《电磁场与电磁波》试题 1

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．在均匀各向同性线性媒质中，设媒质的导磁率为μ，则磁感应强度$\vec{B}$和磁场$\vec{H}$满足的方程为：__________________。

2．设线性各向同性的均匀媒质中，$\nabla^2\phi=0$称为__________________方程。

3．时变电磁场中，数学表达式$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$称为______________________。

4．在理想导体的表面，_____________的切向分量等于零。

5．矢量场$\vec{A}(\vec{r})$穿过闭合曲面 S 的通量的表达式为：__________________________。

6．电磁波从一种媒质入射到理想________表面时，电磁波将发生全反射。

7．静电场是无旋场，故电场强度沿任一条闭合路径的积分等于___________。

8．如果两个不等于零的矢量的______等于零，则此两个矢量必然相互垂直。

9．对平面电磁波而言，其电场、磁场和波的传播方向三者符合________________关系。

10．由恒定电流产生的磁场称为恒定磁场，恒定磁场是无散场，因此，它可用_________函数的旋度来表示。

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．已知麦克斯韦第二方程为$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，试说明其物理意义，并写出方程的积分形式。

12．试简述唯一性定理，并说明其意义。

13．什么是群速？试写出群速与相速之间的关系式。

14．写出位移电流的表达式，它的提出有何意义？

三、计算题 （每小题 10 分，共 30 分）

15．按要求完成下列题目

（1）判断矢量函数$\vec{B}=-y^2\hat{e}_x+xz\hat{e}_y$是否是某区域的磁通量密度？

（2）如果是，求相应的电流分布。

16．矢量$\vec{A}=2\hat{e}_x+\hat{e}_y-3\hat{e}_z$，$\vec{B}=5\hat{e}_x-3\hat{e}_y-\hat{e}_z$，求

（1）$\vec{A}+\vec{B}$

（2）$\vec{A}\cdot\vec{B}$

17．在无源的自由空间中，电场强度复矢量的表达式为

$$\vec{E}=\left(\hat{e}_x 3E_0-\hat{e}_y 4E_0\right)e^{-jkz}$$

（1）　试写出其时间表达式；

（2）　说明电磁波的传播方向；

四、应用题　（每小题 10 分，共 30 分）

18．均匀带电导体球，半径为a，带电量为Q。试求

（1）　球内任一点的电场强度

（2）　球外任一点的电位移矢量。

19．设无限长直导线与矩形回路**共面**，(如图 1 所示)，

（1）判断通过矩形回路中的磁感应强度的方向（在图中标出）；

（2）设矩形回路的法向为穿出纸面，求通过矩形回路中的磁通量。

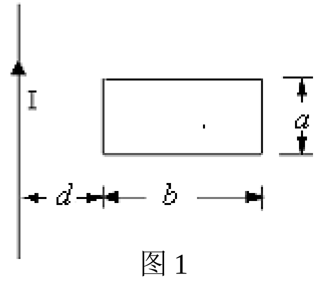

图 1

20．如图 2 所示的导体槽，底部保持电位为U_0，其余两面电位为零，

（1）　写出电位满足的方程；

（2）　求槽内的电位分布

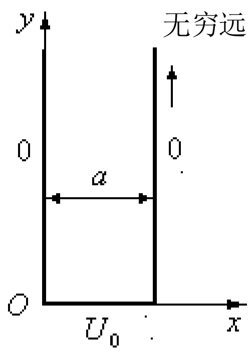

图 2

五、综合题（10 分）

21．设沿$+z$方向传播的均匀平面电磁波垂直入射到理想导体，如图 3 所示，该电磁波电场只有x分量即 $\vec{E}=\hat{e}_x E_0 e^{-j\beta z}$

(1) 求出入射波磁场表达式；

(2) 画出区域 1 中反射波电、磁场的方向。

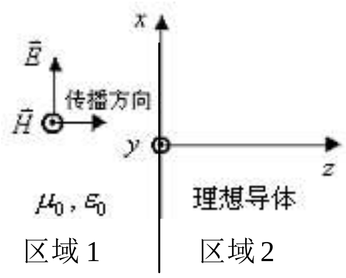

图 3

《电磁场与电磁波》试题 2

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．在均匀各向同性线性媒质中，设媒质的介电常数为ε，则电位移矢量$\vec{D}$和电场$\vec{E}$满足的方程为：____________________。

2．设线性各向同性的均匀媒质中电位为ϕ，媒质的介电常数为ε，电荷体密度为ρ_V，电位所满足的方程为____________________。

3．时变电磁场中，坡印廷矢量的数学表达式为_________________________。

4．在理想导体的表面，电场强度的____________分量等于零。

5．表达式$\oint_S \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$称为矢量场$\vec{A}(\vec{r})$穿过闭合曲面 S 的___________。

6．电磁波从一种媒质入射到理想导体表面时，电磁波将发生_______________。

7．静电场是保守场，故电场强度沿任一条闭合路径的积分等于____________。

8．如果两个不等于零的矢量的点积等于零，则此两个矢量必然相互______________。

9．对横电磁波而言，在波的传播方向上电场、磁场分量为_______________。

10．由恒定电流产生的磁场称为恒定磁场，恒定磁场是___________场，因此，它可用磁矢位函数的旋度来表示。

二、简述题　（每小题 5 分，共 20 分）

11．试简述磁通连续性原理，并写出其数学表达式。

12．简述亥姆霍兹定理，并说明其意义。

13．已知麦克斯韦第二方程为$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$，试说明其物理意义，并写出方程的微分形式。

14．什么是电磁波的极化？极化分为哪三种？

三、计算题　（每小题 10 分，共 30 分）

15．矢量函数 $\vec{A}=-yx^2\hat{e}_x+yz\hat{e}_z$，试求

（1）$\nabla\cdot\vec{A}$

（2）$\nabla\times\vec{A}$

16．矢量 $\vec{A}=2\hat{e}_x-2\hat{e}_z$，$\vec{B}=\hat{e}_x-\hat{e}_y$，求

（1）$\vec{A}-\vec{B}$

（2）求出两矢量的夹角

17．方程 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 给出一球族，求

（1）求该标量场的梯度；

（2）求出通过点 $(1,2,0)$ 处的单位法向矢量。

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．放在坐标原点的点电荷在空间任一点 $\vec{r}$ 处产生的电场强度表达式为

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

（1）求出电力线方程；（2）画出电力线。

19．设点电荷位于金属直角劈上方，如图 1 所示，求

（1）　画出镜像电荷所在的位置

（2）　直角劈内任意一点 (x,y,z) 处的电位表达式

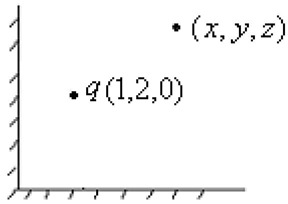

图 1

20．设时变电磁场的电场强度和磁场强度分别为：

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\omega t-\phi_e) \qquad \vec{H}=\vec{H}_0\cos(\omega t-\phi_m)$$

（1）　写出电场强度和磁场强度的复数表达式

（2）　证明其坡印廷矢量的平均值为：$\vec{S}_{av}=\dfrac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0\cos(\phi_e-\phi_m)$

五、综合题 （10 分）

21．设沿 $+z$ 方向传播的均匀平面电磁波垂直入射到理想导体，如图 2 所示，该电磁波电场只有 x 分量即 $\vec{E}=\hat{e}_x E_0 e^{-j\beta z}$

(3) 求出反射波电场的表达式;

(4) 求出区域 1 媒质的波阻抗。

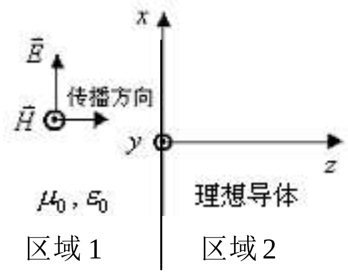

图 2

《电磁场与电磁波》试题 3

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．静电场中，在给定的边界条件下，拉普拉斯方程或______方程的解是唯一的，这一定理称为唯一性定理。

