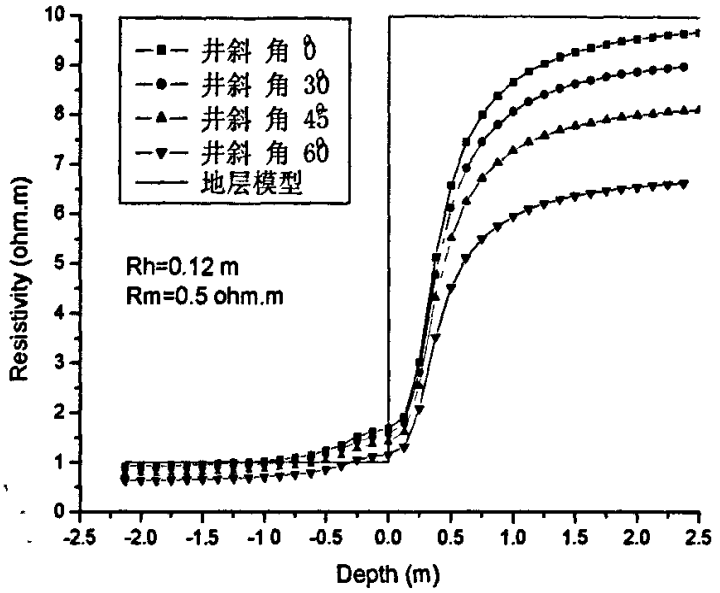


图 4-23　一个地层界面、不同井斜角的电阻率响应

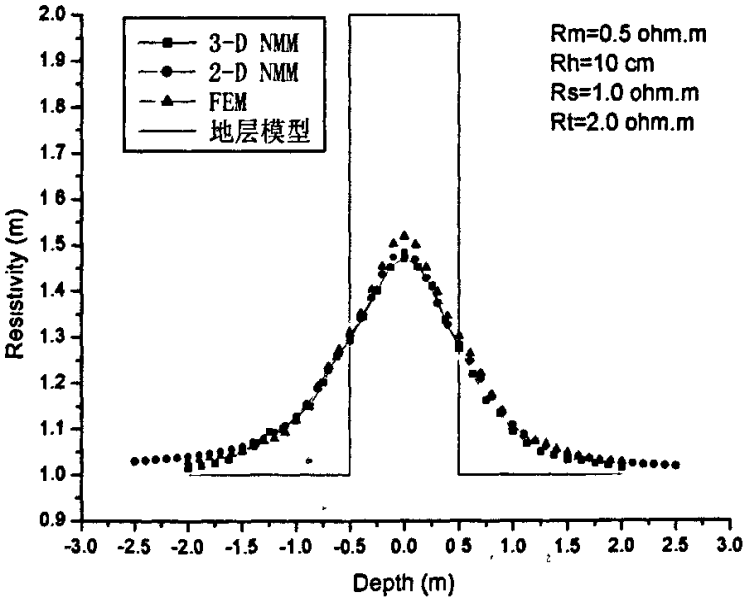


图 4-24　有两个地层界面的实验结果对比

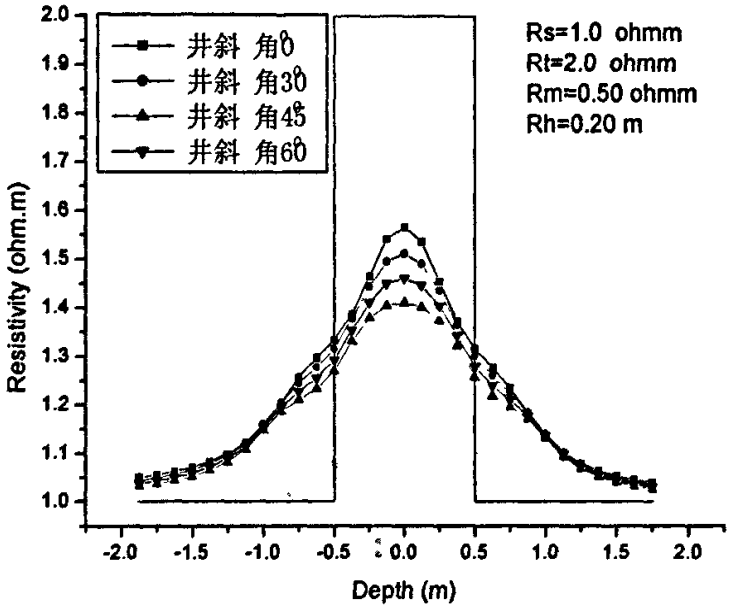


图 4-25　两个地层界面、不同井斜角的电阻率响应

图 4-23 为一个地层界面、不同井斜角的电阻率响应。可以看出，由于泥浆电阻率的影响，地层界面的特征不明显，已经没有明显的台阶。随着井斜角的增加，电阻率的响应数值逐渐降低。

图 4-24 为两个地层界面用不同数值方法的计算结果。通过对比可以看出，3-D NMM 方法的结果在地层中点的数值比点比 2-D NMM 和 FEM 方法要低。从总体上说，数值模拟结果的一致性比较好，相对误差约为 3%。

图 4-25 为两个地层界面、不同井斜角的电阻率响应。可以看出，由于泥浆电阻率的影响，地层界面的特征不明显，已经没有明显的台阶，但是出现了一个类似“奶嘴”状的特征，这是受井眼电阻率和层比较薄受围岩的影响较大造成的。随着井斜角的增加，电阻率的响应数值逐渐降低，同时层的厚度也显得越来越厚。在远离地层界面的地方，井斜影响造成的电阻率差距越来越小，但是其数值都比直井要小，这是由于围岩受井眼影响的结果。

4.5.4 有井眼和侵入的地层模型

当考虑地层存在侵入带时，又存在一个圆形侵入带的近似问题，同时其电阻率的赋值也越来越麻烦。于是，选择了存在一个侵入带的简单三层介质模型。这样，在进行 Z 向层的划分时，就出现了一个井眼被一个侵入带嵌套的情形。如图 4-26 所示为轴对称条件下，3-D NMM 与 2-D NMM 的对比情况。3-D NMM 比与 2-D NMM 方法计算的结果偏低，但是总体来说一致性较好。

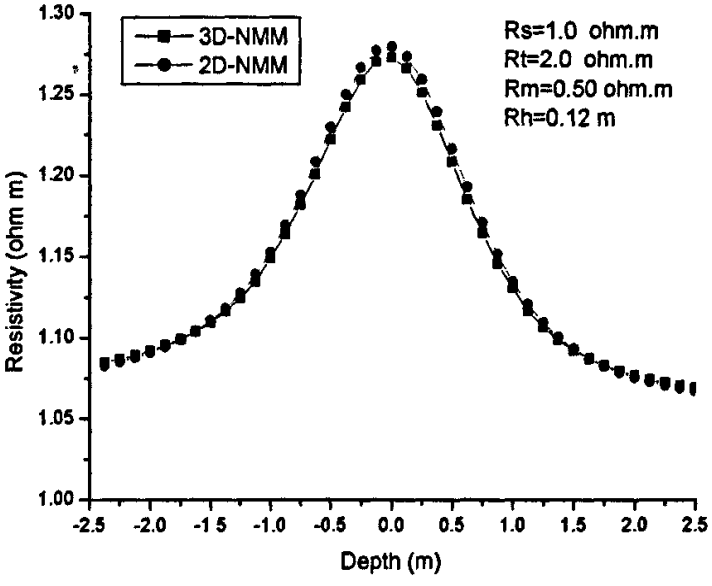


图 4-26　在三层有侵入介质模型中 3-D NMM 和 2-D NMM 计算的电阻率响应

随后，设置了不同的井斜角进行了计算，以考察不同倾斜角对有侵入地层的影响特征。由于在无井眼层状介质中，当井斜角小于 15 度时对计算的电阻率的影响较小，而且由于受菱形网格区域的影响当井斜超过 75 度时，计算的视电阻率数值精度降低，所以本次实验没有对这两个角度进行实验。随着井斜角的增加，电阻率的响应数值逐渐降低，而且在层的中点处可以看到井斜角从 0-30 度，30-45 度，45-60 度电阻率数值的降低幅度也越来越大。同时，

根据响应曲线划分的层厚变得越来越大，但是层厚变化并不明显。在远离地层界面的地方，井斜影响造成的电阻率差距越来越小，其数值接近围岩的电阻率模型数值。

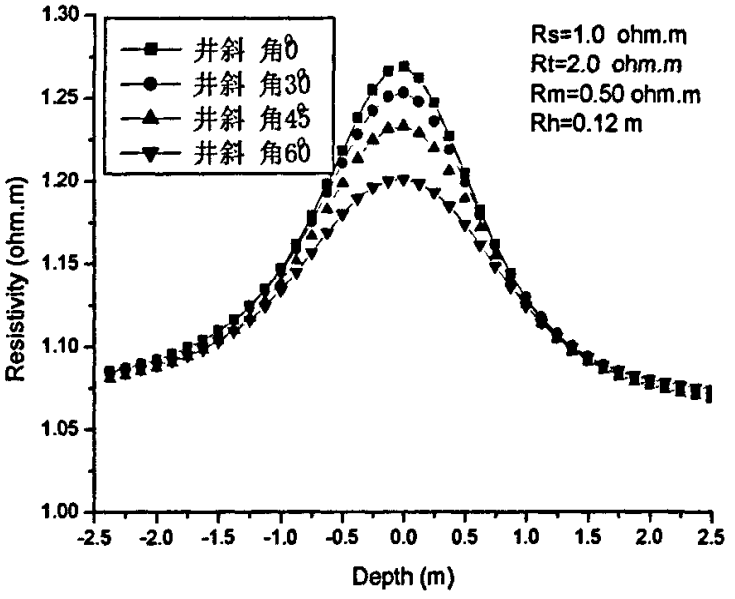


图 4-27　三层有侵入介质模型、不同井斜角的电阻率响应

由于全平面的网格划分比较密，通常要24×33点，而且考虑各个层的侵入半径和地层界面，网格划分的节点数还要增加，使得程序运行速度很慢。在数据计算中，计算较慢的环节主要为广义特征值得求取和转换阵的计算，尤其是转换阵的计算，由于涉及很多矩阵的乘积运算，使得运行速度很慢。因此，探求一个快速的矩阵乘积算法迫在眉睫。

此项研究中所涉及广义特征值问题是整个方法的关键，计算的特征值总共最大值是考察的重点。如果最大特征值过大，就限制了解析部分层的划分，层厚不合适就会出现数据溢出的现象。影响特征值的因素主要与网格划分总数和公比有关。公比一定，节点总数越多，这数值越大；同样，网格数目不变，公比越小，则特征值变小。

