

暨南大学硕士学位论文

题名（中英对照）：

含有相继时变时滞的系统的稳定性分析

Stability Analysis for Systems with Two Additive Time-varying Delay
Components

作者姓名：

指导教师姓名

及学位、职称：

学科、专业名称：数学、应用数学

论文提交日期：2014年4月

论文答辩日期：2014年5月

答辩委员会主席：

论文评阅人：

学位授予单位和日期：暨南大学

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 暨南大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名： 签字日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 暨南大学 有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 暨南大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名：

签字日期： 年 月 日

学位论文作者毕业后去向：

工作单位：

通讯地址：

导师签名：

签字日期： 年 月 日

电话：

邮编：

摘要

时滞现象广泛地存在各种实际系统中，如生物系统、神经网络系统、自动化系统、通信系统等。造成时滞产生的原因有很多，比如系统元件老化导致测量存在时滞，机械磨损导致信号的传递存在时滞。时滞常常造成系统的不稳定性，甚至性能变差。随着科技的进步，社会的发展，系统越来越复杂，人们对系统的控制要求也越来越高。时滞的存在使得人们对系统的分析和综合变得更加困难和复杂。因此，时滞系统的稳定性研究得到了广泛地关注。

在分析国内外文献的基础上，本文对几类时滞系统进行稳定性研究，并得到了系统的稳定性准则。第一章是绪论，介绍了时滞系统的研究背景，时滞系统的稳定性研究概况，其中着重介绍了一些常用的时滞稳定性分析方法。第二章给出了本文所需基础知识，包括 Lyapunov 稳定性理论，相关引理以及符号说明。第三章讨论了时变时滞线性系统的稳定性问题。采用任意分割法，用分割点将时滞区间分割成任意两段，结合积分不等式，对于每一段区间的稳定性进行分析，给出了稳定性的充分条件。第四章研究含有 2 个相继时变时滞的线性系统的稳定性问题，通过考虑时滞与它们上界的关系，采用新的积分不等式处理技术估计积分交叉项。第五章是研究含有 2 个相继时变时滞的中立型时滞系统的稳定性问题。基于 Lyapunov 函数，通过将时滞分段，利用积分不等式对 Lyapunov 函数的导数给出了新的界定方法。第六章，本章考虑了含有 2 个相继时变时滞的神经网络的稳定性问题。第七章，本章对含有 2 个相继时变时滞的系统的 H_∞ 性能分析，考虑网络控制系统中存在网络时滞，数据包丢失等问题，设计了状态反馈控制器，建立了控制器存在的条件，提出了求解状态反馈增益矩阵的方法。

关键词：相继时滞；线性矩阵不等式；中立型时滞系统；神经网络；稳定性；网络控制系统。

Abstract

It is known that the phenomena of time delay occur in many practical systems, such as biological systems, neural networks, automatic systems and communication systems. Time delays may be produced by many reasons, e.g., the ageing of component and mechanical wear leads to the measurement and signal transmission. The existence of time delay causes instability, even poor performance. With the advancement of technology and the development of social, the systems become more complex, and the requirements of the system control are also increasing. The existence of time delay makes it more difficult and complicated to analyze and integrate the systems. Hence, much attention is received in stability analysis of the systems.

Based on the analysis of literature at home and abroad, the stability of several types of time delay systems is investigated, and some delay-dependent stability criteria are obtained. In Chapter 1, the introduction of the thesis is given, including the research background, the review of time-delay systems and some common research methods. In Chapter 2, the Lyapunov stability theory, related lemmas and related symbols are given. In Chapter 3, the stability problem of linear time-varying delay systems is discussed. Based on the delay-dividing approach, the delay interval is partitioned into two subintervals. By using integral inequalities, some delay-dependent stability criteria are obtained. In Chapter 4, the stability problem of time delay systems with two additive time-varying delay components is studied. Reciprocally convex method is used for estimating the upper bound of the derivate of the Lyapunov functional. In Chapter 5, the stability problem of neutral delay systems with two additive time-varying delay components is studied. By constructing a new Lyapunov functional and combining with delay-dividing approach and inequality method, the stability conditions are given. In chapter 6, the stability problem of neural networks is considered. In Chapter 7, the problem of H_∞ performance analysis is concerned. Considering the network control system that includes the time delay and data packet dropouts, the state feedback controller is designed. The conditions of the existence of controller and the method for solving the state feedback gain are proposed.

Key words: additive delay components; linear matrix inequality; neutral delay system; neural networks; stability; network control system.

目录

摘要.....	I
Abstract.....	II
目录.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 时滞系统的研究背景.....	1
1.2 时滞系统稳定性研究概况.....	2
1.3 含有相继时变时滞的系统.....	4
1.4 论文各章安排和创新之处.....	5
第二章 基础知识.....	7
2.1 Lyapunov 稳定性理论.....	7
2.2 相关引理.....	8
2.3 符号说明.....	10
第三章 线性系统的稳定性分析.....	11
3.1 引言.....	11
3.2 系统模型描述.....	11
3.3 线性系统的稳定性定理.....	11
3.4 不确定性线性系统稳定性定理.....	17
3.5 数值实例.....	20
3.6 结论.....	22
第四章 含有相继时变时滞的线性系统的稳定性分析.....	23
4.1 引言.....	23
4.2 系统模型描述.....	23
4.3 主要结果.....	23
4.4 数值实例.....	28
4.5 结语.....	29
第五章 含有相继时变时滞的中立型系统的稳定性分析.....	30

5.1	引言.....	30
5.2	系统模型描述.....	30
5.3	主要结论.....	31
5.4	数值实例.....	36
5.5	结论.....	37
第六章	含有相继时变时滞的神经网络的稳定性分析.....	38
6.1	引言.....	38
6.2	系统模型描述.....	38
6.3	主要结论.....	39
6.4	数值实例.....	42
6.5	结论.....	43
第七章	网络控制系统的稳定性分析.....	44
7.1	引言.....	44
7.2	系统模型描述.....	44
7.3	稳定性分析.....	45
7.4	网络控制系统.....	50
7.5	H_{∞} 性能分析.....	52
7.6	数值实例.....	55
7.7	结论.....	60
第八章	结论与展望.....	61
参考文献	62

第一章 绪论

1.1 时滞系统的研究背景

在自然运动和社会活动中，存在着各种量与量的关系，这种量与量关系的变化在数学上用函数来描述。那些表示自变量、未知函数和函数的导数（或微分）的关系的方程就是微分方程。只含有一个自变量的微分方程就是常微分方程。

常微分方程是解决实际问题的重要工具，在物理，化学，工程学，经济学等领域有广泛的应用。例如：

例 1.1 物体的冷却定律。同一物体在外部介质性质及温度相同，本身性质及表面积相同时，物体温度下降速率只与外部与物体的温差成正比。假设一个较周围热的物体温度为 T ，周围环境的温度 C ， K 为一个常数，那么它们的关系可以表示为

$$\dot{T}(t) = -K(T(t) - C).$$

例 1.2 马尔萨斯人口模型。英国人口学家马尔萨斯在研究人口时，认为在人口自然增长的过程中，相对增长率为固定值。假设 N 为人口数量， r 为生命系数，则它们的关系可以描写为

$$\dot{N}(t) = rN(t).$$

从例 1.1 可以看出， $\dot{T}(t)$ 只和当前的状态 $T(t)$ 有关，和以前的状态无关。例 1.2 也是类似的。换句话说，它们的运动变化趋势只跟现在的状态有关，独立于以前的状态。然而，事物运动是复杂多样的，在许多系统中，系统存在着滞后现象，这种现象称为“时滞”现象。时滞现象广泛地存在各类实际系统中，如网络控制系统、神经网络系统、自动化系统、通讯系统等。系统的运动变化趋势不仅跟现在的状态有关，还依赖于过去的状态。这样的系统称为时滞系统。

下面给出几个例子：

例 1.3 在某水流控制系统中，当给输入端加水时，输出端并不能马上能流出水来，而是要经过一段时间，水经过管道才能流出来，且输入和输出在数值上并没有变化。假设 $y(t)$ 表示输出， $r(t)$ 表示输入， l 为水管长度， v 为水流速度，时滞 $\sigma = l/v$ ，则

$$y(t) = r(t - \sigma),$$

例 1.4 在神经网络的应用中, 由于信号传输及神经元之间固有的延迟时滞, 在两个神经元中会产生时滞, 所以多时滞的神经网络模型^[1]可以表示成

$$\frac{du(t)}{dt} = -Cu(t) + Ag(u(t)) + \sum_{i=1}^N B_i g(u(t - \tau_i)) + I.$$

例 1.5 能源消费系统的时滞反馈控制模型. 假设 $N(t)$ 东部的能源需求量, $u(t)$ 为西部向东部的能源输出量, 考虑到能源供需的时滞性, 建立了我国东部西部联动能源消费系统的时滞反馈控制模型^[2]

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K} - qu(t - \sigma)\right), \\ \frac{du(t)}{dt} = ku(pN(t - \sigma) - c). \end{cases}$$

由于系统元件老化和机器磨损, 会导致系统的测量、信号的传递存在时滞. 这往往致系统性能下降, 甚至稳定性下降. 时滞作为系统的一种本质特性, 不可能被完全消除. 这使得稳定性分析具有重要的理论和实际价值, 从而一直成为时滞系统分析理论的一个热点问题.

1.2 时滞系统稳定性研究概况

稳定性分析是时滞系统研究的一个重要问题, 是时滞系统分析和综合的基础. 早在十七世纪就出现过稳定性的概念. 19 世纪末, 俄国数学家李雅普诺夫开创性地提出求解非线性常微分方程的李雅普诺夫函数法, 从而奠定了稳定性理论的基础.

时滞系统的研究主要有两种方法: 频域法和时域法. 频域法以研究系统传递函数为主, 根据时滞系统的特征根是否均具有负实部来判定系统是否稳定. 当特征方程的根均具有负实部时, 则系统渐近稳定. 而当特征方程的根有正实部时, 则系统不稳定.

时域法以研究系统的状态方程为主, 克服了频域法不能处理时变与参数摄动的弊端, 而且便于计算机计算, 因此成为时滞系统稳定性分析的主要方法. 时域法的理论基础是 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理和 Lyapunov-Razumikhin 稳定性定理, 通过选取合适的 Lyapunov 函数来得到系统的稳定性的充分条件. 正因为这样, 如何选取 Lyapunov 函数和采用何种方法对 Lyapunov 函数导数进行缩放是时滞稳定性分析的一个重要的内容.

从 20 世纪 60 年代, Lyapunov 函数法应用于时滞系统的控制问题, Lyapunov 函数法成为时域法中应用最为广泛的一种方法. 20 世纪 90 年代, 随着求解凸优化问题内点法的提出, 很

多控制问题都可以转换成线性矩阵不等式(LMI)而得以解决. 尤其是在 1995 年, 随着 MathWork 公司在软件 Matlab 开发出 LMI 工具箱, 使得线性矩阵不等式方法被广泛得应用于时滞系统稳定性分析中. 借助 Lyapunov 函数法, 把时滞系统的稳定性转化成线性矩阵不等式的可行性问题或一类具有 LMI 约束的凸优化问题, 并以 LMI 的形式给出稳定性的条件. Lyapunov 函数法最大的优势可以利用计算机软件(如 Matlab 中的 LMI 工具箱)求解线性矩阵不等式.

一般来说, 时滞系统的稳定性准则有两种, 一种是时滞无关准则, 另一种是时滞依赖准则. 时滞无关准则独立于时滞, 且不对时滞做任何限制. 时滞依赖准则包含着时滞信息. 在许多实际系统中, 时滞是有界的, 尤其是当时滞非常小时, 时滞依赖准则比时滞无关准则具有更小的保守性.

时滞依赖准则涉及到时滞上确界问题, 当时滞在上确界以下时, 系统是稳定的. 取得的时滞上确界越大, 说明时滞依赖准则保守性越小. 因此, 时滞的上确界是评价时滞依赖准则保守性的指标.

为得到时滞系统的稳定性准则, 许多学者提出了不同的方法. 本文将介绍以下几种常用的方法.

(1)自由权矩阵法. 对 Lyapunov 函数导数时, 往往会出现含有时滞的积分项. 自由权矩阵法主要通过引入自由权矩阵来处理 Lyapunov 函数导数中的相关项, 本质上使应用牛顿—莱布尼茨公式. 为处理积分项 $-\int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds$, 文献 [3] 引用恒等式 $2\zeta_1^T N[x(t)-x(t-d(t))-\int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)ds]=0$. 其中 N 是任意的矩阵, 可以任意选取. 这样可以通过线性不等式矩阵的求解来去最优值, 从而减少了保守性. 自由权矩阵法的优势在于不必对交叉项进行处理, 但引入过多的变量会增加计算的复杂度.

(2)积分不等式法. 积分不等式法主要思路是利用积分不等式对积分交叉项如 $-\int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds$ 进行放大处理. 如果处理得到的上界越严格, 保守性越小. 积分不等式有很多, 例如, 著名的 Jensen 不等式

$$-\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)W\dot{x}(s)ds \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W & W \\ * & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}.$$

由于积分不等式法没有引入自由权矩阵, 含有较少的决策变量, 可以减少计算的复杂度, 因此具有一定的优势.

(3) 三重积分法. 在考虑时滞稳定性分析时, 构造的 Lyapunov 函数一般只有二重积分. 三重积分法主要思路是构造 Lyapunov 函数时, 引入三重积分项. 例如, 文献[5]的 Lyapunov 函数有 $\int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{\beta}^0 \int_{t+\lambda}^t \dot{x}^T(s)U_2\dot{x}(s)dsd\lambda d\beta$. 对其求导后, 含有积分项 $-\int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}(s)U_2\dot{x}(s)ds\beta$, 再利用积分不等式

$$-2\xi^T H \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}(s)U_2\dot{x}(s)ds\beta \leq \tau_s \xi^T(t)HU_2^{-1}H^T \xi^T(t) + \int_{-\tau_2}^{-\tau_1} \int_{t+\beta}^t \dot{x}(s)U_2\dot{x}(s)ds\beta,$$

对积分项进行消除. 由于这种方法利用了更多的时滞状态信息, 因此具有较小保守性.

(4)时滞分割法. 时滞分割法将时滞分割成若干部分, 构造新的 Lyapunov 函数. 例如, 文献[6]把时滞区间分成相等两部分, 构造一个含有中点时滞的 Lyapunov 函数, 充分利用积分不等式等方法, 对每个区间进行稳定性分析, 从而得到整个区间的稳定性准则. 利用这种方法, 可以把时滞分割成 N 等分, 从而得到保守性更小的准则. 然而, 随着分割数目的增大, 得到的线性不等式也会变得很复杂, 计算的消耗的时间也会越来越多.

1.3 含有相继时变时滞的系统

在众多关于线性系统的稳定性分析的文献中, 通常假设状态 $x(t)$ 含有单个时滞或多个具有相同性质的时滞. 然而, 文献[8]指出, 在网络控制系统中, 由于网络传输条件的变化, 当信号经过网络, 从一端传输到另一端时, 会导致产生不同性质的相继时变时滞. 一个这种情况的例子就是网络控制系统, 如图 1.1.

由图 1.1 知, τ_k 是从传感器到控制器的产生的时滞, d_k 是从控制器到执行器的产生的时滞. 由于网络传输条件的变化, 这两种时滞性质是不一样的, 因此不能把它们合并在一起.

由控制理论的知识可知, 图 1.1 的闭环系统可表示为:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \tau_k(t) - d_k(t)).$$

因此, 文献[8]创造性地提出了含有 2 个相继时变时滞的新的线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h_1(t)-h_2(t)).$$

随后, 文献[9]在神经网络的基础上提出了含有 2 个相继时变时滞的新的神经网络

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Ag(x(t)) + Bg(x(t-d_1(t)-d_2(t))) + u.$$

本文主要是对几类含有相继时变时滞的系统进行研究.

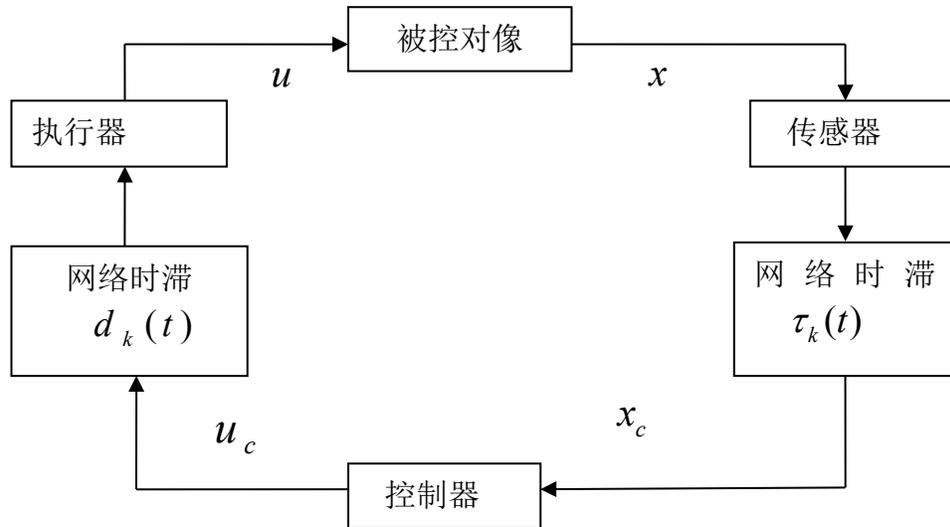


图 1.1 网络控制系统

1.4 论文各章安排和创新之处

本文主要讨论了几类时滞系统的稳定性, 主要的研究方法是运用Lyapunov稳定性理论、积分不等式法等. 主要的内容和创新之处如下:

第一章是绪论, 介绍了时滞系统的研究背景, 时滞系统的稳定性研究概况, 其中着重介绍了一些常用的时滞稳定性分析方法.

第二章给出了本文所需基础知识, 包括Lyapunov稳定性理论, 相关引理以及符号说明.

第三章在时滞线性系统已有研究成果的基础上, 采用任意分割法, 用分割点 $h = \lambda h_1 + (1-\lambda)h_2$ 将时滞区间分割成任意两段, 结合积分不等式, 对于每一段区间的稳定性进行分析, 给出了稳定性的充分条件.

第四章研究含有2个相继时变时滞的线性系统的稳定性问题, 通过考虑时滞与它们上界的关系, 采用新的积分不等式处理技术估计积分交叉项, 适当地放大Lyapunov函数的导数, 得

到了改进的稳定性准则.

第五章是研究含有 2 个相继时变时滞的中立型时滞的稳定性问题. 基于 Lyapunov 函数, 通过将时滞 $d(t)$ 分段, 利用积分不等式对 Lyapunov 函数的导数给出了新的界定方法.

