习题一

1.下列句子中,哪些是命题？在是命题的句子中,哪些是简单命题？哪些是真命题？哪些命题的真值现在还不知道？

（1）中国有四大发明.

答：此命题是简单命题，其真值为 1.

（2）$\sqrt{5}$ 是无理数.

答：此命题是简单命题，其真值为 1.

（3）3 是素数或 4 是素数.

答：是命题，但不是简单命题，其真值为 1.

（4）$2x+3<5$

答：不是命题.

（5）你去图书馆吗？

答：不是命题.

（6）2 与 3 是偶数.

答：是命题，但不是简单命题，其真值为 0.

（7）刘红与魏新是同学.

答：此命题是简单命题，其真值还不知道.

（8）这朵玫瑰花多美丽呀！

答：不是命题.

（9）吸烟请到吸烟室去！

答：不是命题.

（10）圆的面积等于半径的平方乘以 π.

答：此命题是简单命题，其真值为 1.

（11）只有 6 是偶数，3 才能是 2 的倍数.

答：是命题，但不是简单命题，其真值为 0.

（12）8 是偶数的充分必要条件是 8 能被 3 整除.

答：是命题，但不是简单命题，其真值为 0.

（13）2008 年元旦下大雪.

答：此命题是简单命题，其真值还不知道.

2.将上题中是简单命题的命题符号化.

解:（1）p：中国有四大发明.

（2）p: $\sqrt{5}$是无理数.

（7）p:刘红与魏新是同学.

（10）p:圆的面积等于半径的平方乘以 π.

（13）p:2008 年元旦下大雪.

3.写出下列各命题的否定式,并将原命题及其否定式都符号化,最后指出各否定式的真值.

（1）$\sqrt{5}$ 是有理数.

答：否定式：$\sqrt{5}$ 是无理数. p：$\sqrt{5}$ 是有理数. q：$\sqrt{5}$ 是无理数. 其否定式 q 的真值

为 1.

（2）$\sqrt{25}$ 不是无理数.

答：否定式：$\sqrt{25}$ 是有理数. p：$\sqrt{25}$ 不是无理数. q：$\sqrt{25}$ 是有理数. 其否定式 q 的真值为 1.

（3）2.5 是自然数.

答：否定式：2.5 不是自然数. p：2.5 是自然数. q：2.5 不是自然数. 其否定式 q 的真值为 1.

（4）ln1 是整数.

答：否定式：ln1 不是整数. p：ln1 是整数. q：ln1 不是整数. 其否定式 q 的真值为 1.

4. 将下列命题符号化，并指出真值.

（1）2 与 5 都是素数

答：p：2 是素数，q：5 是素数，符号化为 $p \wedge q$，其真值为 1.

（2）不但 π 是无理数，而且自然对数的底 e 也是无理数.

答：p：π 是无理数，q：自然对数的底 e 是无理数，符号化为 $p \wedge q$，其真值为 1.

（3）虽然 2 是最小的素数，但 2 不是最小的自然数.

答：p：2 是最小的素数，q：2 是最小的自然数，符号化为 $p \wedge \neg q$，其真值为 1.

（4）3 是偶素数.

答：p：3 是素数，q：3 是偶数，符号化为 $p \wedge q$，其真值为 0.

（5）4 既不是素数，也不是偶数.

答：p：4 是素数，q：4 是偶数，符号化为 $\neg p \wedge \neg q$，其真值为 0.

5. 将下列命题符号化，并指出真值.

（1）2 或 3 是偶数.

（2）2 或 4 是偶数.

（3）3 或 5 是偶数.

（4）3 不是偶数或 4 不是偶数.

（5）3 不是素数或 4 不是偶数.

答：p：2 是偶数，q：3 是偶数，r:3 是素数，s:4 是偶数，t:5 是偶数

(1) 符号化：$p \vee q$，其真值为 1.

(2) 符号化：$p \vee r$，其真值为 1.

(3) 符号化：$r \vee t$，其真值为 0.

(4) 符号化：$\neg q \vee \neg s$，其真值为 1.

(5) 符号化：$\neg r \vee \neg s$，其真值为 0.

6. 将下列命题符号化.

（1）小丽只能从筐里拿一个苹果或一个梨.

答：p：小丽从筐里拿一个苹果，q：小丽从筐里拿一个梨，符号化为：$p \vee q$.

（2）这学期，刘晓月只能选学英语或日语中的一门外语课.

答：p：刘晓月选学英语，q：刘晓月选学日语，符号化为：$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

7. 设 p：王冬生于 1971 年，q：王冬生于 1972 年，说明命题“王冬生于 1971 年或 1972 年”既可以化

答:列出两种符号化的真值表：

p	q	$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$	$p\vee q$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1

根据真值表,可以判断出,只有当 p 与 q 同时为真时两种符号化的表示才会有不同的真值,但结合命题可以发现,p 与 q 不可能同时为真,故上述命题有两种符号化方式.

8. 将下列命题符号化,并指出真值.

(1) 只要$2<1$,就有$3<2$;

(2) 如果$2<1$,则$3\geq 2$;

(3) 只有$2<1$,才有$3\geq 2$;

(4) 除非$2<1$,才有$3\geq 2$;

(5) 除非$2<1$,否则$3<2$;

(6) $2<1$仅当$3<2$.

答:设 p:$2<1$,则$\neg p$:$2\geq 1$;设 q:$3>2$,则$\neg q$:$3\geq 2$.

	符号化	真值
(1)	$p\rightarrow q$	1
(2)	$p\rightarrow\neg q$	1
(3)	$\neg q\rightarrow p$	0
(4)	$\neg q\rightarrow p$	0
(5)	$\neg q\rightarrow p$	0
(6)	$p\rightarrow q$	1

9. 设 p:俄罗斯位于南半球,q:亚洲人口最多,将下面命题用自然语言表述,并指出其真值:

(1) $p\rightarrow q$;

(2) $q\rightarrow p$;;

(3) $\neg p\rightarrow q$;

（4）$p \to \neg q$；

（5）$\neg q \to p$；

（6）$\neg p \to \neg q$；

（7）$\neg q \to \neg p$.

答:根据题意,p 为假命题,q 为真命题.

	自然语言	真值
（1）	只要俄罗斯位于南半球,亚洲人口就最多	1
（2）	只要亚洲人口最多,俄罗斯就位于南半球	0
（3）	只要俄罗斯不位于南半球,亚洲人口就最多	1
（4）	只要俄罗斯位于南半球，亚洲人口就不是最多	1
（5）	只要亚洲人口不是最多，俄罗斯就位于南半球	1
（6）	只要俄罗斯不位于南半球，亚洲人口就不是最多	0
（7）	只要亚洲人口不是最多，俄罗斯就不位于南半球	1

10. 设 p：9 是 3 的倍数,q：英国与土耳其相邻,将下面命题用自然语言表述,并指出真值：

（1）$p \leftrightarrow q$；

（2）$p \leftrightarrow \neg q$；

（3）$\neg p \leftrightarrow q$；

（4）$\neg p \leftrightarrow \neg q$.

答:根据题意,p 为真命题,q 为假命题.

	自然语言	真值
（1）	9 是 3 的倍数当且仅当英语与土耳其相邻	0
（2）	9 是 3 的倍数当且仅当英语与土耳其不相邻	1
（3）	9 不是 3 的倍数当且仅当英语与土耳其相邻	1
（4）	9 不是 3 的倍数当且仅当英语与土耳其不相邻	0

11. 将下列命题符号化,并给出各命题的真值：

（1）若 2+2=4,则地球是静止不动的；

（2）若 2+2=4,则地球是运动不止的；

（3）若地球上没有树木,则人类不能生存；

（4）若地球上没有水,则$\sqrt{3}$是无理数.

答:

	命题 1	命题 2	符号化	真值

（1）	p:2+2=4	q:地球是静止不动的	$p \rightarrow q$	0
（2）	p:2+2=4	q:地球是静止不动的	$p \rightarrow \neg q$	1
（3）	p:地球上有树木	q:人类能生存	$\neg p \rightarrow \neg q$	1
（4）	p:地球上有树木	q:人类能生存	$\neg p \rightarrow q$	1

12. 将下列命题符号化，并给出各命题的真值：
（1）2+2=4 当且仅当 3+3=6；

（2）2+2=4 的充要条件是 3+3≠6；

（3）2+2≠4 与 3+3=6 互为充要条件；

（4）若 2+2≠4，则 3+3≠6，反之亦然.

答：设 p:2+2=4，q:3+3=6.

	符号化	真值
(1)	$p \leftrightarrow q$	1
(2)	$p \leftrightarrow \neg q$	0
(3)	$\neg p \leftrightarrow q$	0
(4)	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	1

13. 将下列命题符号化，并讨论各命题的真值：
（1）若今天是星期一，则明天是星期二；
（2）只有今天是星期一，明天才是星期二；
（3）今天是星期一当且仅当明天是星期二；
（4）若今天是星期一，则明天是星期三.
答：设 p:今天是星期一，q:明天是星期二，r:明天是星期三.

	符号化	真值讨论
(1)	$p \rightarrow q$	不会出现前句为真，后句为假的情况
(2)	$q \rightarrow p$	不会出现前句为真，后句为假的情况
(3)	$p \leftrightarrow q$	必然为 1
(4)	$p \rightarrow r$	若 p 为真，则真值为 0；若 p 为假，则真值为 1

14.将下列命题符号化:
(1) 刘晓月跑得快,跳得高;
(2) 老王是山东人或者河北人;
(3) 因为天气冷,所以我穿了羽绒服;
(4) 王欢与李乐组成一个小组;
(5) 李欣与李末是兄弟;
(6) 王强与刘威都学过法语;
(7) 他一面吃饭,一面听音乐;
(8) 如果天下大雨,他就乘班车上班;
(9) 只有天下大雨,他才乘班车上班;
(10) 除非天下大雨,否则他不乘班车上班;
(11) 下雪路滑,他迟到了;
(12) 2 与 4 都是素数,这是不对的;
(13) "2 或 4 是素数,这是不对的"是不对的.

答:

	命题 1	命题 2	命题 3	符号化
(1)	p:刘晓月跑得快	q:刘晓月跳得高	-	$p \wedge q$
(2)	p:老王是山东人	q:老王是河北人	-	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
(3)	p:天气冷	q:我穿羽绒服	-	$p \rightarrow q$
(4)	p:王欢与李乐组成一个小组	-	-	p:王欢与李乐组成一个小组
(5)	p:李辛与李末是兄弟	-	-	p:李辛与李末是兄弟
(6)	p:王强学过法语	q:刘威学过法语	-	$p \wedge q$
(7)	p:他吃饭	q:他听音乐	-	$p \wedge q$
(8)	p:天下大雨	q:他乘车上班	-	$p \rightarrow q$
(9)	p:天下大雨	q:他乘车上班	-	$q \rightarrow p$
(10)	p:天下大雨	q:他乘车上班	-	$q \rightarrow p$
(11)	p:下雪	q:路滑	r:他迟到了	$(p \wedge q) \rightarrow r$
(12)	p:2 是素数	q:4 是素数	-	$\neg(p \wedge q)$
(13)	p:2 是素数	q:4 是素数	-	$\neg(\neg(p \vee q))$

15.设 p:2+3=5.

q：大熊猫产在中国.

r:太阳从西方升起.

求下列符合命题的真值：

（1）$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$;

（2）$(r \rightarrow (p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p$;

（3）$(\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r))$;

（4）$(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow r)$.

解：p 真值为 1，q 真值为 1，r 真值为 0.

（1）0，（2）0，（3）0，（4）1

16.当 p,q 的真值为 0,r,s 的真值为 1 时,求下列各命题公式的真值：

（1）$p \vee (q \wedge r)$;

（2）$(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s)$;

（3）$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r)$;

（4）$(\neg r \wedge s) \rightarrow (p \wedge \neg q)$.