由于时间有限和层数增多和侵入关系的复杂，此项研究只针对存在井眼

和侵入的三层地层模型进行了计算。这个方法同样适用于多层和侵入关系复杂的情形。

同时，由于 XOY 平面网格划分比较自由，对于椭圆形侵入带以及仪器偏心(尤其是电极贴着井的底部)的非轴对称情形，本方法也是适用的。

第5章　非轴对称条件下双侧向测井的模式匹配法理论

5.1 双侧向测井的定解问题和模式匹配法的解

在非轴对称条件下，设置如图 5-1 所示的坐标系：x:平行于地层；y:平行于地层法线；z:垂直与地层法线，即平行于地层的走向，并设井轴与地层法线的夹角为θ。

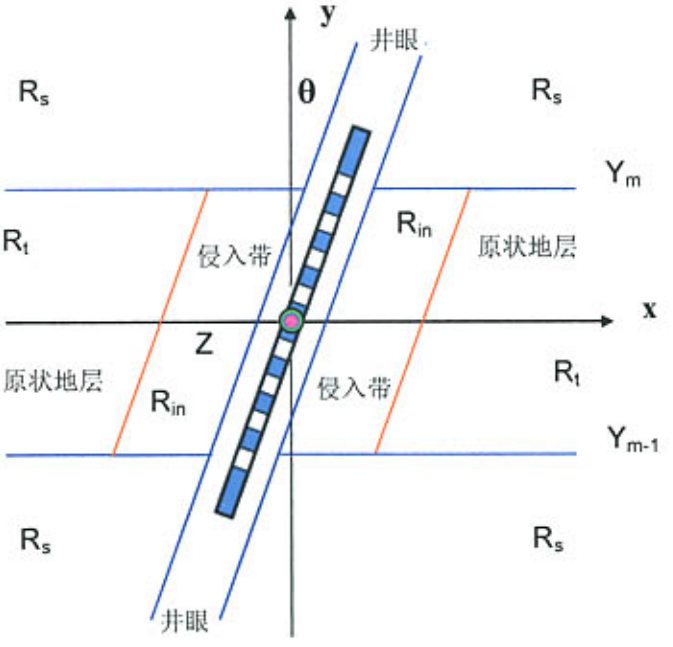


图 5-1　非轴对称条件下基于模式匹配法的坐标系

双侧向电极系不仅提供了必须的位场激励条件，而且它们的存在也引入了复杂的位场边界条件。除去双侧向电极系所占的体积后剩下的空间称为求解区 Ω。这时 Ω 的边界可以分为以下几个部分：(1)金属电极表面；(2) 无限远边界；(3) 电极系的绝缘环。在 XOY 平面内，设求解区为D_{xy}，即除去双侧向电极系所占的面积。

在此模型下，求解普通电阻率测井响应所要解决的定解问题是：求出一个连续而且适当光滑的函数Φ，它满足以下各条件：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial z})=0 \tag{5-1}$$

式中，σ为在不同介质的电导率。

利用分离变量法，并令$\Phi(x,y,z)=f(x,y)Z(z)$将其代入上式可得到两个方程：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=\lambda^2 Z \tag{5-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial f}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma\frac{\partial f}{\partial y})+\lambda^2 f=0 \tag{5-3}$$

式中，λ^2称为本征值；f为相应的本征函数。本征函数应满足如下边界条件和边值关系：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{df}{dx}=0\\&\lim_{y\to 0}\frac{df}{dy}=0\end{aligned} \tag{5-4}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=0\\&f(x,y)\text{以及}\sigma\frac{df}{dx},\sigma\frac{df}{dy}\text{在}(0,\infty)\text{上连续}\end{aligned} \tag{5-5}$$

在XOY平面内用二维数值法求解，在Z方向上用解析法求解。

数值分析部分。在XOY平面内，设$\mathbf{g}=(g_1,g_2,\ldots,g_N)^T$为XOY平面上的一组完备的基函数，那么$f(x,y)$可以表示为分域基函数的级数和，即

$$f(x,y)=\sum c_i g_i$$

经有限元离散化处理，可得如下本征方程：

$$\mathbf{AC}=\mathbf{BCK}^2 \tag{5-6}$$

此式就是广义特征值问题，是数值分析的关键。其中，$\mathbf{K}$是由N个特征值向量$(\lambda_1,\lambda_1,\cdots\lambda_N)$组成的特征值矩阵，它是一个正定的对角阵：$\mathbf{K}^2=diag(\lambda_1^2,\lambda_2^2\cdots,\lambda_N^2)$；$\mathbf{C}$是由$N$个本征向量$(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_1,\cdots\mathbf{c}_N)$组成的特征全矩

阵：

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\iint\sigma\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\\ \\ \frac{\partial g_N}{\partial x}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial g_1}{\partial x},\frac{\partial g_2}{\partial x},\cdots,\frac{\partial g_N}{\partial x}\right)+\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial y}\\ \\ \frac{\partial g_N}{\partial y}\end{pmatrix}\left(\frac{\partial g_1}{\partial y},\frac{\partial g_2}{\partial y},\cdots,\frac{\partial g_N}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2}\iint\sigma\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\\ \\ g_N\end{pmatrix}(g_1,g_2,\cdots,g_N)dxdy$$

并且满足正交化条件：

$$\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C}=\mathbf{I} \tag{5-7}$$

设在 Z 方向上被人为地划分了 $M+1$ 层。因此，各层的数值解—特征函数 $f(x,y)$ 可以近似地表示成

$$[f_m(x,y)]^T=\mathbf{g}_m^T\mathbf{C}_m \tag{5-8}$$

解析部分。通过求解式(4-2)，可以得到：

$$z_m(z)=\mathbf{u}_m^+(z)+\mathbf{u}_m^-(z)=e^{-\kappa_m(z-z')}\mathbf{u}_m^+(z')+e^{\kappa_m(z-z')}\mathbf{u}_m^-(z') \tag{5-9}$$

其中，$\mathbf{u}_m^+(z)$ 和 $\mathbf{u}_m^-(z)$ 分别为上行波、下行波，$\mathbf{u}_m^+(z')$ 和 $\mathbf{u}_m^-(z')$ 分别为上行波、下行波在源点 z' 处的初始值。

这样，求解区域内的电势 Φ_m 可以写成：

$$\Phi_m(x,y,z)=\mathbf{g}_m^T(x,y)\mathbf{C}_m[\mathbf{u}_m^+(z)+\mathbf{u}_m^-(z)] \tag{5-10}$$

5.2 平面二维场的数值分析方法

5.2.1 总体网格划分

径向网格划分与普通电极系的研究类似。

纵向上网格划分。电极系上共设置 66 个节点，其中金属电极表面设节点

46 个(用黑点·表示)，绝缘环上设 20 个节点(用圆圈 ° 表示)。由图 5-2-b 可见，电极系沿纵向分成 5 个格。在电极范围内共有66×3共 198 个节点。连同电极系外部，共 N 个节点。在 1，2，3 层上，节点数分别是：

$$N_1 = N - 66 - 66 - 46$$

$$N_2 = N - 66 - 46$$

$$N_3 = N - 46$$

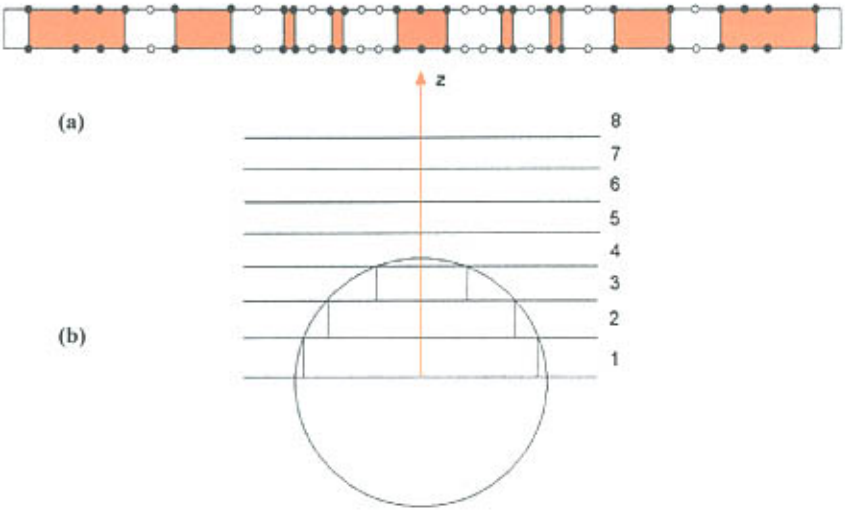


图 5-2　电极系上结点的设置和截面图

5.2.2 节点编号与单元编号

节点编号很重要。节点编号如果相差比较大就会造成元素在总体刚度矩阵中的位置比较分散，从而增加带宽，这不仅增加了存贮总体刚度矩阵的内存，而且降低了计算速度。为此，针对 X 轴方向划分节点的数目少于 Y 轴方向划分节点的数目[6]，采取先沿 X 轴后沿 Y 轴进行节点编号、单元编号的方案。

如图 5-3 为求解域内网格划分和单元编号、节点编号示意图，其中中间的黑线为电极所在处，为清晰起见，平行四边形的两钝角处对角线未完全画出。同样，所涉及的三角形单元也有两种形态，其顶点编号i, j, m，如图 4-5

所示。

我们把如图 5-3 所示的网格划分为 A、B、C、D 四个子区域。对于 A、B 区域，我们采用奇数的节点编号，对于 C、D 区域，我们采用偶数的节点编号。

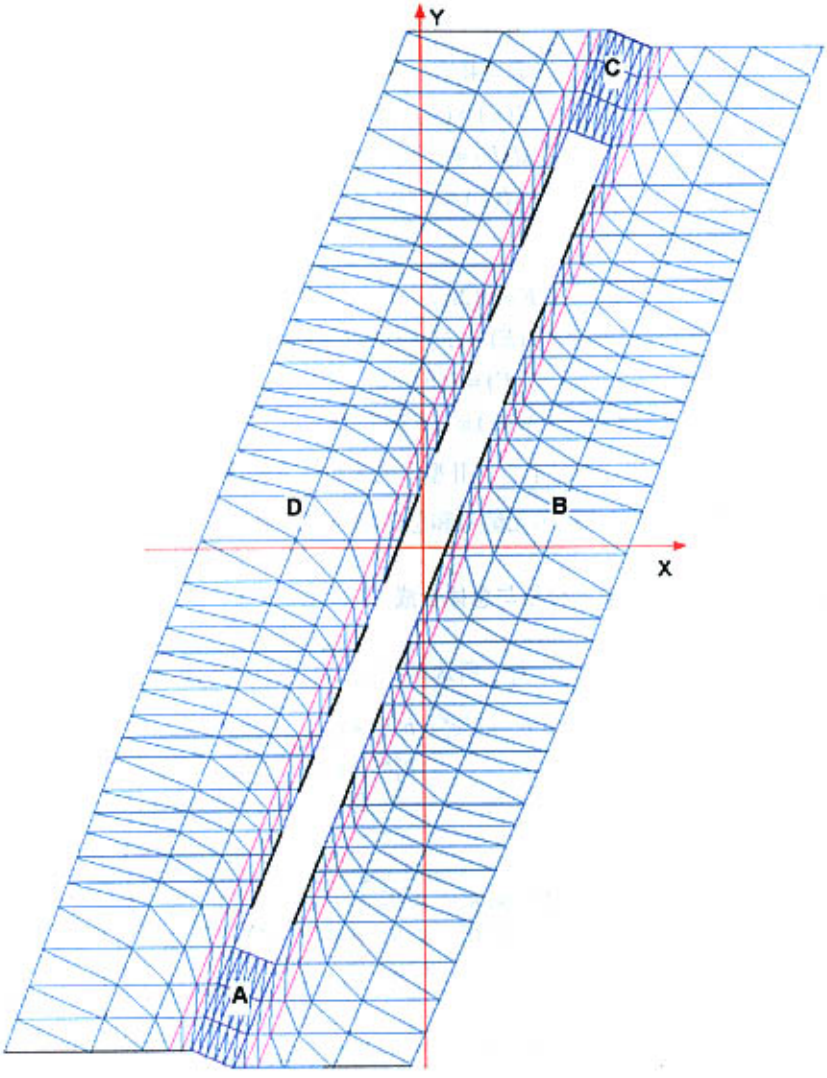


图 5-3　非轴对称平面网格划分与单元形态

对于 A、B 两个区域：

设 X 轴节点总数为 N_x，Y 轴节点总数为 N_y，则单元总数 $2(N_X-1)*(N_y-1)$。设 N_i 和 N_j 分别为节点所在的列号和行号，E 为单元编号，$I(E),J(E)$ 和 $M(E)$ 分别为单元 E 的总体节点编号。