第六章, 本章讨论了含有 2 个相继时变时滞的神经网络的稳定性问题, 利用 Lyapunov 泛函和线性矩阵不等式方法, 我们得到了新的稳定性准则.

第七章, 本章对含有 2 个相继时变时滞的系统的 H_∞ 性能分析, 考虑网络控制系统中存在网络时滞, 数据包丢失等问题, 设计了状态反馈控制器, 建立了控制器存在的条件, 提出了求解状态反馈增益矩阵的方法.

第二章 基础知识

2.1 Lyapunov 稳定性理论

一般地, 时滞系统可以表示成:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \geq t_0 \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), & \forall \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $f(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是向量函数, h 为系统的最大时滞. 方程(2.1)表示状态向量 $x(t)$ 在时间 t 的导数 $\dot{x}(t)$ 不仅跟时间 t 有关, 还跟状态向量 $x(t)$ 有关. 如果存在某个状态向量 x^* 使得

$$\dot{x}^* = f(t, x^*), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0,$$

则称 x^* 为系统的平衡点.

定义 2.1 (时滞系统稳定) 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 使得 $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ 时, 均有 $\|x(t)\| < \varepsilon, t \geq t_0$, 则称方程(2.1)的零解 $x(t)=0$ 是稳定的.

定义 2.2 (时滞系渐近统稳定) 如果方程(2.1) 的 $x(t)=0$ 是稳定的, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$, 使得 $\|x_0\| \leq \delta_0(\varepsilon, t_0)$ 时, 均有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, t \geq t_0$, 则称方程(2.1)的零解 $x(t)=0$ 是渐近稳定的.

定义 2.3 对任意函数 $\phi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, 定义范函数

$$\|\phi\|_c = \max_{a \leq \theta \leq b} \|\phi(\theta)\|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 2-范数.

在研究系统稳定, 最常用的方法是 Lyapunov 第二方法, 即借助构造一个特殊的 $V(t, x)$ 函数, 利用 $V(t, x)$ 函数及其导数的性质来确定系统的稳定性. 有两个基本定理: Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理和 Lyapunov-Razumikhin 稳定性定理.

定理 2.1 (Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理) 考虑系统 (2.1), $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 表示从实数域 \mathbb{R} 及连续函数的有界集 \mathbb{C} 映射到 \mathbb{R}^n 的有界集, $u, v, w: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 均为连续非减函数, v 为严格增函数, 且当 $s > 0$ 时, $u(s), v(s)$ 均为正数, 且满足 $u(0) = v(0) = 0$. 如果存在连续可微函数

$V: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi(0)\|_c)$$

并且沿着系统(2.1)的轨迹有

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|),$$

则系统的零解一致稳定. 若 $w(s) > 0, \forall s > 0$, 则系统零解一致渐进稳定.

定理 2.2 (Lyapunov-Razumikhin 稳定性定理) 考虑系统 (2.1), $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 表示从实数域 \mathbb{R} 及连续函数的有界集 \mathbb{C} 映射到 \mathbb{R}^n 的有界集, $u, v, w: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 均为连续非减函数, v 为严格增函数, 且当 $s > 0$ 时, $u(s), v(s)$ 均为正数, 且满足 $u(0) = v(0) = 0$. 如果存在连续可微函数 $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|)$$

并且沿着系统(2.1)的轨迹有:

$$\text{如果 } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \forall \theta \in [-h, 0] \text{ 时, } \dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|),$$

则系统的零解一致稳定. 若 $w(s) > 0, \forall s > 0$, 且存在一个连续非减函数 $P(s) > 0, \forall s > 0$, 使得下列式子成立:

$$\text{当如果 } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))), \forall \theta \in [-h, 0] \text{ 时, } \dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|),$$

则系统零解一致渐近稳定.

2.2 相关引理

本节将集中介绍论文中用到的一些基本引理.

引理 2.1^[4] 对于任意矩阵 $W \in R^{n \times n}$, 标量 $\gamma > 0$, 向量函数 $\dot{x}: [-\gamma, 0] \rightarrow R^n$ 的积分项 $-\gamma \int_{t-\gamma}^t \dot{x}(s) W \dot{x}(s) ds$ 有定义, 则

$$-\gamma \int_{t-\gamma}^t \dot{x}(s) W \dot{x}(s) ds \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\gamma) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W & W \\ * & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\gamma) \end{bmatrix}.$$

引理 2.2^[7] 对于任意矩阵 $M \in R^{n \times n}$, $h_1 \leq h(t) \leq h_2$, 向量函数 $\dot{x}: [-h_2, -h_1] \rightarrow R^n$ 的积分项 $-(h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}(s) M \dot{x}(s) ds$ 有定义, 则

$$-(h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}(s) M \dot{x}(s) ds \leq \xi^T(t) \Lambda \xi(t),$$

其中

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h(t)) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} -M & M & 0 \\ * & -2M & M \\ * & * & -M \end{bmatrix}.$$

引理 2.3^[24] 对于给定矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $S_{11} = S_{11}^T, S_{22} = S_{22}^T$, 则下列两个条件是等价的:

(1) $S < 0$;

(2) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

引理 2.4^[6] 具有适当维数的实数矩阵 $U, W, Q = Q^T$, 则 $Q + UF(t)W + W^T F^T(t)U^T < 0$ 对任意 $F^T(t)F(t) \leq I$ 成立的充要条件是存在正数 ε 使得 $Q + \varepsilon^{-1}UU^T + \varepsilon W^T W < 0$ 成立.

引理 2.5^[14] 对于 $k_i(t) \in [0, 1], \sum_{i=1}^N k_i(t) = 1$, 向量 $\eta_i(t)$ 满足当 $k_i(t) = 0$ 时, $\eta_i(t) = 0$, 正定矩阵

$R_i > 0$, 若存在 $S_{ij} (i=1, \dots, N-1, j=i+1, \dots, N)$, 满足 $\begin{bmatrix} R_i & S_{ij} \\ & R_j \end{bmatrix} \geq 0$, 那么下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i(t)} \eta_i^T R_i \eta_i \geq \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & \cdots & S_{1,N} \\ * & \ddots & \vdots \\ * & * & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix}.$$

引理 2.6^[16] 对于任何正定矩阵 $Z \in R^{n \times n}$, 标量 $r, r_i (i=1, 2, 3, 4)$ 且满足 $r > 0, 0 \leq r_2 - r_1 \leq r, r_4 = r - (r_2 - r_1) + r_3$, 向量函数 ω 在下列相关的积分有定义, 若存在矩阵 T 满

足 $\begin{bmatrix} Z & T \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$, 那么下列不等成立:

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \omega^T(s) Z \omega(s) ds + \int_{r_3}^{r_4} \omega^T(s) Z \omega(s) ds \\ & \geq \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \int_{r_1}^{r_2} \omega(s) ds \\ \int_{r_3}^{r_4} \omega(s) ds \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z & T \\ * & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{r_1}^{r_2} \omega(s) ds \\ \int_{r_3}^{r_4} \omega(s) ds \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

引理 2.7^[42] 具有适当维数的实数矩阵 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, 则 $\Sigma_1 + \Sigma_3 \Sigma_2 + \Sigma_2^T \Sigma_3^T < 0$ 的充要条件是存在 $W > 0$ 使得 $\Sigma_1 + \Sigma_3 W^{-1} \Sigma_3^T + \Sigma_2^T W \Sigma_2^T < 0$ 成立.

2.3 符号说明

本文将用到的符号, 其表示的意义说明如下:

I	单位矩阵
\mathbb{R}^n	n 维欧式空间
$\mathbb{R}^{n \times m}$	$n \times m$ 维矩阵
T	矩阵转置
*	矩阵相应的对称部分
$\ \cdot\ $	Euclidean 范数
$P > 0$	正定矩阵 P
$A > B$	$A - B$ 是正定矩阵

第三章 线性系统的稳定性分析

3.1 引言

线性系统是一种常见的系统. 本章主要研究时变时滞的线性系统. 文献[31][32]采用了中点法, 用区间时滞中点 $h = (h_1 + h_2)/2$ 将区间时滞分割成相等的两部分. 然而分割点为区间时滞中点时, 得到的 h_2 的最大允许时滞上界不一定是任意区间时滞分割时获得的时滞上界的最大值. 因此, 本章不是把时滞分割成相等的两个区间, 而是用分割点 $h = \lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2$ 将时滞区间分割成任意两段, 结合积分不等式, 对于每一段区间的稳定性进行分析, 得到了新的稳定性准则.

3.2 系统模型描述

考虑下面带有区间时滞的线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - h(t)), & t > 0 \\ x(t) = \Phi(t), & \forall t \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $x(t)$ 是状态向量, A, A_1 是具有相应维数的常数矩阵, $\Phi(t)$ 是初始状态函数, 时滞函数 $h(t)$ 可微, 且满足

$$0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \dot{h}(t) < d < \infty, \quad \forall t > 0 \quad (3.2)$$

其中, h_1, h_2 和 d 是常数.

3.3 线性系统的稳定性定理

定理 3.1 对于常数 $0 < \lambda < 1, 0 \leq h_1 < h_2, d > 0$, 系统(3.1)渐近稳定, 如果存在正定矩阵 $P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, M_1, M_2, M_3$ 使得下列四个线性矩阵不等式同时成立:

$$\Psi_1 - \phi_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

$$\Psi_2 - \phi_j \leq 0, \quad j = 3, 4 \quad (3.4)$$

其中

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & M_1 & 0 & 0 \\ * & \varphi_{22}^1 & M_3 & M_3 & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & M_2 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & M_1 & 0 & 0 \\ * & \varphi_{22}^2 & 0 & M_2 & M_2 \\ * & * & \varphi_{33} & M_3 & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{11} = PA + A^T P + Q_3 + Q_4 + Q_5 - M_1 + A^T \Omega A,$$

$$\varphi_{12} = PA_1 + A^T \Omega A_1,$$

$$\varphi_{22}^1 = -(1-d)Q_5 - M_3 - M_3^T + A_1^T \Omega A_1,$$

$$\varphi_{22}^2 = -(1-d)Q_5 - M_2 - M_2^T + A_1^T \Omega A_1,$$

$$\varphi_{33} = Q_2 - Q_3 - M_1 - M_3,$$

$$\varphi_{44} = Q_1 - Q_2 - Q_4 - M_2 - M_3,$$

$$\varphi_{55} = -Q_1 - M_2,$$

$$\Omega = h_1^2 M_1 + \lambda^2 (h_2 - h_1)^2 M_2 + (1-\lambda)^2 (h_2 - h_1)^2 M_3,$$

$$\phi_1 = [0 \ I \ 0 \ -I \ 0]^T M_3 [0 \ I \ 0 \ -I \ 0],$$

$$\phi_2 = [0 \ I \ -I \ 0 \ 0]^T M_3 [0 \ I \ -I \ 0 \ 0],$$

$$\phi_3 = [0 \ I \ 0 \ 0 \ -I]^T M_2 [0 \ I \ 0 \ 0 \ -I],$$

$$\phi_4 = [0 \ I \ 0 \ -I \ 0]^T M_2 [0 \ I \ 0 \ -I \ 0].$$

证明 构造如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \sum_{i=1}^3 V_i(t), \quad (3.5)$$

其中

$$V_1(t) = x^T(t)Px(t),$$

$$V_2(t) = \int_{t-h_2}^{t-h} x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-h}^{t-h_1} x^T(s)Q_2x(s)ds + \int_{t-h_1}^t x^T(s)Q_3x(s)ds + \int_{t-h}^t x^T(s)Q_4x(s)ds \\ + \int_{t-h(t)}^t x^T(s)Q_5x(s)ds,$$

$$V_3(t) = h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)M_1\dot{x}(s)ds + (h_2-h) \int_{-h_2}^{-h} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds + (h-h_1) \int_{-h}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds,$$

其中 $h = \lambda h_1 + (1-\lambda)h_2$.

对 $V(t)$ 沿着系统(3.1)轨线求导得:

$$\dot{V}_1(t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t), \quad (3.6)$$

$$\dot{V}_2(t) \leq x^T(t)(Q_3+Q_4+Q_5)x(t) + x^T(t-h_1)(Q_2-Q_3)x(t-h_1) + x^T(t-h)(Q_1-Q_2-Q_4)x(t-h) \\ - x^T(t-h_2)Q_1x(t-h_2) - (1-d)x^T(t-h(t))Q_5x(t-h(t)), \quad (3.7)$$

$$\dot{V}_3(t) = \dot{x}^T(t)[h_1^2M_1 + (h_2-h)^2M_2 + (h-h_1)^2M_3]\dot{x}(t) - h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)M_1\dot{x}(s)ds \\ - (h_2-h) \int_{t-h_2}^{t-h} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds - (h-h_1) \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds. \quad (3.8)$$

由引理 2.1, 可得

$$-h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)M_1\dot{x}(s)ds \\ \leq \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_1 & M_1 \\ * & -M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_1) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

对于 $\forall t > 0, h(t)$ 必定落在区间 $[h_1, h]$ 或者区间 $[h, h_2]$, 因此分两种情况进行讨论.

第一种情况, 当 $h_1 \leq h(t) \leq h$ 时,

$$-(h_2-h) \int_{t-h_2}^{t-h} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\ \leq \begin{bmatrix} x^T(t-h) & x^T(t-h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_2 & M_2 \\ * & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$-(h-h_1) \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ = -(h-h(t)) \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds - (h(t)-h_1) \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ - (h-h(t)) \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds - (h(t)-h_1) \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds. \quad (3.11)$$

由引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned} & -(h-h(t))\int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ & \leq \begin{bmatrix} x^T(t-h(t)) & x^T(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_3 & M_3 \\ * & -M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h(t)) \\ x(t-h) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & -(h(t)-h_1)\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ & \leq \begin{bmatrix} x^T(t-h_1) & x^T(t-h(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_3 & M_3 \\ * & -M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

设 $\alpha = \frac{h(t)-h_1}{h-h_1}$, 则

$$\begin{aligned} & -(h(t)-h_1)\int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ & = -\alpha\int_{t-h}^{t-h(t)} (h-h_1)\dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ & \leq -\alpha\int_{t-h}^{t-h(t)} (h-h(t))\dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ & \leq \alpha \begin{bmatrix} x(t-h(t)) \\ x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M_3 & M_3 \\ * & -M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h(t)) \\ x(t-h) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & -(h-h(t))\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ & = -(1-\alpha)\int_{t-h(t)}^{t-h_1} (h-h_1)\dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ & \leq -(1-\alpha)\int_{t-h(t)}^{t-h_1} (h(t)-h_1)\dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\ & \leq (1-\alpha) \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M_3 & M_3 \\ * & -M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

由式(3.6)-(3.15), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq \eta^T(t)[\Psi_1 - \alpha\phi_1 - (1-\alpha)\phi_2] \eta^T(t) \\ & = \eta^T(t)[\alpha(\Psi_1 - \phi_1) + (1-\alpha)(\Psi_1 - \phi_2)] \eta^T(t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $\eta^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t-h(t)) \ x^T(t-h_1) \ x^T(t-h) \ x^T(t-h_2)]$.

由于 $0 \leq \alpha \leq 1$, $\alpha(\Psi_1 - \phi_1) + (1-\alpha)(\Psi_1 - \phi_2)$ 是 $\Psi_1 - \phi_1$ 和 $\Psi_1 - \phi_2$ 的一个凸组合, 可以看出, 如果线性矩阵不等式(3.3)成立, 则 $\alpha(\Psi_1 - \phi_1) + (1-\alpha)(\Psi_1 - \phi_2) < 0$, 从而 $\dot{V}(t) < 0$.

第二种情况, 当 $h \leq h(t) \leq h_2$ 时,

$$\begin{aligned}
& -(h-h_1)\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)M_3\dot{x}(s)ds \\
\leq & \begin{bmatrix} x^T(t-h_1) & x^T(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_3 & M_3 \\ * & -M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& -(h_2-h)\int_{t-h_2}^{t-h} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
= & -(h_2-h(t))\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds - (h(t)-h)\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
& -(h_2-h(t))\int_{t-h(t)}^{t-h} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds - (h(t)-h)\int_{t-h(t)}^{t-h} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& -(h_2-h(t))\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
\leq & \begin{bmatrix} x^T(t-h(t)) & x^T(t-h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_2 & M_2 \\ * & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h(t)) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
& -(h(t)-h)\int_{t-h(t)}^{t-h} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
\leq & \begin{bmatrix} x^T(t-h) & x^T(t-h(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_2 & M_2 \\ * & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

设 $\beta = \frac{h(t)-h}{h_2-h}$, 则

$$\begin{aligned}
& -(h(t)-h)\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
= & -\beta\int_{t-h_2}^{t-h(t)} (h_2-h)\dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
\leq & -\beta\int_{t-h_2}^{t-h(t)} (h_2-h(t))\dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
\leq & \beta \begin{bmatrix} x(t-h(t)) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M_2 & M_2 \\ * & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h(t)) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
& -(h_2-h(t))\int_{t-h(t)}^{t-h} \dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
= & -(1-\beta)\int_{t-h(t)}^{t-h} (h_2-h)\dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
\leq & -(1-\beta)\int_{t-h(t)}^{t-h} (h(t)-h)\dot{x}(s)M_2\dot{x}(s)ds \\
\leq & (1-\beta) \begin{bmatrix} x(t-h) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M_2 & M_2 \\ * & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

由式(3.9)-(3.12)及式(3.17)-(3.23), 可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \eta^T(t)[\Psi_2 - \beta\phi_3 - (1-\beta)\phi_4]\eta(t) \\ &= \eta^T(t)[\beta(\Psi_2 - \phi_3) + (1-\beta)(\Psi_2 - \phi_4)]\eta(t).\end{aligned}$$

类似于第一种情况,可以得到,如果线性矩阵不等式(3.4)成立,那么 $\dot{V}(t) < 0$.

结合上述两种情况,对于 $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$,如果线性矩阵不等式(3.3)(3.4)同时成立,那么 $\dot{V}(t) < 0$.由Lyapunov稳定性理论可知,系统(3.1)是渐近稳定的.证毕.