2．在自由空间中电磁波的传播速度为____________ m/s 。

3．磁感应强度沿任一曲面 S 的积分称为穿过曲面 S 的______________。

4．麦克斯韦方程是经典________理论的核心。

5．在无源区域中，变化的电场产生磁场，变化的磁场产生_______，使电磁场以波的形式传播出去，即电磁波。

6．在导电媒质中，电磁波的传播速度随频率变化的现象称为_________。

7．电磁场在两种不同媒质分界面上满足的方程称为_____________。

8．两个相互靠近、又相互绝缘的任意形状的________可以构成电容器。

9．电介质中的束缚电荷在外加电场作用下，完全脱离分子的内部束缚力时，我们把这种现象称为_________。

10．所谓分离变量法，就是将一个_______函数表示成几个单变量函数乘积的方法。

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．已知麦克斯韦第一方程为 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，试说明其物理意义，并写出方程的积分形式。

12．试简述什么是均匀平面波。

13．试简述静电场的性质，并写出静电场的两个基本方程。

14．试写出泊松方程的表达式，并说明其意义。

三、计算题 （每小题 10 分，共 30 分）

15．用球坐标表示的场 $\vec{E}=\hat{e}_r\dfrac{25}{r^2}$ ，求

（1） 在直角坐标中点（-3，4，5）处的 $|E|$；

（2） 在直角坐标中点（-3，4，5）处的 E_x 分量

16．矢量函数 $\vec{A}=-x^2\hat{e}_x+y\hat{e}_y+x\hat{e}_z$，试求

（1）$\nabla\cdot\vec{A}$

（2）若在 xy 平面上有一边长为 2 的正方形，且正方形的中心在坐标原点，试求该矢量 $\vec{A}$ 穿过此正方形的通量。

17．已知某二维标量场 $u(x,y)=x^2+y^2$，求

（1）标量函数的梯度；

（2）求出通过点 $(1,0)$ 处梯度的大小。

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．在无源的自由空间中，电场强度复矢量的表达式为 $\vec{E}=\hat{e}_x 3E_0 e^{-jkz}$

（3） 试写出其时间表达式；

（4） 判断其属于什么极化。

19. 两点电荷 $q_1=-4\text{C}$，位于 x 轴上 $x=4$ 处，$q_2=4\text{C}$ 位于轴上 $y=4$ 处，求空间点 $(0,0,4)$ 处的

（1） 电位；

（2） 求出该点处的电场强度矢量。

20．如图 1 所示的二维区域，上部保持电位为 U_0，其余三面电位为零，

（1） 写出电位满足的方程和电位函数的边界条件

（2） 求槽内的电位分布

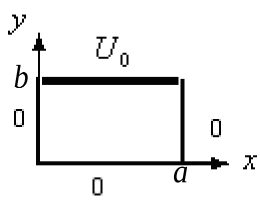

图 1

五、综合题 （10 分）

21．设沿＋z 方向传播的均匀平面电磁波垂直入射到理想导体，如图 2 所示，该电磁波为沿

x 方向的线极化，设电场强度幅度为 E_0，传播常数为 β。

（5）试写出均匀平面电磁波入射波电场的表达式；

（6）求出反射系数。

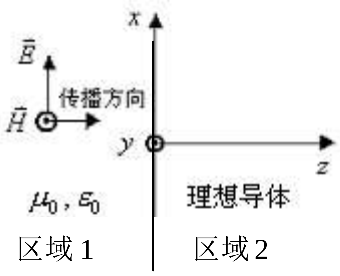

图 2

《电磁场与电磁波》试题（4）

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．矢量 $\vec{A}=\hat{e}_x+\hat{e}_y+\hat{e}_z$ 的大小为_____________。

2．由相对于观察者静止的，且其电量不随时间变化的电荷所产生的电场称为___________。

3．若电磁波的电场强度矢量的方向随时间变化所描绘的轨迹是直线，则波称为__________。

4．从矢量场的整体而言，无散场的__________不能处处为零。

5．在无源区域中，变化的电场产生磁场，变化的磁场产生电场，使电磁场以_____的形式传播出去，即电磁波。

6．随时间变化的电磁场称为___________场。

7．从场角度来讲，电流是电流密度矢量场的_____________。

8．一个微小电流环，设其半径为 a、电流为 I，则磁偶极矩矢量的大小为_____________。

9．电介质中的束缚电荷在外加_______作用下，完全脱离分子的内部束缚力时，我们把这种现象称为击穿。

10．法拉第电磁感应定律的微分形式为_____________________。

二、简述题　（每小题 5 分，共 20 分）

11．简述恒定磁场的性质，并写出其两个基本方程。

12．试写出在理想导体表面电位所满足的边界条件。

13．试简述静电平衡状态下带电导体的性质。

14．什么是色散？色散将对信号产生什么影响？

三、计算题　（每小题 10 分，共 30 分）

15．标量场 $\psi(x,y,z)=x^2y^3+e^z$，在点 $P(1,-1,0)$ 处

（1）求出其梯度的大小

（2）求梯度的方向

16．矢量 $\vec{A}=\hat{e}_x+2\hat{e}_y$，$\vec{B}=\hat{e}_x-3\hat{e}_z$，求

（1）$\vec{A}\times\vec{B}$

（2）$\vec{A}+\vec{B}$

17．矢量场 $\vec{A}$ 的表达式为

$$\vec{A}=\hat{e}_x 4x-\hat{e}_y y^2$$

（1）求矢量场 $\vec{A}$ 的散度。

（2）在点 $(1,1)$ 处计算矢量场 $\vec{A}$ 的大小。

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．一个点电荷 $+q$ 位于 $(-a,0,0)$ 处，另一个点电荷 $-2q$ 位于 $(a,0,0)$ 处，其中 $a>0$。

（1） 求出空间任一点 (x,y,z) 处电位的表达式；

（2） 求出电场强度为零的点。

19．真空中均匀带电球体，其电荷密度为 ρ，半径为 a，试求

（1） 球内任一点的电位移矢量

（2） 球外任一点的电场强度

20． 无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的交界面，如图 1 所示。

（1） 写出两磁介质的交界面上磁感应强度满足的方程

（2） 求两种媒质中的磁感应强度 B_1 和 B_2。

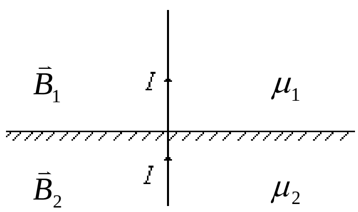

图 1

五、综合题 （10 分）

21． 设沿 $+z$ 方向传播的均匀平面电磁波垂直入射到理想导体，如图 2 所示，入射波电场的表达式为 $\vec{E}=\hat{e}_y E_0 e^{-j\beta z}$

（1）试画出入射波磁场的方向

（2）求出反射波电场表达式。

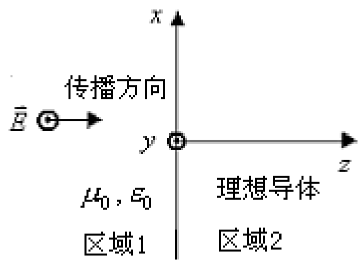

图 2

《电磁场与电磁波》试题（5）

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．静电场中，在给定的边界条件下，拉普拉斯方程或泊松方程的解是唯一的，这一定理称为________________ 。

2．变化的磁场激发__________，是变压器和感应电动机的工作原理。

3．从矢量场的整体而言，无旋场的__________不能处处为零。

4．_________________方程是经典电磁理论的核心。

5．如果两个不等于零的矢量的点乘等于零，则此两个矢量必然相互__________。

6．在导电媒质中，电磁波的传播速度随___________变化的现象称为色散。

7．电场强度矢量的方向随时间变化所描绘的________称为极化。

8．两个相互靠近、又相互__________的任意形状的导体可以构成电容器。

9．电介质中的束缚电荷在外加电场作用下，完全________分子的内部束缚力时，我们把这种现象称为击穿。

10．所谓分离变量法，就是将一个多变量函数表示成几个_________函数乘积的方法。

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．简述高斯通量定理，并写出其积分形式和微分形式的表达式。

12．试简述电磁场在空间是如何传播的？

13．试简述何谓边界条件。

14．已知麦克斯韦第三方程为 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ ，试说明其物理意义，并写出其微分形式。