对于 I 型单元

$$\begin{aligned} E &= 4(N_i-1)*(N_y-1)+2N_j-1 \\ I(E) &= (N_i-1)*2N_y+2N_j-1 \\ J(E) &= I(E)+2N_y \\ M(E) &= I(E)+2 \end{aligned} \tag{5-11}$$

对于 II 型单元

$$\begin{aligned} E &= 2(2N_i-1)*(N_y-1)+2N_j-1 \\ I(E) &= (N_i-1)*2N_y+2N_j+1 \\ J(E) &= I(E)-2N_y \\ M(E) &= I(E)-2 \end{aligned} \tag{5-12}$$

对于 C、D 区域，则对于 I、II 型单元来说，其相应的单元编号和节点编号分别加 1，就可以完成单元编号和总体编号的设置。

5.2.3 三角形基函数、单元分析与总体合成

同样采用三角形基函数，对于所选单元 e，根据式(4-26)其单元矩阵为

$$\mathbf{A}^{(e)} = \frac{1}{4\Delta}\sigma\begin{bmatrix} b_i^e b_i^e + c_i^e c_i^e & b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e & b_i^e b_m + c_i^e c_m \\ & b_j^e b_j^e + c_j c_j & b_j^e b_m^e + c_j^e c_m^e \\ \text{对} & \text{称} & b_m^e b_m^e + c_m^e c_m^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(e)} = \iint_e \sigma\begin{bmatrix} g_i^e g_i^e & g_i^e g_j & g_i^e g_m^e \\ & g_j^e g_j^e & g_j^e g_m^e \\ & & g_m^e g_m^e \end{bmatrix} dxdy = 2\sigma\Delta\begin{bmatrix} \frac{2!}{4!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{4!} \\ & \frac{2!}{4!} & \frac{1}{4!} \\ \text{对} & \text{称} & \frac{2}{4!} \end{bmatrix}$$

式中，g_i^e、g_j^e 和 g_m^e 分别是线性三角形单元 e 的 3 个节点 i,j 和 m 的插值函数，其表达式详见式(4-24)，其中，

$$a_i^e = x_j^e y_m^e - x_m^e y_j^e,\ b_i^e = y_m^e - y_j^e,\ c_i^e = x_m^e - x_j^e;$$

$$a_j^e = x_m^e y_i^e - x_i^e y_m^e,\ b_j^e = y_m^e - y_i^e,\ c_j^e = x_i^e - x_m^e$$
$$a_m^e = x_i^e y_j^e - x_j^e y_i^e,\ b_m^e = y_j^e - y_i^e,\ c_m^e = x_j^e - x_i^e。$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i^e & y_i^e \\ 1 & x_j^e & y_j^e \\ 1 & x_m^e & y_m^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e) = \text{单元}e\text{的面积}$$

根据(5-11)和(5-12)编好的单元及其节点序号，计算出每一个的三角形的单元矩阵。由于每个单元都不重复，所以顺序执行，相同位置的元素相加，从而完成了总体合成，最终形成每一层的总体矩阵 $\mathbf{A}_i$、$\mathbf{B}_i$ ($i = 1,\cdots,n$ 代表 z 方向人为划分的层数)。

在每一层，都要求解一次广义特征值问题：

$$\mathbf{A}_i\mathbf{C}_i = \mathbf{B}_i\mathbf{C}_i\mathbf{K}_i^2 \tag{5-13}$$

它们的维数都是 $N_i \times N_i$，$i = 1,\cdots,n$。

5.2.4 各层的网格变化、电势表达和界面转换理论

在第 1 层中，电势表示为：

$$\Phi_1 = \mathbf{g}_1^T\mathbf{C}_1\left(e^{-\mathbf{K}_1 z} + e^{\mathbf{K}_1 z}\right)\mathbf{u}_1 + \sum_{i=1}^{5}\mathbf{g}_1^{(e_i)T}\xi^{(i)}V_i \tag{5-14}$$

式中，$\mathbf{g}_1$ 是基函数，它们是由各节点函数值支撑起来的“帐篷”型函数。其实，

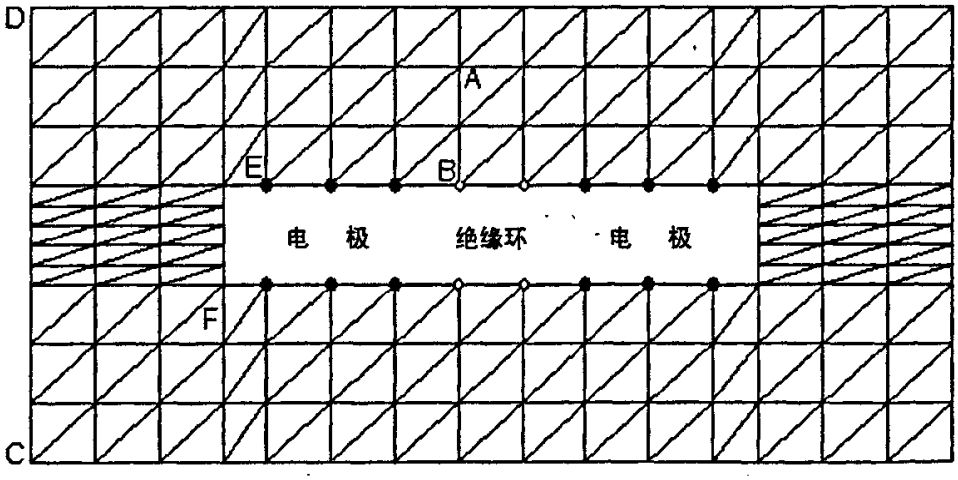


图 5-4　分割成三角形元素的求解区(第 1 层)

每个内节点(如图 5-4 中 A 点)的“帐篷”由 6 个三角形元素组成；边界上点(如 B 点)“帐篷”由 3 个元素组成；凸角上的节点由 1 个(如 D 点)或 2 个(如 C 点)元素组成；凹角上的节点由 4 个(如 E 点)或 5 个(如 F 点)元素组成。

将求解区中所有三角形元素对 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{B}_1$ 的贡献“安装”起来，所形成的阵用 $\mathbf{A}_1^*$ 和 $\mathbf{B}_1^*$ 表示，它们的维数是 $(N-132)\times(N-132)$。金属电极上的节点(包括与绝缘棒相交的点)用黑点表示。在图 5-2 和图 5-4 中这样的点共有 46 个。设这样的节点上的电势为 0，这相当于将与这些节点对应的行和列撤消，形成 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{B}_1$ 阵，它们的维数是 $N_1\times N_1$。由于电极上节点的电势取值 0，当 x,y 上的势函数在 z 方向传播时(乘以 $\exp(\pm k_1 z)$)，电极表面上电势仍保持为 0。所有电极上电势保持 0 值，这当然不符合要求。我们可以令电极的节点电势取值 1；其余电极电势取值 0。这时特征值 $\mathbf{K}_1$ 必须为 0，否则电极表面上电势乘以 $\exp(\pm k_1 z)$ 将随之变化，这也不符合要求。

$\mathbf{K}_1=0$ 时(5-11)式的形式是

$$\mathbf{A}_1^*\xi_1^{(i)}=0$$

由于所有电极上电势要么被约束为 1($j=i$)，要么被约束为 0($j\neq i$)，上式变成

$$\mathbf{A}_1\xi_1^{(i)}=\mathbf{r}_1^{(i)} \tag{5-15}$$

式中 $\mathbf{r}_1^{(i)}$ 是 $\mathbf{A}_1^*$ 中与 e_i 各节点相对应的列移到等式右端所得。

(5-11)式中的 $\mathbf{g}_1^{(e_i)}$ 与 $\mathbf{g}_1$ 不同之处在于：$\mathbf{g}_1^{(e_i)}$ 在电极 e_i 的节点上取值 1，在其它电极上取值 0；而 $\mathbf{g}_1$ 在所有电极节点上均取值 0。

在第 1 层中，电流密度的 z 分量表达式是

$$j_1=\sigma_1\mathbf{g}_1^T\mathbf{C}_1\mathbf{K}_1\left(e^{-\mathbf{K}_1 z}-e^{\mathbf{K}_1 z}\right)\mathbf{u}_1 \tag{5-16}$$

由于含有 $\xi_1^{(i)}$ 的项不随着 z 变化，所以对 z 求导后该项全部消失。

第 2 层。将第 1 层求解区范围向内各延长一格，如图 5-5。

依照公式(5-12)和(5-16)可以写出 Φ_2 和 j_2 的表达式

$$\Phi_2=\mathbf{g}_2^T\mathbf{C}_2\left(e^{-\mathbf{K}_2(z-h_1)}\mathbf{u}_2^+ + e^{\mathbf{K}_2(z-h_1)}\mathbf{u}_2^-\right)+\sum_{i=1}^{5}\mathbf{g}_2^{(e_i)T}\xi_2^{(i)}V_i \tag{5-17}$$

$$j_2=\sigma_2\mathbf{g}_2^T\mathbf{C}_2\mathbf{K}_2\left(e^{-\mathbf{K}_2(z-h_1)}\mathbf{u}_2^+ - e^{\mathbf{K}_2(z-h_1)}\mathbf{u}_2^-\right) \tag{5-18}$$