当时滞函数 $h(t)$ 不可微或者 d 未知时,通过消除 Q_5 ,可以得到以下定理:

定理 3.2 对于给定的常数 $0 \leq h_1 < h_2$, $0 < \lambda < 1$,系统(3.1)渐近稳定,如果存在正定矩阵 $P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, M_1, M_2, M_3$ 使得下列四个线性矩阵不等式同时成立:

$$\begin{aligned}\Psi_1' - \phi_i &\leq 0, i = 1, 2, \\ \Psi_2' - \phi_j &\leq 0, j = 3, 4,\end{aligned}$$

其中

$$\Psi_1' = \begin{bmatrix} \varphi_{11}' & \varphi_{12} & M_1 & 0 & 0 \\ * & \varphi_{22}^{1'} & M_3 & M_3 & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & M_2 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2' = \begin{bmatrix} \varphi_{11}' & \varphi_{12} & M_1 & 0 & 0 \\ * & \varphi_{22}^{2'} & 0 & M_2 & M_2 \\ * & * & \varphi_{33} & M_3 & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{11}' = PA + A^T P + Q_3 + Q_4 - M_1 + A^T \Omega A,$$

$$\varphi_{22}^1 = -M_3 - M_3^T + A_1^T \Omega A_1,$$

$$\varphi_{22}^2 = -M_2 - M_2^T + A_1^T \Omega A_1,$$

$$\varphi_{12}, \varphi_{33}, \varphi_{44}, \varphi_{55}, \Omega, \phi_i (i = 1, 2, 3, 4) \text{ 的定义同定理 3.1.}$$

注 1: 当 $\lambda = 0.5$ 时,则 $h = (h_1 + h_2)/2$,即分割点是中点,因此时滞中点法是定理 3.1 的一种特殊情况.当 λ 取值不同时,对时滞的分割也不一样.

注 2: 定理 3.1 没有引入自由权矩阵, 对时滞任意分割, 用凸组合法对 Lyapunov 函数的导数进行了新的界定. 由于新的准则更多地考虑了时滞与时滞上界的关系, 本章结论具有较小的保守性.

3.4 不确定性线性系统稳定性定理

考虑如下不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_1 + \Delta A_1)x(t - h(t)), & t > 0 \\ x(t) = \Phi(t), & \forall t \in [-h_2, 0] \end{cases} \quad (3.23)$$

其中不确定参数矩阵 $\Delta A, \Delta A_1$ 是范数有界不确定性系统, 满足

$$[\Delta A \ \Delta A_1] = DF(t)[E \ E_1]$$

其中, D, E, E_1 是具有相应维数的常数矩阵. $F(t)$ 是未知矩阵, 且满足 $F^T(t)F(t) \leq I$.

定理 3.3 对于给定的常数 $0 \leq h_1 < h_2, d > 0, 0 < \lambda < 1$, 系统(3.23)渐近稳定, 如果存在正定矩阵 $P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, M_1, M_2, M_3$ 及正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 使得下列矩阵不等式成立:

$$\Sigma^i = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^i & \Sigma_{12}^i \\ * & \Sigma_{22}^i \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.24)$$

其中

$$\Sigma_{11}^1 = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & PA_1 & M_1 & 0 & 0 & A^T \Omega \\ * & \varphi_{22}^1 & M_3 & M_3 & 0 & A_1^T \Omega \\ * & * & \varphi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & M_2 & 0 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Omega \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11}^2 = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & PA_1 & M_1 & 0 & 0 & A^T \Omega \\ * & \varphi_{22}^2 & 0 & M_2 & M_2 & A_1^T \Omega \\ * & * & \varphi_{33} & M_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Omega \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{12}^i = \begin{bmatrix} D^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & D^T \Omega \\ \varepsilon_i E & \varepsilon_i E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, i=1,2,$$

$$\Sigma_{22}^i = \begin{bmatrix} -\varepsilon_i I & 0 \\ * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix}, i=1,2,$$

$$\varphi_{11} = PA + A^T P + Q_3 + Q_4 + Q_5 - M_1,$$

$$\varphi_{22}^1 = -(1-d)Q_5 - M_3 - M_3^T,$$

$$\varphi_{22}^2 = -(1-d)Q_5 - M_2 - M_2^T,$$

$$\varphi_{33} = Q_2 - Q_3 - M_1 - M_3,$$

$$\varphi_{44} = Q_1 - Q_2 - Q_4 - M_2 - M_3,$$

$$\varphi_{55} = -Q_1 - M_2,$$

$$\Omega = h_1^2 M_1 + \lambda^2 (h_2 - h_1)^2 M_2 + (1 - \lambda)^2 (h_2 - h_1)^2 M_3.$$

证明 构造同定理 3.1 一样的 Lyapunov 函数, 对含有积分项处理不一样,

第一种情况: 当 $h_1 \leq h(t) \leq h$ 时, 有引理 2.1, 得

$$\begin{aligned} & -(h_2 - h) \int_{t-h_2}^{t-h} \dot{x}(s) M_2 \dot{x}(s) ds \\ & \leq \begin{bmatrix} x^T(t-h) & x^T(t-h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_2 & M_2 \\ * & -M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

由引理 2.2, 得

$$\begin{aligned} & -(h - h_1) \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) M_3 \dot{x}(s) ds \\ & \leq \zeta_1^T(t) \begin{bmatrix} -M_3 & M_3 & 0 \\ * & -2M_3 & M_3 \\ * & * & -M_3 \end{bmatrix} \zeta_1(t), \end{aligned} \quad (3.26)$$

其中

$$\zeta_1^T(t) = \begin{bmatrix} x^T(t-h_1) & x^T(t-h(t)) & x^T(t-h) \end{bmatrix}.$$

由式(3.9), (3.15)-(3.16)得:

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) [\psi_1 + \Pi^T \Omega \Pi] \eta(t), \quad (3.27)$$

其中

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} \varphi_{11} + \Theta_1 & PA_1 + \Theta_2 & M_1 & 0 & 0 \\ * & \varphi_{22}^1 & M_3 & M_3 & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & M_2 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_1 = PDF(t)E + E^T F^T(t)D^T P,$$

$$\Theta_2 = PDF(t)E_1,$$

$$\Pi = [A + DF(t)E \quad A_1 + DF(t)E_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$\Omega = h_1^2 M_1 + \lambda^2 (h_2 - h_1)^2 M_2 + (1 - \lambda)^2 (h_2 - h_1)^2 M_3,$$

$$\varphi_{11}, \varphi_{22}^1, \varphi_{33}, \varphi_{44}, \varphi_{55} \text{ 的定义同式(3.4).}$$

由引理 2.3 可知, 如果 $\psi_1 + \Pi^T \Omega \Pi < 0$, 则

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & \Pi^T \Omega \\ * & -\Omega \end{bmatrix} < 0. \quad (3.28)$$

不等式(3.28)等价于

$$\Sigma_{11}^1 + UF(t)W + W^T F^T(t)U^T < 0, \quad (3.29)$$

其中

$$U = [D^T P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad D^T \Omega]^T,$$

$$W = [E \quad E_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

由引理 2.3 和引理 2.4, 不等式(3.27)可表示为

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) \Sigma^1 \eta(t).$$

第二种情况: 当 $h \leq h(t) \leq h_2$ 时,

$$\begin{aligned} & -(h - h_1) \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) M_3 \dot{x}(s) ds \\ & \leq \begin{bmatrix} x^T(t-h_1) & x^T(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_3 & M_3 \\ * & -M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(h_2 - h) \int_{t-h_2}^{t-h} \dot{x}(s) M_2 \dot{x}(s) ds \\
& \leq \zeta_2^T(t) \begin{bmatrix} -M_2 & M_2 & 0 \\ * & -2M_2 & M_2 \\ * & * & -M_2 \end{bmatrix} \zeta_2(t),
\end{aligned}$$

其中

$$\zeta_2^T(t) = [x^T(t-h) \quad x^T(t-h(t)) \quad x^T(t-h_2)]$$

类似于第一种情况, 可得:

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) \Sigma^2 \eta(t).$$

综合上述两种情况, 可知只要 $\Sigma^1 < 0$ 和 $\Sigma^2 < 0$, $\dot{V}(t) < 0$. 因此, 系统(3.23)渐近稳定, 如果不等式(3.24)满足. 证明完毕.

3.5 数值实例

例 3.1 考虑具有如下系数矩阵的线性系统:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

由于系统的最大允许时滞上界与 λ 的精度有关. 我们假设 λ 的精度为 0.01, 则 λ 的取值是 0.01, 0.02, ..., 0.99. 把每个 λ 的值作为已知数, 利用 Matlab 的 LMI 工具箱, 可以求的相应的最大允许时滞上界, 取这些最大允许时滞上界的最大值作为系统的最大允许时滞上界.

利用定理 3.1, 当 $d = 0.5, h_1 = 0$ 时, 系统(3.1)在 $\lambda = 0.59$ 时, 取得最大允许时滞上界 $h_2 = 2.2562$. 当 $d = 0.5, h_1 = 1$ 时, 系统(3.1)在 $\lambda = 0.24$ 时取得系统的最大允许时滞上界 $h_2 = 2.3298$, 见表 3.1. 当 $d = 0.2, h_1 = 0$, 系统(3.1)在 $\lambda = 0.52$ 时取得最大允许时滞上界 $h_2 = 3.3813$, 见表 3.2. 与文献[16][17]相比, 本章方法具有较小保守性. 取系统的初始状态界 $x(0) = [-0.4 \ 1]$, 时滞为 1, 其响应如图 3.1. 经过不到 4 秒的时间表, 系统回到了平衡状态, 说明系统稳定.

表 3.1 $d = 0.5$ 时, 对不同的 h_1 的最大允许时滞上界 h_2

h_1	0	1
文献[16]	2.04	2.07
文献[17]	2.08	2.15
定理 3.3	2.1940	2.2792
定理 3.1	2.2562	2.3298

表 3.2 $d = 0.2, h_1 = 0$ 时, 最大允许时滞上界 h_2

方法	文献[4]	文献[6]	定理 3.3	定理 3.1
h_2	3.03	3.16	3.32936	3.3813

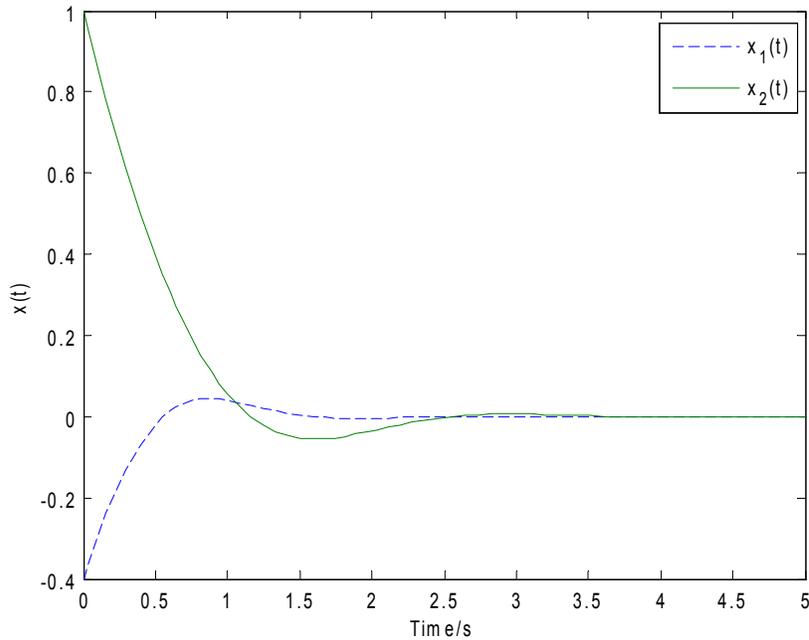


图 3.1 状态响应图

例 3.2 考虑具有如下系数矩阵的不确定线性系统:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

假设 λ 的精度为 0.1. 当 $h_1 = 0$ 时, 对不同的时滞变化率 d , 系统(3.23)最大允许时滞上界 h_2

值见表 3.3. 当 $d = 0.1$ 时, 文献[15]的最大允许时滞上界为 1.1075, 而由定理 3.1, 令 $\lambda = 0.5$, 计算得到最大允许时滞上界为 1.1782. 由表 3.3 知, 与文献[17][18]相比, 本章方法具有较小保守性. 取系统的初始状态界, 时滞为 0.6, 其响应如图 3.2.

表 3.3 $h_1 = 0$ 时, 对不同 d 的最大允许时滞上界 h_2

d	0.5	0.9
文献[17]	0.9322	0.7590
文献[18]	0.9561	0.8919
定理 3.3 ($\lambda = 0.4$)	0.9967	0.9233
定理 3.3 ($\lambda = 0.5$)	1.0043	0.9131

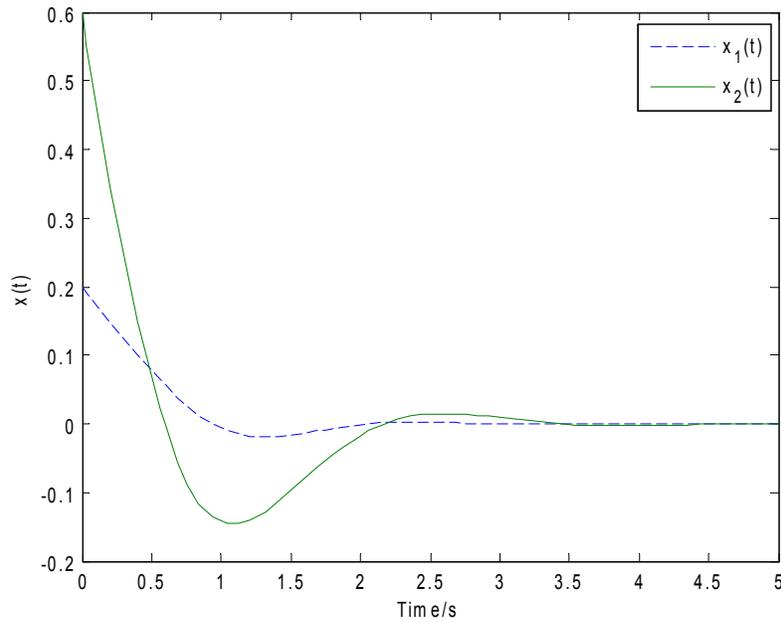


图 3.2 状态响应图

3.6 结论

本章研究了带有区间时滞的线性系统和不确定线性系统的稳定性问题. 利用时滞分割法, 并结合积分不等式, 得到了线性系统的稳定性的准则. 数值实例表明, 新的稳定性准则具有更小的保守性. 今后的研究中需要对 Lyapunov 函数进一步改进, 以取得更小的保守性.

第四章 含有相继时变时滞的线性系统的稳定性分析

4.1 引言

文献[8]提出了含有 2 个相继时变时滞的新的模型. 文献[4][5]采用自由权矩阵法来分析, 引入自由权矩阵和矩阵恒等式来处理 Lyapunov 函数导数中的积分交叉项. 因此, 本章在文献[8][9][10]在基础上, 构造合适的 Lyapunov 函数, 采用新的积分不等式处理技术估计积分交叉项, 适当地放大 Lyapunov 函数的导数, 得到了改进的稳定性准则. 数值例子验证了这种方法的具有较小的保守性和有效性.

4.2 系统模型描述

考虑含有 2 个相继时变时滞的不确定线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_1 + \Delta A_1)x(t - h_1(t) - h_2(t)), & t > 0 \\ x(t) = \Phi(t), & \forall t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $x(t) \in R^n$ 是状态向量; 时滞函数 $h_1(t), h_2(t)$ 可微, 且满足:

$$0 \leq h_1(t) \leq h_1 < \infty, \quad \dot{h}_1(t) \leq d_1 < \infty,$$

$$0 \leq h_2(t) \leq h_2 < \infty, \quad \dot{h}_2(t) \leq d_2 < \infty,$$

其中, h_1, h_2, d_1, d_2 是常数, 并且假设:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t), \quad h = h_1 + h_2, \quad d = d_1 + d_2.$$

A, A_1 是具有相应维数的常数矩阵, $\Phi(t)$ 是初始状态函数. 不确定参数矩阵 $\Delta A, \Delta A_1$ 满足范数有界性, 具有如下形式:

$$[\Delta A \quad \Delta A_1] = DF(t)[E \quad E_1] \quad (4.2)$$

其中, D, E, E_1 是具有相应维数的常数矩阵. $F(t)$ 是未知矩阵, 且满足 $F^T(t)F(t) \leq I$.

4.3 主要结果

为得到系统(4.1)的稳定性准则, 首先考虑 $\Delta A = 0, \Delta A_1 = 0$ 的情况. 当 $\Delta A = 0, \Delta A_1 = 0$ 时, 以下定理成立.

定理 4.1 对于给定的常数 $h_1 > 0, h_2 > 0, d_1 > 0, d_2 > 0$, 系统(4.1)渐近稳定, 如果存在正定矩阵 $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, Z_1, Z_2, Z_3$ 及任意矩阵 W, S , 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & W & S & A^T \Omega \\ * & \varphi_{22} & 0 & \varphi_{24} & 0 & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & 0 & \varphi_{35} & A_1^T \Omega \\ * & * & * & \varphi_{44} & Z_2 & 0 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Omega \end{bmatrix} < 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 & W \\ * & Z_1 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} Z_3 & S \\ * & Z_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (4.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= PA + A^T P + Q_1 + R_1 + R_2 - Z_1 - Z_3, \\ \varphi_{12} &= Z_1 - W, \\ \varphi_{13} &= PA_1 + Z_3 - S, \\ \varphi_{22} &= -(1-d_1)R_1 + W + W^T - Z_1 - Z_1^T, \\ \varphi_{24} &= Z_1 - W, \\ \varphi_{33} &= -(1-d_1-d_2)R_2 + S + S^T - Z_3 - Z_3^T, \\ \varphi_{35} &= Z_3 - S, \\ \varphi_{44} &= Q_2 - Q_1 - Z_1 - Z_2, \\ \varphi_{55} &= -Q_2 - Z_3 - Z_2, \quad \Omega = h_1^2 Z_1 + h_2^2 Z_2 + (h_1 + h_2)^2 Z_3. \end{aligned}$$

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^4 V_i(t), \quad (4.5)$$

其中

$$\begin{aligned} V_1(t) &= x^T(t)Px(t), \\ V_2(t) &= \int_{t-h_1}^t x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-h}^{t-h_1} x^T(s)Q_2x(s)ds, \\ V_3(t) &= \int_{t-h_1(t)}^t x^T(s)R_1x(s)ds + \int_{t-h(t)}^t x^T(s)R_2x(s)ds, \end{aligned}$$

$$V_4(t) = h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) Z_1 \dot{x}(s) ds d\theta + h_2 \int_{-h}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) Z_2 \dot{x}(s) ds d\theta + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) Z_3 \dot{x}(s) ds d\theta,$$

沿着系统(4.1)的轨迹, 对 $V(t)$ 求导, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= 2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)PA_1x(t-h(t)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\dot{V}_2(t) = x^T(t)Q_1x(t) + x^T(t-h_1)(Q_2 - Q_1)x(t-h_1) - x^T(t-h)Q_2x(t-h), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &\leq x^T(t)(R_1 + R_2)x(t) - (1-d_1)x^T(t-h_1(t))R_1x(t-h_1(t)) \\ &\quad - (1-d)x^T(t-h(t))R_2x(t-h(t)), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) &= \dot{x}^T(t)(h_1^2Z_1 + h_2^2Z_2 + h^2Z_3)\dot{x}(t) - h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds - h_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)ds \\ &\quad - h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)Z_3\dot{x}(s)ds, \end{aligned} \quad (4.9)$$

由引理 1.1, 可得:

$$\begin{aligned} &-h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds \\ &= -h_1 \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds - h_1 \int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds \\ &\leq -\frac{h_1}{h_1(t)} \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds \right]^T Z_1 \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds \right] - \frac{h_1}{h_1 - h_1(t)} \left[\int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s)ds \right]^T Z_1 \left[\int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s)ds \right] \\ &= -\frac{h_1}{h_1(t)} \xi_1^T(t)Z_1\xi_1(t) - \frac{h_1}{h_1 - h_1(t)} \xi_2^T(t)Z_1\xi_2(t) \\ &= -\xi_1^T(t)Z_1\xi_1(t) - \frac{h_1 - h_1(t)}{h_1(t)} \xi_1^T(t)Z_1\xi_1(t) - \xi_2^T(t)Z_1\xi_2(t) - \frac{h_1(t)}{h_1 - h_1(t)} \xi_2^T(t)Z_1\xi_2(t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $\xi_1(t) = \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds$, $\xi_2(t) = \int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}(s)ds$.