三、计算题 （每小题 10 分，共 30 分）

15．已知矢量 $\vec{A}=\hat{e}_x x+\hat{e}_y xy+\hat{e}_z y^2 z$，

（1） 求出其散度

（2） 求出其旋度

16．矢量 $\vec{A}=\hat{e}_x+2\hat{e}_y$， $\vec{B}=\hat{e}_x-3\hat{e}_z$，

（1）分别求出矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的大小

（2）$\vec{A}\cdot\vec{B}$

17．给定矢量函数 $\vec{E}=\hat{e}_x y+\hat{e}_y x$，试

（1）求矢量场 $\vec{E}$ 的散度。

（2）在点 $(3,4)$ 处计算该矢量 $\vec{E}$ 的大小。

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．设无限长直线均匀分布有电荷，已知电荷密度为 ρ_l 如图 1 所示，求

（1） 空间任一点处的电场强度；

（2） 画出其电力线，并标出其方向。

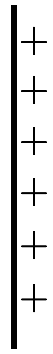

图 1

19． 设半径为 a 的无限长圆柱内均匀地流动着强度为 I 的电流，设柱外为自由空间，求

（1） 柱内离轴心 r 任一点处的磁场强度；

（2） 柱外离轴心 r 任一点处的磁感应强度。

20．一个点电荷 q 位于一无限宽和厚的导电板上方，如图 2 所示，

（1） 计算任意一点的 $P(x,y,z)$ 的电位；

（2） 写出 $z=0$ 的边界上电位的边界条件。

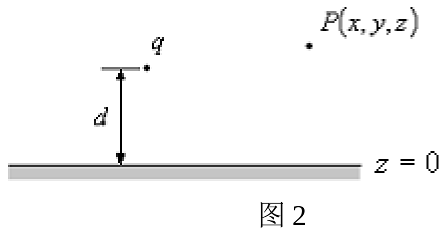

图 2

五、综合题 （10 分）

21．平面电磁波在 $\varepsilon_1=9\varepsilon_0$ 的媒质 1 中沿 $+z$ 方向传播，在 $z=0$ 处垂直入射到 $\varepsilon_2=4\varepsilon_0$ 的媒质 2 中，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，

如图 3 所示。入射波电场极化为 $+x$ 方向，大小为 E_0，自由空间的波数为 k_0，

（1）求出媒质 1 中入射波的电场表达式；

（2）求媒质 2 中的波阻抗。

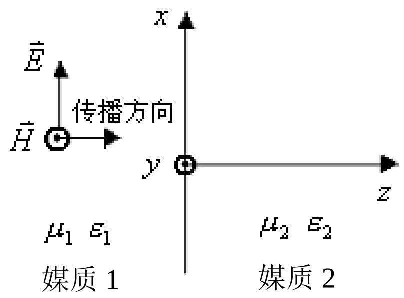

图 3

《电磁场与电磁波》试题（6）

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．如果一个矢量场的旋度等于零，则称此矢量场为__________。

2．电磁波的相速就是___________传播的速度。

3．_____________实际上就是能量守恒定律在电磁问题中的具体表现。

4．在导电媒质中，电磁波的传播_______随频率变化的现象称为色散。

5．一个标量场的性质，完全可以由它的_____________来表征。

6．由恒定电流所产生的磁场称为_________________。

7．若电磁波的电场强度矢量的方向随时间变化所描绘的轨迹是圆，则波称为_________。

8．如果两个不等于零的矢量相互平行，则它们的叉积必等于__________。

9．对平面电磁波而言，其电场和磁场均___________于传播方向。

10．亥姆霍兹定理告诉我们，研究任何一个矢量场应该从矢量的______________两个角度去研究。

二、简述题　（每小题 5 分，共 20 分）

11．任一矢量场为$\vec{A}(\vec{r})$，写出其穿过闭合曲面 S 的通量表达式，并讨论之。

12．什么是静电场？并说明静电场的性质。

13．试解释什么是 TEM 波。

14．试写出理想导体表面电场所满足的边界条件。

三、计算题　（每小题 10 分，共 30 分）

15．某矢量函数为$\vec{E} = -x^2\hat{e}_x + y\hat{e}_y$

（1）试求其散度

（2）判断此矢量函数是否可能是某区域的电场强度（静电场）？

16．已知$\vec{A}$、$\vec{B}$和$\vec{C}$为任意矢量，若$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{C}$，则是否意味着

（1）$\vec{B}$ 总等于 $\vec{C}$ 呢？

（2）试讨论之。

17．在圆柱坐标系中，一点的位置由 $\left(4,\dfrac{2\pi}{3},3\right)$ 定出，求该点在

（1）直角坐标系中的坐标

（2）写出该点的位置矢量。

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．设 $z=0$ 为两种媒质的分界面，$z>0$ 为空气，其介电常数为

$\varepsilon_1=\varepsilon_0$，$z<0$ 为介电常数 $\varepsilon_2=5\varepsilon_0$ 的媒质 2。已知空气中的

电场强度为 $\vec{E}_1=4\hat{e}_x+\hat{e}_z$，求

（1）空气中的电位移矢量。

（2）媒质 2 中的电场强度。

19．设真空中无限长直导线电流为 I，沿 z 轴放置，如图 1 所示。求

（1）空间各处的磁感应强度 $\vec{B}$

（2）画出其磁力线，并标出其方向。

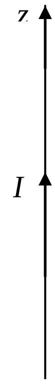

图 1

20．平行板电容器极板长为 a、宽为 b，极板间距为 d，设两极板间的电压为 U，如图 2 所示。求

（1）电容器中的电场强度；

（2）上极板上所储存的电荷。

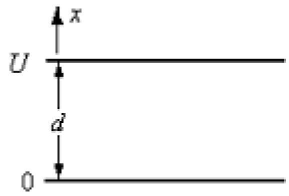

图 2

五、综合题 （10 分）

21．平面电磁波在 $\varepsilon_1=9\varepsilon_0$ 的媒质 1 中沿 $+z$ 方向传播，在 $z=0$ 处垂直入射到 $\varepsilon_2=4\varepsilon_0$ 的媒质 2 中，

$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。电磁波极化为 $+x$ 方向，角频率为 $300\,\text{Mrad/s}$，如图 3 所示。

（1）求出媒质 1 中电磁波的波数；

（2）反射系数。

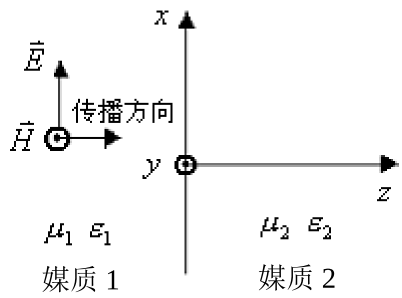

图 3

《电磁场与电磁波》试题（7）

一、填空题 （每小题 1 分，共 10 分）

1．如果一个矢量场的散度等于零，则称此矢量场为________________。

2．所谓群速就是包络或者是______________传播的速度。

3．坡印廷定理，实际上就是______________定律在电磁问题中的具体表现。

4．在理想导体的内部，电场强度__________。

5．矢量场 $\vec{A}(\vec{r})$ 在闭合曲线 C 上环量的表达式为：________________________。

6．设电偶极子的电量为 q，正、负电荷的距离为 d，则电偶极矩矢量的大小可表示为____________。

7．静电场是保守场，故电场强度从 P_1 到 P_2 的积分值与__________无关。

8．如果两个不等于零的矢量的叉积等于零，则此两个矢量必然相互____________。

9．对平面电磁波而言，其电场、磁场和波的____________三者符合右手螺旋关系。

10．所谓矢量线，乃是这样一些曲线，在曲线上的每一点上，该点的切线方向与矢量场的方向___________。

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．什么是恒定磁场？它具有什么性质？

12．试简述法拉第电磁感应定律，并写出其数学表达式。

13．什么是相速？试写出群速与相速之间的关系式。

14．高斯通量定理的微分形式为 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$，试写出其积分形式，并说明其意义。

三、计算题 （每小题 10 分，共 30 分）

15．自由空间中一点电荷位于 $S(-3,1,4)$，场点位于 $P(2,-2,3)$

（1）写出点电荷和场点的位置矢量

（2）求点电荷到场点的距离矢量 $\vec{R}$

16．某二维标量函数$u = y^2 - x$，求

（1）标量函数梯度∇u

（2）求梯度在正x方向的投影。

17．矢量场$\vec{A} = \hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z z$，求

（1）矢量场的散度

（2）矢量场$\vec{A}$在点$(1,2,2)$处的大小。

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．电偶极子电量为q，正、负电荷间距为d，沿 z 轴放置，中心位于原点，如图 1 所示。