解：（1）0，（2）0，（3）0，（4）1

17.判断下面一段论述是否为真：“π是无理数.并且,如果 3 是无理数,则$\sqrt{2}$也是无理数.另外,只有 6 能被 2 整除,6 才能被 4 整除.”

解：p: π是无理数 q: 3 是无理数 r: $\sqrt{2}$是无理数 s: 6 能被 2 整除 t: 6 能被 4 整除

符号化为:$p \wedge (q \rightarrow r) \vee (s \rightarrow t)$ ，该式为重言式，所以论述为真。

18.在什么情况下,下面一段论述是真的:“说小王不会唱歌或小李不会跳舞是正确的,而说如果小王会唱歌,小李就会跳舞是不正确的.”

解：p:小王会唱歌。q:小李会跳舞。

$\neg p \vee \neg q$ 真值为 1. $p \rightarrow q$真值为 0.可得，p 真值为 1，q 真值为 0.

所以，小王会唱歌，小李不会跳舞。

19.用真值表判断下列公式的类型:

（1）$p \rightarrow (p \vee q \vee r)$;

(2) $(p\to\neg p)\to\neg q$;

(3) $\neg(q\to r)\wedge r$;

(4) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$;

(5) $(p\wedge r)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$;

(6) $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$;

(7) $(p\to q)\leftrightarrow(r\leftrightarrow s)$.

解:

(1)

p	q	r	$p\to(p\vee q\vee r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

此式为重言式

(2)

p	q	$(p\to\neg p)\to\neg q$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

此式为可满足式

(3)

q	r	$\neg(q\to r)\wedge r$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

此式为矛盾式

（4）

p	q	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

此式为重言式

（5）

p	q	r	$(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

此式为可满足式

（6）

p	q	r	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

此式为重言式

（7）

p	q	r	s	$(p \to q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0

0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

此式为可满足式

20. 求下列公式的成真赋值：

（1）$\neg p \to q$;

（2）$p \vee \neg q$;

（3）$(p \wedge q) \to \neg p$;

（4）$\neg(p \vee q) \to q$

解：

p	q	$\neg p \to q$	$p \vee \neg q$	$(p \wedge q) \to \neg p$	$\neg(p \vee q) \to q$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1

由真值表得：（1）的成真赋值是 01，10,11（2）的成真赋值是 00，10,11

（3）的成真赋值是 00，01,10 （4）的成真赋值是 01，10,11

21. 求下列各公式的成假赋值：

（1）$\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r$;

（2）$(\neg q \vee r) \wedge (p \to q)$;

（3）$(p \to q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$.

解：

p	q	r	$\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r$	$(\neg q \vee r) \wedge (p \to q)$	$(p \to q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$

0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

由真值表得：（1）的成假赋值是 011 （2）的成假赋值是 010, 110

（3）的成假赋值是 100, 101

22. 已知公式$\neg(q \to p) \wedge p$是矛盾式，求公式$\neg(q \to p) \wedge p \wedge \neg r$成真和成假赋值.

解：∵ $\neg(q \to p) \wedge p$是矛盾式 ∴$\neg(q \to p) \wedge p \wedge \neg r$也是矛盾式。

由此可得：该式无成真赋值。而成假赋值为：000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

23. 已知公式$(p \wedge q) \to p$是重言式, 求公式$((p \wedge q) \to p) \vee r$的成真和成假赋值.

解：∵$(p \wedge q) \to p$是重言式，∴$((p \wedge q) \to p) \vee r$也是重言式。

由此可得：该式无成假赋值。而成真赋值为：000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

24. 已知$(p \to (p \vee q)) \wedge ((p \wedge q) \to p)$是重言式，试判断公式$p \to (p \vee q)$及$(p \wedge q) \to p$的类型.

解：∵$(p \to (p \vee q)) \wedge ((p \wedge q) \to p)$是重言式，而要使该式为重言式，其成真赋值只有11，∴$(p \to (p \vee q))$和$((p \wedge q) \to p)$都是重言式。

25. 已知$(\neg(p \to q) \wedge q) \vee (\neg(\neg q \vee p) \wedge q)$是矛盾式，试判断公式$\neg(p \to q) \wedge q$及$\neg(\neg q \vee p) \wedge q$的类型.

解：∵$(\neg(p \to q) \wedge q) \vee (\neg(\neg q \vee p) \wedge q)$是矛盾式，而要使该式为矛盾式，其成假赋值只有00，∴$(\neg(p \to q) \wedge q)$和$(\neg(\neg q \vee p) \wedge q)$都是重言式。

26. 已知$p \to (p \vee q)$是重言式，$\neg(p \to q) \wedge q$是矛盾式，试判断

$(p \to (p \vee q)) \wedge (\neg(p \to q) \wedge q)$及$(p \to (p \vee q)) \vee (\neg(p \to q) \wedge q)$的类型.

解：$(p \to (p \vee q)) \wedge (\neg(p \to q) \wedge q)$是矛盾式。

$(p \to (p \vee q)) \vee (\neg(p \to q) \wedge q)$是重言式。

27. 设 A、B 都是含命题变量项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式, 证明: $A \wedge B$是重言式当且仅当 A 和 B 都是重言式.

解：

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

由真值表可得，当且仅当 A 和 B 都是重言式时，$A \wedge B$是重言式。

28. 设 A、B 都是含命题变量项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式, 已知$A \wedge B$是矛盾式, 能得出 A 和 B 都是矛盾式的结论吗?为什么?

解：

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

同样由真值表可得，$A \wedge B$的成假赋值有 00, 01, 10. 所以无法得到 A 和 B 都是矛盾式。

29. 设 A、B 都是含命题变量项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的公式, 证明: $A \vee B$是矛盾式当且仅当 A 和 B 都是矛盾式.

解：

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由真值表可得，当且仅当 A 和 B 都是矛盾式时，$A\wedge B$是矛盾式。

30. 设 A、B 都是含命题变量项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$的公式，已知$A\wedge B$是重言式，能得出 A 和 B 都是重言式的结论吗?

解：

A	B	$A\vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由真值表可得$A\wedge B$的成真赋值有 01,10，11.所以无法得到 A 和 B 都是重言式。

习 题 二

1. 设公式 $A=p\to q$，$B=p\wedge\neg q$，用真值表验证公式 A 和 B 适合德摩根律：

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$$

p q	A	B	$\neg(A\vee B)$	$\neg A\wedge\neg B$
0 0	1	0	1	1
0 1	1	0	0	0
1 0	0	1	0	0
1 1	1	0	0	0

2. 公式 A 和 B 同题（1），用真值表验证公式 A 和 B 适合蕴涵等值式.

$$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$$

p q	A	B	$A\to B$	$\neg A\vee B$
0 0	1	0	0	0
0 1	1	0	0	0
1 0	0	1	1	1
1 1	1	0	0	0

3. 用等值演算法判断下列公式的类型，对不是重言式的可满足式，再用真值表法求出成真赋值.

（1）$\neg(p\wedge q\to q)$

答：原式$=\neg(\neg(p\wedge q)\vee q)$

$=\neg(\neg p\vee\neg q\vee q)$

$=0$

是矛盾式.

4.用等值演算法证明下面等值式.

（1）$p \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$

答：右式$=p\wedge(q\vee\neg q)=p\wedge 1=p$

（2）$((p\to q)\wedge(p\to r))\Leftrightarrow(p\to(q\wedge r))$

答：右式$=\neg p\vee(q\wedge r)=(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)=(p\to q)\wedge(p\to r))$=左式

（3）$\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

答：左式$=\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(p\vee\neg q)$

$=(p\vee(\neg p\wedge q))\wedge(\neg q\vee(\neg p\wedge q))$

$=(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

（4）$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

答：左式$=(p\vee(\neg p\wedge q))\wedge(\neg q\vee(\neg p\wedge q))$

$=(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

5. 求下列公式的主析取范式，并求成真赋值：

（1）$(\neg p\to q)\to(\neg q\vee p)$

答：

$(\neg p\to q)\to(\neg q\vee p)=(p\vee q)\to(\neg q\vee p)=\neg(p\vee q)\vee(\neg q\vee p)$
$=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg q\wedge(p\vee\neg p))\vee(p\wedge(q\vee\neg q)$
$=(p\wedge q)\vee(p\vee\neg p)\vee(\neg p\wedge\neg q)=m_0\vee m_2\vee m_3$

成真赋值为 00, 10, 11.

（2）$\neg(p\to q)\wedge q\wedge r$

答：$\neg(p\to q)\wedge q\wedge r=\neg(\neg p\vee q)\wedge q\wedge r=p\wedge\neg q\wedge q\wedge=0$

所以为矛盾式。

（3）$(p\vee(q\wedge r))\to(p\vee q\vee r)$

答

$(p\vee(q\wedge r))\to(p\vee q\vee r)=\neg(p\vee(q\wedge r))\vee(p\vee q\vee r)=(\neg p\wedge\neg(q\wedge r))\vee(p\vee q\vee r)$
$=(\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee(p\vee q\vee r)=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(p\vee q\vee r)$
$=(\neg p\wedge\neg q\wedge(r\vee\neg r))\vee(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge\neg r)\vee(p\wedge(q\vee\neg q)\wedge(r\vee\neg r))$
$\vee((p\vee\neg p)\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee((p\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)$
$=(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee$
$(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)=m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$
所以是重言式，真值为 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

6. 求下列公式的主析取范式，并求成真赋值：

（1）$\neg(q\to\neg p)\wedge\neg p$

答：$\neg(q\to\neg p)\wedge\neg p=\neg(\neg q\vee\neg p)\wedge\neg p=q\wedge p\wedge\neg p=0$，是矛盾式，所有赋值均为成真赋值。

（2）$(p\wedge q)\vee(\neg p\vee r)$

答：$(p\wedge q)\vee(\neg p\vee r)=(p\vee\neg p\vee r)\wedge(q\vee\neg p\vee r)=(\neg p\vee q\vee r)=M_4$，成假赋值为 100.

（3）$(p\to(p\vee q))\vee r$

答：$(p\to(p\vee q))\vee r=(\neg p\vee(p\vee q))\vee r=(\neg p\vee p\vee q\vee r=1$，所以为重言式。所有赋值均为成真赋值。

7. 求下列公式的主析取范式，再用主析取范式求主合取范式：

（1）$(p\wedge q)\vee r$

答：$(p\wedge q)\vee r=(p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee((p\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)$

$=(p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee((p\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)$
$=(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$
$=m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7=M_0\wedge M_2\wedge M_4$

（2）$(p\to q)\wedge(q\to r)$

答：

$(p\to q)\wedge(q\to r)=(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)$
$=(\neg p\wedge\neg q\wedge(r\vee\neg r))\vee(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)\vee((p\vee\neg p)\wedge q\wedge r)$
$=(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$
$=m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_7=M_2\vee M_4\vee M_5\vee M_6$

8. 求下列公式的主合取范式，再用主合取范式求主析取范式：

（1）$(p\wedge q)\to q$

答：$(p\wedge q)\to q=\neg(p\wedge q)\vee q=\neg p\vee\neg q\vee q=1=m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$

为重言式。

（2）$(p\leftrightarrow q)\to r$

答：$(p\leftrightarrow q)\to r=\neg((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\vee r=(\neg(p\wedge q)\wedge\neg(\neg p\wedge\neg q))\vee r$

$$=((\neg p\vee\neg q)\wedge(p\vee q))\vee r=(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee q\vee r)=M_0\wedge M_6$$
$$=m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$$

（3）$\neg(r\to p)\wedge p\wedge q$

答：$\neg(r\to p)\wedge p\wedge q=r\wedge\neg p\wedge p\wedge q$

$$=M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6\wedge M_7$$

$$=0$$

因此为矛盾式.

9.用真值表求下面的公式的主析取范式.