其中，$\mathbf{u}_2^+$是上行的入射波，$\mathbf{u}_2^-$下行的反射波。

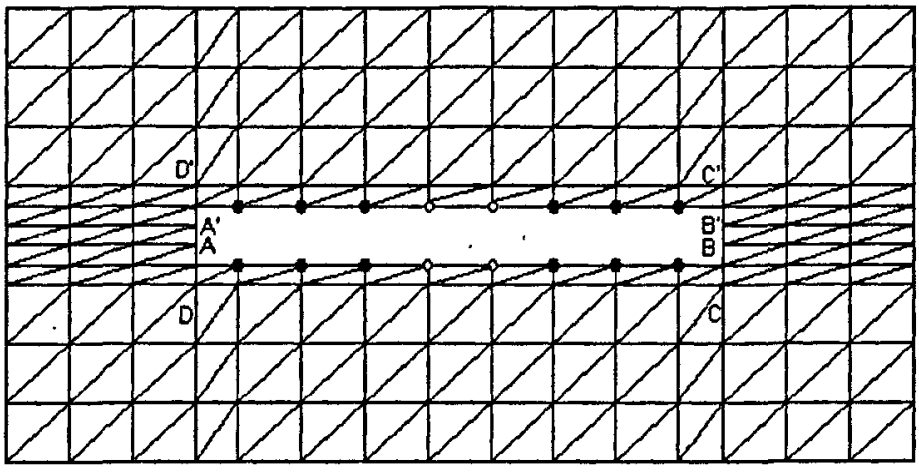


图 5-5　第 2 层的求解区

在$z=h_1$的平面上，存在如下两个耦合方程：

$$\Phi_1=\Phi_2$$

$$j_1=j_2$$

但是我们不能简单地让表达式(5-12)与(5-17)相等，表达式(5-16)与(5-18)相等。因为(5-12)和(5-16)式中的$\mathbf{g}_1$是$\mathbf{N}_1$维，而(5-17)和(5-18)式的$\mathbf{g}_2$是$\mathbf{N}_2$维。首先，我们把(5-12)式第一项的$\mathbf{g}_1$改写成$\mathbf{g}_2$。后者比前者多 66 维，而$\mathbf{C}_1\left(e^{-\mathbf{K}_1 z}+e^{\mathbf{K}_1 z}\right)\mathbf{u}_1$是$\mathbf{N}_1$维列向量。为了补足这 66 维，采取以下办法：

第一，在第 1 层的电极表面(共 46 点)上，将电势设为 0(在第 1 层电极表面的相应位置上$\mathbf{g}_2$不为零)；

第二，第 1 层绝缘环上的点是边界点，该点的$\mathbf{g}_1$元素由 3 个三角形元素形成，而$\mathbf{g}_2$的相应元素由 6 个三角形元素组成。这相当于电势由绝缘环表面连续延伸到绝缘体内(这不但是允许的，而且是必须的)。在第 1 层绝缘环内正对第 2 层绝缘环表面处，电势为一个未知量。一共 20 个。把这 20 个未知量用一个 20 维未知向量表示。

采取上述办法后，(5-12)式的第一项就成为

$$\mathbf{g}_2^T\left[0,\ldots,0,\mathbf{p}_1^T,\mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_1 h_1}+e^{\mathbf{K}_1 h_1}\right)\mathbf{C}_1^T\right]^T$$

其中，$(0,\ldots,0)$为在第 1 层电极表面，共 46 维；$\mathbf{p}_1^T$ 为在第 1 层绝缘环内正对第 2 层绝缘体表面处，共 20 维；$\mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_2 h_1}+e^{\mathbf{K}_2 h_1}\right)\mathbf{C}_1^T$ 共 N_1 维；总共 N_2 维。

这样改造(5-12)式后，令(5-17)式等于(5-12)式，左乘$\sigma_2\mathbf{C}_2^T\mathbf{g}_2$，并在$x,y$面上积分，考虑到

$$\mathbf{C}_2^T\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2=\mathbf{I} \tag{5-19}$$

得到

$$\mathbf{P}_{12}=\mathbf{C}_2{}^T\mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{u}_2^+ + \mathbf{u}_2^- = \mathbf{P}_{12}\left[\left(0,\ldots,0,\mathbf{p}_1^T,\mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_1 h_1}+e^{\mathbf{K}_1 h_1}\right)\mathbf{C}_1^T\right)^T\right]+\mathbf{P}_{12}\sum_{i=1}^{5}\left(\xi_1^{(i)}-\xi_2^{(i)}\right)V_i \tag{5-20}$$

为使(5-18)式与(5-16)式相等，对(5-16)式做类似的变换，即将(5-16)式中的$\mathbf{g}_1$改成$\mathbf{g}_2$。和上面一样，(5-16)式左乘$\mathbf{C}_2^T\mathbf{g}_2$，并在第 2 层求解区内积分，得到一个表达式

$$\mathbf{C}_2^T\iint\mathbf{g}_2 j_1 dxdy=\mathbf{C}_2^T\mathbf{D}_{12}\left[\mathbf{q}_1^T,\mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_1 h_1}+e^{\mathbf{K}_1 h_1}\right)\mathbf{K}_1^T\mathbf{C}_1^T\right]^T \tag{5-21}$$

式中，$\mathbf{D}_{12}=\iint\sigma_1(x,y)\mathbf{g}_2\mathbf{g}_2^T dxdy$

在扩展区 ABCD 和 A'B'C'D'内邻接绝缘环的部分，由于$\sigma_1(x,y)$=0 消失，使得与第 2 层绝缘环表面节点相应的行和列为 0。我们保留这些行，而把这些列删去并将矩阵压缩，使得$\mathbf{D}_{12}$是N_2行，N_2-20(5-1 或N_1+46)列的矩阵。

在第 1 层电极表面处，如果$z<h_1$，电流密度垂直于电极表面，是水平的，其垂直分量为 0。但是，当$z=h_1$时，电极表面是一个棱，电流密度的z分量是一个未知量。这样的点有 46 个，我们用一个 46 维向量$\mathbf{q}_1$代表它们。$\mathbf{q}_1$已经出现在(5-21)式中，它的各个元素被安装在与第 1 层电极表面节点(5-1 共 46 个)相当的位置上。

将(5-18)式左乘$\mathbf{C}_2^T\mathbf{g}_2$并积分，令此积分与(5-21)式相等。考虑到(5-19)式，得

$$\mathbf{u}_2^+ - \mathbf{u}_2^- = \mathbf{Q}_{12}\left[\mathbf{q}_1^T,\mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_1 h_1}-e^{\mathbf{K}_1 h_1}\right)\mathbf{K}_1^T\mathbf{C}_1^T\right]^T \tag{5-22}$$

式中，$\mathbf{Q}_{12}=\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{C}_2^T\mathbf{D}_{12}$是一个$N_2$行，$N_2-20$(5-1 或$N_1+46$)列的矩阵。

由方程(5-20)和(5-22)求得

$$\mathbf{u}_2^+ = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{12}\left[\mathbf{O}_{46}, \mathbf{p}_1^T, \mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_1 h_1} + e^{\mathbf{K}_1 h_1}\right)\mathbf{C}_1^T\right]^T + \frac{1}{2}\mathbf{P}_{12}\sum_{i=1}^{5}\left(\xi_1^{(i)} - \xi_2^{(i)}\right)V_i$$
$$+\frac{1}{2}\mathbf{Q}_{12}\left[\mathbf{q}_1^T, \mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_1 h_1} - e^{\mathbf{K}_1 h_1}\right)\mathbf{K}_1^T\mathbf{C}_1^T\right]^T \tag{5-23}$$

$$\mathbf{u}_2^- = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{12}\left[\mathbf{O}_{46}, \mathbf{p}_1^T, \mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_1 h_1} + e^{\mathbf{K}_1 h_1}\right)\mathbf{C}_1^T\right]^T + \frac{1}{2}\mathbf{P}_{12}\sum_{i=1}^{5}\left(\xi_1^{(i)} - \xi_2^{(i)}\right)V_i$$
$$-\frac{1}{2}\mathbf{Q}_{12}\left[\mathbf{q}_1^T, \mathbf{u}_1^T\left(e^{-\mathbf{K}_1 h_1} - e^{\mathbf{K}_1 h_1}\right)\mathbf{K}_1^T\mathbf{C}_1^T\right]^T \tag{5-24}$$

式中，$\mathbf{O}_{46}$代表所有元素为 0 的 46 维列向量。这样，$\mathbf{u}_2^+$和$\mathbf{u}_2^-$(均为 N_2 维)可由$\mathbf{u}_1$(N_1维)，$\mathbf{p}_1$(20 维)，$\mathbf{q}_1$(46 维)以及$V_1,\ldots,V_5$表示。前三者共 N_2 个未知量。多出的未知量$V_1,\ldots,V_5$可以靠下列附加的 5 个条件对付（如图 5-6）：

主电极电流=1

监督电极 M_2 电流=0

监督电极 M_1 电势=0

监督电极 M_1 电势=监督电极 M_2 电势

屏蔽电极 A_1 电势=屏蔽电极 A_2 电势

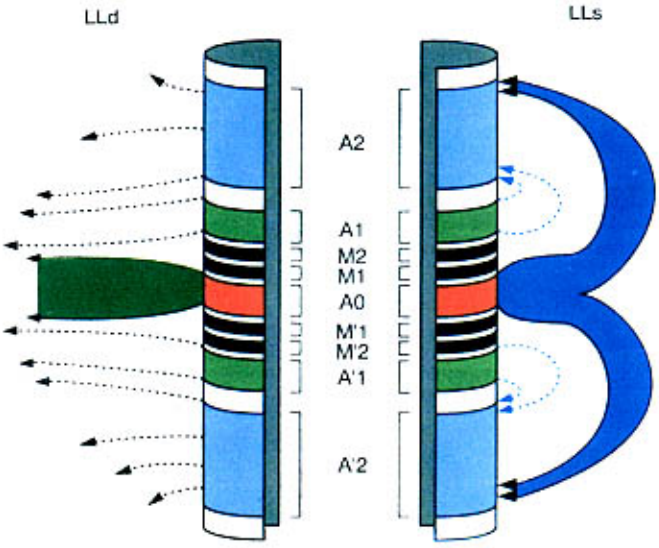


图 5-6　双侧向测井仪探头的电极及电流线分布图

依照(5-23)和(5-24)式，类似地可以写出

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3^+ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}_{23}\left[\mathbf{O}_{46},\mathbf{p}_2^T,\left(\mathbf{u}_2^{+T}e^{-\mathbf{K}_2h_2}+\mathbf{u}_2^{-T}e^{\mathbf{K}_2h_2}\right)\mathbf{C}_2^T\right]^T+\frac{1}{2}\mathbf{P}_{23}\sum_{i=1}^{5}\left(\xi_2^{(i)}-\xi_3^{(i)}\right)V_i \\ &+\frac{1}{2}\mathbf{Q}_{23}\left[\mathbf{q}_2^T,\left(\mathbf{u}_2^{+T}e^{-\mathbf{K}_2h_2}-\mathbf{u}_2^{-T}e^{\mathbf{K}_2h_2}\right)\mathbf{K}_2^T\mathbf{C}_2^T\right]^T\end{aligned} \tag{5-25}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3^- &= \frac{1}{2}\mathbf{P}_{23}\left[\mathbf{O}_{46},\mathbf{p}_2^T,\left(\mathbf{u}_2^{+T}e^{-\mathbf{K}_2h_2}+\mathbf{u}_2^{-T}e^{\mathbf{K}_2h_2}\right)\mathbf{C}_2^T\right]^T+\frac{1}{2}\mathbf{P}_{23}\sum_{i=1}^{5}\left(\xi_2^{(i)}-\xi_3^{(i)}\right)V_i \\ &-\frac{1}{2}\mathbf{Q}_{23}\left[\mathbf{q}_2^T,\left(\mathbf{u}_2^{+T}e^{-\mathbf{K}_2h_2}-\mathbf{u}_2^{-T}e^{\mathbf{K}_2h_2}\right)\mathbf{K}_2^T\mathbf{C}_2^T\right]^T\end{aligned} \tag{5-26}$$