求（1）求出空间任一点处 P(x,y,z)的电位表达式；

（2）画出其电力线。

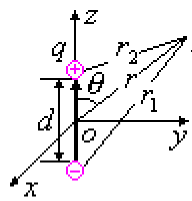

图 1

19．同轴线内导体半径为a，外导体半径为b，内、外导体间介质为空气，其间电压为U

（1）求$r < a$处的电场强度；

（2）求$a < r < b$处的电位移矢量。

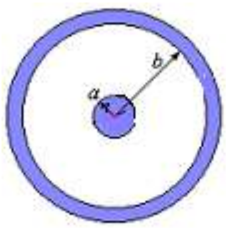

图 2

20．已知钢在某种磁饱和情况下磁导率$\mu_1 = 2000\mu_0$，当钢中的磁感应强度$\vec{B}_1 = 0.5\times10^{-2}\,\mathrm{T}$、$\theta_1 = 75^\circ$时，

此时磁力线由钢进入自由空间一侧后，如图 3 所示。

（1）$\vec{B}_2$与法线的夹角θ_2

（2）磁感应强度$\vec{B}_2$的大小

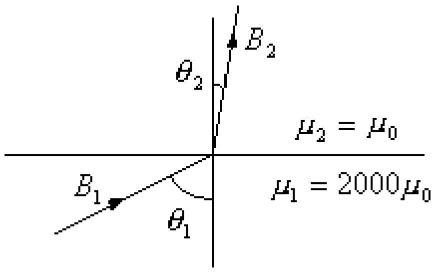

图 3

五、综合题 （10 分）

21．平面电磁波在$\varepsilon_1 = 9\varepsilon_0$的媒质 1 中沿＋z 方向传播，在$z = 0$处垂直入射到$\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$的媒质 2 中，

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$。极化为＋x方向，如图 4 所示。

（1）求出媒质 2 中电磁波的相速；

（2）透射系数。

《电磁场与电磁波》试题（8）

一、填空题（每小题 1 分，共 10 分）

1．已知电荷体密度为ρ，其运动速度为$\vec{v}$，则电流密度的表达式为：______________。

2．设线性各向同性的均匀媒质中电位为ϕ，媒质的介电常数为ε，电荷体密度为零，电位所满足的方程为_____________________。

3．时变电磁场中，平均坡印廷矢量的表达式为__________________________。

4．时变电磁场中，变化的电场可以产生_____________。

5．位移电流的表达式为__________________________。

6．两相距很近的等值异性的点电荷称为___________________。

7．恒定磁场是___________场，故磁感应强度沿任一闭合曲面的积分等于零。

8．如果两个不等于零的矢量的叉积等于零，则此两个矢量必然相互_______________。

9．对平面电磁波而言，其电场、磁场和波的________三者符合右手螺旋关系。

10．由恒定电流产生的磁场称为恒定磁场，恒定磁场是连续的场，因此，它可用磁矢位函数的__________来表示。

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．已知麦克斯韦第一方程为$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$，试说明其物理意义，并写出方程的微分形式。

12．什么是横电磁波？

13. 从宏观的角度讲电荷是连续分布的。试讨论电荷的三种分布形式，并写出其数学表达式。

14．设任一矢量场为$\vec{A}(\bar{r})$，写出其穿过闭合曲线 C 的环量表达式，并讨论之。

三、计算题 （每小题 5 分，共 30 分）

15．矢量$\vec{A}=\hat{e}_x 2+\hat{e}_y 3-\hat{e}_z 4$和$\vec{B}=\hat{e}_x$，求

（1）它们之间的夹角；

（2）矢量$\vec{A}$在$\vec{B}$上的分量。

16．矢量场在球坐标系中表示为$\vec{E}=\hat{e}_r r$，

（1）写出直角坐标中的表达式；

（2）在点$(1,2,2)$处求出矢量场的大小。

17．某矢量场$\vec{A}=\hat{e}_x y+\hat{e}_y x$，求

（1）矢量场的旋度；

（2）矢量场$\vec{A}$的在点$(1,1)$处的大小。

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．自由空间中一点电荷电量为 2C，位于$S(1,2,1)$处，设观察点位于$P(3,4,5)$处，求

（1）观察点处的电位；

（2）观察点处的电场强度。

19．无限长同轴电缆内导体半径为a，外导体的内、外半径分别为b和c。电缆中有恒定电流流过

（内导体上电流为I、外导体上电流为反方向的I），设内、外导体间为空气，如图 1 所示。

（1）求$a<r<b$处的磁场强度；

（2）求$r>c$处的磁场强度。

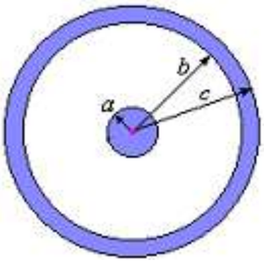

图 1

20．平行板电容器极板长为a、宽为b，极板间距为d，如图 2 所示。设$x=d$的极板上的

自由电荷总量为Q，求

（1）　电容器间电场强度；

（2）　电容器极板间电压。

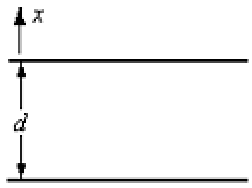

图 2

五、综合题 （10 分）

21．平面电磁波在$\varepsilon_1=9\varepsilon_0$的媒质 1 中沿＋$z$ 方向传播，在$z=0$处垂直入射到$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$的媒质 2 中，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。

极化为＋x方向，如图 3 所示。

（1）求出媒质 2 电磁波的波阻抗；

（2）求出媒质 1 中电磁波的相速。

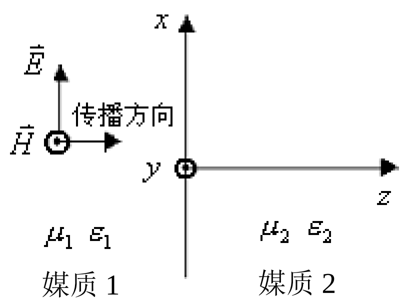

图 3

《电磁场与电磁波》试题（9）

一. 填空题（共 20 分，每小题 4 分）

1. 对于某一标量u和某一矢量$\vec{A}$：

$\nabla\times(\nabla\bullet u)=$______；$\nabla\bullet(\nabla\times\vec{A})=$______。

2. 对于某一标量 u，它的梯度用哈密顿算子表示为__________；在直角坐标系下表示为______________________。

3. 写出安培力定律表达式______________________________。

写出毕奥－沙伐定律表达式________________________。

4. 真空中磁场的两个基本方程的积分形式为________和________。

5. 分析静电矢量场时，对于各向同性的线性介质，两个基本场变量之间的关系为________，通常称它为________。

二. 判断题（共 20 分，每小题 2 分）

正确的在括号中打“√”，错误的打“×”。

1. 电磁场是具有确定物理意义的矢量场，但这些矢量场在一定的区域内并不具有一定的分布规律。（　）

2. 矢量场在闭合路径上的环流和在闭合面上的通量都是标量。（　）

3. 按统一规则绘制出的力线可以确定矢量场中各点矢量的方向，还可以根据力线的疏密判别出各处矢量的大小及变化趋势。（　）

4. 从任意闭合面穿出的恒定电流为零。（　）

5. 在无界真空中，如果电荷分布状态已确定，则他们的电场分布就可以确定。（　）

6. 一根微小的永久磁针周围的磁场分布与微小电流环周围的磁场分布是不同的。（　）

7. 电场强度是“场”变量，它表示电场对带电质点产生作用的能力。（　）

8. 导体或介质所受到的静电力可以由能量的空间变化率计算得出。（　）

9. 静电场空间中，任意导体单位表面所受力等于该导体单位表面的电荷量与该点的电场强度的乘积。（　）

10. 无自由电流区域的磁场边值问题和无自由电荷区域的静电场边值问题完全相似，求解方法也相同。（　）

三. 简答题（共 30 分，每小题 5 分）

1. 解释矢量的点积和差积。

2. 说明矢量场的通量和环量。

3. 当电流恒定时，写出电流连续性方程的积分形式和微分形式。

4. 写出真空中静电场的两个基本方程的积分形式和微分形式。

5. 写出 静电场空间中，在不同的导电媒质交界面上的边界条件。

6. 说明恒定磁场中的标量磁位。

四. 计算题（共 30 分，每小题 10 分）

1. 已知空气填充的平面电容器内的电位分布为$\varphi = ax^2 + b$，求与其相应得电场及其电荷的分布。

2. 一半径为 a 的均匀带电圆盘，电荷面密度为ρ_s，求圆盘外轴线上任一点的电场强度。

3．自由空间中一半径为 a 的无限长导体圆柱，其中均匀流过电流 I，求导体内外的磁感应强度。

《电磁场与电磁波》试题（10）

一、填空题（共 20 分，每小题 4 分）

1. 对于矢量$\overline{A}$，若$\overline{A}=\overline{e}_x A_x+\overline{e}_y A_y+\overline{e}_z A_z$，