如果存在任意矩阵 W , 使得 $\begin{bmatrix} Z_1 & W \\ * & Z_1 \end{bmatrix} \geq 0$, 那么下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{h_1 - h_1(t)}{h_1(t)}} \xi_1(t) \\ -\sqrt{\frac{h_1(t)}{h_1 - h_1(t)}} \xi_2(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & W \\ * & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{h_1 - h_1(t)}{h_1(t)}} \xi_1(t) \\ -\sqrt{\frac{h_1(t)}{h_1 - h_1(t)}} \xi_2(t) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.11)$$

不等式(4.11)等价于

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 - h_1(t)}{h_1(t)} \xi_1^T(t) Z_1 \xi_1(t) + \frac{h_1(t)}{h_1 - h_1(t)} \xi_2^T(t) Z_1 \xi_2(t) \\ & \geq \xi_1^T(t) W \xi_2(t) + \xi_2^T(t) W^T \xi_1(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

由式(4.10)-(4.12), 可得:

$$\begin{aligned} & -h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\ & \leq - \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & W \\ * & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} \\ & = \eta_1^T(t) \begin{bmatrix} -Z_1 & Z_1 - W & W \\ * & W + W^T - Z_1 - Z_1^T & Z_1 - W \\ * & * & -Z_1 \end{bmatrix} \eta_1(t), \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中 $\eta_1^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-h_1(t)) \quad x^T(t-h_1)]$.

特别注意的是, 当 $h_1(t) = 0$ 或 $h_1(t) = h_1$ 时, 则 $\xi_1(t) = 0$ 或 $\xi_2(t) = 0$, 不等式(4.13)同样成立.

类似于(4.10)-(4.13), 可得:

$$\begin{aligned} & -h \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds \\ & \leq - \begin{bmatrix} \xi_3(t) \\ \xi_4(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_3 & S \\ * & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3(t) \\ \xi_4(t) \end{bmatrix} \\ & = \eta_2^T(t) \begin{bmatrix} -Z_3 & Z_3 - S & S \\ * & S + S^T - Z_3 - Z_3^T & Z_3 - S \\ * & * & -Z_3 \end{bmatrix} \eta_2(t), \end{aligned} \quad (4.14)$$

其中 S 为任意矩阵, 且满足

$$\begin{bmatrix} Z_3 & S \\ * & Z_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \xi_3(t) = \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s) ds, \quad \xi_4(t) = \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}(s) ds, \quad \eta_2^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-h(t)) \quad x^T(t-h)].$$

由引理 2.1, 可得:

$$\begin{aligned} & -h_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \\ & \leq [x^T(t-h_1) \quad x^T(t-h)] \begin{bmatrix} -Z_2 & Z_2 \\ * & -Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

由式(4.6)-(4.15), 可得:

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) \varphi \eta(t),$$

其中 $\eta^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-h_1(t)) \quad x^T(t-h(t)) \quad x^T(t-h_1) \quad x^T(t-h)]$.

根据上述分析, 如果不等式(4.3)(4.4)成立, 则 $\dot{V}(t) < 0$, 即系统(4.1)渐近稳定. 证明完毕.

再考虑不确定线性系统(4.1), 以下定理成立.

定理 4.2 对于给定的常数 $h_1 > 0, h_2 > 0, d_1 > 0, d_2 > 0$, 系统(4.1)渐近稳定, 如果存在正定矩阵 $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, Z_1, Z_2, Z_3$, 任意矩阵 W, S , 及正数 ε , 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 & W \\ * & Z_1 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} Z_3 & S \\ * & Z_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (4.17)$$

其中

$$\Sigma_{11} = \varphi,$$

$$\Sigma_{12}^T = \begin{bmatrix} D^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & D^T \Omega \\ \varepsilon E & 0 & \varepsilon E_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{22} = \begin{bmatrix} -\varepsilon I & 0 \\ * & -\varepsilon I \end{bmatrix},$$

φ, Ω 的定义同式(4.3).

证明 用 $A + \Delta A$ 和 $A_1 + \Delta A_1$ 替代 A 和 A_1 , 则有

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) [\varphi + UF(t)V + V^T F^T(t)U^T] \eta(t),$$

其中

$$U = [D^T P \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ D^T \Omega]^T, \quad V = [E \ 0 \ E_1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

由引理 2.4 可知, 如果

$$\varphi + UF(t)V + V^T F^T(t)U^T < 0, \quad (4.18)$$

则不等式(4.18)成立的充要条件是存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\varphi + \varepsilon^{-1}UU^T + \varepsilon V^T V < 0 \quad (4.19)$$

成立.

由引理 2.3 可知, 不等式(4.19)等价于不等式(4.16), 也就是说, 不等式(4.18)等价于(4.16).

因此, 如果等式(4.16)(4.17)成立, 则 $\dot{V}(t) < 0$, 即系统(4.1)渐近稳定. 证明完毕.

4.4 数值实例

例 4.1 考虑具有如下系数矩阵的线性系统:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

假设 $d_1 = 0.1, d_2 = 0.8$. 当 h_1 或 h_2 其中一个已知时, 根据定理 4.1, 利用 Matlab 的 LMI 工具箱, 求出另一个的值. 当 h_1 给定时, 可以求出 h_2 , 见表 4.1. 当 h_2 给定时, 可以求得 h_1 , 见表 4.2. 文献[11]引入了大量的自由权矩阵, 该文献的定理有 41 个矩阵变量和 6 个线性矩阵不等式, 而本章定理 4.1 只有 10 个矩阵变量和 3 个线性矩阵不等式. 与文献[8][10][11]相比, 定理 4.1 具有一定的优越性.

表 4.1 对不同的 h_1 , 最大允许时滞上界 h_2

h_1	1	1.1	1.2	1.5
文献[8]	0.415	0.376	0.340	0.248
文献[10]	0.512	0.457	0.406	0.283
文献[11]	0.872	0.772	0.672	0.371
定理 4.1	0.8731	0.7731	0.6732	0.3731

表 4.2 对不同的 h_2 , 最大允许时滞上界 h_1

h_2	0.3	0.4	0.5
文献[8]	1.324	1.039	0.806
文献[10]	1.453	1.214	1.021
文献[1]	1.572	1.472	1.372
定理 4.1	1.5731	1.4731	1.3731

表 4.3 对不同 d , 系统最大允许时滞上界 h

d	0.5	0.9
文献[17]	0.9322	0.7590
文献[18]	0.9561	0.8919
定理 3.3 ($\lambda = 0.5$)	1.0043	0.9131
定理 4.2	1.0733	1.0686

例 4.2 考虑具有如下系数矩阵的不确定线性系统:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \sin t \end{bmatrix}.$$

对于在给定的不同时滞变化率 d 时, 只要 d_1, d_2 取值满足 $d_1 + d_2 = d$, 通过将 2 个相继时变时滞合并, 根据定理 4.2 求得系统的最大允许时滞上界. 当 $d = 0.5$ 时, 比如可以取 $d_1 = 0.2, d_3 = 0.5$, 求得系统最大允许时滞上界为 1.0733. 当 $d = 0.9$ 时, 求得系统最大允许时滞上界为 1.0686, 见表 4.3. 由表可见, 与文献[17][18]以及定理 3.3 相比, 本章方法具有较小的保守性.

4.5 结语

本章研究了含有 2 个相继时变时滞的不确定线性系统的稳定性问题. 基于 Lyapunov 函数, 通过积分不等式对 Lyapunov 函数的导数给出了新的界定方法, 较少地引入了变量矩阵. 数值实例表明, 新的稳定性准则具有更小的保守性.

第五章 含有相继时变时滞的中立型系统的稳定性分析

5.1 引言

中立型时滞系统是时滞系统的一个常见的系统,在理论上和实践上有重要的作用.许多实际系统都可以用中立型时滞来表示,比如人口动态系统,分布式网络系统.因此,中立型时滞系统的稳定性得到了广泛的关注.文献[21][22]利用自由权矩阵法研究了中立型时滞的稳定性.文献[23][24]采用了积分不等式法分析了含有不确定性的中立型时滞系统.文献[25]构造含有三重积分的 Lyapunov 函数,并利用积分不等式.

目前,大部分文献都是研究含有单个时滞或多个含有相同性质的时滞的中立型时滞系统,对于 2 个相继时变时滞的新的模型的研究较少.本章通过构造合适的 Lyapunov 函数,将时滞分成两部分,同时应用积分不等式,对 Lyapunov 函数的导数进行恰当处理,得到了稳定性准则.数值例子验证了这种方法的有效性.

5.2 系统模型描述

考虑含有 2 个相继时变时滞的中立型系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h_1(t)-h_2(t)) + A_2\dot{x}(t-\tau(t)) + Ef(t, x(t)) \\ \quad + Ff_1(t, x(t-h_1(t)-h_2(t))) + Gf_2(t, \dot{x}(t-\tau(t))), \quad t > 0 \\ x(t) = \Phi(t), \quad \forall t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量; A, A_1, A_2, E, F, G 是具有相应维数的常数矩阵; $\Phi(t)$ 是初始状态函数.时滞函数 $h_1(t), h_2(t), h_3(t)$ 可微,且满足:

$$\begin{aligned} 0 \leq h_1(t) \leq h_1 < \infty, \quad \dot{h}_1(t) \leq d_1 < \infty, \\ 0 \leq h_2(t) \leq h_2 < \infty, \quad \dot{h}_2(t) \leq d_2 < \infty, \\ 0 \leq \tau(t) \leq h_3 < \infty, \quad \dot{\tau}(t) \leq d_3 < \infty, \end{aligned}$$

其中, h_1, h_2, d_1, d_2 是常数,并且假设:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t), \quad h = \max\{h_1 + h_2, h_3\}.$$

$f(t, x(t)), f_1(t, x(t-h_1(t)-h_2(t))), f_2(t, \dot{x}(t-\tau(t)))$ 是非线性扰动,并且满足

$$\begin{aligned}
\|f(t, x(t))\| &\leq \alpha \|x(t)\|, \\
\|f_1(t, x(x-h(t)))\| &\leq \alpha_1 \|x(t-h(t))\|, \\
\|f_2(t, \dot{x}(t-\tau(t)))\| &\leq \alpha_2 \|\dot{x}(t-\tau(t))\|.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

5.3 主要结论

定理 5.1 对于给定的常数 $\|A_2 + \alpha_2\| < 1, h_1 > 0, h_2 > 0, d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0$ 系统(5.1)渐近稳定, 如果存在正定矩阵 $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, N, Z_1, Z_2, Z_3$, 任意矩阵 $W_j (j=1, \dots, 4), M, S_k (k=1, \dots, 5)$, 任意正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\varphi_0 + \varphi_i + \Pi^T \Omega \Pi < 0, i=1, 2, \tag{5.3}$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 & W_j \\ * & Z_1 \end{bmatrix} > 0, j=1, \dots, 4, \tag{5.4}$$

$$\begin{bmatrix} Z_2 & M \\ * & Z_2 \end{bmatrix} > 0, \tag{5.5}$$

$$\begin{bmatrix} Z_3 & S_k \\ * & Z_3 \end{bmatrix} > 0, k=1, \dots, 5, \tag{5.6}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= e_1^T (PA + A^T P + Q_1 + R_1 + R_2 + \varepsilon \alpha^2) e_1 + e_1^T P A_1 e_3 + e_1^T P A_2 e_6 + e_1^T P E e_7 + e_1^T P F e_8 + e_1^T P G e_9 \\
&\quad - (1-d_1) e_2^T R_1 e_2 + e_3^T [\varepsilon_1 \alpha_1^2 - (1-d_1-d_2) R_2] e_3 + e_4^T (Q_2 - Q_1) e_4 - e_5^T Q_2 e_5 + e_6^T (\varepsilon_2 \alpha_2^2 - (1-d_3) N) e_6 \\
&\quad - \varepsilon e_7^T e_7 - \varepsilon_1 e_8^T e_8 - \varepsilon_2 e_9^T e_9, \\
\varphi_1 &= - \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{34} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & W_1 & W_2 \\ * & Z_1 & W_3 \\ * & * & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{34} \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{34} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_3 & S_1 & S_2 \\ * & Z_3 & S_3 \\ * & * & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{23} \\ u_{34} \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{h_2} u_{45}^T Z_3 u_{45} - u_{45}^T Z_2 u_{45},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & - \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{24} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & W_4 \\ * & Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{24} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} u_{43} \\ u_{35} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_2 & M \\ * & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{43} \\ u_{35} \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{24} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_3 & S_4 \\ * & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{24} \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} u_{43} \\ u_{35} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_3 & S_5 \\ * & Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{43} \\ u_{35} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$u_{ij} = e_i - e_j,$$

$$\Pi = [A \ 0 \ A_1 \ 0 \ 0 \ A_2 \ E \ F \ G],$$

$$\Omega = h_1^2 Z_1 + h_2^2 Z_2 + (h_1 + h_2) Z_3 + N.$$

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^5 V_i(t), \quad (5.7)$$

其中

$$V_1(t) = x^T(t) P x(t),$$

$$V_2(t) = \int_{t-h_1}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-h}^{t-h_1} x^T(s) Q_2 x(s) ds,$$

$$V_3(t) = \int_{t-h_1(t)}^t x^T(s) R_1 x(s) ds + \int_{t-h(t)}^t x^T(s) R_2 x(s) ds,$$

$$V_4 = \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) N \dot{x}(s) ds,$$

$$V_5(t) = h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) Z_1 \dot{x}(s) ds d\theta + h_2 \int_{-h}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) Z_2 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) Z_3 \dot{x}(s) ds d\theta,$$

为方便地证明, 记

$$\eta^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t-h_1(t)) \ x^T(t-h(t)) \ x^T(t-h_1) \ x^T(t-h) \ \dot{x}^T(t-\tau(t)) \ f^T(t, x(t)) \ f_1^T(t, x(t-h(t))) \ f_2^T(t, \dot{x}(t-\tau(t)))],$$

e_i 是块状单位矩阵, 满足 $e_i \eta(t) = \eta_i(t) (i=1, \dots, 5)$, 比如 $e_1 = [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

沿着系统(5.1)的轨迹, 对 $V(t)$ 求导, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= 2x^T(t) P [A \ 0 \ A_1 \ 0 \ 0 \ A_2 \ E \ F \ G] \eta(t), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\dot{V}_2(t) = x^T(t)Q_1x(t) + x^T(t-h_1)(Q_2 - Q_1)x(t-h_1) - x^T(t-h)Q_2x(t-h), \quad (5.9)$$

$$\dot{V}_3(t) \leq x^T(t)(R_1 + R_2)x(t) - (1-d_1)x^T(t-h_1(t))R_1x(t-h_1(t)) - (1-d)x^T(t-h(t))R_2x(t-h(t)), \quad (5.10)$$

$$\dot{V}_4(t) \leq \dot{x}(t)N\dot{x}(t) - (1-d_3)\dot{x}(t-\tau(t))N\dot{x}(t-\tau(t)), \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) &= \dot{x}^T(t)(h_1^2Z_1 + h_2^2Z_2 + hZ_3)\dot{x}(t) - h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds - h_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)ds \\ &\quad - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)Z_3\dot{x}(s)ds, \end{aligned} \quad (5.12)$$

由式(5.2), 可得

$$\begin{aligned} \alpha^2 x^T(t)x(t) - f^T(t, x(t))f(t, x(t)) &\geq 0, \\ \alpha_1^2 x^T(t-h(t))x(t-h(t)) - f_1^T(t, x(t-h(t)))f_1(t, x(t-h(t))) &\geq 0, \\ \alpha_2^2 \dot{x}^T(t-\tau(t))\dot{x}(t-\tau(t)) - f_2^T(t, \dot{x}(t-\tau(t)))f_2(t, \dot{x}(t-\tau(t))) &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

由于 $0 \leq h_1(t) \leq h_1, h_1(t) \leq h(t) \leq h$, 可以得到 $h(t) \in [h_1(t), h_1]$ 或者 $h(t) \in [h_1, h]$, 因此分两种情况来讨论.