式中，$\mathbf{P}_{23}=\mathbf{C}_3^T\mathbf{B}_3$，$\mathbf{Q}_{23}=\mathbf{K}_3^{-1}\mathbf{C}_3^T\iint\sigma_2(x,y)\mathbf{g}_3\mathbf{g}_3^T dxdy$，是 $N_3\times(N_3-20)$ 或 $N_3\times(N_2+46)$ 的矩阵。两式的左端维数是 N_3，右端维数是 N_3+5。

第 4 层已在整个电极系之外，其下界面与电极系相切。$\mathbf{u}_4^+$ 和 $\mathbf{u}_4^-$ 的表达式与上略有不同。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_4^+ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}_{34}\left[\mathbf{O}_{46},\left(\mathbf{u}_3^{+T}e^{-\mathbf{K}_3h_3}+\mathbf{u}_3^{-T}e^{\mathbf{K}_3h_3}\right)\mathbf{C}_3^T\right]^T+\frac{1}{2}\mathbf{P}_{34}\sum_{i=1}^{5}\xi_3^{(i)}V_i \\ &+\frac{1}{2}\mathbf{Q}_{34}\left[\mathbf{q}_3^T,\left(\mathbf{u}_3^{+T}e^{-\mathbf{K}_3h_3}-\mathbf{u}_3^{-T}e^{\mathbf{K}_3h_3}\right)\mathbf{K}_3^T\mathbf{C}_3^T\right]^T\end{aligned} \tag{5-27}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_4^- &= \frac{1}{2}\mathbf{P}_{34}\left[\mathbf{O}_{46},\left(\mathbf{u}_3^{+T}e^{-\mathbf{K}_3h_3}+\mathbf{u}_3^{-T}e^{\mathbf{K}_3h_3}\right)\mathbf{C}_3^T\right]^T+\frac{1}{2}\mathbf{P}_{34}\sum_{i=1}^{5}\xi_3^{(i)}V_i \\ &-\frac{1}{2}\mathbf{Q}_{34}\left[\mathbf{q}_3^T,\left(\mathbf{u}_3^{+T}e^{-\mathbf{K}_3h_3}-\mathbf{u}_3^{-T}e^{\mathbf{K}_3h_3}\right)\mathbf{K}_3^T\mathbf{C}_3^T\right]^T\end{aligned} \tag{5-28}$$

式中，$\mathbf{P}_{34}=\mathbf{C}_4^T\mathbf{B}_4$，$\mathbf{Q}_{34}=\mathbf{K}_4^{-1}\mathbf{C}_4^T\mathbf{D}_{34}$，$\mathbf{D}_{34}=\iint\sigma_3(x,y)\mathbf{g}_4\mathbf{g}_4^T dxdy$，$\mathbf{Q}_{34}$ 是 $N\times N$ 的矩阵。在绝缘体内 $\sigma_3(x,y)$ 等于零，但是并没有使 $\mathbf{D}_{34}$ 的任何行与列消失。两式的左端是 N 维，右端是 N+5 维。

将(5-23)和(5-24)中 $\mathbf{u}_2^+$ 和 $\mathbf{u}_2^-$ 代入(5-25)和(5-26)中，再把(5-25)和(5-26)式给出的 $\mathbf{u}_3^+$ 和 $\mathbf{u}_3^-$ 代入(5-27)和(5-28)式中，$\mathbf{u}_4^+$ 和 $\mathbf{u}_4^-$ 便表示为 $\mathbf{u}_1$（N_1 维），$\mathbf{p}_1$(20 维)，$\mathbf{q}_1$(46 维)，$\mathbf{p}_2$(20 维)，$\mathbf{q}_2$(46 维)，$\mathbf{q}_3$(46 维)，以及 $V_1,\ldots,V_5$。前 6 项维数是

$$N_1+20+46+20+46+46=N$$

第 4 层以及以上各层。由于没有电极系的侵占，第 4 层及其以上各层节点的数目都是 N，基函数都是 $\mathbf{g}_4$，写出 $\mathbf{u}_5^+$ 和 $\mathbf{u}_5^-$

$$\mathbf{u}_5^+=\frac{1}{2}\mathbf{P}_{54}\left(e^{-\mathbf{K}_4h_4}\mathbf{u}_4^++e^{\mathbf{K}_4h_4}\mathbf{u}_4^-\right)+\frac{1}{2}\mathbf{K}_5^{-1}\mathbf{P}_{45}^T\mathbf{K}_4\left(e^{-\mathbf{K}_4h_4}\mathbf{u}_4^+-e^{\mathbf{K}_4h_4}\mathbf{u}_4^-\right) \quad (5\text{-}29)$$

$$\mathbf{u}_5^-=\frac{1}{2}\mathbf{P}_{54}\left(e^{-\mathbf{K}_4h_4}\mathbf{u}_4^++e^{\mathbf{K}_4h_4}\mathbf{u}_4^-\right)-\frac{1}{2}\mathbf{K}_5^{-1}\mathbf{P}_{45}^T\mathbf{K}_4\left(e^{-\mathbf{K}_4h_4}\mathbf{u}_4^+-e^{\mathbf{K}_4h_4}\mathbf{u}_4^-\right) \quad (5\text{-}30)$$

式中，$\mathbf{P}_{ij}=\mathbf{C}_i^T\mathbf{B}_i\mathbf{C}_j$，$\mathbf{B}_i=\iint\sigma_i(x,y)\mathbf{g}_4\mathbf{g}_4^Tdxdy$，$i=4,\ldots,8$。显然，$\mathbf{P}_{ji}=\mathbf{P}_{ij}^{-1}$。

(5-29)和(5-30)式还可以写成

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_5^+\\ \mathbf{u}_5^-\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{54}+\mathbf{K}_5^{-1}\mathbf{P}_{45}^T\mathbf{K}_4 & \mathbf{P}_{54}-\mathbf{K}_5^{-1}\mathbf{P}_{45}^T\mathbf{K}_4\\ \mathbf{P}_{54}-\mathbf{K}_5^{-1}\mathbf{P}_{45}^T\mathbf{K}_4 & \mathbf{P}_{54}+\mathbf{K}_5^{-1}\mathbf{P}_{45}^T\mathbf{K}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\mathbf{K}_4h_4} & 0\\ 0 & e^{\mathbf{K}_4h_4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}_4^+\\ \mathbf{u}_4^-\end{pmatrix}$$

到了第 8 层便出了侵入带。由于最上层没有反射波，这时$\mathbf{u}_8^-=0$，它代表 N 个线性方程。把这 N 个线性方程和前面所提到的关于电极系上电流和电势的 5 个条件联立，便可以解出$\mathbf{u}_1$(N_1维)，$\mathbf{p}_1$(20 维)，$\mathbf{q}_1$(46 维)，$\mathbf{p}_2$(20 维)，$\mathbf{q}_2$(46 维)，$\mathbf{q}_3$(46 维)，以及$V_1,\ldots,V_5$。

5.3 源项与附加条件

对于这些附加条件，监督电极 M1 电势(监督电极 M2 电势)、屏蔽电极 A1 电势(屏蔽电极 A2 电势)可以作为未知数处理。难点在于主电极电流和监督电极的电流如何表达，并如何与界面转换关系组合在一块。

电极电流可以表达为：

$$\iint\sigma_i\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{g}_i^T\mathbf{C}_ie^{\mp K_iz}\mathbf{u}_i^\pm\right)dydz+\iint\mathbf{q}_1dxdy$$

其中，第 1 项是方块电极 yoz 面上的电流，其中第 2 项是方块电极 xoy 面上的电流，具有电流密度的概念。

5.3.1 对于第一项的计算

设$\phi=\phi_1L_1+\phi_2L_2+\phi_3L_3$

$$L_1=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & x_2 & x_3\\ y & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\left[(y_2-y_3)x+(x_2-x_3)y+(x_2y_3-x_3y_2)\right]$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x}=\frac{1}{2\Delta}(y_2-y_3)$$

(1) 情形 I：

电极表面的电势为 0

$$\phi_2=\phi_3=0,\quad \phi_1=\left(\mathbf{g}_i^T\mathbf{C}_i e^{\mp K_i z}\mathbf{u}_i\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\phi_1}{2\Delta}(y_2-y_3)\sum_j \mathbf{C}_i^{(1,j)}e^{\mp K_i z}\mathbf{u}_i^{\pm(j)}$$

$$I=\sigma_i\iint\frac{\partial\phi}{\partial x}dydz=\frac{\sigma_i}{2\Delta K_i}(y_2-y_3)^2\sum_j \mathbf{C}_i^{(1,j)}\left[e^{K_i h_i}\mathbf{u}_i^{+(j)}-e^{-K_i h_i}\mathbf{u}_i^{-(j)}\right]$$

(2) 情形 II：

电极表面的电势为 1

$$\phi_2=\phi_3=1,\quad \phi_1=\xi_1$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\xi_1\frac{\partial L_1}{\partial x}+\frac{\partial L_2}{\partial x}+\frac{\partial L_3}{\partial x}=\xi_1\frac{y_2-y_3}{2\Delta}+\frac{y_3-y_1-y_1-y_2}{2\Delta}=\frac{(1-\xi_1)(y_2-y_3)}{2\Delta}$$

$$I=\sigma_i\iint\frac{\partial\phi}{\partial x}dydz=\sigma_i\frac{1-\xi_1}{2\Delta}(y_2-y_3)^2h_i$$

5.3.2 对于第二项的计算

(1) 情形 1：

$$j=\mathbf{q}_1L_1$$

$$\iint\mathbf{q}_1dxdy=\mathbf{q}_1\frac{1!}{3!}2\Delta=\frac{\Delta\mathbf{q}_1}{3}$$

(3) 情形 2：

$$j=\mathbf{q}_1L_1+\mathbf{q}_2L_2$$

$$\iint jdxdy=\mathbf{q}_1\frac{1!}{3!}2\Delta+\mathbf{q}_2\frac{1!}{3!}2\Delta=\frac{\Delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{3}$$

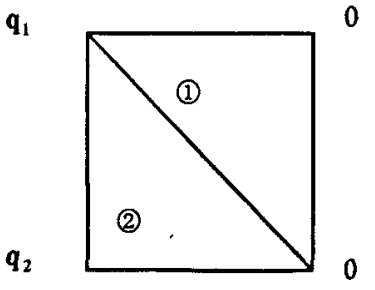


图 5-7　两种三角形情形

5.4 计算结果与检验

对电极棒进行人为分层采取与图 4-24 对井眼类似的划分方法。先考虑无井眼地层模型。单地层界面测井响应的特征是理解存在多地层界面时测井响应的关键。考虑二层介质情况，假设一侧地层介质电阻率(Rt)为 20Ω·m，另一侧电阻率(Rs)为 1Ω·m，无井眼。