则：$\overline{e}_y \bullet \overline{e}_x=$______；$\overline{e}_z \bullet \overline{e}_z=$______；

$\overline{e}_z \times \overline{e}_x=$______；$\overline{e}_x \times \overline{e}_x=$______。

2. 对于某一矢量$\overline{A}$，它的散度定义式为______________；

用哈密顿算子表示为__________。

3. 对于矢量$\overline{A}$，写出：

高斯定理________________________；

斯托克斯定理____________________。

4. 真空中静电场的两个基本方程的微分形式为和______________。

5. 分析恒定磁场时，在无界真空中，两个基本场变量之间的关系为________，通常称它为__________。

二. 判断题（共 20 分，每小题 2 分）

正确的在括号中打“√”，错误的打“×”。

1. 描绘物理状态空间分布的标量函数和矢量函数，在时间为一定值的情况下，它们是唯一的。（ ）

2. 标量场的梯度运算和矢量场的旋度运算都是矢量。（ ）

3. 梯度的方向是等值面的切线方向。（ ）

4. 恒定电流场是一个无散度场。（ ）

5. 一般说来，电场和磁场是共存于同一空间的，但在静止和恒定的情况下，电场和磁场可以独立进行分析。（ ）

6. 静电场和恒定磁场都是矢量场，在本质上也是相同的。（ ）

7. 研究物质空间内的电场时，仅用电场强度一个场变量不能完全反映物质内发生的静电现象。（ ）

8. 泊松方程和拉普拉斯方程都适用于有源区域。（ ）

9. 静电场的边值问题，在每一类的边界条件下，泊松方程或拉普拉斯方程的解都是唯一的。

（　　）

10. 物质被磁化问题和磁化物质产生的宏观磁效应问题是不相关的两方面问题。（　　）

三. 简答题（共 30 分，每小题 5 分）

1. 用数学式说明梯无旋。

2. 写出标量场的方向导数表达式并说明其涵义。

3. 说明真空中电场强度和库仑定律。

4. 实际边值问题的边界条件分为哪几类?

5. 写出磁通连续性方程的积分形式和微分形式。

6. 写出在恒定磁场中，不同介质交界面上的边界条件。

四. 计算题（共 30 分，每小题 10 分）

1. 半 径 分 别 为 a, b (a>b), 球 心 距 为 c (c<a-b) 的 两 球 面 之 间 有 密 度 ρ 为 的 均 匀 电 荷 分 布，
球 半 径 为 b 的 球 面 内 任 何 一 点 的 电 场 强 度 。

2. 总量为 q 的电荷均匀分布在单位半径为 a，介电常数为 ε 的体内，球外为空气，求静电能量。

3. 证明矢位 $\vec{A_1} = \vec{e_x}\cos y + \vec{e_y}\sin x$ 和 $\vec{A_2} = \vec{e_y}(\sin x + x\sin y)$ 给出相同得磁场 $\vec{B}$ 并证明它们
有相同的电流分布，它们是否均满足矢量泊松方程?为什么?

《电磁场与电磁波》试题（11）

一. 填空题（共 20 分，每小题 4 分）

1. 对于矢量 $\overline{A}$，若 $\overline{A} = \overline{e_x} A_x + \overline{e_y} A_y + \overline{e_z} A_z$，

则：$\overline{e_z} \bullet \overline{e_x} =$ ______；$\overline{e_x} \bullet \overline{e_x} =$ ______；

$\overline{e_z} \times \overline{e_y} =$ ______；$\overline{e_y} \times \overline{e_y} =$ ______。

2. 哈密顿算子的表达式为 $\nabla =$ ________________________，

其性质是 ________________________。

3. 电流连续性方程在电流恒定时，

积分形式的表达式为 ________________________；

微分形式的表达式为 ________________________。

4. 静电场空间中，在不同的导电媒质交界面上，边界条件为

_______________和_______________。

5.用矢量分析方法研究恒定磁场时，需要两个基本的场变量，即

____________和____________。

二.判断题（共 20 分，每小题 2 分）

正确的在括号中打“√”，错误的打“×”。

1.电磁场是具有确定物理意义的矢量场，这些矢量场在一定的区域内具有一定的分布规律，除有限个点或面以外，它们都是空间坐标的连续函数。（ ）

2.矢量场在闭合路径上的环流是标量，矢量场在闭合面上的通量是矢量。（ ）

3.空间内标量值相等的点集合形成的曲面称为等值面。（ ）

4.空间体积中有电流时，该空间内表面上便有面电流。（ ）

5.电偶极子及其电场与磁偶极子及其磁场之间存在对偶关系。（ ）

6.静电场的点源是点电荷，它是一种“标量点源”；恒定磁场的点源是电流元，它是一种“矢量性质的点源”。（ ）

7.泊松方程适用于有源区域，拉普拉斯方程适用于无源区域。（ ）

8.均匀导体中没有净电荷，在导体面或不同导体的分界面上，也没有电荷分布。（ ）

9.介质表面单位面积上的力等于介质表面两侧能量密度之差。（ ）

10.安培力可以用磁能量的空间变化率来计算。（ ）

三.简答题（共 30 分，每小题 5 分）

1.说明力线的微分方程式并给出其在直角坐标系下的形式。

2.说明矢量场的环量和旋度。

3.写出安培力定律和毕奥－沙伐定律的表达式。

4.说明静电场中的电位函数，并写出其定义式。

5.写出真空中磁场的两个基本方程的积分形式和微分形式。

6.说 明 矢 量 磁 位 和 库 仑 规 范 。

四.计算题（共 30 分，每小题 10 分）

1.已知 $\varphi = 3x^2 y, \vec{A} = x^2 yz\vec{e_y} + 3xy^2\vec{e_z}$ 求 $rot(\varphi\vec{A})$

2.自由空间一无限长均匀带电直线，其线电荷密度为 ρ_l，求直线外一点的电场强度 $\vec{E}$。

3.半径为 a 的带电导体球，已知球体电位为 U（无穷远处电位为零），试计算球外空间的电位函数。

《电磁场与电磁波》试题（1）参考答案

二、简答题　（每小题 5 分，共 20 分）

11．答：意义：随时间变化的磁场可以产生电场。　　　　　　　　　（3 分）

其积分形式为：$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$　　　　　　　　　（2 分）

12．答：在静电场中，在给定的边界条件下，拉普拉斯方程或泊松方程的解是唯一的，这一定理称为唯一性定理。　　　　　　　　　（3 分）

它的意义：给出了定解的充要条件：既满足方程又满足边界条件的解是正确的。

13．答：电磁波包络或能量的传播速度称为群速。　　　　　　　　　（3 分）

群速 v_g 与相速 v_p 的关系式为：　$v_g = \dfrac{v_p}{1-\dfrac{\omega}{v_p}\dfrac{dv_p}{d\omega}}$　　　　　　　　　（2 分）

14．答：位移电流：$\vec{J}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$　　位移电流产生磁效应代表了变化的电场能够产生磁场，使麦克斯韦能够预言电磁场以波的形式传播，为现代通信打下理论基础。

三、计算题　（每小题 10 分，共 30 分）

15．按要求完成下列题目

（1）判断矢量函数 $\vec{B} = -y^2\hat{e}_x + xz\hat{e}_y$ 是否是某区域的磁通量密度？

（2）如果是，求相应的电流分布。

解：（1）根据散度的表达式

$$\nabla\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$　　　　　　　　　（3 分）

将矢量函数 $\vec{B}$ 代入，显然有

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$　　　　　　　　　（1 分）

故：该矢量函数为某区域的磁通量密度。　　　　　　　　　（1 分）

（2）电流分布为：

$$\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}$$ （2分）

$$=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & xz & 0\end{vmatrix}$$ （2分）

$$=\frac{1}{\mu_0}\left[-x\hat{e}_x+(2y+z)\hat{e}_z\right]$$ （1分）

16．矢量 $\vec{A}=2\hat{e}_x+\hat{e}_y-3\hat{e}_z$，$\vec{B}=5\hat{e}_x-3\hat{e}_y-\hat{e}_z$，求