（1）$(p\vee q)\vee(\neg p\wedge r)$

答：公式的真值表如下：

p	q	r	$\neg p$	$p\vee q$	$\neg p\wedge r$	$(p\vee q)\vee(\neg p\wedge r)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

其成真赋值为 001,010,011,100,101,110,111，所以其主析取范式为

$m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

（2）$(p\to q)\to(p\leftrightarrow\neg q)$

答：公式的真值表如下：

p	q	$\neg q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow\neg q$	$(p\to q)\to(p\leftrightarrow\neg q)$

0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

$$(p \to q) \to (p \leftrightarrow \neg q) = (p \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q))$$

$$= (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

故其成真赋值为 001，010. 所以其主析取范式为 $m_1 \vee m_2$.

10.用真值表求下面公式的主合取范式.

（1）$(p \wedge q) \vee r$

答：$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$$= M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$$

（2）$(p \to q) \wedge (q \to r)$

答：$(p \to q) \wedge (q \to r) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$

$$= M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

11.用真值表求下面公式的主析取范式和主合取范式.

（1）$(p \vee q) \wedge r$

（2）$p \to (p \vee q \vee r)$

（3）$\neg(q \to \neg p) \wedge \neg p$

p　q　r	$(p \vee q) \wedge r$	$p \to (p \vee q \vee r)$	$\neg(q \to \neg p) \wedge \neg p$
0　0　0	0	1	0
0　0　1	0	1	0
0　1　0	0	1	0
0　1　1	1	1	0
1　0　0	0	1	0
1　0　1	1	1	0
1　1　0	0	1	0
1　1　1	1	1	0

答：（1）由真值表可得成真赋值为 011,101,111，故主析取范式为 $m_3 \vee m_5 \vee m_7$，主合

取范式为 $M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$

（2）由真值表可得无成假赋值，故主析取范式为

$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$，主合取范式为 1.

（3）由真值表可得无成真赋值，故主析取范式为 0，主合取范式为

$M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3$.

12.已知公式 A 含 3 个命题变项 p,q,r，并且它的成真赋值为 000，011，110，求 A 的主合取范式和主析取范式.

答：由题意得，A 的主主合取范式为 $M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_7$，主析取范式

$m_0 \vee m_3 \vee m_6$.

13. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p,q,r，并且它的成真赋值为 000，011，110，求 A 的主合取范式和主析取范式.

答：由题意得，A 的主主合取范式为 $M_2 \wedge M_3 \wedge M_6 \wedge M_7$，主析取范式

$m_0 \vee m_1 \vee m_5 \vee m_7$.

14.已知公式 A 含 n 个命题变相 $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$，并且无成假赋值，求 A 的主合取范式.

答：A 的主合取范式为 1..

15.用主析取范式判断下列公式是否等值：

（1）$(p \to q) \to r$ 与 $q \to (p \to r)$

答：$(p \to q) \to r = (p \wedge \neg q) \vee r$

$= m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$q \to (p \to r) = \neg p \vee \neg q \vee r$

$= m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

所以上述公式不等值.

（2）$\neg(p \wedge q)$ 与 $\neg(p \vee q)$

答：$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

$= m_0 \vee m_1 \vee m_2$

$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$= m_0$

16.用主合取范式判断下列公式是否等值.

（1） $p \to (q \to r)$ 与 $\neg(p \wedge q) \vee r$

答： $p \to (q \to r) = M_6$

$\neg(p \wedge q) \vee r = M_6$

（2） $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$

答： $p \to (q \to r) = M_6$

$(p \to q) \to r = M_0 \wedge M_2 \wedge M_6$

17.将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中联结词的公式：

（1） $\neg(p \to (q \leftrightarrow (q \wedge r)))$

答： $\neg(p \to (q \leftrightarrow (q \wedge r))) = \neg(\neg p \vee (q \leftrightarrow (q \wedge r)))$

$= p \wedge \neg(\leftrightarrow (q \wedge r))$

$= p \wedge \neg((\neg q \vee (q \wedge r)) \wedge (q \vee \neg(q \wedge r)))$

（2） $(p \wedge q) \vee \neg r$

答： $(p \wedge q) \vee \neg r$，原式已满足题目要求.

（3） $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

答： $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) = (p \to (q \leftrightarrow r)) \wedge ((\leftrightarrow r) \to p)$

$= (\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r))) \wedge (\neg((\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \vee p)$

18.将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg, \wedge\}$ 中联结词的公式：

（1） $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
答：此公式已经符合题目要求.

（2） $(p \leftrightarrow r) \wedge q$

答： $(p \leftrightarrow r) \wedge q = ((p \to r) \wedge (r \to p)) \wedge q$

$= ((\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \wedge q$

$$=(\neg(p\wedge\neg r)\wedge\neg(r\wedge\neg p))\wedge q$$

（3）$(p\to(q\wedge r))\vee q$

答：$(p\to(q\wedge r))\vee q=(\neg p\vee(q\wedge r))\vee p$

$$=\neg(p\wedge\neg(q\wedge r))\vee p$$

$$=\neg((p\wedge\neg(q\wedge r))\wedge\neg p)$$

19.将下列公式化成与之等值且仅含$\{\neg,\vee\}$中联结词的公式.

（1）$(\neg p\vee\neg q)\wedge r$

答：$(\neg p\vee\neg q)\wedge r=\neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

（2）$(p\to(q\wedge\neg p))\wedge q\wedge r$

答：$(p\to(q\wedge\neg p))\wedge q\wedge r=\neg(\neg(\neg p\vee\neg(\neg q\vee p))\vee\neg q\vee\neg r)$

（3）$p\wedge q\wedge\neg r$

答：$p\wedge q\wedge\neg r=\neg(\neg p\vee\neg q\vee r)$

20．将下列公式化成与之等值且仅含$\{\neg,\to\}$中联结词的公式：

（1）$(p\wedge q)\vee r$（2）$(p\to\neg q)\wedge r$（3）$(p\wedge q)\leftrightarrow r$

答：$(p\wedge q)\vee r\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r\Leftrightarrow\neg(p\to\neg q)\vee r\Leftrightarrow(p\to\neg q)\to r$

(2) $(p\to\neg q)\wedge r$

答：$(p\to\neg q)\wedge r\Leftrightarrow\neg(\neg(p\to\neg q)\vee\neg r)\Leftrightarrow\neg((p\to\neg q)\to\neg r)$

(3) $(p\wedge q)\leftrightarrow r$

答：$(p\wedge q)\leftrightarrow r\Leftrightarrow(\neg(\neg p\vee\neg q)\to r)\wedge(r\to\neg(\neg p\vee\neg q))$

$$\Leftrightarrow\neg(\neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\to r)\vee\neg(r\to\neg(\neg p\vee\neg q)))$$

$$\Leftrightarrow\neg((\neg(p\to\neg q)\to r)\to\neg(r\to\neg(p\to\neg q)))$$

21．证明：

（1）$(p\uparrow q)\Leftrightarrow(q\uparrow p),(p\downarrow q)\Leftrightarrow(q\downarrow p)$.

（2）$(p\uparrow(q\uparrow r))\not\Leftrightarrow((p\uparrow q)\uparrow r),(p\downarrow(q\downarrow r))\not\Leftrightarrow((p\downarrow q)\downarrow r).$

证明：(1) $p\uparrow q\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg(q\wedge p)\Leftrightarrow q\uparrow p$；

$p\downarrow q\Leftrightarrow\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg(q\vee p)\Leftrightarrow q\downarrow p$

(2) 令 $p=0,q=0,r=1$则

$p\uparrow(q\uparrow r)=1,(p\uparrow q)\uparrow r=0$，$p\downarrow(q\downarrow r)=1,(p\downarrow q)\downarrow r=0.$，可知

$(p\uparrow(q\uparrow r))\Leftrightarrow((p\uparrow q)\uparrow r),(p\downarrow(q\downarrow r))\Leftrightarrow((p\downarrow q)\downarrow r).$

22. 从表 2.6 中，找出与下列公式等值的真值函数：

（1）$p\uparrow q$　　（2）$p\downarrow q$　　（3）$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$　　（4）$\neg(p\rightarrow q)$

答：$(1)F_{14}^{(2)};(2)F_{8}^{(2)};(3)F_{6}^{(2)};(4)F_{2}^{(2)}$

23. 设 A、B、C 为任意的命题公式，证明：

（1）等值关系有自反性：$A\Leftrightarrow A$

（2）等值关系有对称性：若$A\Leftrightarrow B$,则$B\Leftrightarrow A$

（3）等值关系有传递性：若$A\Leftrightarrow B$且$B\Leftrightarrow C$，则$A\Leftrightarrow C$

答：(1) $A\leftrightarrow A\Leftrightarrow(A\rightarrow A)\wedge(A\rightarrow A)\Leftrightarrow A\rightarrow A\Leftrightarrow\neg A\vee A\Leftrightarrow 1$

(2) $B\leftrightarrow A\Leftrightarrow(\neg B\vee A)\wedge(\neg A\vee B)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)\Leftrightarrow A\leftrightarrow B$

(3)

若$A\Leftrightarrow B$且$B\Leftrightarrow C\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)\wedge(B\rightarrow C)\wedge(C\rightarrow B)$

$\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\wedge(C\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)\Leftrightarrow(A\rightarrow C)\wedge(C\rightarrow A)$

$\Leftrightarrow A\leftrightarrow C$

即$A\Leftrightarrow C$

24. 设 A、B 为任意的命题公式，证明：$\neg A\Leftrightarrow\neg B$当且仅当$A\Leftrightarrow B$

答：$\neg A\leftrightarrow\neg B\Leftrightarrow(A\vee\neg B)\wedge(B\vee\neg A)\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)\Leftrightarrow A\leftrightarrow B.$

因此$\neg A\Leftrightarrow\neg B$当且仅当$A\Leftrightarrow B$。

25. 设 A、B、C 为任意的命题公式，(1) 若 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，举例说明 $A\Leftrightarrow B$不一定成立。(2) 若 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，举例说明 $A\Leftrightarrow B$不一定成立。由（1）、（2）可知，联结词$\vee$与$\wedge$不满足消去率。

答：(1) 设 $A=p\vee 1, B=q\wedge 0, C=r\vee 1$，则 $A\vee C=1 \Leftrightarrow B\vee C=1$ ，但 $A=1, B=0$，二者不等价。

(2) 设 $A=p\vee 1, B=q\wedge 0, C=r\vee 0$，则 $A\wedge C=0 \Leftrightarrow B\wedge C=0$，但 $A=1, B=0$，二者不等价。

26. 在上题（25）中，若已知 $A\vee C \Leftrightarrow B\vee C$，在什么条件下，$A \Leftrightarrow B$ 一定成立？又若已知 $A\wedge C \Leftrightarrow B\wedge C$，在什么条件下，$A \Leftrightarrow B$ 一定成立？

解：若 $C=0$; 则 $A\vee C \Leftrightarrow B\vee C$，$A \Leftrightarrow B$ 一定成立。

若 $C=1$；则 $A\wedge C \Leftrightarrow B\wedge C$，$A \Leftrightarrow B$ 一定成立。

27. 某电路中有一个灯泡和三个开关 A、B、C。已知在且仅在下述四种情况下灯亮：

（1）C 的扳键向上，A、B 的扳键向下。（2）A 的扳键向上，B、C 的扳键向下。（3）B、C 的扳键向上，A 的扳键向下。（4）A、B 的扳键向上，C 的扳键向下。

设 F 为 1 表示灯亮，p、q、r 分别表示 A、B、C 的扳键向上。

（a）求 F 的主析取范式。

（b）在联结词完备集 $\{\neg, \wedge\}$ 上构造 F。

（c）在联结词完备集 $\{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 上构造 F。

答：（a）由题意知，灯亮的情况如下：

$$F \Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_6$$

（b）$$F \Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\wedge r)\wedge\neg(p\wedge\neg r))$$

（c）$F \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg q\wedge r$

28.一个排队线路，输入为 A、B、C，其输出分别为 F_A、F_B、F_C.本线路中，在同一时间只能有一个信号通过，若同时有两个或两个以上信号申请输出时，则按 A、B、C 的顺序输出，写出 F_A、F_B、F_C 在联结词完备集 $\{\neg, \vee\}$ 中的表达式.