第一种情况, 当 $h(t) \in [h_1(t), h_1]$ 时, 由引理 2.1, 可以得到

$$\begin{aligned} &-h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds \\ &= -h_1 \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds - h_1 \int_{t-h(t)}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds - h_1 \int_{t-h_1}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)ds \\ &\leq -\frac{1}{\alpha_1(t)} \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds \right]^T Z_1 \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds \right] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_2(t)} \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s)ds \right]^T Z_1 \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s)ds \right] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_3(t)} \left[\int_{t-h_1}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)ds \right]^T Z_1 \left[\int_{t-h_1}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)ds \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{h_1(t)}{h_1}, \alpha_2(t) = \frac{h_2(t)}{h_1}, \alpha_3(t) = \frac{h_1 - h(t)}{h_1}. \\ &-h_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)Z_2\dot{x}(s)ds \\ &\leq -\left[\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)ds \right]^T Z_2 \left[\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s)ds \right], \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
& -\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds \\
= & -\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h(t)}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds \\
& -\int_{t-h_1}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds \\
\leq & -\frac{1}{h_1 \alpha_1(t)} \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \right]^T Z_3 \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \right] \\
& -\frac{1}{h_1 \alpha_2(t)} \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1(t)} \dot{x}(s) ds \right]^T Z_3 \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1(t)} \dot{x}(s) ds \right] \\
& -\frac{1}{h_1 \alpha_3(t)} \left[\int_{t-h_1}^{t-h(t)} \dot{x}(s) ds \right]^T Z_3 \left[\int_{t-h_1}^{t-h(t)} \dot{x}(s) ds \right] \\
& -\frac{1}{h_2} \left[\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds \right]^T Z_3 \left[\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds \right]
\end{aligned} \tag{5.16}$$

对不等式(5.14)和(5.15)分别运用引理 2.5, 同时, 式(5.13)的三个不等式分别乘以正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$, 那么式(5.17)成立:

$$\begin{aligned}
& \dot{V}(t) + \varepsilon[\alpha^2 x^T(t)x(t) - f^T(t, x(t))f(t, x(t))] \\
& + \varepsilon_1[\alpha_1^2 x^T(t-h(t))x(t-h(t)) - f_1^T(t, x(t-h(t)))f_1(t, x(t-h(t)))] \\
& + \varepsilon_2[\alpha_2^2 \dot{x}^T(t-\tau(t))\dot{x}(t-\tau(t)) - f_2^T(t, \dot{x}(t-\tau(t)))f_2(t, \dot{x}(t-\tau(t)))] \\
\leq & \eta^T(t)[\varphi_0 + \varphi_1 + \Pi^T \Omega \Pi] \eta(t),
\end{aligned} \tag{5.17}$$

其中 $W_i (i=1, 2, 3)$ 和 $S_i (i=1, 2, 3)$ 是任意矩阵, 满足

$$\begin{bmatrix} Z_1 & W_i \\ * & Z_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} Z_3 & S_i \\ * & Z_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1, 2, 3.$$

第二种情况, 当 $h(t) \in [h_1, h_2]$ 时, 用同样的方法, 可以得到

$$\begin{aligned}
& -h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\
= & -h_1 \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - h_1 \int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\
\leq & -\frac{1}{\alpha_1(t)} \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \right]^T Z_1 \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \right] \\
& -\frac{1}{\alpha_4(t)} \left[\int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s) ds \right]^T Z_1 \left[\int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s) ds \right],
\end{aligned} \tag{5.18}$$

其中 $\alpha_4(t) = \frac{h_1 - h_1(t)}{h_1}$.

$$\begin{aligned}
& -h_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \\
& = -h_2 \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds - h_2 \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \\
& \leq -\frac{1}{\alpha_5(t)} \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds \right]^T Z_2 \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds \right] \\
& \quad - \frac{1}{\alpha_6(t)} \left[\int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) ds \right]^T Z_2 \left[\int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) ds \right]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

其中 $\alpha_5(t) = \frac{h(t) - h_1}{h_2}$, $\alpha_6(t) = \frac{h - h(t)}{h_2}$.

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds \\
& = - \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds \\
& \quad - \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds - \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds \\
& \leq -\frac{1}{h_1 \alpha_1(t)} \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \left[\int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \right]^T Z_3 \\
& \quad - \frac{1}{h_1 \alpha_4(t)} \left[\int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}(s) ds \right]^T Z_3 \left[\int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}(s) ds \right] \\
& \quad - \frac{1}{h_2 \alpha_5(t)} \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds \right]^T Z_3 \left[\int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}(s) ds \right] \\
& \quad - \frac{1}{h_2 \alpha_6(t)} \left[\int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}(s) ds \right]^T Z_3 \left[\int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{x}(s) ds \right]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

对不等式(5.18)-(5.20)分别应用引理 2.5, 同时, 式(5.13)的三个不等式分别乘以正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$, 那么有

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) [\varphi_0 + \varphi_2 + \Pi^T \Omega \Pi] \eta(t), \tag{5.21}$$

其中 W_4, M 和 $S_i (i = 4, 5)$, 满足

$$\begin{bmatrix} Z_1 & W_4 \\ * & Z_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} Z_2 & M \\ * & Z_2 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} Z_3 & S_i \\ * & Z_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 4, 5.$$

根据上述分析, 结合两种情况, 如果不等式(5.3)-(5.6)成立, 则 $\dot{V}(t) < 0$, 即系统(5.1)渐近

稳定. 证明完毕.

当 $E = F = G = 0$, 时, 有以下定理成立.

定理 5.2 对于给定的常数 $\|A_2 + \alpha_2\| < 1, h_1 > 0, h_2 > 0, d_1 > 0, d_2 > 0$, 系统(5.1)渐近稳定, 如果存在正定矩阵 $P, Q_1, Q_2, R_1, R_2, Z_1, Z_2, Z_3$ 及任意矩阵 $W_j (j=1, \dots, 4), M, S_k (k=1, \dots, 5)$, 使得不等式(5.4)-(5.6)及下列线性矩阵不等式成立:

$$\varphi_0^1 + \varphi_i + \Pi_1^T \Omega_1 \Pi_1 < 0, i=1, 2,$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2, \Pi$ 的定义同(5.3)以及

$$\begin{aligned} \varphi_0^1 &= e_1^T (PA + A^T P + Q_1 + R_1 + R_2) e_1 + e_1^T P A_1 e_3 + e_1^T P A_2 e_6 - (1 - d_1) e_2^T R_1 e_2 \\ &\quad - e_3^T (1 - d_1 - d_2) R_2 e_3 + e_4^T (Q_2 - Q_1) e_4 - e_5^T Q_2 e_5, \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = [A \ 0 \ A_1 \ 0 \ 0 \ A_2],$$

$$\Omega_1 = h_1^2 Z_1 + h_2^2 Z_2 + (h_1 + h_2) Z_3.$$

其中 $e_i (i=1, \dots, 6)$ 是六维单位向量, 比如 $e_1 = [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

5.4 数值实例

例 5.1 考虑如下系统:

$$A = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.1 \\ -0.1 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.7 \\ -1 & -0.8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, E = F = G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $0 \leq c < 1, \alpha \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$. 当 $d_1 = 0.2, d_2 = 0.3, d_3 = 0$, 见表 5.1. 当 $d_1 = 0.2, d_2 = 0.3, d_3 = 0.5$, 见表 5.2. 对比可知, 本章具有较小的保守性.

表 5.1 $\alpha = 0, \alpha_1 = 0.1$, 最大允许时滞上界 h_2

	$\alpha_2 = 0$			$\alpha_2 = 0.1$			$\alpha_2 = 0.2$		
h_1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3
文献[25]	1.3886	1.2886	1.1886	1.1437	1.0437	0.9437	0.8921	0.7921	0.6921
定理 5.1	1.3959	1.2962	1.2010	1.1521	1.053	0.9456	0.9210	0.8086	0.7062

表 5.2 $\alpha = 0.1, \alpha_1 = 0.1$, 最大允许时滞上界 h_2

	$\alpha_2 = 0$			$\alpha_2 = 0.1$			$\alpha_2 = 0.2$		
h_1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3
文献[25]	1.1324	1.0324	0.9324	0.7885	0.6885	0.5885	0.4822	0.3822	0.2822
定理 5.1	1.1536	1.0456	0.9456	0.85212	0.7328	0.6024	0.5356	0.4221	0.2856

例 5.2 考虑如下系统:

$$A = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1.1 & -0.2 \\ -0.1 & -1.1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix},$$

假设 $d_1 = 0.2, d_2 = 0.5, d_3 = 0$, 见表 5.3. $d_1 = 0.2, d_2 = 0.7, d_3 = 0$, 见表 5.4. 可知, 与文献[26]相比, 本方法有一定的优越性.

表 5.3 对不同的 h_1 , 最大允许时滞上界 h_2

h_1	0.1	0.2	0.3
文献[26]	0.9704	0.8704	0.7704
定理 5.2	1.3200	1.2152	1.1121

表 5.4 对不同的 h_1 , 最大允许时滞上界 h_2

h_1	0.1	0.2	0.3
文献[26]	0.8786	0.7786	0.6786
定理 5.2	1.3116	1.2100	1.1006

5.5 结论

本章研究了含有 2 个相继时变时滞的中立型系统的稳定性问题. 基于 Lyapunov 函数, 通过将时滞 $d(t)$ 分段, 利用积分不等式对 Lyapunov 函数的导数给出了新的界定方法. 数值实例表明, 本章的稳定性准则具有更小的保守性.

第六章 含有相继时变时滞的神经网络的稳定性分析

6.1 引言

人工神经网络 (artificial neural network, ANN), 是一种模仿生物神经网络的结构, 并且具有计算处理信息的网络系统. 由于对人工网络的研究与对生物神经网络的研究有着极其密切的联系, 因此人工神经网络又称为神经网络(neural network, NN). 神经网络由大量神经元和它们之间相互联系按照一定的拓扑构成, 具有非线性大规模自适应的特征. 神经网络在信号处理, 模式识别, 人工智能, 最优化问题有广泛的应用. 一方面, 稳定性是神经网络一个重要的性质. 另一方面, 神经网络中经常存在时滞现象. 时滞的发生会导致性能变差, 因此神经网络的稳定性分析问题得到了广泛的研究.

文献[31]采用时滞分割法, 把时滞分割成 m 段, 得到了较小保守性的稳定性条件. 通过应用积分不等式, 文献[32]得到了神经网络的时滞相关的指数稳定性准则. 文献[33]考虑了含有两个相继时变时滞的神经网络, 采用凸组合的方法对 Lyapunov 函数的导数进行估计. 文献[34]充分利用时滞与其上界的关系, 得到了较小的保守性条件.

本章将考虑两个相继时变时滞的神经网络的稳定性问题, 应用积分不等式, 得到了新的稳定性条件.

6.2 系统模型描述

考虑神经网络系统:

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Ag(x(t)) + Bg(x(t - d_1(t) - d_2(t))) + u, \quad (6.1)$$

其中 $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ 为神经状态向量; $g(x(\cdot)) = [g_1(x_1(\cdot)) \ g_2(x_2(\cdot)) \ \dots \ g_n(x_n(\cdot))]^T$ 为激活函数; $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ 是恒定输入向量; A 是连接权重矩阵, B 是时滞连接矩阵, $C = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 且 $c_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 时滞函数 $h_1(t), h_2(t)$ 可微, 且满足:

$$0 \leq h_1(t) \leq h_1 < \infty, \quad \dot{h}_1(t) \leq d_1 < \infty,$$

$$0 \leq h_2(t) \leq h_2 < \infty, \quad \dot{h}_2(t) \leq d_2 < \infty,$$

其中, h_1, h_2, d_1, d_2 是常数, 并且假设:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t), \quad h = h_1 + h_2, \quad d = d_1 + d_2.$$

假设激活函数 $g_i(\cdot)(i=1,2,\dots,n)$ 有界, 且满足

$$0 \leq \frac{g_i(x) - g_i(y)}{x - y} \leq \sigma_i, \quad \forall x, y \in R, x \neq y, i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2)$$

其中 $\sigma_i(\cdot)(i=1,2,\dots,n)$ 是正数.

根据布朗原理, 系统(6.1)至少有一个平衡点. 假设系统的平衡点是 $x^* = [x_1^* \ x_2^* \ \dots \ x_n^*]^T$, 作线性变换 $z(\cdot) = x(\cdot) - x^*$, 那么系统(6.1)变为:

$$\dot{z}(t) = -Cz(t) + Af(z(t)) + Bf(z(t - d_1(t)) - d_2(t)),$$

其中

$$z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)]^T,$$

$$f(z(\cdot)) = [f_1(z_1(\cdot)) \ f_2(z_2(\cdot)) \ \dots \ f_n(z_n(\cdot))]^T,$$

$$f_i(z_i(\cdot)) = g_i(z_i(\cdot) + x_i^*) - g_i(x_i^*) (i = 1, 2, \dots, n).$$

由式(6.2), 可知

$$0 \leq \frac{f_i(z_i(t))}{z_i(t)} \leq \sigma_i, \quad f_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6.3 主要结论

定理 6.1 对于给定常数 $h_1 > 0, h_2 > 0, d_1 > 0, d_2 > 0$, 系统(6.1)渐近稳定, 如果存在正定矩阵 $P, Q(i=1,2,\dots,6), R_1, R_2, R_3$, 正定对角矩阵 $T_1, T_2, T_3, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 任意矩阵 $W_j(j=1,\dots,4)$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \Pi^T \Omega \Pi < 0, \quad (6.3)$$

$$\begin{bmatrix} R_j & W_j \\ * & R_j \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (6.4)$$

$$\begin{bmatrix} R_3 & W_4 \\ * & R_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (6.5)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & e_1^T (-PC - C^T P + Q_1 + Q_3 + Q_5) e_1 + e_1^T (PA - C^T \Lambda + \Sigma T_1) e_7 + e_1^T P B e_9 \\ & - (1 - d_1) e_2^T Q_1 e_2 + e_2^T \Sigma T_2 e_8 - (1 - d_1 - d_2) e_3^T Q_3 e_3 + e_3^T \Sigma T_3 e_9 + e_4^T (Q_6 - Q_5) e_4 - e_6^T Q_6 e_6 \\ & + e_7^T (\Lambda A + A^T \Lambda + Q_2 + Q_4 - T_1 - T_1^T) e_7 + e_7^T \Lambda B e_9 - e_8^T ((1 - d_1) Q_2 + T_2 + T_2^T) e_8 \\ & - e_9^T ((1 - d_1 - d_2) Q_4 + T_3 + T_3^T) e_9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & - \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{24} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & W_1 \\ * & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{24} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{45} \\ u_{56} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_2 & W_2 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{45} \\ u_{56} \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{35} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_3 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{35} \end{bmatrix} - \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} u_{56} \\ u_{23} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_4 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{56} \\ u_{23} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

$$u_{ij} = e_i - e_j,$$

$$\Pi = [-C \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ A \ 0 \ B],$$

$$\Omega = h_1^2 R_1 + h_2^2 R_2 + (h_1 + h_2) R_3.$$

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V(z(t)) = \sum_{i=1}^3 V_i(z(t)), \quad (6.7)$$

其中

$$V_1(z(t)) = z^T(t) P z(t) + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^{z_i(t)} f_i(s) ds,$$

$$\begin{aligned} V_2(z(t)) = & \int_{t-h(t)}^t (z^T(s) Q_1 z(s) ds + f^T(z(s)) Q_2 f(z(s))) ds + \int_{t-h(t)}^t (z^T(s) Q_3 z(s) ds + f^T(z(s)) Q_4 f(z(s))) ds \\ & + \int_{t-h_1}^t z^T(s) Q_5 z(s) ds + \int_{t-h}^{t-h_1} z^T(s) Q_6 z(s) ds, \end{aligned}$$

$$V_3(z(t)) = h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{z}(s) R_1 \dot{z}(s) ds d\theta + h_2 \int_{-h}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{z}(s) R_2 \dot{z}(s) ds d\theta + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{z}(s) R_3 \dot{z}(s) ds d\theta,$$

为方地证明, 记

$$\eta^T(t) = [z^T(t) \ z^T(t-h_1(t)) \ z^T(t-h(t)) \ z^T(t-h_1) \ z^T(t-h_1-h_2(t)) \ z^T(t-h) \ f^T(z(t)) \ f^T(z(t-h_1(t))) \ f^T(z(t-h(t)))].$$

沿着系统(6.1)的轨迹, 对 $V(t)$ 求导, 得到:

$$\dot{V}_1(z(t)) = 2z^T(t) P \dot{z}(t) + 2f^T(z(t)) \Lambda \dot{z}(t), \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(z(t)) &= z^T(t)(Q_1+Q_3+Q_5)z(t) - (1-\dot{h}_1(t))z^T(t-h_1(t))Q_4z(t-h_1(t)) - (1-\dot{h}(t))z^T(t-h(t))Q_3z(t-h(t)) \\
&\quad + x^T(t-h_1)(Q_6-Q_5)x(t-h_1) - x^T(t-h)Q_6x(t-h) + f^T(z(t))(Q_2+Q_4)f(z(t)) \\
&\quad - (1-\dot{h}_1(t))f^T(z(t-h_1(t)))Q_2f(z(t-h_1(t))) - (1-\dot{h}(t))f^T(z(t-h(t)))Q_4f(z(t-h(t))),
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(z(t)) &= \dot{z}^T(t)(h_1^2R_1+h_2^2R_2+hR_3)\dot{z}(t) - h_1\int_{t-h_1}^t \dot{z}^T(s)R_1\dot{z}(s)ds - h_2\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{z}^T(s)R_2\dot{z}(s)ds \\
&\quad - \int_{t-h}^t \dot{z}^T(s)R_3\dot{z}(s)ds,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

其中

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

由式(6.2), 存在正定矩阵 T_1, T_2, T_3 , 使得下列不等式成立:

$$\begin{aligned}
-2f^T(z(t))T_1f(z(t)) + 2f^T(z(t))T_1\Sigma z(t) &\geq 0, \\
-2f^T(z(t-h_1(t)))T_2f(z(t-h_1(t))) + 2f^T(z(t-h_1(t)))T_2\Sigma z(t-h_1(t)) &\geq 0, \\
-2f^T(z(t-h(t)))T_3f(z(t-h(t))) + 2f^T(z(t-h(t)))T_3\Sigma z(t-h(t)) &\geq 0.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

其中

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

由引理 2.1 和引理 2.6, 得

$$\begin{aligned}
& -h_1\int_{t-h_1}^t \dot{z}^T(s)R_1\dot{z}(s)ds \\
&= -h_1\int_{t-h_1(t)}^t \dot{z}^T(s)R_1\dot{z}(s)ds - h_1\int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{z}^T(s)R_1\dot{z}(s)ds \\
&\leq -\begin{bmatrix} z(t) - z(t-h_1(t)) \\ z(t-h_1(t)) - z(t-h_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & W_1 \\ * & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) - z(t-h_1(t)) \\ z(t-h_1(t)) - z(t-h_1) \end{bmatrix} \\
& \quad - h_2\int_{t-h}^{t-h_1} \dot{z}^T(s)R_2\dot{z}(s)ds \\
&\leq -h_2\int_{t-h_1-h_2(t)}^{t-h_1} \dot{z}^T(s)R_2\dot{z}(s)ds - h_2\int_{t-h}^{t-h_1-h_2(t)} \dot{z}^T(s)R_2\dot{z}(s)ds \\
&\leq -\begin{bmatrix} z(t-h_1) - z(t-h_1-h_2(t)) \\ z(t-h_1-h_2(t)) - z(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_2 & W_2 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t-h_1) - z(t-h_1-h_2(t)) \\ z(t-h_1-h_2(t)) - z(t-h) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{6.12}$$

(6.13)

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-h}^t \dot{z}^T(s) R_3(s) \dot{z}(s) ds \\
= & - \int_{t-h_1(t)}^t \dot{z}^T(s) R_3(s) \dot{z}(s) ds - \int_{t-h_1-h_2(t)}^{t-h(t)} \dot{z}^T(s) R_3(s) \dot{z}(s) ds \\
& - \int_{t-h}^{t-h_1-h_2(t)} \dot{z}^T(s) R_3(s) \dot{z}(s) ds - \int_{t-h(t)}^{t-h_1(t)} \dot{z}^T(s) R_3(s) \dot{z}(s) ds \\
\leq & - \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} z(t) - z(t-h_1(t)) \\ z(t-h(t)) - z(t-h_1-h_2(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_3 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) - z(t-h_1(t)) \\ z(t-h(t)) - z(t-h_1-h_2(t)) \end{bmatrix} \\
& - \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} z(t-h_1-h_2(t)) - z(t-h) \\ z(t-h_1(t)) - z(t-h(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_4 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t-h_1-h_2(t)) - z(t-h) \\ z(t-h_1(t)) - z(t-h(t)) \end{bmatrix}. \tag{6.14}
\end{aligned}$$

结合式(6.8)-(6.14), 可得

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) [\varphi_1 + \varphi_2 + \Pi^T \Omega \Pi] \eta(t), \tag{6.15}$$

如果不等式 (6.3)-(6.5)成立, 则 $\dot{V}(t) < 0$, 即系统(6.1)渐近稳定. 证明完毕.