（1）$\vec{A}+\vec{B}$

（2）$\vec{A}\cdot\vec{B}$

解：（1）$\vec{A}+\vec{B}=7\hat{e}_x-2\hat{e}_y-4\hat{e}_z$ （5分）

（2）$\vec{A}\cdot\vec{B}=10-3+3=10$ （5分）

17．在无源的自由空间中，电场强度复矢量的表达式为

$$\vec{E}=\left(\hat{e}_x 3E_0-\hat{e}_y 4E_0\right)e^{-jkz}$$

（5） 试写出其时间表达式；

（6） 说明电磁波的传播方向；

解：（1）该电场的时间表达式为：$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left(\vec{E}e^{j\omega t}\right)$ （3分）

$$\vec{E}(z,t)=\left(\hat{e}_x 3E_0-\hat{e}_y 4E_0\right)\cos(\omega t-kz)$$ （2分）

（2）由于相位因子为e^{-jkz}，其等相位面在 xoy 平面，传播方向为 z 轴方向。 （5分）

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．均匀带电导体球，半径为a，带电量为Q。试求

（3） 球内任一点的电场

（4） 球外任一点的电位移矢量

解：（1）导体内部没有电荷分布，电荷均匀分布在导体表面，由高斯定理可知在球内处处有：

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=0$$ （3分）

故球内任意一点的电位移矢量均为零，即 （1分）

$$\vec{E}=0 \qquad r<a$$ （1分）

（2）由于电荷均匀分布在$r=a$的导体球面上，故在$r>a$的球面上的电位移矢量的大小处处相等，方向为径向，即$\vec{D}=D_0\hat{e}_r$，由高斯定理有

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q$$ （3 分）

即 $$4\pi r^2 D_0=Q$$ （1 分）

整理可得：$\vec{D}=D_0\hat{e}_r=\dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{e}_r \qquad r>a$ （1 分）

19．设无限长直导线与矩形回路共面，（如图 1 所示），求

（1）判断通过矩形回路中的磁感应强度的方向（在图中标出）；

（2）设矩形回路的法向为穿出纸面，求通过矩形回路中的磁通量。

解：建立如图坐标

（1） 通过矩形回路中的磁感应强度的方向为穿入纸面，即为$\hat{e}_y$方向。 （5 分）

（2） 在xoz平面上离直导线距离为x处的磁感应强度可由下式求出：

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$$ （3 分）

即： $$\vec{B}=\hat{e}_y\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$ （1 分）

通过矩形回路中的磁通量

$$\psi=\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=-\int_{x=d}^{d+b}\int_{z=-a/2}^{a/2}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dxdz=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{d}{d+b}$$ （1分）

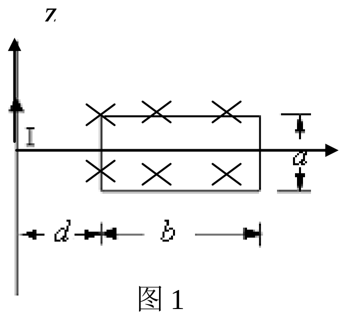

图 1

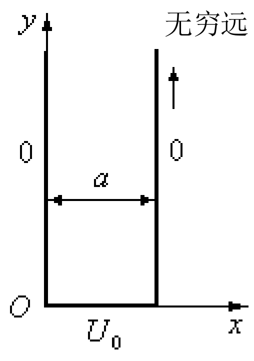

图 2

20．解：（1）由于所求区域无源，电位函数必然满足拉普拉斯方程。

设：电位函数为$\phi(x,y)$，则其满足的方程为：

$$\nabla^2\phi(x,y)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$ （3 分）

（2）利用分离变量法：

$$\phi(x,y)=f(x)g(y)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}+k_x^2 f=0$$
$$\frac{d^2 g}{dy^2}+k_y^2 g=0$$ （2 分）
$$k_x^2+k_y^2=0$$

根据边界条件$\phi\big|_{x=0}=\phi\big|_{x=a}=\phi\big|_{y\to+\infty}=0$，$\phi(x,y)$的通解可写为：

$$\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$ （1 分）

再由边界条件：

$$\phi\big|_{y=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)=U_0$$

求得A_n $$A_n=\frac{2U_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$ （1 分）

槽内的电位分布为 $$\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

五、综合题 （ 10 分）

(7) 21．解：（1）$\vec{H}=\frac{1}{\eta_0}\hat{e}_z\times\vec{E}$ （2 分）

$$\vec{H}=\hat{e}_y\frac{E_0}{\eta_0}e^{-j\beta z}$$ （2 分）

$$\eta_0=120\pi$$ （1 分）

(2) 区域 1 中反射波电场方向为$-\hat{e}_x$（3 分）

磁场的方向为$\hat{e}_y$ （2 分）

《电磁场与电磁波》试题（2）参考答案

二、简述题　（每小题 5 分，共 20 分）

11．　答：磁通连续性原理是指：磁感应强度沿任一闭合曲面的积分等于零，或者是从闭合曲面 S 穿出去的通量等于由 S 外流入 S 内的通量。　　　　　　　　（3 分）

其数学表达式为：$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$　　　　　　　　（2 分）

12．答：当一个矢量场的两类源(标量源和矢量源)在空间的分布确定时，该矢量场就唯一地确定了，这一规律称为亥姆霍兹定理。　　　　　　（3 分）

亥姆霍兹定理告诉我们，研究任意一个矢量场（如电场、磁场等），需要从散度和旋度两个方面去研究，或者是从矢量场的通量和环量两个方面去研究。　　（2 分）

13．答：其物理意义：随时间变化的磁场可以产生电场。　（3 分）

方程的微分形式：$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$　　　　　　（2 分）

14．答：电磁波的电场强度矢量的方向随时间变化所描绘的轨迹称为极化。（2 分）

极化可以分为：线极化、圆极化、椭圆极化。（3 分）

三、计算题　（每小题 10 分，共 30 分）

15．矢量函数 $\vec{A}=-yx^2\hat{e}_x+yz\hat{e}_z$，试求

（1）$\nabla\cdot\vec{A}$

（2）$\nabla\times\vec{A}$

解：（1）
$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\qquad(3分)$$
$$=-2xy+y\qquad(2分)$$

（2）
$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -yx^2 & 0 & yz\end{vmatrix}\qquad(3分)$$
$$=\hat{e}_x z+\hat{e}_z x^2\qquad(2分)$$

16．矢量 $\vec{A}=2\hat{e}_x-2\hat{e}_z$，$\vec{B}=\hat{e}_x-\hat{e}_y$，求

（1）$\vec{A}-\vec{B}$

（2）求出两矢量的夹角

解：（1） $\vec{A}-\vec{B}=2\hat{e}_x-2\hat{e}_z-\left(\hat{e}_x-\hat{e}_y\right)$ (3分）

$=\hat{e}_x+\hat{e}_y-2\hat{e}_z$ （2分）

（2）根据 $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$ （2 分）

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(2\hat{e}_x-2\hat{e}_z\right)\cdot\left(\hat{e}_x-\hat{e}_y\right)=2$$

$$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$ （2 分）

所以 $\theta=60^\circ$ （1 分）

17．解：（1） $\nabla u=\hat{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\hat{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\hat{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$ （3分）

$=\hat{e}_x 2x+\hat{e}_y 2y+\hat{e}_z 2z$ （2分）

（2） $\hat{n}=\frac{\nabla u}{\left|\nabla u\right|}$ （2 分）

所以 $\hat{n}=\frac{\hat{e}_x 2+\hat{e}_y 4}{\sqrt{4+16}}=\frac{\hat{e}_x+\hat{e}_y 2}{\sqrt{5}}$ （3 分）

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．放在坐标原点的点电荷在空间任一点 $\vec{r}$ 处产生的电场强度表达式为