答：p：A输入，q：B输入，r：C输入.有题意可得：

$$F_A \Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$F_B \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$$

$$F_C \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge r$$

29.在某班班委成员的选举中，已知王小红、李强、丁金生 3 位同学被选进了班委会.该班的甲、乙、丙三名学生预言：

甲说：王小红为班长，李强为生活委员.

乙说：丁金生为班长，王小红为生活委员.

丙说：李强为班长，王小红为学习委员.

班委会分工名单公布后发现，甲、乙、丙三人都恰好猜对了一半.问王小红、李强、丁金生各任何职（用等值等演求解）?

答：设 p：王小红为班长，q：李强为生活委员

r：丁金生为班长，s：王小红为生活委员

t：李强为班长，w：王小红为学习委员

由题意得，p、q 有且只有一个为真，r、s 有且只有一个为真，t、w 有且只有一个为真.

若 p 为真，则 q 为假，那么 r 为假，则 s 为真，这样 p 与 s 矛盾，因此这种假设行不通.

若 p 为假，则 q 为真，那么 t 为假，则 w 为真，则 s 为假，所以 r 为真，因此王小红、李强、丁金生的职位分别是：学习委员、生活委员、班长.

30.某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习.选派必须满足以下条件：

（1）若赵去，钱也去.

（2）李、周两人中必有一人去.

（3）钱、孙两人中去且仅去一人.

（4）孙、李两人同去或同不去.

（5）若周去，则赵、钱也同去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国？

答：设 p：派赵去，q：派钱去，r：派李去，s：派孙去，t：派周去

首先以条件（2）为基础，有三种情况：

① 若周去，李不去，由条件（5）得则赵、钱同去，由条件（3）得那么孙不去，符合 5 个条件，即 $p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge t$.

② 若李去，周不去，由条件（4）得则孙去，从而由条件（3）得钱不去，而由条件（1）得赵也不去，即 $\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg t$.

③ 若周、李都去，那么由条件（4）得则孙去，由条件（5）得赵、钱都去，这样孙和钱都去，与条件（3）矛盾，因此这种情况不存在.

习题三

1. 从日常生活或数学中的各种推理中，构造两个满足附加律的推理定律，并将它们符号化。例如："若 2 是偶数，则 2 是偶数或 3 是奇数"。令 p:2 是偶数，q:3 是奇数，则该附加律符号为 $p \Rightarrow p \vee q$。

解：（1）"若 3 是素数，则 3 是素数或 5 是奇数"。令 p：3 是素数，q：5 是奇数，则该附加

律符号化为$p \Rightarrow p \vee q$

（2）"若明天不下雨，则明天不下雨或明天下雪"。令 p：明天下雨，q：明天下雪，则该附加律符号化为$\neg p \Rightarrow \neg p \vee q$。

2. 从日常生活或数学的各种推理中，构造两个满足化简律的推理定律，并将它们符号化。例如："我去过海南岛和新疆，所以我去过海南岛"。令 p：我去过海南岛，q:我去过新疆，则该化简律符号化为$p \wedge q \Rightarrow p$。

解：(1)"6 能被 2 和 3 整除，所以 6 能被 2 整除"。令 p：6 能被 2 整除，p：6 能被 2 整除，q：6 能被 3 整除，则该化简律符号化为$p \wedge q \Rightarrow p$。

（2）"小明会弹琴和跳舞，所以小明会弹琴"。令 p：小明会弹琴，q：小明会跳舞，则该化简律符号化为$p \wedge q \Rightarrow p$。

3. 随意构造三个满足假言推理定律的推理，并将它们符号化。例如："如果 2 是素数，则雪是黑色的，2 是素数，所以雪是黑色的"。令 p:2 是素数，q：雪是黑色的，该假言推理定律符号化为$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$。

解：(1)"如果小明会跳舞，则他会弹琴，小明会跳舞，所以他会弹琴"。 令 p：小明会弹琴，q：小明会跳舞，该假言推理定律符号化为$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$。

（2）"如果 3 是奇数，则明天下雨，3 是奇数，所以明天下雨"。令 p：3 是奇数，q：明天下雨，该假言推理定律符号化为$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$。

（3）"如果明天晴天，则小明去游泳，明天晴天，所以小明去游泳"。令 p：明天晴天，q：小明去游泳，该假言推理定律符号化为$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$。

4. 参照 1,2,3 题，请构造满足拒取式、析取三段论、假言三段论、等价三段论、构造性二难等推理定律的实例各一个，并将它们符号化。

解：(1) 拒取式："明天是周末，小明就休息，小明没有休息，所以明天不是周末"。令 p：明天周末，q：小明休息。该拒取式定律符号化为$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$。

（2）析取三段论："小明会弹琴或跳舞，小明不会跳舞，所以小明会弹琴"。令 p：小明会弹琴，q：小明会跳舞，该析取三段式定律符号化为$(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$。

（3）假言三段论："明天要是周末，小明明天休息，小明要是明天休息，他就会去游泳，所以，明天要是周末，小明就去游泳"。令 p：明天是周末，q：小明明天休息，t：小明去游泳，该假言三段论定律符号化为$(p \to q) \wedge (q \to t) \Rightarrow p \to t$。

（4）等价三段论："2 是素数当且仅当 3 是奇数，3 是奇数当且仅当 4 是偶数，所以 2 是素数当且仅当 4 是偶数"。令 p：2 是素数，q：3 是奇数，t：4 是偶数，该等价三段论定律符号化为$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow t) \Rightarrow p \leftrightarrow t$。

（5）构造性二难："明天是周一，小明就要上学，明天是周末，小明就要去游泳，明天是周末或者周一，所以小明去上学或者去游泳"。令 p：明天是周一，q 小明要上学，s：明

天是周末，t：小明要去游泳，该构造性二难定律符号化为 $(p \to q) \wedge (s \to t) \wedge (p \vee s) \Rightarrow (q \vee t)$。

（6）破坏性二难："明天是周一，小明就要上学，明天是周末，小明就要去游泳，小明没有去上学或者小明没有去游泳，所以明天不是周一或者明天不是周末"。令 p：明天是周一，q 小明要上学，s：明天是周末，t：小明要去游泳，该构造性二难定律符号化为 $(p \to q) \wedge (s \to t) \wedge (\neg q \vee \neg t) \Rightarrow (\neg p \vee \neg s)$。

5.分别写出德摩定律、吸收律所产生的推理定律（每个等值式产生两条推理定律）。

解：的摩定律 1：$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

产生的推理定律：（1）$\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$ （2）$\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$

的摩定律 2：$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

产生的推理定律：（1）$\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$ （2）$\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$

吸收律 1：$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

产生的推理定律：（1）$A \vee (A \wedge B) \Rightarrow A$ （2）$A \Rightarrow A \vee (A \wedge B)$

吸收律 2：$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

产生的推理定律：（1）$A \wedge (A \vee B) \Rightarrow A$ （2）$A \Rightarrow A \wedge (A \vee B)$

6.判断下列推理是否正确。先将简单命题符号化，再写出前提、结论、推理的形式结构（以蕴涵式的形式给出）和判断过程（至少给出两种判断方法）：

（1）若今天是星期一，则明天是星期三。今天是星期一，所以明天是星期三。

（2）若今天是星期一，则明天是星期二。明天是星期二，所以今天是星期一。

（3）若今天是星期一，则明天是星期三。明天不是星期三，所以今天不是星期一。

（4）若今天是星期一，则明天是星期二。今天不是星期一，所以明天不是星期二。

（5）若今天是星期一，则明天是星期二或星期三。

（6）今天是星期一当且仅当明天是星期三。今天不是星期一，所以明天不是星期三。

解：（1）设 p：今天是星期一，q：明天是星期三，推理的形式结构为 $(p \to q) \wedge p \to q$，判断该推理是否正确，即判断 $(p \to q) \wedge p \to q$ 是否为重言式，不难看出，该式满足假言推理定律，所以推理正确。

（2）设 p：今天是星期一，q：明天是星期二，推理的形式结构为 $(p \to q) \wedge q \to p$。

等值演算法：$\begin{aligned}&(p\to q)\wedge q\to p\\ \Leftrightarrow\ &(\neg p\vee q)\wedge q\to p\\ \Leftrightarrow\ &q\to p\\ \Leftrightarrow\ &p\vee\neg q\end{aligned}$，可见该式不是重言式，所以推理不正确。

主析取范式法：$\begin{aligned}&(p\to q)\wedge q\to p\\ \Leftrightarrow\ &(\neg p\vee q)\wedge q\to p\\ \Leftrightarrow\ &q\to p\\ \Leftrightarrow\ &p\vee\neg q\\ \Leftrightarrow\ &M_1\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3\end{aligned}$，从而可知不是重言式，故推理不正确。

（3）设 p：今天是星期一，q：明天是星期三，推理的形式结构为$(p\to q)\wedge\neg q\to\neg p$，判断该推理是否正确，即判断$(p\to q)\wedge\neg q\to\neg p$是否为重言式，不难看出，该式满足拒取式定律，所以推理正确。

（4）设 p：今天是星期一，q：明天是星期二，推理的形式结构为$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$。

等值演算法：$\begin{aligned}&(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q\\ \Leftrightarrow\ &(\neg p\vee q)\wedge\neg p\to\neg q\\ \Leftrightarrow\ &((\neg p\wedge\neg p)\vee(q\wedge\neg p))\to\neg q\\ \Leftrightarrow\ &\neg p\to\neg q\\ \Leftrightarrow\ &p\vee\neg q\end{aligned}$，可见该式不是重言式，所以推理不正确。

主析取范式法：$\begin{aligned}&(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q\\ \Leftrightarrow\ &(\neg p\vee q)\wedge\neg p\to\neg q\\ \Leftrightarrow\ &((\neg p\wedge\neg p)\vee(q\wedge\neg p))\to\neg q\\ \Leftrightarrow\ &\neg p\to\neg q\\ \Leftrightarrow\ &p\vee\neg q\\ \Leftrightarrow\ &M_1\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3\end{aligned}$，从而可知不是重言式，故推理不正确。

（5）设 p：今天是星期一，q：明天是星期二，r：明天是星期三。推理的形式结构为$p\to q\vee r$。

$p\to(q\vee r)\Leftrightarrow\neg p\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow M_4\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$，由此可知$p\to(q\vee s)$不为重言式，故推理不正确。

显然该式不是重言式，所以推理不正确。

（6）设 p：今天是星期一，r：明天是星期三，推理的形式结构为$(p\leftrightarrow r)\wedge\neg p\to\neg r$。

$$
\begin{aligned}
&(p \leftrightarrow r) \wedge \neg p \rightarrow \neg r \\
&\Leftrightarrow \neg((p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p) \wedge \neg p) \vee \neg r \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg r \vee p) \vee p \vee \neg r \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee p \vee \neg r \\
&\Leftrightarrow p \vee (\neg p \wedge r) \vee \neg r \Leftrightarrow p \\
&\Leftrightarrow m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7
\end{aligned}
$$