6.4 数值实例

例 6.1 考虑具有如下系数矩阵的神经网络系统:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.88 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, u = [0.3, 0.2]^T, f_1(s) = 0.4 \tanh(s), f_2(s) = 0.8 \tanh(s).$$

当 $d_1 = 0.7, d_2 = 0.1$ 和 $d_1 = 0.7, d_2 = 0.2$ 时, 对于不同的 h_1 , 求得的 h_2 的值见表 6.1. 对于不同的 h_2 , 求得的 h_1 的值见表 6.2. 当初始值为 $z_0 = [0.6, -0.5]^T$ 时, 系统的轨迹如图 6.1.

表 6.1 对于不同的 h_1 , 最大允许时滞上界 h_2

	$d_1 = 0.7, d_2 = 0.1$			$d_1 = 0.7, d_2 = 0.2$		
h_1	0.8	1	1.2	0.8	1	1.2
文献[35]	0.8831	0.6832	0.4843	0.3942	0.2637	0.1617
定理 6.1	1.5532	1.3534	1.518	0.8008	0.6050	0.4101

表 6.2 对于不同的 h_2 ，最大允许时滞上界 h_1

	$d_1 = 0.7, d_2 = 0.1$			$d_1 = 0.7, d_2 = 0.2$		
h_2	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3
文献[35]	2.1564	1.6464	1.4365	1.4081	1.1236	0.9391
定理 6.1	2.6928	2.2389	2.0639	1.8474	1.5292	1.3455

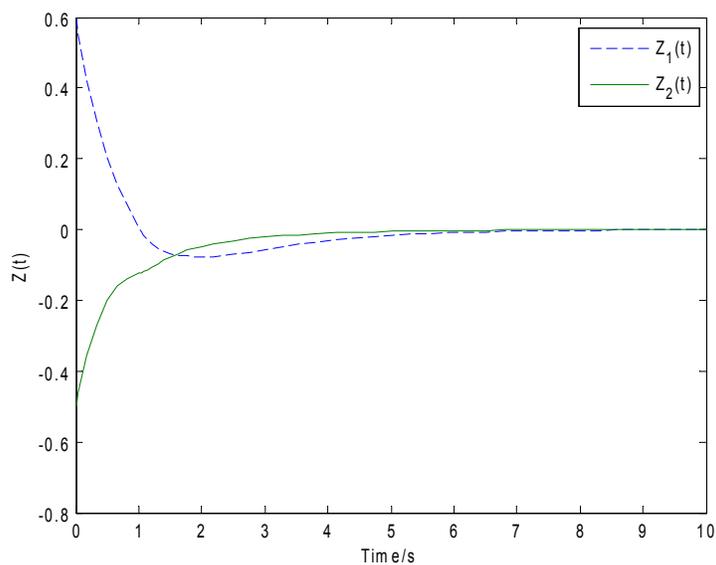


图 6.1 状态反馈响应图

6.5 结论

本章讨论了两个相继时变时滞的神经网络的稳定性问题，利用 Lyapunov 泛函和线性矩阵不等式方法，我们得到了新的渐近稳定性准则。仿真实例验证了本章提出方法的正确性与有效性。

第七章 网络控制系统的稳定性分析

7.1 引言

网络控制系统 (networked control systems, NCSs) 是一种随着计算机技术、控制技术、网络通信技术发展而逐渐发展起来的, 通过实时网络实现的闭环反馈控制系统, 以传感器、执行器、控制器、驱动器等作为网络节点, 与通信网络直接连接, 实现了网络控制信息的交换. 与传统控制相比, 网络控制系统减少了系统连线从而降低了系统的复杂性, 实现了信息资源共享, 提高了信息集成度. 由于通信网络的介入, 网络控制不可避免会出现时滞、丢包、错序等现象, 导致系统性能下降, 因此网络控制的稳定性问题得到了广泛的关注^{[36]-[40]}.

文献[36]对网络控制系统鲁棒 H_∞ 性能进行了分析, 同时设计了滤波器. 文献[37]对闭环网络控制系统进行时滞黄金分割. 文献[38]利用分段时滞法研究了网络控制系统的输出反馈控制. 文献[39]利用切换理论提出了短时延多包传输网络控制系统, 设计了周期动态输出反馈镇定控制器.

基于上述研究, 本章对含有两个相继时变时滞的系统的鲁棒 H_∞ 性能分析, 同时考虑了网络时滞、数据包丢失等现象. 通过构造新的 Lyapunov 函数和运用新的不等式处理技术, 得到了较为简明的网络控制系统稳定判据.

7.2 系统模型描述

考虑下列含有两个相继时变时滞的控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h_1(t)-h_2(t)) + E\omega(t), \\ y(t) = Cx(t) + C_1x(t-h_1(t)-h_2(t)) + F\omega(t), \\ x(t) = \Phi(t), \quad \forall t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (7.1)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ 是输出, $\omega(t) \in \mathbb{R}^l$ 是外部干扰输入且属于 $L_2[0, \infty)$; 时滞函数 $h_1(t), h_2(t)$ 可微, 且满足:

$$\begin{aligned} 0 \leq h_1(t) \leq h_1 < \infty, \quad \dot{h}_1(t) \leq d_1 < \infty, \\ 0 \leq h_2(t) \leq h_2 < \infty, \quad \dot{h}_2(t) \leq d_2 < \infty, \end{aligned} \quad (7.2)$$

其中, h_1, h_2, d_1, d_2 是常数, 并且假设:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t), \quad h = h_1 + h_2, \quad d = d_1 + d_2.$$

A, A_1, E, C, C_1, E, F 是具有相应维数的常数矩阵, $\Phi(t)$ 是初始状态函数.

7.3 稳定性分析

定理 7.1 对于给定常数 $h_1 > 0, h_2 > 0, d_1 > 0, d_2 > 0, \gamma > 0$, 如果存在正定矩阵 $P, Q(i=1, 2, \dots, 5), R_1, R_2, R_3$, 任意矩阵 $W_j (j=1, \dots, 4)$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\varphi + \Pi^T \Omega \Pi < 0, \quad (7.3)$$

$$\begin{bmatrix} R_j & W_j \\ * & R_j \end{bmatrix} > 0, \quad j=1, 2, 3, \quad (7.4)$$

$$\begin{bmatrix} R_3 & W_4 \\ * & R_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (7.5)$$

则满足条件(7.3)-(7.5)的系统(7.1)是稳定的, 且具有给定的 H_∞ 扰动水平 γ ,

其中

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & W_1 & W_3/h_1 & 0 & PE + C^T F \\ * & \varphi_{22} & \varphi_{23} & R_1 - W_1 & \varphi_{25} & W_4^T/h_2 & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & 0 & \varphi_{35} & -W_4^T/h_2 & C_1 F \\ * & * & * & \varphi_{44} & R_2 - W_2 & W_2 & 0 \\ * & * & * & * & \varphi_{55} & \varphi_{56} & 0 \\ * & * & * & * & * & \varphi_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \varphi_{77} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{11} = PA + A^T P + Q_1 + Q_3 + Q_4 + C^T C - R_1 - R_3/h_1,$$

$$\varphi_{12} = R_1 - W_1 + R_3/h_1,$$

$$\varphi_{13} = PA_1 + C^T C_1 - W_3/h_1,$$

$$\varphi_{22} = -(1-d_1)Q_3 + W_1 + W_1^T - R_1 - R_1^T - R_3/h_1 - R_3/h_2,$$

$$\varphi_{23} = R_3/h_2 + W_3/h_1,$$

$$\varphi_{25} = -W_3/h_1 - W_4^T/h_2,$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{35} &= R_3 / h_1 + W_4^T / h_2, \\
\varphi_{33} &= -(1-d_1-d_2)Q_4 + C_1^T C_1 - R_3 / h_1 - R_3 / h_2, \\
\varphi_{44} &= Q_2 - Q_1 + Q_5 - R_1 - R_2, \\
\varphi_{55} &= -(1-d_2)Q_5 + W_2 + W_2^T - R_2 - R_2^T - R_3 / h_1 - R_3 / h_2, \\
\varphi_{56} &= R_2 - W_2 + R_3 / h_2, \\
\varphi_{66} &= -Q_2 - R_2 - R_3 / h_2, \\
\varphi_{77} &= -\gamma^2 + F^T F, \\
\Pi &= [A \ 0 \ A_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ E], \\
\Omega &= h_1^2 R_1 + h_2^2 R_2 + (h_1 + h_2) R_3.
\end{aligned}$$

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^3 V_i(t), \quad (7.6)$$

其中

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= x^T(t) P x(t), \\
V_2(t) &= \int_{t-h_1}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-h}^{t-h_1} x^T(s) Q_2 x(s) ds + \int_{t-h_1(t)}^t x^T(s) Q_3 x(s) ds + \int_{t-h(t)}^t x^T(s) Q_4 x(s) ds \\
&\quad + \int_{t-h_1-h_2(t)}^{t-h_1} x^T(s) Q_5 x(s) ds, \\
V_3(t) &= h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) R_1 \dot{x}(s) ds d\theta + h_2 \int_{-h}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) R_2 \dot{x}(s) ds d\theta + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) R_3 \dot{x}(s) ds d\theta.
\end{aligned}$$

记

$$\eta^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t-h_1(t)) \ x^T(t-h(t)) \ x^T(t-h_1) \ x^T(t-h_1-h_2(t)) \ x^T(t-h) \ \omega(t)].$$

沿着系统(7.1) 的轨迹, 对 $V(t)$ 求导, 得到:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= 2x^T(t) P \dot{x}(t) \\
&= 2x^T(t) P [A \ 0 \ A_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ E] \eta(t),
\end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= x^T(t)(Q_1 + Q_3 + Q_4)x(t) + x^T(t-h_1)(Q_2 - Q_1 + Q_5)x(t-h_1) - x^T(t-h)Q_2x(t-h) \\
&\quad - (1-d_2)x^T(t-h_1-h_2(t))Q_5x(t-h_1-h_2(t)),
\end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(t) &= \dot{x}^T(t)(h_1^2 R_1 + h_2^2 R_2 + h R_3)\dot{x}(t) - h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds - h_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
&\quad - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds,
\end{aligned} \quad (7.9)$$

由引理 2.6, 可知存在正定矩阵 R_1 和任意矩阵 W_1 , 满足 $\begin{bmatrix} R_1 & W_1 \\ * & R_1 \end{bmatrix} \geq 0$, 使得式(7.10)成立:

$$\begin{aligned}
& -h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\
& = -h_1 \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds - h_1 \int_{t-h_1}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\
& \leq - \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1(t)) \\ x(t-h_1(t)) - x(t-h_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & W_1 \\ * & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1(t)) \\ x(t-h_1(t)) - x(t-h_1) \end{bmatrix}, \tag{7.10}
\end{aligned}$$

类似的，可以得到：

$$\begin{aligned}
& -h_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
& \leq -h_2 \int_{t-h_1-h_2(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds - h_2 \int_{t-h}^{t-h_1-h_2(t)} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
& \leq - \begin{bmatrix} x(t-h_1) - x(t-h_1-h_2(t)) \\ x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_2 & W_2 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) - x(t-h_1-h_2(t)) \\ x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \end{bmatrix}, \tag{7.11}
\end{aligned}$$

其中任意矩阵 W_2 ，满足 $\begin{bmatrix} R_2 & W_2 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \geq 0$.

同理，可得：

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R_3(s) \dot{x}(s) ds \\
& = - \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}^T(s) R_3(s) \dot{x}(s) ds - \int_{t-h_1-h_2(t)}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) R_3(s) \dot{x}(s) ds \\
& \quad - \int_{t-h}^{t-h_1-h_2(t)} \dot{x}^T(s) R_3(s) \dot{x}(s) ds - \int_{t-h(t)}^{t-h_1(t)} \dot{x}^T(s) R_3(s) \dot{x}(s) ds \\
& \leq - \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1(t)) \\ x(t-h(t)) - x(t-h_1-h_2(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_3 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1(t)) \\ x(t-h(t)) - x(t-h_1-h_2(t)) \end{bmatrix} \\
& \quad - \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \\ x(t-h_1(t)) - x(t-h(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_4 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \\ x(t-h_1(t)) - x(t-h(t)) \end{bmatrix}. \tag{7.12}
\end{aligned}$$

其中任意矩阵 W_3, W_4 ，满足 $\begin{bmatrix} R_3 & W_3 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \geq 0$ ， $\begin{bmatrix} R_3 & W_4 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \geq 0$.

由(7.9)-(7.12)，可得

$$\begin{aligned}
V_3(t) &\leq \dot{x}^T(t)(h_1^2 R_1 + h_2^2 R_2 + h R_3) \dot{x}(t) \\
&\quad - \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1(t)) \\ x(t-h_1(t)) - x(t-h_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & W_1 \\ * & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1(t)) \\ x(t-h_1(t)) - x(t-h_1) \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} x(t-h_1) - x(t-h_1-h_2(t)) \\ x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_2 & W_2 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) - x(t-h_1-h_2(t)) \\ x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1(t)) \\ x(t-h(t)) - x(t-h_1-h_2(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_3 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1(t)) \\ x(t-h(t)) - x(t-h_1-h_2(t)) \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \\ x(t-h_1(t)) - x(t-h(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_4 \\ * & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \\ x(t-h_1(t)) - x(t-h(t)) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{7.13}$$

由式(7.7)-(7.9), (7.13)可得

$$y^T(t)y(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t) \leq \eta^T(t)[\varphi + \Pi^T \Omega \Pi] \eta(t), \tag{7.14}$$

因此只要(7.3)-(7.5)成立, 就有

$$y^T(t)y(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t) < 0, \tag{7.15}$$

在零初始条件下, 有 $V(0) = 0$ 和 $V(\infty) \geq 0$, 对式(7.15)左右两边同时积分, 可得

$$\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt - \int_0^\infty \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)dt + \int_0^\infty \dot{V}(t)dt < 0,$$

则

$$\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt < \int_0^\infty \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)dt,$$

于是, 有 $\|y\|_2 < \gamma \|\omega\|_2$ 对所有的非零扰动 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ 成立. 所以系统 (7.1) 具有给定的 H_∞ 扰动水平 γ . 证毕.

假设时滞函数满足以下条件

$$0 \leq h_1(t) \equiv h_1 < \infty, \quad h_2(t) \leq h_2 < \infty,$$

则有以下定理:

定理 7.2 对于给定常数 $h_1 > 0, h_2 > 0, \gamma > 0$, 系统(7.1)渐近稳定, 如果存在正定矩阵 $P, Q_i (i=1, 2, 3), R_1, R_2, R_3$, 任意矩阵 $W_j (j=1, 2)$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\varphi + \Pi_1^T \Omega \Pi_1 + \Pi_2^T \Pi_2 < 0,$$

$$\begin{bmatrix} R_2 & W_1 \\ * & R_2 \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} R_3 & W_2 \\ * & R_3 \end{bmatrix} > 0,$$

其中

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & R_1 & \varphi_{13} & W_2 & PE \\ * & \varphi_{22} & R_2 - W_1 & W_1 & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & \varphi_{34} & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{11} = PA + A^T P + Q_1 + Q_3 - R_1 - R_3,$$

$$\varphi_{13} = PA_1 + R_3 - W_2,$$

$$\varphi_{22} = Q_2 - Q_1 - R_1 - R_2,$$

$$\varphi_{33} = W_1 + W_1^T - 2R_2 - 2R_3 + W_2 + W_2^T,$$

$$\varphi_{34} = R_2 + R_3 - W_1 - W_2,$$

$$\varphi_{44} = -Q_2 - Q_3 - R_2 - R_3,$$

$$\Pi_1 = [A \ 0 \ A_1 \ 0 \ E],$$

$$\Pi_2 = [C \ 0 \ C_1 \ 0 \ F],$$

$$\Omega = h_1^2 R_1 + h_2^2 R_2 + (h_1 + h_2)^2 R_3.$$

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^3 V_i(t),$$

其中 $V_1(t)$ 同式(7.6), $V_2(t), V_3(t)$ 如下:

$$V_2(t) = \int_{t-h_1}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-h}^{t-h_1} x^T(s) Q_2 x(s) ds + \int_{t-h}^t x^T(s) Q_3 x(s) ds,$$

$$V_3(t) = h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) R_1 \dot{x}(s) ds d\theta + h_2 \int_{-h}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) R_2 \dot{x}(s) ds d\theta + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s) R_3 \dot{x}(s) ds d\theta.$$

记 $\eta^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t-h_1) \ x^T(t-h_1-h_2(t)) \ x^T(t-h) \ \omega(t)]$, 沿着系统(7.1)的轨迹, 对 $\dot{V}(t)$ 求导. 对 $\dot{V}_3(t)$ 求导作如下处理:

$$\begin{aligned} & -h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}(s) R_1 \dot{x}(s) ds \\ & \leq \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ * & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h_2 \int_{t-h}^{t-h_1} \dot{x}(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
& \leq -h_2 \int_{t-h_1-h_2(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds - h_2 \int_{t-h}^{t-h_1-h_2(t)} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds \\
& \leq - \begin{bmatrix} x(t-h_1) - x(t-h_1-h_2(t)) \\ x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_2 & W_1 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) - x(t-h_1-h_2(t)) \\ x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \end{bmatrix}, \\
& -h \int_{t-h}^t \dot{x}(s) R_3 \dot{x}(s) ds \\
& = -h \int_{t-h_1-h_2(t)}^t \dot{x}(s) R_3 \dot{x}(s) ds - h \int_{t-h}^{t-h_1-h_2(t)} \dot{x}(s) R_3 \dot{x}(s) ds \\
& \leq - \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1-h_2(t)) \\ x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_3 & W_2 \\ * & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-h_1-h_2(t)) \\ x(t-h_1-h_2(t)) - x(t-h) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

类似于定理 7.1 的证明, 我们可以得到定理 7.2.