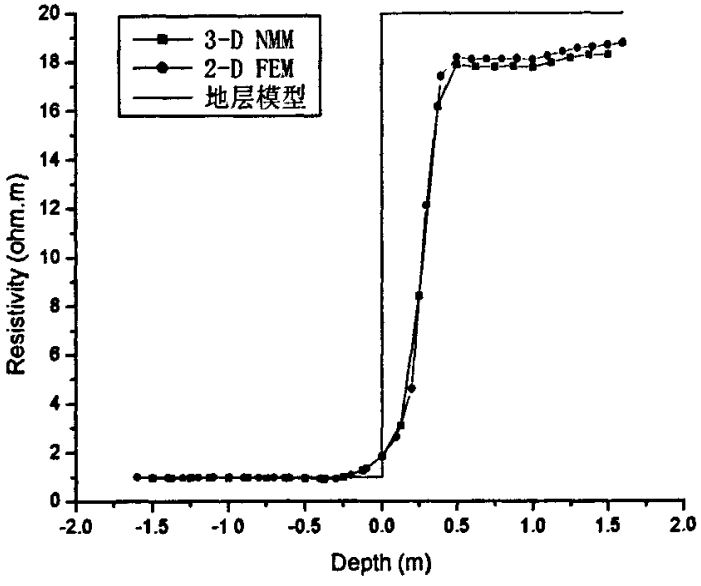


图 5-8 单一层界面轴对称深侧向测井响应

图 5-8 所示为计算的深侧向测井响应结果与 FEM 的结果对比。横坐标是主电极中点沿仪器轴线，离开地层中心的距离(也即视深度)。从图中可以看出，本文方法的计算结果比 FEM 方法的结果稍小，但是总体上与 FEM 方法具有较好的一致性。

考察不同井斜的响应特征。分别设置井斜角为 30 度和 45 度，其响应曲线如图 5-9 所示。随着井斜角的增大，测井响应对地层界面的反应越来越于迟钝，响应曲线在地层界面处的分辨率越来越低，高阻层的视电阻率数值也

依次降低。这一规律与文献[8]、文献[21]的研究结果是一致的。

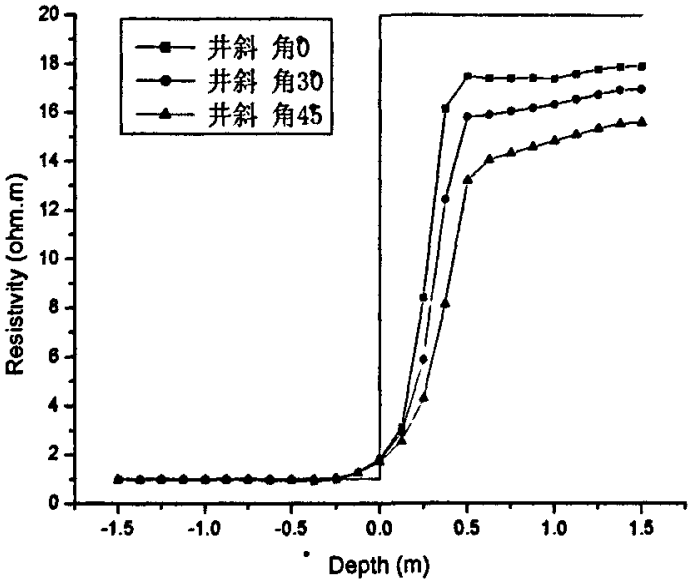


图 5-9　不同井斜角对深侧向的影响

在研究中发现，随着井斜角的增加，地层界面线对网格划分产生的影响很大，网格划分程序越来越不稳定。对于大井斜角的问题还需要继续探索。

第6章 结 论

数值模式匹配法是一种半解析、半数值的混合解法，正是基于这个特点，其计算量大大减少，运行速度明显提高，是近年来电法测井数值模拟的常用算法。在模式匹配法中，每一层对应着一个模式，其数值分析结果通过层与层之间的转换关系进行匹配。可以看出，在模式匹配法的整个计算过程中，分离变量是其前提和基础，界面处的连续性条件是其保证和关键，数值分析则是其核心和重点。

6.1 论文主要成果

本文研究的重点是非轴对称下的模式匹配算法，即三维模式匹配(3-D NMM)。基于这一研究课题，本文首先从轴对称下的模式匹配法入手，研究了模式匹配法的基本原理和基本步骤，并系统探讨了非轴对称条件的模式匹配法理论。

1. 针对模式匹配法解析部分的广义反射阵和透射阵理论难以理解和思路复杂这一问题，作者提出了界面界面转换阵理论。以感应测井为例，应用电磁场在界面电位和磁感应强度连续条件推导出了上行波和下行波的递推关系，从而摈弃了传统上采用的反射阵和透射阵理论，完成了解析部分的理论推导与改进。采用与文献相同的地质模型进行实验，经验证是正确的。与传统的模式匹配方法，这一理论具有更加明确的物理意义。

2. 基于界面转换阵理论，对普通电阻率测井的模式匹配法的解析部分进行了改进：应用电磁场在界面电位和电流密度的连续性条件推导出了上行波和下行波的递推关系。在三层有井眼和侵入的介质模型中，对A-M-N 电极系的测井响应进行了计算，经验证其结果是正确的。而且，根据互易定理，用B-A-M电极系代替A-M-N电极系，计算速度提高了近一倍。

3. 深入研究了非轴对称条件下直流电测井的模式匹配算法的基本理论。首先，根据斜井(或倾斜地层)地层物理模型，建立了合适的坐标系，并依据电测井理论写出直流电测井的定解问题。选定在该坐标系的XOY平面内用数值方法，推导出了基于平面三角形基函数的广义特征值问题中的A、B阵。在地层的走向上用解析法：首先沿这一方向划分了适当的层，然后应用电磁场在界面电位和电流密度的连续性条件推导出了上行波和下行波的递推关系，完成了解析部分的理论推导，最终形成了非轴对称条件下普通电阻率的模式匹配理论。用此方法分别计算了轴对称条件下、均匀地层、两层介质、三层介质的响应，其结果与解析解或FEM、NMM数值分析的结果具有很好的一致性，验证了此方法是可靠的。目前，对于有井眼、侵入倾斜地层的全三维的模式匹配研究，未见文献报道。

4. 此外，应用此算法研究了普通电阻率测井在各种非轴对称的地层模型下数值模拟，系统地考察了井斜角、地层厚度以及椭圆井眼等对普通电阻率测井的影响。数值模拟结果表明:①在斜井中，随着井斜角的增大，地层受围岩的影响越来越大，地层界面也变得越来不清楚，视厚度的确定也越来越不准确。②在井斜角相同的情况下，地层厚度越大受井眼和围岩的影响越小，地层厚度越小受井眼和围岩的影响越大。③对于椭圆井眼这一非轴对称情形，视电阻率受泥浆的影响数值偏小，其影响程度与地层的电阻率有关，对低阻层有一定影响，对高阻层几乎不受影响。

5. 深入研究了非轴对称条件下，双侧向测井的模式匹配算法理论。与普通电阻率不同，针对双侧向电极棒尺寸不能忽略及其复杂性，在沿地层走向上对电极棒划分了适当的层，并应用电极上的等位面条件和电位和电流密度在界面的连续性条件详细推导出了上行波和下行波的递推关系。同时，由于电极棒的存在，网格划分与单元编号也是一个难题，为此找到了不同于普通电阻率测井的单元编号、总体编号和总体矩阵的科学安装方法。最后，针对无井眼两层介质模型进行了计算，

初步验证了此方法是正确的。

6.2 存在的问题

由于此项研究难度大，复杂程度高，工作量大，又加之时间有限，此项研究还存在如下问题：

1. 全平面的网格划分节点数较多，形成的矩阵维数较大，程序运行的速度较慢。究其原因主要是界面转换阵的计算中涉及很多大型矩阵的乘积，这些乘积运算大大限制了程序的运算速度，改进矩阵的乘积的快速算法是此项研究的关键。此外，由于维数的增加广义特征值的求解速度也很慢。
2. 井眼和侵入圆环的折线近似还需要改进，能否将人为划分的层数降到最少，这也是一个值得讨的问题。人为划分的层数越少，广义特征值的求解次数也就越少，计算速度也会响应的提高。而且，随着随着地层层数的增加，计算界面转换阵的次数并不增加，这个方法的优势将会越来越明显。
3. 随着地层层数的增加，侵入关系也变得越来越复杂，电阻率的分区赋值与安装也变得越来越麻烦。所以本文只考虑了三层介质模型、一个侵入半径的情形。
4. 仪器偏心也是一种非轴对称条件，本文的算法已经完全具备这个能力。
5. 由于时间和计算速度的原因，非轴对称条件侧向测井的响应计算仅仅计算了两层介质的情形，进一步的研究需要继续进行。

6.3 成果应用展望

从非轴对称条件下普通电阻率的计算结果来看，本文研究的三维模式匹配算法是该方法思路巧妙清晰，把 FEM 三维空间的网格划分简化为二维平面的网格划分，大大减少了空间立体网格划分的麻烦，相对于三维有限元编程也显得比较灵活。用本文的成果在近期内还可开展如下研究：

1. 将本文中轴对称条件下模式匹配法的改进算法应用到多层以及其它电

测井的数值模拟。

2. 本文所研究的非轴对称的模式匹配理论对于仪器偏心、重力造成的侵入不对称以及存在裂缝等情形。
3. 继续进行非轴对称条件下双侧向测井的响应计算和应用研究。

此项研究旨在解决非轴对称电阻率测井数值模拟问题，无论是方法选择，坐标系设置，还是界面转换理论的提出，都具有很大的创新性，几乎都能解决非轴对称条件下的电阻率测井响应计算，丰富和发展了模式匹配理论，具有很高的学术意义和研究价值。

参 考 文 献

[1] 张庚骥. 电法测井(上、下册). 北京：石油工业出版社，1984

[2] 《测井学》编写组. 测井学. 北京：石油工业出版社，1998

[3] 李大潜等. 有限元素法在电法测井中的应用. 北京：石油工业出版社，1980

[4] 盛剑霓. 电磁场数值分析 [M]. 北京, 科学出版社, 1984

[5] [美] G.R. 布查南著，董文军译. 有限元分析.高等教育出版社，1988

[6] 倪光正，钱正英等，工程电磁场的数值计算. 高等教育出版社，2004

[7] 盛新庆. 计算电磁场要论. [M]. 北京, 科学出版社, 2004

[8] 汪涵明，张庚骥.倾斜地层的双侧向测井响应. 测井技术，1994,18(8); 408-412

[9] 汪功礼，张庚骥. 三维感应测井响应计算的交错网格有限差分法. 地球物理学报. 46(4), 2003. 7 561-567

[10]李泉凤. 电磁场数值计算与电磁铁设计. 北京：清华大学出版社

[11]王瑁成，邵敏. 有限元基础和数值方法. 北京：高等教育出版社. 1996

[12]Yee K S. Numerical Solution Of Initial Boundary Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. IEEE Transaction on Antennas Propagation, 1966, AP 14:302-309

[13]Chemali R, Gianzero S, Su SM. The Dual Laterolog In Common Complex Situations. SPWLA Twenty-ninth Annual Logging Symposium，June 5-8 1988