，由此可知不为重言式，故推理不正确。

7. 在下面各推理中没给出结论。请对于每个推理前提给出两个结论，使其中之一是有效的，而另一个不是有效的：

（1）前提：$p \rightarrow q$，$q \rightarrow r$

（2）前提：$(p \wedge q) \rightarrow r$，$\neg r$，$q$

（3）前提：$p \rightarrow (q \rightarrow r)$，$p$，$q$

解：（1）结论 1：$p \rightarrow r$ 为有效的（假言三段论）

结论 2：p 为无效的。

（2）结论 1：$\neg(p \wedge q)$ 是有效的（拒取式）

结论 2：p 是无效的

（3）结论 1：$(q \rightarrow r)$ 是有效的（假言三段论）

结论 2：r 是无效的

8. 在下面各推理中没给出结论，请对于每个推理前提给出两个结论，使其中之一是有效的，而另一个不是有效的。

（1）只有天气热，我才去游泳。我正在游泳，所以……

（2）只有天气热，我就去游泳。我没去游泳，所以……

（3）除非天气热并且我有时间，我才去游泳。天气不热或我没时间，所以……

解：

（1）设 p：天气热，q：我去游泳

前提：$q \rightarrow p, q$

结论 1：p，有效结论（假言推理）

结论 2：$\neg p$，无效结论

（2）设 p：天气热，q：我去游泳。

前提：$p \rightarrow q, \neg q$

结论 1：$\neg p$，有效结论（拒取式）

结论 2：p，无效结论

（3）设 p：天气热，q：我有时间，r：我去游泳。

前提：$r \rightarrow (p \wedge q), \neg p \vee \neg q$

结论 1：$\neg r$，有效结论（拒取式）

结论 2：r，无效结论。

9.用三种方法（真值表法，等值演算法，主析取范式法）证明下面推理是正确的：
若 a 是奇数，则 a 不能被 2 整除。若 a 是偶数，则 a 能被 2 整除。因此，如果 a 是偶数，则 a 不是奇数。
解：设 p：a 是奇数，q：a 能被 2 整除，r：a 是偶数。
推理的形式结构为$(p \to \neg q) \wedge (r \to q) \to (r \to \neg p)$（*）。下面用三种方法证明该式为重言式：
（1） 真值表法：

p q r	$(p \to \neg q) \wedge (r \to q)$	$(r \to \neg p)$	*
0 0 0	0	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	0	1	1
0 1 1	0	1	1
1 0 0	0	1	1
1 0 1	1	0	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	1

由真值表可知（*）为重言式，故推理是正确的。

（2） 等值演算法：

$$(p \to \neg q) \wedge (r \to q) \to (r \to \neg p)$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q) \to (\neg r \vee \neg p)$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \vee \neg p \vee \neg r$$
$$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee \neg p) \vee ((\neg q \wedge r) \vee \neg r)\text{(交换律，结合律)}$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg r)$$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \vee \neg q) \vee \neg r$$
$$\Leftrightarrow 1$$

（3） 构造证明法：

前提：$(p \to \neg q), (r \to q)$

结论：$(r \to \neg p)$

证明：

① $p \to \neg q$	前提引入
② $q \to \neg p$	①置换
③ $r \to q$	前提引入
④ $r \to \neg p$	③②假言三段论

主析取范式法

由方法 2 可以得知推理的形式结构（*）的主析取范式为

$(*) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$，则（*）为重言式，推理正确。

10.用两种方法（真值表法，主析取范式法）证明下面推理不正确：
如果 a,b 两数之积是负数，则 a,b 之中恰有一个是负数。a,b 两数之积不是负数，所以 a,b 中无负数。

真值表法：

p q r	$(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$	$p\to(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$	$\neg q\wedge\neg r$	A
0 0 0	0	1	1	1
0 0 1	1	1	0	0
0 1 0	1	1	0	0
0 1 1	0	1	0	0
1 0 0	0	0	1	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	1	1	0	1
1 1 1	0	0	0	1

推理不正确
主析取范式法：
$(p\to((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\vee(\neg q\wedge r))\wedge\neg p)\to(\neg q\wedge\neg r)$
$\Leftrightarrow(\neg p\vee(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)\wedge\neg p\to(\neg q\wedge\neg r))$
$\Leftrightarrow\neg p\to(\neg q\wedge\neg r)$
$\Leftrightarrow p\vee(\neg q\wedge\neg r)$
$\Leftrightarrow m_0\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$
由于主析取范式只含有 5 个极小项，所以（3.8）不是重言式，推理不正确。

11.填充下面推理证明中没有写出的推理规则。
前提：$\neg p\vee q$，$\neg q\vee r$，$r\to s$，p
结论：s
证明：
①p　　　　前提引入
②$\neg p\vee q$　　前提引入
③q　　　　析取三段论
④$\neg q\vee r$　　前提引入
⑤r　　　　析取三段论
⑥$r\to s$　　前提引入
⑦s　　　　假言推理

12.填充下面推理证明中没有写出的推理规则。

前提：$p\to(q\to r)$，$q\to(r\to s)$

结论：$(p\wedge q)\to s$

证明：
①$p\wedge q$　　　　附加前提引入
②p　　　　　化简规则

③q 化简规则

④ $p\to(q\to r)$ 前提引入

⑤ $q\to r$ 前提引入

⑥r ③⑤假言推理

⑦ $q\to(r\to s)$ 前提引入

⑧ $r\to s$ ③⑦假言推理

⑨s ⑥⑧假言推理

13. 前提：$\neg(p\to q)\wedge q$，$p\vee q$，$r\to s$

结论 1：r

结论 2：s

结论 3：$r\vee s$

（1）证明从此前提出发，推出结论 1，结论 2，结论 3 的推理都是正确的。

（2）证明从此前提出发，推任何结论的推理都是正确的。

（1） 证明：

结论 1：

$(\neg(p\to q)\wedge q)\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to r$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge q)\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to r$

$\Leftrightarrow 0\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to r$

$\Leftrightarrow 0\to r$

$\Leftrightarrow 1$

结论 2：

$(\neg(p\to q)\wedge q)\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to s$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge q)\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to s$

$\Leftrightarrow 0\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to s$

$\Leftrightarrow 0\to s$

$\Leftrightarrow 1$

结论 3：

$(\neg(p\to q)\wedge q)\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to r\vee s$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge q)\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to r\vee s$

$\Leftrightarrow 0\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to r\vee s$

$\Leftrightarrow 0\to r\vee s$

$\Leftrightarrow 1$

（2） 证明：

设任何可能的结论为*，则：

$(\neg(p\to q)\wedge q)\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to *$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge q)\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to *$

$\Leftrightarrow 0\wedge(p\vee q)\wedge(r\to s)\to *$

$\Leftrightarrow 0\to *$

$\Leftrightarrow 1$

14. 在自然系统 p 中构造下面推理的证明：

（1）前提：$p\to(q\to r)$，p，q

结论：$r\vee s$

（2）前提：$p\to q$，$\neg(q\wedge r)$，r

结论：$\neg p$

（3）前提：$p\to q$

结论：$p\to(p\wedge q)$

（4）前提：$p\to q$，$q\to s$，$s\to t$，$t\wedge r$

结论：$p\wedge q$

（5）前提：$p\to r$，$q\to s$，$s\to t$ $t\wedge r$

结论：$r\wedge s$

（6）前提：$\neg p\vee r$，$\neg q\vee s$ $p\wedge q$

结论：$t\to(r\vee s)$

（1） 证明

（1）$p\to(q\to r)$ 前提引入

（2）p 前提引入

（3）$q\to r$ （1）（2）假言推理

（4）q 前提引入

（5）r (3)(4)假言推理

（6）$r\vee s$ （5）附加

（2） 证明

（1）$\neg(q\wedge r)$ 前提引入

（2）$\neg q\vee\neg r$ （1）置换

（3）r 前提引入

（4）$\neg q$ （2）（3）析取三段论

（5）$p\to q$ 前提引入

（6）$\neg p$ （4）（5）拒取式

（3） 证明

（1）$p\to q$ 前提引入

（2）$\neg p\vee q$ （1）置换

（3）$(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee p)$ （2）置换

（4）$\neg p\vee(q\wedge p)$ （3）置换

(5) $p\to(p\wedge q)$ (4) 置换

(4) 证明

(1) $(s\to t)\wedge(t\to s)$ 前提引入

(2) $t\to s$ (1) 置换

(3) $t\to r$ (2) 换件

(4) $t\wedge r$ 前提引入

(5) t (4) 化简

(6) s (3)(5) 假言推理

(7) $q\leftrightarrow s$ 前提引入

(8) $(q\to s)\wedge(s\to q)$ (7) 置换

(9) $s\to q$ (8) 化简

(10) q (6)(9) 假言推理

(11) $q\to p$ 前提引入

(12) p (10)(11) 假言推理

(13) $p\wedge q$ (10)(12) 合取

(5) 证明

(1) $p\wedge q$ 前提引入

(2) p (1) 化简

(3) q (1) 化简

(4) $p\to r$ 前提引入

(5) r (2)(4) 假言推理

(6) $q\to s$ 前提引入

(7) s (3)(6) 假言推理

(8) $r\wedge s$ (5)(7) 合取

(6) 证明

(1) $p\wedge q$ 前提引入

(2) p (1) 化简

(3) q (1) 化简

(4) $\neg p\vee r$ 前提引入

(5) r (2)(4) 析取三段论

(6) $\neg q\vee s$ 前提引入

(7) s (3)(6) 析取三段论

(8) $r\wedge s$ (5)(7) 合取

(9) $\neg t\vee(r\wedge s)$ (8) 附加

(10) $t\to(r\wedge s)$ (9) 置换

15. 在自然推里系统 p 中用附加前提法证明下面各推理：

(1) 前提：$p\to(q\to r)$，$s\to p$，q

结论：$s\to r$

(2) 前提：$(p\vee q)\to(r\wedge s)$，$(s\vee t)\to u$

结论：$p\to u$

(1) 证明

(1) s 附加前提引入
(2) $s \to p$ 前提引入
(3) p (1)(2)假言推理
(4) $p \to (q \to r)$ 前提引入
(5) $q \to r$ (3)(4)假言推理
(6) q 前提引入
(7) r (5)(6)假言推理

(2) 证明

(1) p 附加前提引入
(2) $p \vee q$ (1)附加
(3) $(p \vee q) \to (r \wedge s)$ 前提引入
(4) $r \wedge s$ (2)(3)假言推理
(5) s (4)化简
(6) $s \vee t$ (5)附加
(7) $(s \vee t) \to u$ 前提引入
(8) u (6)(7)假言推理

16. 在自然推理系统 p 中用归谬法证明下面推理：

(1) 前提：$p \to \neg q$，$\neg r \vee q$ $r \wedge \neg s$
结论：$\neg p$

(2) 前提：$p \vee q$，$p \to r$，$q \to s$
结论：$r \vee s$

(1) 证明

(1) p 结论否定引入
(2) $p \to \neg q$ 前提引入
(3) $\neg q$ (2)(1)假言推理
(4) $\neg r \vee q$ 前提引入
(5) $\neg r$ (3)(4)析取三段论
(6) $r \wedge \neg s$ 前提引入
(7) r (6)化简
(8) $\neg r \wedge r$ (5)(7)合取

(2) 证明

(1) $\neg(r \vee s)$ 结论否定引入
(2) $\neg r \wedge \neg s$ (1)置换
(3) $\neg r$ (2)化简
(4) $\neg s$ (2)化简
(5) $p \to r$ 前提引入
(6) $\neg p$ (3)(5)拒取式
(7) $q \to s$ 前提引入
(8) $\neg q$ (4)(7)拒取式
(9) $\neg p \wedge \neg q$ (9)置换
(10) $q \vee p$ 前提引入
(11) $\neg(p \vee q) \wedge (p \vee q)$ (10)(11)合取

17. 在自然系统 p 中构造下面推理的证明：

只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点前没离开，A 就犯了谋杀罪。A 曾到过受害者房间，

如果A在11点以前离开，看门人会看见他。看门人没有看见他，所以A犯了谋杀罪。

设
p:A到过受害者房间
q:A在11点前离开
r:A是谋杀嫌疑犯
s:看门人看见A
前提：$(p\wedge\neg q)\to r, p, q\to s, \neg s$
结论：r
证明