7.4 网络控制系统

考虑网络控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 u(t) + E \omega(t), \\ y(t) = Cx(t) + C_1 u(t) + F \omega(t), \end{cases} \quad (7.16)$$

其中 $u(t)$ 是控制输入. 图 7.1 是网络控制系统的结构图, 传感器采用时间驱动方式, 量化器、控制器、零阶保持器是事件驱动方式.

假设状态 $x(t)$ 是可测的, 并且可以通过量化器量化测量, 采样周期是 h , 采用时间为 s_k , 量化级表示为

$$\begin{cases} v_j = \{\pm u_i^{(j)}, u_i^{(j)} = \rho_j^i u_0^{(j)}, i = \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{u_0^{(j)}\} \cup \{0\}, \\ 0 < \rho < 1, u_0^{(j)} > 0. \end{cases} \quad (7.17)$$

其中 $u_i^{(j)}$ 是量化水平, ρ 是量化密度. 相应的量化器定义为

$$f_j(v) = \begin{cases} u_i^{(j)}, & \frac{1}{1+\sigma_j} u_i^{(j)} < v \leq \frac{1}{1-\sigma_j} u_i^{(j)}, v > 0, \\ 0, & v = 0, \\ -f_j(-v), & v < 0, \end{cases} \quad (7.18)$$

其中 $\sigma_j = \frac{1-\rho_j}{1+\rho_j}$.

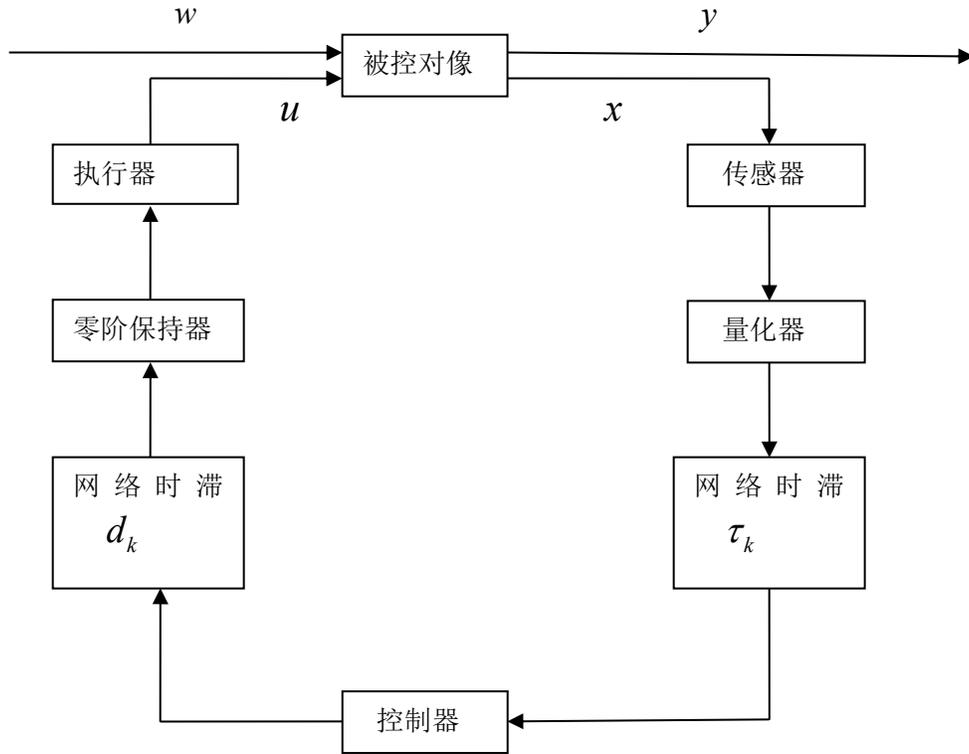


图 7.1 网络控制系统

假设零阶保持器的更新时间是 t_k ，在时刻 t_k 时，从传感器到零阶保持器的经历的网络时滞是 $\eta_k = \tau_k + d_k$ ，其中 τ_k 是从量化器到控制器的网络时滞， d_k 是从控制器到零阶保持器的网络时滞。假设从信号传感器到量化器没有产生网络时滞。

设计如下状态反馈控制器

$$u(t_k) = Kf(x(t_k - \eta_k)), \quad (7.19)$$

其中 K 是状态反馈增益矩阵，考虑零阶保持器， t_k 为零阶保持器的更新时间，有

$$u(t) = Kf(x(t_k - \eta_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (7.20)$$

假设

$$\eta_m \leq \eta_k \leq \eta_M,$$

其中 η_m 和 η_M 的最小值和最大值，于是得到

$$t_{k+1} - t_k = (\delta_{k+1} + 1)h + \eta_{k+1} - \eta_k, \quad (7.21)$$

其中 δ_{k+1} 是从 t_k 到 t_{k+1} 数据包丢失的数量，并且满足 $\delta_{k+1} \leq \bar{\delta}$ ， $\bar{\delta}$ 表示数据包丢失的最大数量。

令

$$t_k - \eta_k = t - \eta_m - t + t_k + \eta_m - \eta_k = t - \eta_m - \eta(t), \quad (7.22)$$

其中 $\eta(t) = t - t_k + \eta_k - \eta_m$, 这样得到

$$0 \leq \eta(t) \leq \kappa, \quad (7.23)$$

其中 $\kappa = \eta_M - \eta_m + (\bar{\delta} + 1)h$

这样, 系统(7.16) 变为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 K f(x(t - \eta_m - \eta(t))) + E\omega(t), \\ y(t) = Cx(t) + C_1 K f(x(t - \eta_m - \eta(t))) + F\omega(t), \end{cases} \quad (7.24)$$

7.5 H_∞ 性能分析

首先, 考虑如下系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 K(I + \Lambda(t))x(t - h_1 - h_2(t)) + E\omega(t), \\ y(t) = Cx(t) + C_1 K(I + \Lambda(t))x(t - h_1 - h_2(t)) + F\omega(t), \end{cases} \quad (7.25)$$

其中

$$h_2(t) \leq h_2, \Lambda(t) = \text{diag}(\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), \dots, \Lambda_n(t)), \Lambda_j(t) \in [-\sigma_j, \sigma_j], j = 1, \dots, n.$$

定理 7.3 对于给定常数 $h_1 > 0, h_2 > 0, \gamma > 0$, 系统(7.25)渐近稳定, 如果存在正定矩阵

$X, \bar{Q}_i (i=1, 2, 3), \bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, M$, 任意矩阵 $\bar{W}_j (j=1, 2)$, 使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \varphi & \Delta \\ * & -M \end{bmatrix} < 0, \quad (7.26)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_2 & \bar{W}_1 \\ * & \bar{R}_2 \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} \bar{R}_3 & \bar{W}_2 \\ * & \bar{R}_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (7.27)$$

其中

$$\varphi = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{11} & \bar{R}_1 & \bar{\varphi}_{13} & \bar{W}_2 & E & h_1 X A^T & h_2 X A^T & h X A^T & X C^T & A_1 \bar{K} \\ * & \bar{\varphi}_{22} & \bar{R}_2 - \bar{W}_1 & \bar{W}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\varphi}_{33} & \bar{\varphi}_{34} & 0 & h_1 \bar{K}^T A_1^T & h_2 \bar{K}^T A_1^T & h \bar{K}^T A_1^T & \bar{K}^T C_1^T & 0 \\ * & * & * & \bar{\varphi}_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 & h_1 E^T & h_2 E^T & h E^T & F^T & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{R}_1 - 2X & 0 & 0 & 0 & h_1 A_1 \bar{K} \\ * & * & * & * & * & * & \bar{R}_2 - 2X & 0 & 0 & h_2 A_1 \bar{K} \\ * & * & * & * & * & * & * & \bar{R}_3 - 2X & 0 & h A_1 \bar{K} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I & C_1 \bar{K} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & M - 2X \end{bmatrix},$$

$$\Delta = [0 \ 0 \ \Lambda X \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\bar{\varphi}_{11} = AX + XA^T + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_3 - \bar{R}_1 - \bar{R}_3,$$

$$\bar{\varphi}_{13} = A_1 \bar{K} + \bar{R}_3 - \bar{W}_2,$$

$$\bar{\varphi}_{22} = \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 - \bar{R}_1 - \bar{R}_2,$$

$$\bar{\varphi}_{33} = \bar{W}_1 + \bar{W}_1^T - \bar{R}_2 - \bar{R}_2^T - \bar{R}_3 - \bar{R}_3^T + \bar{W}_2 + \bar{W}_2^T,$$

$$\bar{\varphi}_{34} = \bar{R}_2 + \bar{R}_3 - \bar{W}_1 - \bar{W}_2,$$

$$\bar{\varphi}_{44} = -\bar{Q}_2 - \bar{Q}_3 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3,$$

如果上述条件可解，则状态反馈增益矩阵 $K = \bar{K} \bar{X}^{-1}$ 。

证明：用 $A_1 K(I + \Lambda(t))$ 替换 A_1 , $C_1 K(I + \Lambda(t))$ 替换 C_1 , 由定理 7.2, 有

$$\hat{\varphi} + \Gamma_1^T \Omega \Gamma_1 + \Gamma_2^T \Gamma_2 < 0, \quad (7.28)$$

其中

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & R_1 & \hat{\varphi}_{13} & W_2 & PE \\ * & \varphi_{22} & R_2 - W_1 & W_1 & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & \varphi_{34} & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\varphi}_{13} = P A_1 (K I + \Lambda(t)) + R_3 - W_2,$$

$$\Gamma_1 = [A \ 0 \ A_1 K(I + \Lambda(t)) \ 0 \ E],$$

$$\Gamma_2 = [C \ 0 \ C_1 K(I + \Lambda(t)) \ 0 \ F],$$

$$\varphi_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{33}, \varphi_{34}, \varphi_{44} \text{ 定义同定理 7.2.}$$

引理 2.3, 式(7.28)等价于

$$\begin{bmatrix} \hat{\varphi} & \hat{\Gamma}_1 & \Gamma_2^T \\ * & \hat{\Omega} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (7.29)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1 &= [A \ 0 \ A_1K(I + \Lambda(t)) \ 0 \ E]^T [h_1R_1 \ h_2R_2 \ hR], \\ \hat{\Omega} &= \text{diag}(-R_1, -R_2, -R_3). \end{aligned}$$

式(7.29)可以写成

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi} & \hat{\Gamma}_1 & \Gamma_2^T \\ * & \hat{\Omega} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} + \Xi_1 \Xi_2 + \Xi_2^T \Xi_1^T < 0, \quad (7.30)$$

其中

$$\tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & R_1 & \hat{\varphi}_{13} & W_2 & PE \\ * & \varphi_{22} & R_2 - W_1 & W_1 & 0 \\ * & * & \varphi_{33} & \varphi_{34} & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}_{13} = PA_1K + R_3 - W_2,$$

$$\Xi_1 = [PA_1K \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ h_1R_1A_1K \ h_2R_2A_1K \ hR_3A_1K \ C_1K]^T,$$

$$\Xi_2 = [0 \ 0 \ 0 \ \Lambda(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

利用引理 2.7, 式(7.30)的充要条件是存在 $M > 0$, 使得式(7.31)成立

$$\Psi = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi} & \hat{\Gamma}_1 & \Gamma_2^T \\ * & \hat{\Omega} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} + \Xi_1 M^{-1} \Xi_1^T + \Xi_2^T M \Xi_2 < 0, \quad (7.31)$$

由引理 2.3, 式(7.31) 等价于

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Xi_1 \\ * & -M \end{bmatrix} < 0, \quad (7.32)$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Upsilon & \hat{\Gamma}_1 & \Gamma_2^T \\ * & \hat{\Omega} & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & R_1 & \hat{\varphi}_{13} & W_2 & PE \\ * & \varphi_{22} & R_2 - W_1 & W_1 & 0 \\ * & * & \hat{\varphi}_{33} & \varphi_{34} & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\varphi}_{13} = PA_1K + R_3 - W_2 + \Lambda^2 M,$$

对 Ψ 进行矩阵的变换, 在 Ψ 的左右两边同时乘以 J , 得到 $\bar{\Psi} = J\Psi J$. 其中

$$J = \text{dig}(P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}, I, P^{-1}),$$

记

$$X = P^{-1}, \bar{Q}_1 = P^{-1}Q_1P^{-1}, \bar{Q}_2 = P^{-1}Q_2P^{-1}, \bar{Q}_3 = P^{-1}Q_3P^{-1}, \bar{R}_1 = P^{-1}R_1P^{-1}, \bar{R}_2 = P^{-1}R_2P^{-1},$$

$$\bar{R}_3 = P^{-1}R_3P^{-1}, \bar{M} = M^{-1}, \bar{W}_1 = P^{-1}W_1P^{-1}, \bar{W}_2 = P^{-1}W_2P^{-1}, \bar{K} = KP^{-1}.$$

在 $\bar{\Psi}$ 的项 (6,6), (7,7), (8,8), (10,10) 中存在非线性项 $-X\bar{R}_1^{-1}X, -X\bar{R}_2^{-1}X - X\bar{R}_3^{-1}X, -X\bar{M}^{-1}X$ 不是标准的 LMI 形式, 因此不能用 LMI 工具箱来处理. 由于 $X > 0, \bar{R}_i (i=1,2,3) > 0$, 因此有 $(\bar{R}_i - X)\bar{R}_i^{-1}(\bar{R}_i - X) > 0, (M - X)M^{-1}(M - X) > 0$, 于是 $-X\bar{R}_i^{-1}X < \bar{R}_i - 2X, -X\bar{M}^{-1}X < M - 2X$.

结合式(7.32), 我们可以得到定理 7.3. 证毕.

7.6 数值实例

例 7.1 考虑具有如下系数矩阵的系统:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], C_1 = [1 \ 0], F = 0.5.$$

假设 $d_1 = 0.1, d_2 = 0.8$. 我们的目标是当 h_1, h_2 已知时, 寻找最小的 γ . 在不同 h_1, h_2 时, 用 Matlab 的 LMI 工具箱求得的 γ , 见表 7.1. 由表可见, 本章具有较小的保守性.

表 7.1 对于不同 h_1, h_2 , 求得的最小的 γ

h_1	1	1	1	1.2	1.2	1.2
h_2	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3
[42]	1.919	3.308	7.841	2.632	5.276	14.109
定理 7.1	1.799	2.309	3.749	2.338	4.015	7.945

例 7.2 考虑具有如下系数矩阵的系统:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & 0.3 & -0.04 & 0.04 \\ 0.3 & -0.3 & 0.04 & -0.04 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1 \ 0 \ 0], C_1 = 0, F = 0.$$

假设样本周期设 $T = 10\text{ms}$, 网络时滞 $\eta_m = 10\text{ms}$, $\eta_M = 40\text{ms}$, $\delta = 2$, 量化器 $f(\cdot)$ 为 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0.9$, 则 $h_1 = 10\text{ms}$, $h_2 = 60\text{ms}$, $h = 70\text{ms}$.

由于 A 的特征值为 $-0.04 + 0.7736j$, $-0.04 - 0.7736j$, $0, 0$, 所以系统不稳定. 我们的目的是设计一个状态反馈控制器使得系统稳定. 利用定理 7.3, 得到

$$X = \begin{bmatrix} 0.5605 & 0.1903 & -0.0430 & -0.1924 \\ 0.1903 & 0.5061 & 0.0776 & -0.1350 \\ -0.0430 & 0.0776 & 0.1848 & -0.0720 \\ -0.1924 & -0.1350 & -0.0720 & 0.1665 \end{bmatrix},$$

$$\bar{K} = [-0.0741 \ -0.0570 \ -0.0971 \ 0.01416].$$

根据定理 7.3, 得到

$$K = \bar{K}\bar{X}^{-1} = [-0.5614 \ -0.0155 \ -1.0511 \ -1.0308],$$

此时得得到了最小的 $\gamma = 0.6668$. 而参考文献求得的 $\gamma = 0.7864$. 本方法具有更小的保守性.

当初始状态为 $X = [-0.6 \ 0.4 \ -0.4 \ 0.2]$, 无摄动图见图 7.1.

假设摄动输入如下:

$$w(t) = \begin{cases} \cos(0.4t), & 5 \leq t \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当初始状态为 $X = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$, 摄动图如图 7.2.