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

（1）求出电力线方程；（2）画出电力线。

解:（1） $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\hat{e}_x x+\hat{e}_y y+\hat{e}_z z\right)$ （2 分）

由力线方程得

$$\frac{x}{dx}=\frac{y}{dy}=\frac{z}{dz}$$ （2 分）

对上式积分得

$$y=C_1 x$$
$$z=C_2 y$$ （1 分）

式中，C_1,C_2 为任意常数。

（2）电力线图 18-2 所示。

（注：电力线正确，但没有标方向得 3 分）

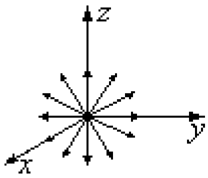

图 18-2

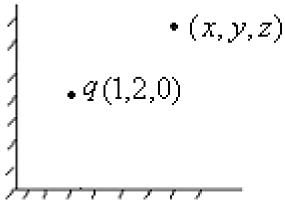

图 1

19．设点电荷位于金属直角劈上方，如图 1 所示，求

（3） 画出镜像电荷所在的位置

（4） 直角劈内任意一点(x, y, z)处的电位表达式

解：（1）镜像电荷所在的位置如图 19−1 所示。

（注：画对一个镜像得 2 分，三个全对得 5 分）

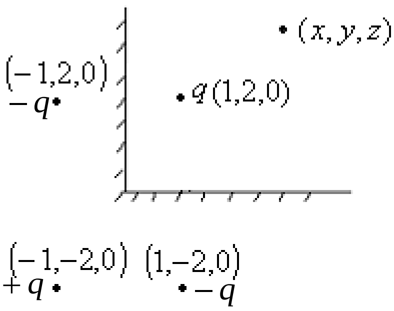

图 19-1

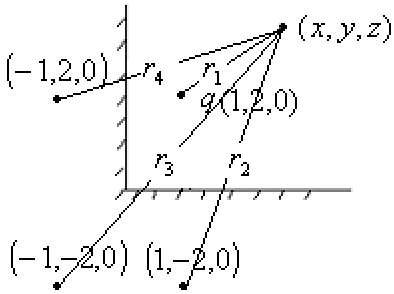

图 19-2

（2）如图 19-2 所示任一点(x, y, z)处的电位为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)$$ （3 分）

其中，

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2} \\ r_3 &= \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2} \\ r_4 &= \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \end{aligned}$$ （2 分）

20．设时变电磁场的电场强度和磁场强度分别为：

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\omega t-\phi_e) \qquad \vec{H}=\vec{H}_0\cos(\omega t-\phi_m)$$

（3） 写出电场强度和磁场强度的复数表达式

（4） 证明其坡印廷矢量的平均值为：$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0\cos(\phi_e-\phi_m)$

解：（1）电场强度的复数表达式

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-j\phi_e}$$ （3 分）

电场强度的复数表达式

$$\vec{H}=\vec{H}_0e^{-j\phi_m}$$ （2 分）

（2）根据 $\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)$得 （2 分）

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_0\times\vec{H}_0e^{-j(\phi_e-\phi_m)}\right)=\frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0\cos(\phi_e-\phi_m)$$ （3 分）

五、综合题 （共 10 分）

21．设沿＋z 方向传播的均匀平面电磁波垂直入射到理想导体，如图 2 所示，该电磁波电场只有 x 分量即 $\vec{E}=\hat{e}_xE_0e^{-j\beta z}$

(8) 求出反射波电场的表达式；

(9) 求出区域 1 媒质的波阻抗。

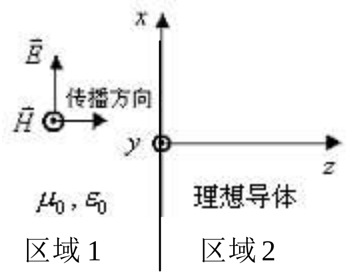

图 2

解：（1）设反射波电场

$$\vec{E}_r=\hat{e}_xE_re^{j\beta z}$$

区域 1 中的总电场为

$$\vec{E}+\vec{E}_r=\hat{e}_x(E_0e^{-j\beta z}+E_re^{j\beta z})$$ （2 分）

根据 $z=0$ 导体表面电场的切向分量等于零的边界条件得

$$E_r=-E_0$$ （2 分）

因此，反射波电场的表达式为

$$\vec{E}_r=-\hat{e}_xE_0e^{j\beta z}$$ （1 分）

（2）媒质 1 的波阻抗

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$ （3 分）

因而得 $\eta = 120\pi = 377(\Omega)$ （2 分）

《电磁场与电磁波》试题（3）参考答案

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．答：它表明时变场中的磁场是由传导电流 $\vec{J}$ 和位移电流 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 共同产生（3 分）。

该方程的积分形式为

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$ （2 分）

12． 答：与传播方向垂直的平面称为横向平面；（1 分）

电磁场 $\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$ 的分量都在横向平面中，则称这种波称为平面波；（2 分）

在其横向平面中场值的大小和方向都不变的平面波为均匀平面波。（2 分）

13．答：静电场为无旋场，故沿任何闭合路径的积分为零；或指出静电场为有势场、保守场

静电场的两个基本方程积分形式：

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

或微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

两者写出一组即可，每个方程 1 分。

14．答：

$$\nabla^2 \phi = -\rho_V / \varepsilon$$ （3 分）

它表示求解区域的电位分布仅决定于当地的电荷分布。（2 分）

三、计算题 （每小题 10 分，共 30 分）

15．用球坐标表示的场$\vec{E}=\hat{e}_r\dfrac{25}{r^2}$，求

（3）　在直角坐标中点（-3，4，5）处的$|E|$；

（4）　在直角坐标中点（-3，4，5）处的E_x分量

解：

（1）在直角坐标中点（-3，4，5）在球坐标中的矢径大小为：

$$r=\sqrt{(-3)^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$$ （2 分）

故该处的电场大小为：

$$|E|=\frac{25}{r^2}=\frac{1}{2}$$ （3 分）

（2）将球坐标中的场表示为

$$\vec{E}=\hat{e}_r\frac{25}{r^2}=\frac{25}{r^3}\vec{r}=\frac{25}{r^3}\left(x\hat{e}_x+y\hat{e}_y+z\hat{e}_z\right)$$ （2 分）

故

$$E_x=\frac{25x}{r^3}$$ （2 分）

将$r=5\sqrt{2}$，$x=-3$代入上式即得：

$$E_x=-\frac{3\sqrt{2}}{20}$$ （1 分）

16．矢量函数$\vec{A}=-x^2\hat{e}_x+y\hat{e}_y+x\hat{e}_z$，试求

（1）$\nabla\cdot\vec{A}$

（2）若在 xy 平面上有一边长为 2 的正方形，且正方形的中心在坐标原点，试求该矢量$\vec{A}$穿过此正方形的通量。

解：

（1）

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$ （3 分）

$$=-2x+1$$ （2 分）

（2）　xy 平面上面元矢量为　$d\vec{S}=\hat{e}_z dx\,d_{\text{、}}$　（2 分）

穿过此正方形的通量为

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_{x=-1}^{+1}\int_{y=-1}^{+1} xdxdy=0$$ （3 分）

17．已知某二维标量场$u(x,y)=x^2+y^2$，求

（1）标量函数的梯度；

（2）求出通过点$(1,0)$处梯度的大小。

解：

（1）对于二维标量场

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\hat{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\hat{e}_y$$ （3 分）

$$=2x\hat{e}_x+2y\hat{e}_y$$ （2 分）

（2）任意点处的梯度大小为

$$|\nabla u|=2\sqrt{x^2+y^2}$$ （2 分）

则在点$(1,0)$处梯度的大小为：

$$|\nabla u|=2$$ （3 分）

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．在无源的自由空间中，电场强度复矢量的表达式为 $\vec{E}=\hat{e}_x 3E_0 e^{-jkz}$

（7） 试写出其时间表达式；

（8） 判断其属于什么极化。

解：

（1）该电场的时间表达式为：$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left(\vec{E}e^{j\omega t}\right)$ （2 分）

$$\vec{E}(z,t)=\hat{e}_x 3E_0\cos(\omega t-kz)$$ （3 分）

(2) 该波为线极化 （5 分）

19. 两点电荷$q_1=-4\mathrm{C}$，位于x轴上$x=4$处，$q_2=4\mathrm{C}$位于轴上$y=4$处，求空间点$(0,0,4)$处的