(1)	$q\to s$	前提引入
(2)	$\neg s$	前提引入
(3)	$\neg q$	(2)(1)拒取式
(4)	p	前提引入
(5)	$p\wedge\neg q$	(3)(4)合取
(6)	$(p\wedge\neg q)\to r$	前提引入
(7)	r	(5)(6)假言推理

18.在自然系统p中构造下面各推理的证明：
(1)如果今天是星期六，我们就要去颐和园或圆明园玩。如果颐和园游人太多，我们就不去颐和园玩。今天是星期六，颐和园游人太多，所以我们去圆明园玩。
(2)如果小王是理科学生，则他的数学成绩一定很好。如果小王不是文科生，则他一定是理科生。小王的数学成绩不好，所以小王是文科学生。
(1)设
p:今天是星期六
q:我们到颐和园玩
r:我们到圆明园玩
s:颐和园游人太多
前提：$p\to(q\vee r), s\to\neg q, p, s$
结论：r
证明：

(1)	$s\to\neg q$	前提引入
(2)	s	前提引入
(3)	$\neg q$	(1)(2)假言推理
(4)	p	前提引入
(5)	$p\to(q\vee r)$	前提引入
(6)	$q\vee r$	(4)(5)假言推理
(7)	r	(3)(6)析取三段论

(2)设
p:小王是理科学生
q:小王数学成绩好
r:小王是文科学生
前提：$p\to q, \neg r\to p, \neg q$

结论：r

证明：

(1) $p \to q$　　前提引入

(2) $\neg q$　　前提引入

(3) $\neg p$　　（1）（2）拒取式

(4) $\neg r \to p$　　前提引入

(5) r　　(3)(4)拒取式

习题四

1.将下列命题0元谓词符号化：

（1）　小王学习过英语和法语。

（2）　除非李建是东北人，否则他一定怕冷。

（3）　2大于3仅当2大于4.

（4）　3不是偶数。

（5）　2或3是素数。

解（1）设一元谓词 $F(x)$:小王学习过 x。a：英语，b：法语。（1）中命题符号化为0元谓词的蕴含式：$F(a)\wedge F(b)$。

（2）设一元谓词 $F(x)$: x是东北人。$G(x)$：x怕冷。a:李建。符号化为

$\neg F(a) \to G(a)$。

（3）设二元谓词 $G(x,y)$：x大于 y；$a:2, b:3, c:4.$ 符号化为：

$G(a,b) \to G(a,c)$.

（4）设一元谓词 $F(x)$：x不是偶数。a：3。命题符号化为0元谓词的蕴含式：

$F(a)$。

（5）　设一元谓词 $F(x)$：x是素数。a：2，b：3. 符号化为

$F(a) \vee F(b)$。

2.在一阶逻辑中将下面命题符号化，并分别讨论个体域限制为（a）,(b)条件时命题的真值：

（1）凡有理数都能被2整除。

（2）有的有理数都能被2整除。

其中（a）个体域为有理数集合。

（b）个体域为实数集合。

解: $F(x)$: x能被2整除；$G(x)$: x是整数。

（a)(1) $\forall xF(x)$,真值为 0，（2） $\exists xF(x)$ 真值为 1.

（b)（1） $\forall x(G(x)\to F(x))$ 真值为 0，（2） $\exists x(G(x)\wedge F(x))$ ，真值为 1.

3.在一阶逻辑中将下列命题符号化，并分别讨论个体域限制为（a）(b）条件时的命题的真值：

(1)对任意的 x，均有 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ 。

(2)存在 x，使得 $x+5=9$ 。

(a)个体域为自然数集合。

(b)个体域为实数集合。

解：设 $F(x):x^2-2=(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2}),\ G(x):x+5=9$

（a)(1) $\forall xF(x)$,真值为 0，（2） $\exists xG(x)$ 真值为 1.

（b)(1) $\forall xF(x)$,真值为 1，（2） $\exists xG(x)$ 真值为 1.

4.在一阶逻辑中将下列命题符号化：

（1）没有不能表示成分数的有理数。

（2）在北京卖菜的人不全是外地人。

（3）乌鸦都是黑色的。

（4）有的人天天锻炼身体。

解：

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或者 $\forall x(F(x)\to G(x))$ ，其中 $F(x):x$是有理数， $G(x):x$能表示成分数

(2) $\neg\forall x(F(x)\to G(x))$或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ ，其中 $F(x):x$在北京卖菜， $G(x):x$是外地人

(3) $\forall x(F(x)\to G(x))$ ，其中 $F(x):x$是乌鸦， $G(x):x$是黑色的；

(4) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$ ，其中 $F(x):x$是人， $G(x):x$天天锻炼身体。

5.在一阶逻辑中将下列命题符号化：

(1)所有的火车都比轮船跑得快。

(2)有的火车比有的汽车快。

(3)不存在比所有火车都快的汽车。

(4)说凡是汽车就比火车慢是不对的。

解：

（1） $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y))$ ，其中 $F(x):x$是火车, $G(y):y$是轮船, $H(x,y):x$比 y 快；

（2） $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge H(x,y))$ ，其中 $F(x):x$是火车， $G(y):y$是汽车, $H(x,y):x$比 y 快；

（3）$\neg\exists x(G(x)\wedge\forall y(F(y)\to H(x,y))$，其中 $F(x):x$ 是火车，$G(y):y$ 是汽车，$H(x,y):x$ 比 y 快；

（4）$\neg\forall x(G(x)\to\forall y(F(y)\to H(x,y))$，其中 $F(x):x$ 是火车，$G(y):y$ 是汽车，$H(x,y):x$ 比 y 慢；

6.在下列命题符号化，个体域为实数集合 **R，** 并指出各命题的真值：

（1）对所有的 x，都存在 y，使得 $x*y=0$。

（2）存在着 x，对所有 y 都有 $x*y=0$。

（3）对所有的 x，都存在 y，使得 $y=x+1$。

（4）对所有的 x 和 y，都有 $y*x=x*y$。

（5）对任意的 x 和 y，都有 $y*x=x+y$。

（6）对任意的 x，存在 y，使得 $x^2+y^2<0$。

解：各命题符号化如下：

（1）$\forall x\exists y(x*y=0)$，

（2）$\exists x\forall y(x*y=0)$，

（3）$\forall x\exists y(y=x+1)$，

（4）$\forall x\forall y(y*x=x*y)$，

（5）$\forall x\forall y(y*x=x+y)$，

（6）$\forall x\exists y(x^2+y^2<0)$。

7.将下列各公式翻译成自然语言，个体域为整数集 **Z**, 并判断各命题的真假：

(1) $\forall x\forall y\exists z(x-y=z)$

(2) $\forall x\exists y(x*y=1)$

(3) $\exists x\forall y\forall z(x+y=z)$

解：

（1）对所有整数 x 和 y，存在整数 z，使得 $x-y=z$，为真命题。

（2）对任意整数 x，存在整数 y，使得 $x*y=1$，为假命题。

（3),存在整数 x，使得对任意整数 y 与 z，均有 $x+y=z$，为假命题。

8.指出下列公式中的指导变元，量词的辖域，各个体变项的自由出现和约束出现：

(1) $\forall x(F(x)\to G(x,y))$

(2) $\forall xF(x,y)\to\exists yG(x,y)$

(3) $\forall x\exists y(F(x,y)\wedge G(y,z))\vee\exists xH(x,y,z)$

解：

（1）指导变元为 x，全称量词 $\forall$ 的辖域为 $F(x)\to G(x,y)$。其中 x 是约束出现的，y 是自由出现的。

（2）蕴含式前件 $\forall xF(x,y)$ 中，指导变元为 x，全称量词 $\forall$ 的辖域为 $F(x,y)$，其中 x 是约束出现的，y 是自由出现的。

（3）在 $\forall x\exists y(F(x,y)\wedge G(y,z))$，指导变元为 x 和 y，辖域为 $(F(x,y)\wedge G(y,z))$，其中 x 和 y 约束出现的，而 z 是自由出现的。在 $\exists zH(x,y,z)$ 中，指导变元为 z，辖域为 $H(x,y,z)$，其中 z 约束出现的，而 x,y 是自由出现的。

9.给定解释 I 如下：

（a）个体域 D_I 为实数集合 **R.**

（b）D_I 中特定元素 $\bar{a}=0$

（c）特定函数 $\bar{f}(x,y)=x-y,x,y\in D_I$

（d）特定谓词 $\bar{F}(x,y):x=y,\bar{G}(x,y):x<y,x,y\in D_I$.

说明下列公式在 I 下的含义，并指出各公式的真值：

(1). $\forall x\forall y(G(x,y)\to\neg F(x,y))$

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),a)\to G(x,y))$

(3) $\forall x\forall y(G(x,y)\to\neg F(f(x,y),a))$

(4) $\forall x\forall y(G(f(x,y),a)\to F(x,y))$

解：

（1）$\forall x\forall y((x<y)\to(x\neq y))$,即对任意的实数 x 和 y，若 $x<y$，则 $x\neq y$。

（2）$\forall x\forall y((x-y=0)\to(x<y))$, 即对任意的实数 x 和 y，若 $x-y=0$，则 $x<y$。

（3）$\forall x\forall y((x<y)\to(x-y\neq 0))$,即对任意的实数 x 和 y，若 $x<y$，则 $x-y\neq 0$。

（4）$\forall x\forall y((x-y<0)\to(x=y))$,即对任意的实数 x 和 y，若 $x-y<0$，则 $x=y$。

其中（1）（3）真值为 1，（2）（4）真值为 0。

10.给定解释 I 如下：

（a）个体域 $D=\mathbf{N}$（$\mathbf{N}$ 为自然数集合）

（b）D中特定元素 $\overline{a}$=2.

（c）D上函数 $\overline{f}(x,y)=x+y,\overline{g}(x,y)=x*y$.

（d）D上谓词 $\overline{F}(x,y):x=y$.

说明下列各式在 I 的含义，并讨论其真值：

(1). $\forall xF(g(x,a),x)$

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\to F(f(y,a),x))$.

(3) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$.

(4) $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$.

解：各式在 I 下的解释为：

（1）$\forall x(x=2x)$，即对任意的自然数 x，有 $x=2x$；

（2）$\forall x\forall y((x+2=y)\to(y+2=x))$，即对任意的自然数 x 和 y，如果有 $x+2=y$，则有 $y+2=x$。

（3）$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$，即对任意的自然数 x 和 y，存在 z，使 $x+y=z$；

（4）$\exists x(2x=x^2)$，即存在的自然数 x，使 $2x=x^2$。

其中（1）（2）真值为 0，（3）（4）真值为 1。

11.判断下列各式的类型：

(1). $F(x,y)\to(G(x,y)\to F(x,y))$

(2) $\forall x(F(x)\to F(x))\to\exists y(G(y)\wedge\neg G(y))$.

(3) $\forall x\exists yF(x,y)\to\exists x\forall yF(x,y)$.

(4) $\exists x\forall yF(x,y)\to\forall x\exists yF(x,y)$.

(5) $\forall x\forall y(F(x,y)\to F(y,z))$.

(6) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$.

解：

其中（1）（4）为永真式，（2）（6）为矛盾式，（3）（5）为可满足式，但不是永真式。

12.设 I 为一个任意的解释，在解释 I 下，下面哪些公式一定是命题？

(1). $\forall xF(x,y)\to\exists yG(x,y)$.

(2) $\forall x(F(x)\to G(x))\wedge\exists y(F(y)\wedge H(y))$..

(3) $\forall x(\forall yF(x,y)\to\exists yG(x,y))$.