[14]肖加奇，张庚骥. 水平井和大斜度井的感应测井响应计算. 地球物理学报. 1995, 38(3):.396-404

[15]汪涵明，张庚骥，李善军等. 单一倾斜裂缝的双侧向测井响应. 石油大学学报(自然科学版), 1995,19(6):21-24

[16]李善军等. 裂缝的双侧向测井响应的数学模型及裂缝孔隙度的定量计算. 1996, 39(6): 845~852

[17]李善军. 用三维有限元素法反演单一灰岩裂缝性储层的裂缝孔隙度和裂缝倾角. 测井技术, 1998(6):412-415

[18]刘福平，李善军，张庚骥. 利用积分方程法计算双侧向测井仪的井眼校正曲线. 地球物理学报, 1997,.40(6):858-866

[19]张庚骥. 交流电测井响应的积分方程解法. 石油大学学报(自然科学版), 2001, 25(1):80-87

[20]谭永基，于永. 水平井和大斜度井的双侧向测井数值模拟. 复旦学报(自然科学版), 1997,36(6):.12-16

[21]高杰，谢然红. 大斜度井侧向测井三维正演数值模拟及曲线快速校正方法研究. 石油勘探与开发, 2000, 27(2): 69~71

[22]Aria Abubakar and Peter M. B. Nonlinear Inversion in Electrode Logging in a Highly Deviated Formation With Invasion Using An Oblique Coordinate System. IEEE Transaction on Geoscience And Remote Sensing, Vol. 38(1):25~37

[23]Padensi M.A. Method To Calculated The Reflection And Transmission Of Guide Waves. J. Opt. Soc. An 1982, 72(1):126-1300

[24]W. C. Chew, et al. Diffraction of axisymmetric waves in a borehole by bed boundary discontinuities, Geophysics. 1984, 49(1):1586-1595

[25]W. C. Chew, Z. Nie et al. An efficient solution for the response of electrical well logging tools in a complex environment, IEEE Trans. 1991, GRS-29 (2), 308-313

[26]W. C. Chew. Waves and fields in inhomogeneous media. New York Van Nostrand Reinhold. 1990

[27]Gianzero S.etl, A new high-speed hyhrid technique for simulation and inversion of resistivity logs [C]. SPE Formation Evaluation, March 1988, 55-61

[28]W. C. Chew, S. Barone, B. Anderson, C. Hennessy. Diffraction of axisymmetric In A Borehole By Bed Boundary Discontinuities. Geophysics, 1984, 49(10): 1586-1595

[29]Guo-Xin Fan, Qing Huo Liu. 3-D Numerical Mode-Matching (NMM) Method for Resistivity Well-logging tools. IEEE Transaction on Antennas and propagation, 2000, 48(10): 1544-1553

[30]Laung Tsang, Chan A K and Gianzero S. Solution of the Fundamental Problem in Resistivity Logging with a Hybrid Method [J]. Geophysics, 1984, 49(24): 1596~1604

[31]Gianzero S., Lin Y. and Su S.. A New High-Speed Hybrid Technique for Simulation and Inversion of Resistivity Logs [J]. SPE Formation Evaluation, March 1988, 55~61

[32]张庚骥, 金勇. 快速求解复杂地层中电磁波测井响应的方法. 第一届测井年会论文选集. 北京: 石油工业出版社, 1988

[33]张庚骥, 汪涵明, 汪功礼. 成层介质中交流电测井响应[J]. 地球物理学报, 1995, 38(6): 840~849

[34]张庚骥, 汪涵明. 普通电阻率测井的数值模式匹配解法[J]. 石油大学学报(自然科学版), 1996, 20(2):23~29

[35]汪功礼. 数值模式匹配法中广义特征值问题 A、B 阵元素的递推算法. 石油大学学报(自然科学版), 1999, 23(6) : 91-93

[36]聂在平，W. C. Chew, Q.H. Liu. 电磁波对轴对称二维层状介质的散射[J]. 地球物理学报，1992, 35(4)：479~489

[37]聂在平, 陈思渊等. 复杂介质环境中双侧向测井响应的高效数值分析, 电子学报, 1994，22(6)：30-37

[38]汪宏年，杨善德，常明澈. 水平层状各向异性介质中侧向电阻率测井的快速模拟与应用. 测井技术，1998, 22(1):28-31

[39]汪宏年，杨善德，常明澈. 层状各向异性介质中普通电阻率测井的快速正演模拟与应用. 石油地球物理勘探，1998,33(3):320-327

[40]汪宏年，杨善德，王艳. 各向异性地层中电阻率测井的响应特征. 石油地球物理勘探，1999.34(6):649-657,664

[41]赵延文，聂在平. 双侧向电阻率测井反演算法研究. 地球物理学报，1998，5(3)：424-435

[42]陈丽虹, 李舟波. 侵入带对视电阻率的影响. 长春科技大学学报，1999，29(3):295-298

[43]陈丽虹. 近井眼电阻率测井成像方法的研究 [D]. [博士论文]. 长春：吉林大学. 2000

[44]沈金松. 用垂直数值模式匹配方法计算多频电磁测井响应. 测井技术，2002, 26(5) :353-359

[45]宋维琪, 张庚骥. 用半解析、半有限元法计算水平层状介质的电磁场. 石油物探, 1996, 35(4): 106-110

[46]聂在平. 电法测井数值模拟研究进展. 电子科技大学学报，1995, 24(7): 58-62

[47]聂在平, 陈晓光. 轴对称二维任意非均匀介质中偏轴点源激励的位场数值解. 地球物理学报, 1997,40(1): 127-235

[48]Gianzero. S., Andersan, B. An integral transform solution to the fundamental problem in resistivity logging, Geophysics, 1982, 47(6): 946-956

[49]A.Q. Howard,Jr. & W.C.Chew. Electromagnetic Borehole Fields In A Layered, Dipping-Bed Environment With Invasion. Geophysics. 1992, 57(3): 451-465

[50]Kong, J.A., Research Topics in Electromagnetic Wave Theory, John Wiley & Sons, 210-234, 1981.

[51] Tsang, L., Brown, R., Kong, J.A., Simmons, G., Numerical Evaluation Of Electromagnetic Fields Due To Dipole Antennas In The Presence Of Stratified Media, J. Geophys. Res., 79, 2077-2080, 1974.

[52] R. H. Hardman, L. C. Shen., Theory of Induction Sonde in Dipping Beds, Geophysics, 1986, 51(3) , 800- 809

[53] W. David Kennedy, Stephen M. Curry, Stephen P. Gill, H. Frank Morrrison. Induction Log Response In Deviated Boreholes. SPWLA. 27th Annual Logging Symposium. June 9-13,1986 1-22

[54] W. C. Chew, S. Barone, B. Anderson, C. Hennessy. Diffraction of axisymmetric In A Borehole By Bed Boundary Discontinuities. Geophysics. 1984，49(10), 1586-1595

[55]Chemali R, et al. the Shoulder Bed Effect on the Borehole Fluid. Paper UU. In 24th SPWLA

[56] A.Q. Howard,Jr. & W.C.Chew. Electromagnetic Borehole Fields In A Layered, Dipping-Bed Environment With Invasion. Geophysics. Vol.57 NO.3 1992.3 451-465

[57] Madden T R, Mackie R L. Three-Dimensional Magnetotelluric Modeling And Inversion. Proc. Inst. Electron. Eng.,1989, 77(2): 319-333

[58] Mackie R L., Smith J T, Madden T R. Three-Dimensional Electromagnetic Modeling Using Finite Difference Equations: The Magnetotelluric Example. Radio Science, 1994, 29(4): 923-935

[59]Smith J T. Conservative Modeling Of 3-D Electromagnetic Fields, Part II: Biconjugate Gradient Solution and An Accelerator. Geophysics, 1996, 61(5): 1319-1324

[60] Alumbaugh D L, Newman G W, Prevost L, Et Al. Three-Dimensional Wideband Electromagnetic Modeling On Massively Parallel Computers. Radio Science, 1996, 31(1): 1-23

[61] Wammamaker P E, Hohmann G W, San Fulipo W A. Electromagnetic Modeling of Three-Dimensional Bodies In Layered Earths Using Integral Equations. Geophysics, 1984a, 49:60-74

[62] Pridmore D F, Hohmann G W, Ward S H, Et Al. An Investigation of Finite-Element Method. Geophysics, 1981, 46:1009-1024

[63] Alumbaugh D L, Newman G A, Lydie Prevost, Et Al. Three-Dimensional Wideband Electromagnetic Modeling on Massively Parallel Computers. Radio Science, 1996, 31:1-23

[64] Smith J T. Conservative Modeling Of 3-D Electromagnetic Fields, Part II: Bi-Conjugate Gradient Solution And An Accelerator. Geophysics, 1996, 61:1319-1324

[65] Liu, Q. H., And Chew, W. C., Application Of The Conjugate Gradient Fast Fourier Hankel Tranfer Method With An Improved Fast Hankel Transform Algorithm, 1994, 29:1009-1022

[66]Wannamaker, P. E., Hohmann, G. W., And Ward S. H., Magnetotelluric Response of Three-Dimentional Bodies In Layered Earths, Geophysics, 1984b, 49:1517-1533

[67] Wannamaker, P. E., Advances In Three-Dimentional Magnetotelluric Modeling Using Integeral Equations, Geophysics, 1991, 56:1716-1728

[68] Xiong, Z., Electromagnetic Modeling Of Three-Dimentional Structures By The Method Of System Iteration Using Integral Equations, 1992, 57:1556-1561

[69] Wang Hanming. Finite Element Analysis of Resistivity Logging. Dissertation of University of Houston, 1999.

[70] New Dimension in Modeling Resistivity. Oilfield Review. 1997, spring. 40-56

[71]南京工学院数学教研组. 数学物理方程与特殊函数. 北京：高等教育出版社, 1982

[72]欧唯义. 数学物理方程. 长春：吉林大学出版社，1999

[73]李舟波. 钻井地球物理勘探. 北京：地质出版社，1995

[74]李舟波. 地球物理测井数据处理和综合解释. 北京：石油工业出版社，1991

[75]中国石油学会地质委员会. 电测井在地质勘探中的应用. 北京：石油工业出版社，1988

[76]王为民，.李春祥. 电磁场论. 吉林大学出版社. 长春：吉林大学出版社，1994

[77]刘德贵，费景高，于泳江. 新编工程实用算法与 Fortron 程序. 北京：国防工业出版社.