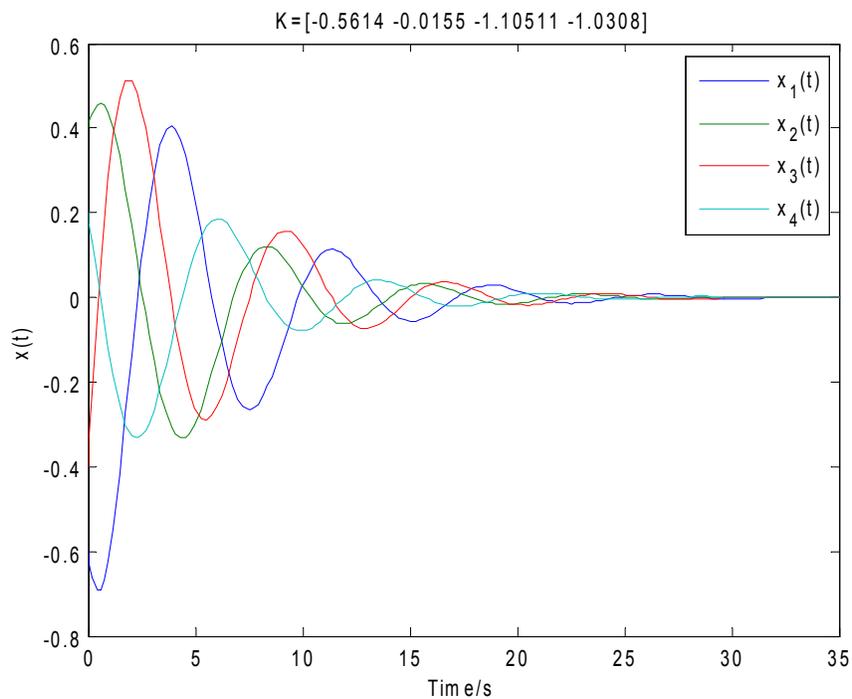


图 7.1 无摄动时，系统状态响应

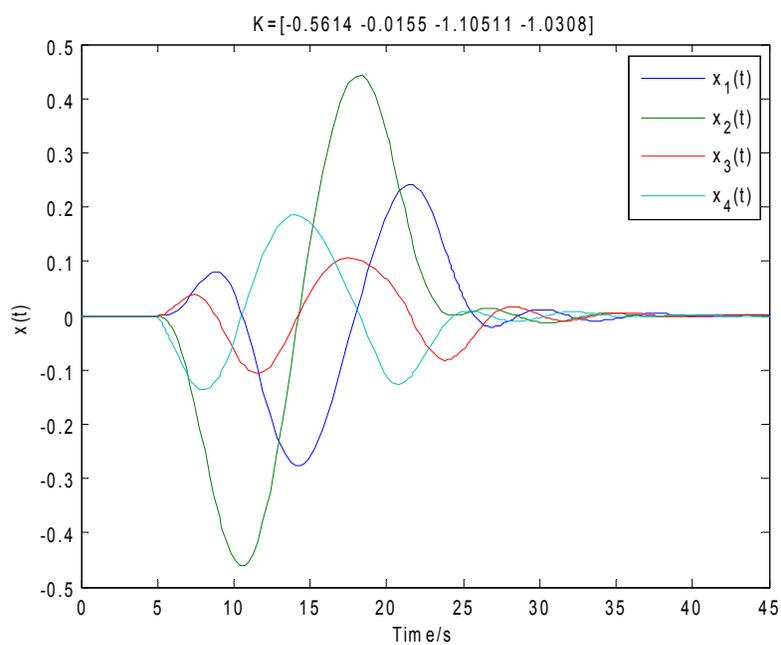


图 7.2 有摄动时，系统状态响应

例 7.3 考虑具有如下系数矩阵的系统：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], C_1 = 0.3, F = 0.3.$$

此时 A 的特征值为 $-2.4142, 0.4142$, 开环系统的图像如图 7.3.

假设样本周期设 $T = 10\text{ms}$, 网络时滞 $\eta_m = 10\text{ms}, \eta_M = 40\text{ms}, \delta = 0$, 利用定理 7.3, 得到

$$X = \begin{bmatrix} 2.5624 & -6.5282 \\ -6.5282 & 23.3468 \end{bmatrix}, \\ \bar{K} = [-4.3104 \quad -1.2697].$$

此时, 得到最小的 $\gamma = 0.6529$.

当 $\eta_m = 10\text{ms}, \eta_M = 40\text{ms}, \delta = 2$, 利用定理 7.3, 得到

$$X = \begin{bmatrix} 2.6168 & -6.6186 \\ -6.6186 & 23.3880 \end{bmatrix}, \\ \bar{K} = [-2.7073 \quad -1.4652].$$

于是, 求得可

$$K = [-4.1973 \quad -1.2504],$$

此时最小的 $\gamma = 0.6678$.

假设状态初始值为 $[1 \quad 0.5]$, 得到响应图, 如图 7.4.

假设摄动输入如下:

$$w(t) = \begin{cases} \sin 0.8t, & 5 \leq t \leq 25 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当状态初始值为 $[0 \quad 0]$, 得到响应图, 如图 7.5. 经过一段时间后, 系统趋于稳定, 这说明本方法的有效性.

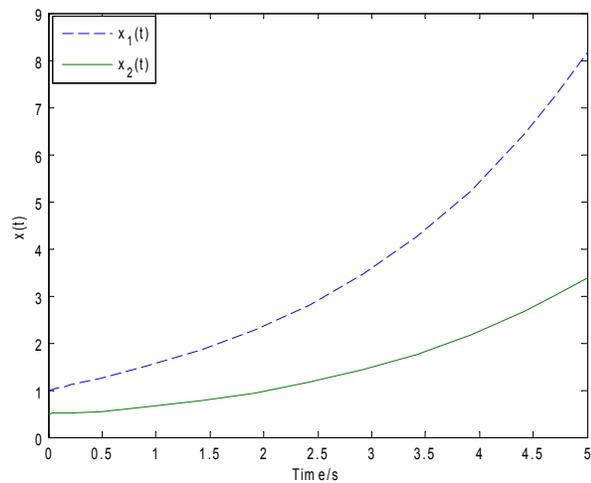
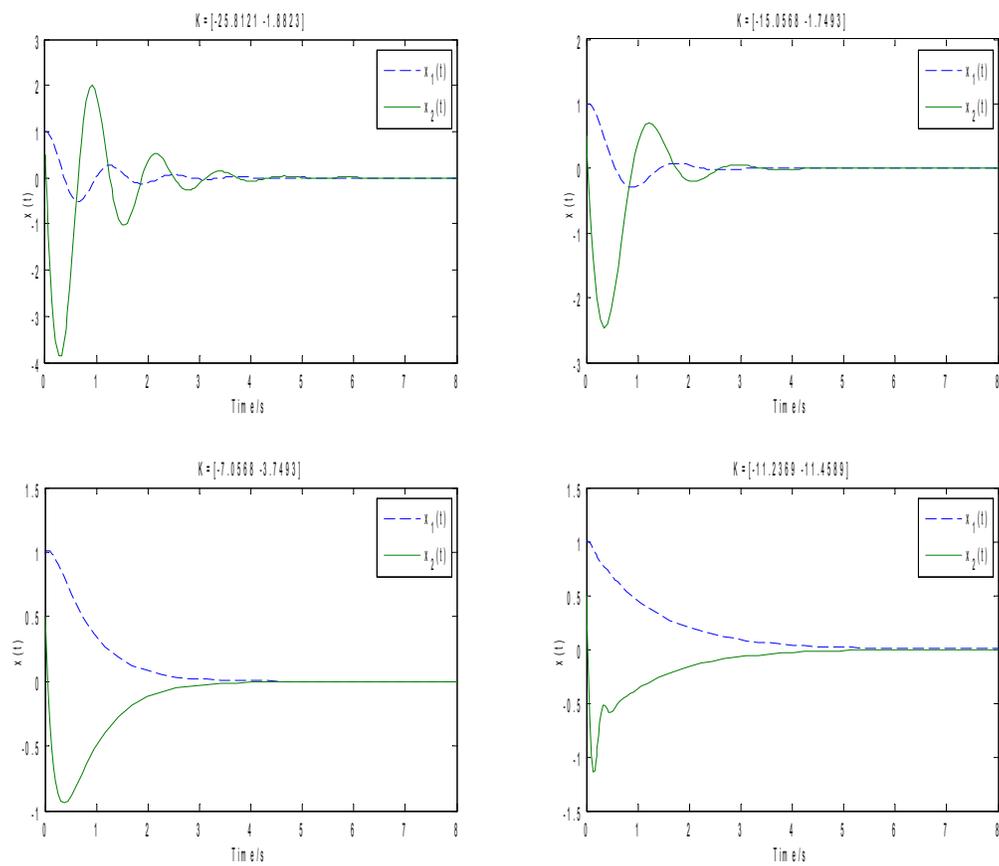


图 7.3 开环系统的响应图

图 7.4 当摄动为零时，对于不同的 K ，状态响应图。

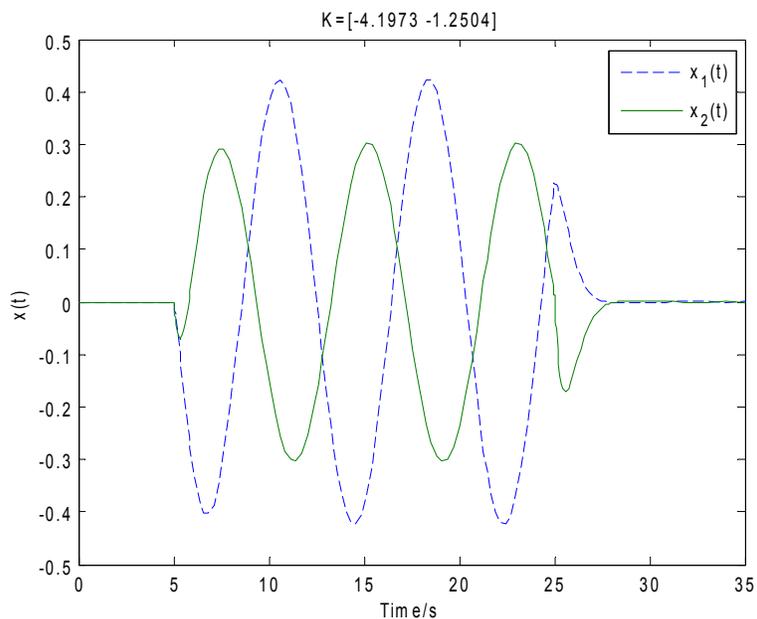


图 7.5 当有摄动时，状态响应图

7.7 结论

本章对含有 2 个相继时变时滞的系统的 H_∞ 性能分析. 当网络控制系统中存在网络时滞, 数据包丢失等问题时, 设计了状态反馈控制器, 建立了稳定性判据, 提出了求解状态反馈增益矩阵的方法. 最后通过仿真说明了方法的正确性和有效性.

第八章 结论与展望

时滞系统的稳定性分析是时滞系统的一个非常活跃的研究方向. 本文基于 Lyapunov 稳定性理论, 主要考虑了几类含有 2 个相继时变时滞的系统的稳定性问题, 并且在此基础上, 将结果应用到网络控制系统中, 并对其进行 H_∞ 性能分析. 本文主要研究成果如下:

(1)为时变时滞线性系统建立了稳定性条件. 采用任意分割法, 用分割点将时滞区间分割成任意两段, 结合积分不等式, 对于每一段区间的稳定性进行分析, 给出了稳定性的充分条件. 仿真例子表明了方法的有效性.

(2)为几类含有 2 个相继时变的时滞线性系统建立了稳定性条件. 应用积分不等式法, 对中立型时滞系统、神经网络系统分别进行稳定性分析. 由于考虑时滞与它们上界的关系, 得到的定理具有较小的保守性.

(3)对网络控制系统进行 H_∞ 性能分析. 在考虑了网络控制系统中存在网络时滞, 数据包丢失等问题的基础之上, 分析了系统的稳定性, 并提出了设计状态反馈控制器方法, 建立了控制器存在的条件.

通过参考已有文献, 结合自己做过的工作, 关于进一步工作的思考与展望如下:

(1)大部分文献涉及的时滞分割法是将时滞等分为 N 等分. 本文是将时滞分割成任意的两部分, 如何把时滞分割成任意 N 部分以及在保证效率的同时, 当 N 取何值时得到的时滞的上确界最大仍是进一步研究的工作.

(2)随着科技的进步, 系统越来越复杂. 一个时滞系统可能含有 3 或者更多的相继时变时滞. 对这样的复杂的系统稳定性, 如何研究和应用这样一个系统, 是进一步研究的课题.

参考文献

- [1] 王占山. 连续时间时滞递归神经网络的稳定性 [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2007.
- [2] 田立新, 邓祥周. 时滞反馈控制模型在能源系统的应用 [J]. 江苏大学学报, 2007, 28(3), 273-277.
- [3] He Yong, Wang Qingguo, Xie Lihua, et al. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 52(2): 293-299.
- [4] Krishnan Ramakrishnan, Goshaidas Ray. Robust stability criteria for uncertain linear systems with interval time-varying delay [J]. J Control Theory Appl., 2011, 9 (4): 559-566.
- [5] Sun , Liu GP, Chen J, et al. Improved stability criteria for linear systems with time-varying delay [J]. IET Control Theory Appl., 2010, 4(4): 683-689.
- [6] Zhao X, Song J, Tian E, et al. Delay-dependent stability analysis for linear system with time-varying delay: a PAM method [C] //Control and Decision Conference, 2009. CCDC'09. Chinese. IEEE, 2009: 1422-1426.
- [7] Peng C, Tian YC. Improved delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay [J]. IET Control Theory Appl., 2008, 2(9): 752-761.
- [8] James Lam, Gao Huiju, Wang Changhong. Stability analysis for continuous systems with two additive time-varying delay components [J]. Systems & Control Letters, 2007, 56(1): 16-24.
- [9] Zhao Y, Gao H, Mou S. Asymptotic stability analysis of neural networks with successive time delay components[J]. Neurocomputing, 2008, 71(13): 2848-2856.
- [10] Gao Huijun, Chen Tongwen, Lam James. A new delay systems approach to network-based control [J]. Automatica, 2008, 44(1):39-52.
- [11] Wu Haixia, Liao Xiaofeng, Feng Wei, et al. Robust Stability analysis of uncertain systems with two additive time-varying delay components [J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(12): 4345-4353.
- [12] 孙健, 陈杰, 刘国平. 时滞系统稳定性分析与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [13] 王高雄, 周之铭, 朱思铭等. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [14] Xiao N, Jia Y. New approaches on stability criteria for neural networks with two additive time-varying delay components [J]. Neurocomputing, 2013, 118(22): 150-156.
- [15] Zhu X L, Wang Y, Du X. Stability criteria for continuous time systems with additive time - varying delays [J]. Optimal Control Applications and Methods, 2013, 35(2): 166-178.

- [16] He Y, Wang Q, Lin CG, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay [J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 371-376.
- [17] Peng C, Tian YC. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 214(2): 480-494.
- [18] Wang Cheng, Shen Yi. Improved delay-dependent robust stability criteria for uncertain time delay systems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218(6): 2880-2888.
- [19] Chen Huabin. New delay-dependent stability criteria for uncertain stochastic neural networks with discrete interval and distributed delays [J]. *Neurocomputing*, 2013, 101(4): 1-9.
- [20] Ramakrishnan K, Ray G. Robust stability criteria for a class of uncertain discrete-time systems with time-varying delay [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(3): 1468-1479.
- [21] Park J H. Novel robust stability criterion for a class of neutral systems with mixed delays and nonlinear perturbations [J]. *Applied Mathematics and computation*, 2005, 161(2): 413-421.
- [22] Qiu F, Cui B, Ji Y. Further results on robust stability of neutral system with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(2): 895-906.
- [23] Yu K W, Lien C H. Stability criteria for uncertain neutral systems with interval time-varying delays[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 38(3): 650-657.
- [24] Zhang A, Xu Z D, Liu D. New stability criteria for neutral systems with interval time-varying delays and nonlinear perturbations [C]//Control and Decision Conference (CCDC), 2011 Chinese. IEEE, 2011: 2995-2999.
- [25] Rakkiyappan R, Balasubramaniam P, Krishnasamy R. Delay dependent stability analysis of neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations [J]. *Journal of computational and applied mathematics*, 2011, 235(8): 2147-2156.
- [26] Ma Z, Zhou W, Li M, et al. Robust stability of neutral systems with time-varying delay and uncertainty [C]//Control and Decision Conference, 2008. CCDC 2008. Chinese. IEEE, 2008: 4139-4143.
- [27] Park P G, Wan Ko J. Stability and robust stability for systems with a time-varying delay [J]. *Automatica*, 2007, 43(10): 1855-1858.
- [28] Zhang J, Shi P, Qiu J. Robust stability criteria for uncertain neutral system with time delay and nonlinear uncertainties [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 38(1): 160-167.

- [29] Lakshmanan S, Senthilkumar T, Balasubramaniam P. Improved results on robust stability of neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations [J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(11): 5355-5368.
- [30] Su W, Chen Y. Global asymptotic stability analysis for neutral stochastic neural networks with time-varying delays [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 1576-1581.
- [31] He Y, Liu G, Rees D. New delay-dependent stability criteria for neural networks with time-varying delay [J]. Neural Networks, IEEE Transactions on, 2007, 18(1): 310-314.
- [32] Wang Y, Yang C, Zuo Z. On exponential stability analysis for neural networks with time-varying delays and general activation functions [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(3): 1447-1459.
- [33] Shao H, Han Q L. New delay-dependent stability criteria for neural networks with two additive time-varying delay components [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(5): 812-818.
- [34] Tian J, Zhong S. Improved delay-dependent stability criteria for neural networks with two additive time-varying delay components [J]. Neurocomputing, 2012, 77(1): 114-119.
- [35] Zhao Y, Gao H, Mou S. Asymptotic stability analysis of neural networks with successive time delay components [J]. Neurocomputing, 2008, 71(13): 2848-2856.
- [36] 陈刚, 朱红求, 阳春, 华, 孔玲爽. 基于时滞的网络控制系统鲁棒 H_∞ 滤波 [J]. 《中南大学学报》, 2012, 43(10): 3886-3893.
- [37] 尹峥. 网络控制系统中时延的稳定性分析[J]. 工业控制计算机 2013, 26 (5): 82-83.
- [38] 褚红燕, 费树岷, 刘金良, 翟军勇. 时常依赖网络控制系统的量化控制: 分段时滞法. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 575-5780.
- [39] 郑萌, 张庆灵, 宋敏, 姜翀. 短时延多包传输网络控制系统的稳定性 [J]. 信息与控制, 2007, 36(3): 294-301.
- [40] 严怀成, 苏阵阵, 张皓. 具有时变时滞和多包丢失的网络控制系统量化 H_∞ 控制 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(4): 469-474.
- [41] Gao H, Chen T, Lam J. A new delay system approach to network-based control [J]. Automatica, 2008, 44(1): 39-52.
- [42] Ridwan W, Trilaksono B R. An LMI approach to H_∞ performance analysis of

- continuous-time systems with two additive time-varying delays [J]. ITB Journal of Engineering Science, 2011, 43(2): 127-138.
- [43] Ridwan W, Bambang R T. H_∞ controller synthesis for Networked Control Systems with time delay system approach[C]//Electrical Engineering and Informatics (ICEEI), 2011 International Conference on. IEEE, 2011: 1-5.
- [44] Wang Z, Ho D W C, Liu Y, et al. Robust H_∞ control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements [J]. Automatica, 2009, 45(3): 684-691.
- [45] Tan M. Global asymptotic stability of fuzzy cellular neural networks with unbounded distributed delays [J]. Neural processing letters, 2010, 31(2): 147-157.
- [46] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [47] 程鹏, 王艳东. 现代控制理论基础 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010.
- [48] Tan M C, Zhang Y, Su W L, et al. Exponential stability analysis of neural networks with variable delays [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20(05): 1541-1549.
- [49] Cheng J, Zhu H, Zhong S, et al. Novel delay-dependent robust stability criteria for neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(14): 7741-7753.
- [50] Kwon O M, Park M J, Park J H, et al. New delay-partitioning approaches to stability criteria for uncertain neutral systems with time-varying delays [J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349(9): 2799-2823.