(4) $\forall x(F(x)\wedge G(x)\wedge H(y))$

（2）（3）一定是命题，因为他们是闭式。

13.给出下列各公式一个成真的解释，一个成假的解释。

(1). $\forall x(F(x)\vee G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge H(x))$

(3) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\wedge H(x,y)))$

解：(1).令 x 是全体正整数。

成真的情况是：$F(x)$：x 是偶数，$G(x)$: x 是奇数。

成假的情况是：$F(x)$：x 是偶数，$G(x)$: x 是素数。

(2).令 x 是全体正整数，。

成真的情况是：$F(x)$：x 能被 2 整除，$G(x)$: x 能被 3 整除，$H(x)$: x 能被 5 整除。则存在 30 能被，2，3，5 整除。

成假的情况是：$F(x)$：x 是偶数，$G(x)$: x 是素数，$H(x)$: x 能被 5 整除。不存在一个数既是偶数又是素数同时还能被 5 整除。

(1).令 x 是全体正整数，y 是全体偶数。

成真的情况是：$F(x)$：x 是奇数，$G(y)$: y 能被 2 整除，$H(x,y)$: x比y大。则对任意偶数 y，都存在一个大于 y 的奇数。

成假的情况是：$F(x)$：x 是偶数，$G(y)$: y 能被 2 整除，$H(x,y)$: x比y小。则对偶数 2，不存在一个小于 2 的偶数。

14.证明下面的公式既不是永真式也不是矛盾式：

(1). $\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)))$

解：(1),成真的情况是：$F(x)$：x是正偶数，$G(y):y$是非1的正整数，$H(x,y):x$能被y整除且$x\neq y$。则对任意一个正偶数x，都存在2，整除x。

矛盾的情况：$F(x)$：x是偶数，$G(y):y$是非1的正整数，$H(x,y):x$能被y整除且$x\neq y$。则对任意一个正数x（比如3），不一定存在不等于x的整数，整除x。

(2).成真的情况：$F(x)$：x能被2整除，$G(y):y$能被3整除，$H(x,y):x*y$能被6整除.

成假的情况是：$F(x)$：x能被2整除，$G(y):y$能被4整除，$H(x,y):x*y$能被6整除.

15.（1）给出一个非闭式的永真式。
（2）给出一个非闭式的永假式。
（3）给出一个非闭式的可满足式，但不是永真式。
解：

（1）$(F(x)\to G(x))\wedge F(x)\to G(x)$，它是重言式$(A\to B)\wedge A\to B$的代换实例。

（2）$\neg(F(x)\to F(x))$，它是矛盾式$\neg(A\to A)$的代换实例。

（3）$\forall x(F(x,y)\to F(y,x))$

习题五

1. 设个体域D={a，b，c}，在D中消去公式$\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))$的量词。甲、乙用了不同的演算过程：

甲的演算过程如下：

$\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))$
$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)))$
$\Leftrightarrow(F(a)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)))\wedge(F(b)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)))\wedge(F(c)\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c)))$
$\Leftrightarrow(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

乙的演算过程如下：

$\forall x(F(x)\wedge\exists yG(y))$
$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\exists yG(y)$
$\Leftrightarrow(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

显然，乙的演算过程简单，试指出乙在推演过程中的关键步骤。

答：乙在演算中的关键步骤是，开始利用量词辖域收缩与扩张等值式，将量词的辖域缩小，从而简化了演算。

2. 设个体域D={a，b，c}，消去下列各式的量词：

（1） $\forall x\exists y(F(x)\wedge G(y))$
（2） $\forall x\forall y(F(x)\vee G(y))$
（3） $\forall xF(x)\rightarrow\forall yG(y)$
（4） $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yG(y))$

答：1） $(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

2） $(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\wedge(G(a)\wedge G(b)G\wedge(c))$
3） $(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\rightarrow(G(a)\wedge G(b)\wedge G(c))$

4） $(F(a,y)\vee F(b,y)\vee F(c,y))\rightarrow(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

3．设个体域 D={1,2}，请给出两种不同的解释 I1 和 I2，使得下面公式在 I1 下都是真命题，而在 I2 下都是假命题。
（1） $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$
（2） $\exists x(F(x)\wedge G(x))$
答：解释为 I1：F（x），x 是偶数，G（x） x 是素数
解释为 I2：F（x），x 是奇数，G（x） x 是素数

4．给定公式 $A=\exists xF(x)\rightarrow\forall xF(x)$

a) 在解释 I1 中，个体域 D1={a}，证明公式 A 在 I1 下的真值为 1。
b) 在解释 I2 中，个体域 D2={a1，a2，…，an}，$n\geq 2$，A 在 I2 下的真值还一定是 1 吗？为什么？

答：1.在 I1 下，$\exists xF(x)\rightarrow\forall xF(x)\Leftrightarrow F(a)\rightarrow F(a)\Leftrightarrow\neg F(a)\vee F(a)\Leftrightarrow 1$

在 I2 下，$\exists xF(x)\rightarrow\forall xF(x)\Leftrightarrow(F(a1)\vee F(a2)....\vee F(an))\rightarrow(F(a1)\wedge F(a2).....\wedge F(an))$ 为可满足式，但不是永真式。设 F（x）:x 为奇数，此时蕴含式前件为真，后件为假，故蕴含式真值为 0。若将 F（x）改为令 F（x），x 为整数，则蕴含式的前件后件均为真，则真值为 1。问题的关键是 $n\geq 2$，n 项的析取为真，只需要其中的一项为真，而不能保证所有的项为真。
5． 给定解释 I 如下：
（a） 个体域 D={3，4}；
（b） $\bar{f}(x)$ 为 $\bar{f}(3)=4,\bar{f}(x)=3;$
（c） $\bar{F}(x,y)$ 为 $\bar{F}(3,3)=\bar{F}(4,4)=0,\bar{F}(3,4)=\bar{F}(4,3)=1$
试求下列公式在 I 下的真值。
（1） $\forall x\exists yF(x,y)$
（2） $\exists x\forall yF(x,y)$
（3） $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$
答：（1）

$$\forall x\exists yF(x,y)\Leftrightarrow\forall x(F(x,3)\vee F(x,4))\Leftrightarrow(F(3,3)\vee F(3,4))\wedge(F(4,3)\vee F(4,4))\Leftrightarrow 1\wedge 1\Leftrightarrow 1$$

(2).

$$\exists x\forall yF(x,y)\Leftrightarrow\exists x(F(x,3)\wedge F(x,4))\Leftrightarrow(F(3,3)\wedge F(3,4))\vee(F(4,3)\wedge F(4,4))\Leftrightarrow 0\wedge 0\Leftrightarrow 0$$

(3).

$$\forall x\forall y(F(x,y)\to F(f(x),f(y)))\Leftrightarrow \forall x((F(x,3)\to F(f(x),f(3)))\wedge(F(x,4)\to F(f(x),f(4))))$$
$$\Leftrightarrow (F(3,3)\to F(f(3),f(3)))\wedge(F(3,4)\to F(f(3),f(4)))$$
$$\wedge(F(4,3)\to F(f(4),f(3)))\wedge(F(4,4)\to F(f(4),f(4)))$$
$$\Leftrightarrow (0\to 0)\wedge(1\to 1)\wedge(1\to 1)\wedge(0\to 0)\Leftrightarrow 1\wedge 1\wedge 1\wedge 1\Leftrightarrow 1$$

6. 甲使用量词辖域收缩与扩张等值式进行如下演算：

$$\forall x(F(x)\to G(x,y))\Leftrightarrow \exists xF(x)\to G(x,y)$$

乙说甲错了，乙说的对吗？为什么？

答：乙说的对，甲错了。本题中，全称量词∀的指导变元为 x，辖域为 $F(x)\to G(x,y)$，其中 F(x)与 G（x，y）中的 x 都是约束变元，因而不能将量词的辖域缩小。

7. 请指出下面等值演算中的两处错误。

$$\neg\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\exists y((F(x)\to G(y))\to H(x,y))$$

答：演算的第一步，应用量词否定等值式时丢掉了否定连接词“¬”，演算的第二步，在原错的基础上又用错了等值式即，

$$(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow ((F(x)\to G(y))\to H(x,y))$$

8. 在一阶逻辑中将下面命题符号化，要求用两种不同的等值形式。

（1）没有小于负数的正数

（2）相等的两个角未必都是对顶角

答：

(1). $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))\Leftrightarrow \forall x(G(x)\to\neg F(x))$,

(1)

其中$F(x)$: x小于负数，$G(x)$: x是正数。

(2).

$\neg\forall x(F(x)\to G(x)\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$,

其中$F(x)$:两个角相等，$G(x)$:两个角是对顶角

9. 设个体域 D 为实数集合，命题“有的实数既是有理数，又是无理数”。这显然是个假命题。可是某人却说这是真命题，其理由如下：设 F（x）：x 是有理数，G（x）：x 是无理数。$\exists xF(x)$与$\exists xG(x)$都是真命题，于是，$\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)\Leftrightarrow x(F(x)\wedge G(x))$，由于$\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$是真命题，故$\exists x(F(x)\wedge G(x))$也是真命题，即有的实数是有理数，也是

无理数，问此人的结论对吗？为什么？

答：不对，因为存在量词对于 $\wedge$ 无分配率。

10. 在求前束范式时，有人说 $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x,y))$ 已是前束范式，理由是量词已在公式的前面。他说的对吗？为什么？

答：前束范式中，否定连联接词不能在量词前面出现。

11. 有人说无法求公式 $\forall x(F(x)\to G(x))\to\exists xG(x,y)$ 的前束范式，因为公式中的两个量词的指导变元相同。他的理由正确吗？为什么？

答：用换名规则可使两个指导规则不同。

12. 求下列各式的前束范式：

(1) $\forall xF(x)\to\forall yG(x,y)$

(2) $\forall x(F(x,y)\to\exists yG(x,y,z))$

(3) $\forall xF(x,y)\leftrightarrow\exists xG(x,y)$

(4) $\forall x_1(F(x_1)\to G(x_1,x_2))\to(\exists x_2H(x_2)\to\exists x_3L(x_2,x_3))$

(5) $\exists x_1F(x_1,x_2)\to(F(x_1)\to\neg\exists x_2G(x_1,x_2))$

答：(1) $\exists x\forall y(F(x)\to G(z,y))$

(2) $\forall x\exists t(F(x,y)\to G(x,t,z))$

(3) $\exists x_1\exists x_2\forall x_3\forall x_4((F(x_1,y)\to G(x_2,y))\wedge(G(x_3,y)\to F(x_4,y)))$

(4) $\exists y_1\forall y_2\exists y_3((F(y_1)\to G(y_1,x_2))\to(H(y_2)\to L(x_2,y_3)))$

(5) $\forall y_1\forall y_2(F(y_1,x_2)\to(F(x_1)\to\neg G(x_1,y_2)))$

13. 将下列命题符号化，要求符号化的公式全为前束范式：

(1)有的汽车比有的火车跑得快

(2)有的火车比所有汽车跑得快

(3)说所有的火车比所有的汽车跑得快是不对的

(4)说有的飞机比有的汽车慢也是不对的

答：(1)F(x):x 是汽车，G(y):y 是火车，H(x,y):x 比 y 跑得快

$$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge H(x,y))$$

(2))F(x):x 是火车，G(y):y 是汽车，H(x,y):x 比 y 跑得快

$$\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))$$

(3) F(x):x 是火车，G(y):y 是汽车，H(x,y):x 比 y 跑得快

$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

(4) F(x):x 是飞机，G(y):y 是汽车，H(x,y):x 比 y 慢

$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to\neg H(x,y))$ 、

14. 在自然推理系统 F 中，指出下面各证明序列中的错误：

(1)①	$F(x)\to\exists xG(x)$	前提引入
②	$F(c)\to G(c)$	①EI 规则
(2)①	$\exists xF(x)\to\exists yG(y)$	前提引入
②	$F(a)\to F(b)$	①EI 规则
(3)①	$F(y)\to G(y)$	前提引入
②	$\exists x(F(x)\to G(x))$	①EG 规则
(4)①	$F(a)\wedge G(b)$	前提引入
②	$\exists x(F(x)\wedge G(x))$	①EG 规则
(5)①	$F(c)\to G(c)$	前提引入
②	$\forall x(F(x)\to G(x))$	①UG 规则