[78]汪功礼，张庚骥.非均匀地层低频电磁波传播研究. [D]. [博士论文] 东营：石油大学，2001

[79]谢关宝，范宜仁，邓少贵. 双侧向测井资料的预处理方法研究. [D]. [硕士论文] 东营：石油大学，2004

[80]王维红，蔺景龙，宋延杰. 泥岩裂缝地层双侧向测井正演数值模拟[D]. [硕士论文] 大庆：大庆石油学院，2002

附录 1　广义特征值的解法[77]

1. 方法概要

设有特征值问题 $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{Bx}$ (或与此有关的问题)，这里 **A** 是对称阵，**B** 是对称正定阵。这些问题中的每一个问题，都可利用对称正定阵 **B** 分解为两三角形阵的方法化为对称阵的特征值问题。因为

$$\mathbf{B}=\mathbf{LL}^T \tag{1}$$

其中，**L** 为下三角形阵，所以由 $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{Bx}$ 导出

$$\left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{L}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)=\lambda\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right) \tag{2}$$

由 $\mathbf{ABx}=\lambda\mathbf{x}$ 导出

$$\left(\mathbf{L}^T\mathbf{AL}\right)\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)=\lambda\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right) \tag{3}$$

因此，$\mathbf{ABx}=\lambda\mathbf{x}$ 的特征值即 $\mathbf{Py}=\lambda\mathbf{y}$ 的特征值，其中 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{L}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$。显然，**P** 对称矩阵。但是，原来问题的特征量 **x** 则变换成 $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$。

与上面特征值问题关系密切的还有一类特征值问题，这些问题同样可通过上面的方法化成对称阵的特征值问题。例如

由 $y^TAB=\lambda y^T$，得

$$\left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}\right)^T\left(\mathbf{L}^T\mathbf{AL}\right)=\lambda\left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}\right)^T \tag{4}$$

由 $BAy=\lambda y$，得

$$\left(\mathbf{L}^T\mathbf{AL}\right)^T\left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}\right)=\lambda\left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}\right) \tag{5}$$

由 $x^TBA=\lambda x^T$，得

$$\left(\mathbf{L}^T\mathbf{y}\right)^T\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{AL}\right)=\lambda\left(\mathbf{L}^T\mathbf{y}\right)^T \tag{6}$$

这里均假设 **A** 对称和 **B** 对称正定。

可以看出，如果我们提供计算 $\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{AL}\right)$ 及 $\left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{AL}^{-1}\right)^T$ 的过程，则上述所有问题都可化为对称阵的特征值问题。但是，若用 **z** 表示已导出的对称阵特征值问题的特征向量，我们只须提供解

$$\mathbf{L}^T\mathbf{x}=\mathbf{z} \text{ 及 } (\text{即 } \mathbf{y}=\mathbf{L}\mathbf{z}) \tag{7}$$

的过程，则可求得原问题的特征向量。

如果 $\mathbf{z}$ 是规格化的，即 $\mathbf{z}^T\mathbf{z}=1$，则由(7)式确定的 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 满足

$$\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}=1 \text{ 及 } \mathbf{y}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{y}=1,\ \mathbf{y}^T\mathbf{x}=1$$

这些规格化性质，通常在具体应用上是需要的。

2. 执行过程

广义特征值的计算主要有两个过程，其功能分别如下：

(1) 广义特征值问题 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$ 转化过程(REDUCE)。将特征值问题 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$(**A** 对称，**B** 对称正定)化为对称矩阵 P 的特征值问题 $\mathbf{P}\mathbf{y}=\lambda\mathbf{y}$，其中 $\mathbf{B}=\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ 。当矩阵 **A** 和 **B** 是高阶对称窄带型矩阵时，上面过程不适用，因为这些过程会破坏矩阵的带状性。用上面的过程导出对称矩阵特征值问题后，可用已知的方法，例如 Jacobi 方法，化对称阵为对称三对角阵的 Householder 方法，求对称三角阵特征值的二分法及 QL 方法等求出该矩阵 P 的特征值或特征值及特征向量。矩阵 **P** 的特征值即原来问题 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$ 的特征值，但 **P** 的特征向量不是相应的原来问题的特征向量，而需再分别通过下面的过程求出原来问题的特征向量。

(2) 特征向量的恢复过程(REBAKA)。该过程可从已求出的对称矩阵 **P** 的特征向量 $\mathbf{z}=\mathbf{L}^T\mathbf{x}$，求出原问题 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$ 的特征向量。

附录 2　主要符号表

符　号	物理意义
J	电流密度，A/m^2
$\vec{E}$	电场强度，V/m
ϕ	电位，V
R_t	原状地层电阻率，Ω·m
σ	电导率，S/m
R_{in}	侵入带电阻率，Ω·m
RH	井眼半径，in 或 cm
R_m	泥浆电阻率，Ω·m
$\nabla\phi$	函数ϕ的梯度
$\nabla\cdot\vec{F}$	函数$\vec{F}$的散度
$\nabla\times\vec{F}$	函数$\vec{F}$的旋度
∇^2	拉普拉斯算子
I	电流强度　A
δ_{ij}	狄拉克函数($i=j,1$;　$i\neq j,0$)
k	时谐场波数
D	场域
θ	倾斜角度　rad
ε	电容率　F/m
σ_a	视电导率　s/m
$\vec{H}$	磁场强度　A/m
ω	角频率　rad/s

符　号	物理意义
K	广义特征值对角阵
N_x	x轴节点总数
N_y	y轴节点总数
N_i	节点所在的列号
N_j	节点所在的行号
$I(E)$	单元E中节点I的总体编号
$J(E)$	单元E中节点J的总体编号
$M(E)$	单元E中节点M的总体编号
h_m	m层的厚度
$\mathbf{R}$	广义反射阵
$\mathbf{T}$	广义透射阵
$\mathbf{b}_s$	源项

致　谢

■ 特别感谢博士生导师张庚骥教授的倾心支持和谆谆教诲，是他把我引入了一个电法测井数值模拟的科学殿堂。他敏锐的洞察力、精深的学术素养、扎实的理论功底以及分析问题的独特视角常给我全新的启迪。同时，他对科学孜孜追求和严谨治学的精神也时时刻刻激励着我。尽管分隔两地，但是我接受张老师面对面指导的次数却很多，此外，还多次通过特快专递、电子邮件、长途电话等方式指导和询问论文的进展情况，并热情地为我解疑释惑。多少次“山穷水尽”，又多少次“柳岸花明”，张老师都给予了很好的指导。我感触最深的是张老师善于创新和勤于思考的学术思想和治学精神，他的创新思维将使我终身受益。在此，我谨向张先生表示崇高的敬意和衷心的感谢。

■ 真诚感谢合作导师、中国石化胜利石油管理局副总工程师、胜利名师运华云教授。多年来，是他对我言传身教，教我思考，教我实践，教给了我用测井技术解决石油勘探开发难题的思路和技巧，并殷切激励我不断前进。同时，他还教育我如何做人、做事，作学问。他办公室的灯光就象一座灯塔指引我远行的航向。

■ 真诚感谢合作导师、胜利测井公司赵文杰高工。在攻读硕士和博士学位过程中，经常面对面地给予亲切的指导和培育，对论文提出了许多宝贵意见和建议，使我受益匪浅。他严谨的治学态度、创新的思维视角和平易近人的为人风格深刻影响和激励着我，提升了我思考问题和解决问题的能力。同时，还帮我解决了一些工作和科研中的实际困难，保证了论文的正常进行。

■ 衷心感谢测井信息系范宜仁教授、孙建孟教授在攻读硕士和博士期间多年来对我的培养和指导，以及在博士生中期汇报时给予了肯定和鼓励，并提供了多次学术交流和外出学习的机会。此外，还得到邓少贵、王正楷、程相志、邹德江、王小畅、杨震、李霞等同学的帮助和鼓励，他们还提供了许多次资料查询等便捷条件。

- 真诚感谢研究生院的大力支持和鼓励以及博士生创新基金的资助。这项资助极大地激励了我的创新热情，给予了我极大的研究动力，一定程度上解决了一些资金困难。
- 衷心感谢地球资源与信息学院老师的支持与鼓励，自 2000 年以来，从他们的讲课和学术报告中我学到了很多知识和创新的思维，他们求实、创新的精神是我学习的榜样。
- 真诚感谢中国石化胜利测井公司解释研究中心领导赵文杰、朱留方、张晋言、毛克宇和同事的支持与鼓励，他们为论文的开展提供了必要的条件。同时感谢同事谢关宝的多次热情帮助，经常的交流与探讨使我学到了很多东西。
- 感谢国内外学者汪涵明、汪功礼、汪宏年、沈金松、陈丽虹、聂在平、W. C. Chew、Q.H. Liu、FAN Guo-xin 等在模式匹配研究中所作的开创性工作。他们的成果是我研究工作得以完成的基础。
- 衷心感谢我的爱人杨萱和儿子谭励彦的全力支持、理解与鼓励，她们也为我的论文作出了很大的牺牲和奉献。同时，衷心感谢我的父母、岳父母对我的养育和支持，他们始终如一的理解和支持是给予了我无穷的动力。

个人简历、在学期间的研究成果

个人简历

谭茂金，男，1973 年生，工程师。1996 年毕业于长春地质学院应用地球物理专业。2000 年 9 月开始攻读石油大学(华东)地球探测信息与技术专业，主要研究方向为核磁共振测井方法与应用，2003 年 7 月获硕士学位。2003 年 9 月开始攻读博士学位，主要研究方向为电测井数值模拟方法和解释应用研究工作。

通讯地址：(257061) 中国石油大学资源与信息学院测井与信息系

电　　话：13954662992(M)　　E-mail: tanmj211@sohu.com

论文发表情况

[1] 谭茂金，张庚骥. 非均匀层状介质中感应测井响应的新型计算方法. 中国石油大学学报(自然科学版)，2006, 30(2):31-35

[2] 谭茂金，张庚骥. 用模式匹配法计算电阻率测井响应研究进展. 地球物理学进展, 2006, 21(1):208-214

[3] 谭茂金，张庚骥，赵文杰. 电阻率测井数值模拟的新型混合法初探. 物探与化探，2006, 30(1):75-78

[4] 谭茂金，赵文杰，范宜仁. 用核磁共振测井双 TW 观测识别流体性质. 天然气工业, 2006, 26(4):30-33

[5] 谭茂金，杨邦伟等. 老河口油田桩 106 区块成藏规律研究. 石油天然气地质, 2006, 27(1):44-48

[6] 谭茂金. 测井数据标准化方法研究与软件设计. 物探化探计算技术, 2006 年第 3 期

[7] 谭茂金，范宜仁，张炜. 用成像核磁测井资料描述车古 20 潜山储集层. 2005，“研究生地学论坛”论文集

[8] 谭茂金，张庚骥. 三维模式匹配法中的平面数值分析. 中国石油大学学报(自然科学版), 2006，(已经录用)

[9] 谭茂金，张庚骥. 用新型数值模式匹配解法计算地球物理探测中的电磁场. 北京邮电大学学报，2006，(已经录用)

[10]运华云，谭茂金. 核磁共振测井双 TW 观测方式及其应用. 油气地质与采收率，2006，(已经录用)

[11]谭茂金，赵文杰. 用核磁测井资料评价复杂岩性储集层. 地球物理学进展，2006，(已经录用)

[12]谭茂金，张庚骥. 非轴对称条件下用模式匹配法计算电阻率测井响应. 地球物理学报，2006，(已投稿)

[13]王珺，杨长春，许大华，谭茂金. 微电阻率扫描成像测井方法应用. 地球物理学进展，2005 第 6 期

参加会议和会议论文

[1] 谭茂金。测井新技术在碳酸岩盐等复杂岩性储集层中的应用。中国石油勘探六大领域进展、经验与交流会，2005，山东，青岛。

[2] 谭茂金，张庚骥，范宜仁。电测井数值模拟的模式匹配法新进展。中国石油测井重点实验室会议及地球物理院士论坛，2005，北京，延庆。

[3] 谭茂金，张庚骥，赵文杰。普通电阻率测井的新型模式匹配法。中国石油学会第四届青年学术会议，2005，湖北，荆洲。

[4] 谭茂金，范宜仁，张炜。用成像核磁测井资料描述车古 20 潜山储集层。第二届全国研究生地学论坛，2005，山东，东营。