答：(1)对 $F(x)\to\exists xG(x)$ 不能使用 EI 规则。它不是前束范式，化为前束范式得

$F(x)\to\exists xG(x)\Leftrightarrow\exists x(F(y)\to G(x))$，因为量词辖域 $(F(y)\to G(x))$ 中，除了 x 外还有自由出现的 y，所以不能使用 EI 规则。

(2) 对 $F(c)\to G(c)$ 也应先化成前束范式才能消去量词，其前束范式为 $\forall x\exists y(F(x)\to G(y))$，要消去量词，既要使用 UI 规则又要使用 EI 规则。

(3)在自然推理系统 F 中，EG 规则为 $\dfrac{A(c)}{\therefore\exists xA(x)}$，其中 c 为特定的个体常项，这里 $A(y)=F(y)\to G(y)$ 不满足要求。

(4)这里使 F(a)为真的 a 不一定使 G(a)为真，同样地使 G(b)为真的 b 不一定使 F(b)为真，如 F(x):x 为奇数，G(x):x 为偶数，显然 $F(3)\wedge G(4)$ 为真，但不存在使 $F(x)\wedge G(x)$ 为真

的个体。

(5)这里 c 为个体常项，不能对 $\forall x(H(x)\to\neg F(x)($ $)$ 引入全称量词。

15.在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

(1)前提：$\exists xF(x)\to\forall y((F(y)\vee G(y))\to R(y)),\exists xF(x)$

结论：$\exists xR(x)$

(2)前提：$\forall x(F(x)\to(G(a)\wedge R(x))),\exists xF(x)$

结论：$\exists x(F(x)\wedge R(x))$

(3)前提：$\forall x(F(x)\vee G(x)),\neg\exists xG(x)$

结论：$\exists xF(x)$

(4)前提：$\forall x(F(x)\vee G(x)),\forall x(\neg G(x)\vee\neg R(x)),\forall xR(x)$

结论：$\exists xF(x)$

证明：(1)① $\exists xF(x)$ 前提引入

② $\exists xF(x)\to\forall y((F(y)\vee G(y))\to R(y))$ 前提引入

③ $\forall y((F(y)\vee G(y))\to R(y))$ ①②假言推理

④F(c) ①EI

⑤ $(F(c)\vee G(c))\to R(c)$ ③UI

⑥ $F(c)\vee G(c)$ ④附加

⑦R(c) ⑤⑥假言推理

⑧ $\exists xR(x)$ ⑦EG

(2)① $\exists xF(x)$ 前提引入

② $\forall x(F(x)\to(G(a)\wedge R(x)))$ 前提引入

③F(c) ①EI

④ $F(c)\to(G(a)\wedge R(c))$ ②UI

⑤ $G(a)\wedge R(c)$ ③④假言推理

⑥R(c) ⑤化简

⑦ $F(c) \wedge R(c)$ ③⑥合取

⑧ $\exists x(F(x) \wedge R(x))$ ⑦EG

(3)① $\neg\exists xF(x)$ 前提引入

② $\forall x\neg F(x)$ ①置换

③ $\neg F(c)$ ②UI

④ $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 前提引入

⑤ $F(c) \vee G(c)$ ④UI

⑥F(c) ③⑤析取三段论

⑦ $\exists xF(x)$ ⑥EG

(4)① $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 前提引入

② $F(y) \vee G(y)$ ①UI

③ $\forall x(\neg G(x) \vee \neg R(x))$ 前提引入

④ $\neg G(y) \vee \neg R(y)$ ③UI

⑤ $\forall xR(x)$ 前提引入

⑥R(y) ⑤UI

⑦ $\neg G(y)$ ④⑥析取三段论

⑧F(y) ②⑦析取三段论

⑨ $\forall xF(x)$ ⑧UG

16.找一个解释 I,在 I 下，使得 $\forall xF(x) \to \forall xG(x)$ 为真，而使得 $\forall x(F(x) \to G(x))$ 为假，从而说明 $\forall xF(x) \to \forall xG(x) \neq \forall x(F(x) \to G(x))$。

答：取个体域为自然数集合 N，F(x):x 为奇数，G(x):x 为偶数，则在以上解释下，$\forall xF(x) \to \forall xG(x)$ 为真而 $\forall x(F(x) \to G(x))$ 为假。

17.给定推理如下：前提：$\forall x(F(x) \to \neg G(x)), \forall x(H(x) \to G(x))$；结论：

$\forall x(H(x) \to \neg F(x))$。有些人证明如下：

① $\forall x H(x)$ 附加前提引入

②H(y) ①UI

③ $\forall x(H(x) \to G(x))$ 前提引入

④ $H(y) \to G(y)$ ③UI

⑤G(y) ②⑤假言推理

⑥ $\forall x(F(x) \to \neg G(x))$ 前提引入

⑦ $F(y) \to \neg G(y)$ ⑥UI

⑧ $\neg F(y)$ ⑤⑦拒取式

⑨ $\forall x \neg F(x)$ ⑧UG

并且说由附加前提证明法可知，推理正确，请指出以上证明的错误。
答：由第 16 题可知，本题不能用附加前提证明法。

18.给出上题的正确推理证明。

证明：① $\forall x(F(x) \to \neg G(x))$ 前提引入

② $\forall x(H(x) \to G(x))$ 前提引入

③ $F(y) \to \neg G(y)$ ①UI

④ $H(y) \to G(y)$ ②UI

⑤ $G(y) \to \neg F(y)$ ③置换

⑥ $H(y) \to \neg F(y)$ ④⑤假言三段论

⑦ $\forall x(H(x) \to \neg F(x)()$ ⑥UG

19 在自然推理系统 F 中，构造下面的推理证明;

前提：$\exists x F(x) \to \forall x G(x)$

结论：$\forall x(F(x) \to G(x))$

证明：1 $\exists x F(x) \to \forall x G(x)$

2 $F(c) \to \forall y G(y)$

3 $\forall x(F(x) \to G(x))$

20 在自然推理系统 F 中，构造下面的推理证明；

(1)前提：$\forall x(F(x) \to G(x))$

结论：$\forall xF(x) \to \forall xG(x)$

证明：1 $\forall x(F(x) \to G(x))$

2 $F(x) \to G(x)$

3 $\forall xF(x)$ 附加前提

4 $\forall xG(x)$

（2）前提：$\forall x(F(x) \vee G(x))$

结论：$\neg\forall xF(x) \to \exists xG(x)$

证明：1 $\forall x(F(x) \vee G(x))$

2 $F(x) \vee G(x)$

3 $\neg\forall xF(x)$ 附加前提

4 $\exists x\neg F(x)$

5 $\neg F(c)$

6 $G(c)$

7 $\exists xG(x)$

21 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：
没有白色的乌鸦，北京鸭都是白色的，因此北京鸭不是乌鸦。

答：设 $F(x)$：x 是白色的

$G(x)$：x 是乌鸦

$H(x)$：x 是北京鸭

前提：$\forall x(G(x) \to \neg F(x))$

$\forall x(H(x) \to F(x))$

结论：$\forall x(H(x)\rightarrow\neg G(x))$

证明：1 $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

2 $G(x)\rightarrow\neg F(x)$

3 $F(x)\rightarrow\neg G(x)$

4 $\forall x(H(x)\rightarrow F(x))$

5 $H(x)\rightarrow F(x)$

6 $H(x)\rightarrow\neg G(x)$

7 $\forall x(H(x)\rightarrow\neg G(x))$

22 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：
(1)偶数都能被 2 整除。6 是偶数，所以 6 能被 2 整除。

答：设 $F(x)$：x 是偶数

$G(x)$：x 能被 2 整除

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$F(6)$

结论：$G(6)$

证明：1 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

2 $F(6)\rightarrow G(6)$

3 $F(6)$

4 $G(6)$

（2）凡大学生都是勤奋的。王晓山不勤奋。所以王晓山不是大学生。

答：设 $F(x)$：x 是大学生

$G(x)$：x 是勤奋的

C：王晓山

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\neg G(c)$

结论：$\neg F(c)$

证明：1 $\forall x(F(x) \to G(x))$

2 $F(c) \to G(c)$

3 $\neg G(c) \to \neg F(c)$

4 $\neg G(c)$

5 $\neg F(c)$

23 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

（1）每个有理数都是实数。有的有理数是整数。因此有的实数是整数。

答：设 $F(x)$：x 是有理数

$G(x)$：x 是实数

$H(x)$：x 是整数

前提：$\forall x(F(x) \to G(x))$

$\exists x(F(x) \wedge H(x))$

结论：$\exists x(G(x) \wedge H(x))$

证明：1 $\exists x(F(x) \wedge H(x))$

2 $F(c) \wedge H(c)$

3 $\forall x(F(x) \to G(x))$

4 $F(c) \to G(c)$

5 $G(c)$

6 $G(c) \wedge H(c)$

7 $\exists x(G(x) \wedge H(x))$

（2）有理数，无理数都是实数。虚数不是实数，因此虚数既不是有理数也不是无理数。

答：设 $F(x)$：x 是有理数

$G(x)$：x 是实数

$H(x)$：x 是无理数数

$P(x)$：x 是虚数

前提： $\forall x(F(x)\to G(x))$

$\forall x(H(x)\to G(x))$

$\forall x(P(x)\to\neg G(x))$

结论：$\forall x(P(x)\to(\neg F(x)\wedge\neg H(x))$

证明：1 $\forall x(F(x)\to G(x))$

2 $F(x)\to G(x)$

3 $\neg G(x)\to\neg F(x)$

4 $\forall x(H(x)\to G(x))$

5 $H(x)\to G(x)$

6 $\neg G(x)\to\neg H(x)$

7 $P(x)\to(\neg F(x)\wedge\neg H(x))$

8 $\forall x(P(x)\to(\neg F(x)\wedge\neg H(x))$

24 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：
每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车。每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢喜欢乘自行车。有的人不喜欢乘汽车，所以有的人不喜欢步行。

答：设 $G(x)$：x 喜欢步行

$H(x)$：x 喜欢骑自行车

$P(x)$：x 喜欢乘汽车

前提：$\forall x(G(x)\to\neg H(x))$

$\forall x(H(x) \vee P(x))$

$\exists x \neg P(x)$

结论：$\exists x \neg G(x)$

证明：1 $\exists x \neg P(x)$

2 $\neg P(c)$

3 $\forall x(H(x) \vee P(x))$

4 $H(c) \vee P(c)$

5 $H(c)$

6 $\forall x(G(x) \to \neg H(x))$

7 $G(c) \to \neg H(c)$

8 $H(c) \to \neg G(c)$

9 $\neg G(c)$

25 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明（个体域为人类集合）

每个科学工作者都是刻苦钻研的，每个刻苦钻研而又聪明的人在他的事业中都将获得成功。王大海是科学工作者，并且是聪明的，所以王大海在他的事业中将获得成功。

答：设 $F(x)$：x 是科学工作者

$G(x)$：x 是刻苦学习的

$H(x)$：x 是聪明的

$P(x)$：x 将在他的事业中获得成功

C：王大海

前提：$\forall x(F(x) \to G(x))$，$F(c) \wedge H(c)$

$\forall x(G(x) \wedge H(x) \to P(x))$

结论：$P(c)$

证明：1 $\forall x(F(x) \to G(x))$ 前提

2 $F(c) \to G(c)$

3 $F(c)$ 前提

4 $G(c)$

5 $H(c)$ 前提

6 $H(c) \wedge G(c)$

7 $\forall x(G(x) \wedge H(x) \to P(x))$

8 $G(c) \wedge H(c) \to P(c)$

9 $P(c)$