（3） 电位；

（4） 求出该点处的电场强度矢量。

解：

（1）空间任意一点(x,y,z)处的电位为：

$$\phi(x,y,z)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y-4)^2+z^2}} \qquad \text{（3 分）}$$

将$x=0,y=0,z=4$，$q_1=-4\text{C}$，$q_2=4\text{C}$代入上式得空间点$(0,0,4)$处的电位为：

$$\phi(0,0,4)=0 \qquad \text{（2 分）}$$

（2）空间任意一点(x,y,z)处的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2 \qquad \text{（2 分）}$$

其中，$\vec{r}_1=(x-4)\hat{e}_x+y\hat{e}_y+z\hat{e}_z$， $\vec{r}_2=x\hat{e}_x+(y-4)\hat{e}_y+z\hat{e}_z$

将$x=0,y=0,z=4$，$q_1=-4\text{C}$，$q_2=4\text{C}$代入上式

$r_1=r_2=4\sqrt{2}$

$\vec{r}_1=-4\hat{e}_x+4\hat{e}_z \qquad \vec{r}_2=-4\hat{e}_y+4\hat{e}_z$ （2 分）

空间点$(0,0,4)$处的电场强度

$$\vec{E}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\vec{r}_2=\frac{\sqrt{2}}{64\pi\varepsilon_0}(\hat{e}_x-\hat{e}_y) \qquad \text{（1 分）}$$

20．如图 1 所示的二维区域，上部保持电位为U_0，其余三面电 位为零，

（3） 写出电位满足的方程和电位函数的边界条件

（4） 求槽内的电位分布

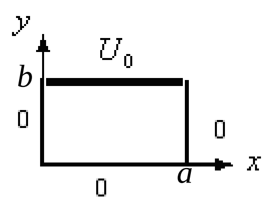

图 1

解：

（1）设：电位函数为$\phi(x,y)$，

则其满足的方程为：

$$\nabla^2\phi(x,y)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad \text{（3 分）}$$

$$\phi|_{x=0}=\phi|_{x=a}=\phi|_{y=0}=0$$

$$\phi\big|_{y=b}=U_0 \qquad\qquad （2 分）$$

（2）利用分离变量法：

$$\phi(x,y)=f(x)g(y)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}+k_x^2 f=0$$
$$\frac{d^2 g}{dy^2}+k_y^2 g=0 \qquad\qquad （2 分）$$
$$k_x^2+k_y^2=0$$

根据边界条件$\phi\big|_{x=0}=\phi\big|_{x=a}=\phi\big|_{y=0}=0$，$\phi(x,y)$的通解可写为：

$$\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

再由边界条件：

$$\phi\big|_{y=b}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)=U_0$$

求得A_n

$$A_n=\frac{2U_0}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}(1-\cos n\pi) \qquad\qquad （2 分）$$

槽内的电位分布为：

$$\phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}(1-\cos n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \qquad （1 分）$$

五、综合题 （10 分）

21．设沿$+z$方向传播的均匀平面电磁波垂直入射到理想导体，如图 2 所示，该电磁波为沿 x 方向的线极化，设电场强度幅度为E_0，传播常数为β。

(10) 试写出均匀平面电磁波入射波电场的表达式；

(11) 求出反射系数。

解：

1. 由题意：

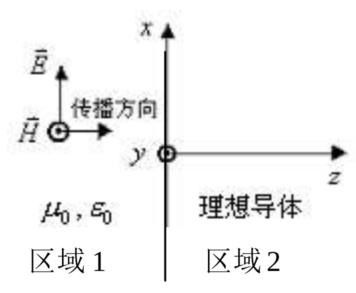

图 2

$\vec{E}=\hat{e}_x E_0 e^{-j\beta z}$　　　　（5 分）

（2）设反射系数为R，

$\vec{E}_r=\hat{e}_x R E_0 e^{+j\beta z}$　　　　（2 分）

由导体表面$z=0$处总电场切向分量为零可得：

$1+R=0$

故反射系数 $R=-1$　　　　（3 分）

《电磁场与电磁波》试题（4）参考答案

二、简述题　（每小题 5 分，共 20 分）

11．答：恒定磁场是连续的场或无散场，即磁感应强度沿任一闭合曲面的积分等于零。产生恒定磁场的源是矢量源。　　(3 分）

两个基本方程：

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \qquad （1 分）$$

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=I \qquad （1 分）$$

(写出微分形式也对)

12．答：设理想导体内部电位为ϕ_2，空气媒质中电位为ϕ_1。

由于理想导体表面电场的切向分量等于零，或者说电场垂直于理想导体表面，因此有

$$\phi_1\big|_S=\phi_2\big|_S \qquad （3 分）$$

$$\varepsilon_0\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right|_S=-\sigma \qquad （2 分）$$

13．答：静电平衡状态下，带电导体是等位体，导体表面为等位面；（2 分）

导体内部电场强度等于零，在导体表面只有电场的法向分量。（3 分）

14．答：在导电媒质中，电磁波的传播速度随频率变化的现象称为色散。　（3 分）

色散将使信号产生失真，从而影响通信质量。　　（2 分）

三、计算题　（每小题 10 分，共 30 分）

15．标量场$\psi(x,y,z)=x^2y^3+e^z$，在点$P(1,-1,0)$处

（1）求出其梯度的大小

（2）求梯度的方向

解：（1）$\nabla\psi = \hat{e}_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}$ （2 分）

$$\nabla\psi = \hat{e}_x 2xy^3 + \hat{e}_y 3x^2y^2 + \hat{e}_z e^z$$

$$\nabla\psi\big|_P = -\hat{e}_x 2 + \hat{e}_y 3 + \hat{e}_z$$ （2 分）

梯度的大小： $\left|\nabla\psi\right|_P = \sqrt{14}$ （1 分）

（2）梯度的方向

$$\hat{n} = \frac{\nabla\psi}{\left|\nabla\psi\right|}$$ （3 分）

$$\hat{n} = \frac{-\hat{e}_x 2 + \hat{e}_y 3 + \hat{e}_z}{\sqrt{14}}$$ （2 分）

16．矢量 $\vec{A} = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y$，$\vec{B} = \hat{e}_x - 3\hat{e}_z$，求

（1）$\vec{A}\times\vec{B}$

（2）$\vec{A}+\vec{B}$

解：（1）根据 $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$ （3 分）

所以 $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\hat{e}_x 6 + \hat{e}_y 3 - \hat{e}_z 2$ （2 分）

（2）$\vec{A}+\vec{B} = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y + \hat{e}_x - 3\hat{e}_z$ （2 分）

$$\vec{A}+\vec{B} = 2\hat{e}_x + 2\hat{e}_y - 3\hat{e}_z$$ （3 分）

17．矢量场 $\vec{A}$ 的表达式为

$$\vec{A} = \hat{e}_x 4x - \hat{e}_y y^2$$

（1）求矢量场 $\vec{A}$ 的散度。

（2）在点$(1,1)$处计算矢量场$\vec{A}$的大小。

解：（1）

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{（3分）}$$
$$=4-2y \qquad \text{（2分）}$$

（2）在点$(1,1)$处 矢量 $\vec{A}=\hat{e}_x 4-\hat{e}_y$ （2 分）

所以矢量场$\vec{A}$在点$(1,1)$处的大小为

$$A=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17} \qquad \text{（3 分）}$$

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．一个点电荷$+q$位于$(-a,0,0)$处，另一个点电荷$-2q$位于$(a,0,0)$处，其中$a>0$。求

（3） 求出空间任一点(x,y,z)处电位的表达式；

（4） 求出电场强度为零的点。

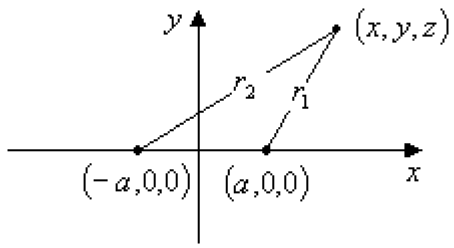

图 18-1

解：（1）建立如图 18-1 所示坐标

空间任一点的电位

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{2}{r_1}\right) \qquad \text{（3 分）}$$

其中，$r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}$ （1 分）

$r_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}$ （1 分）

（2）根据分析可知，电场等于零的位置只能位于两电荷的连线上的$+q$的左侧，（2 分）

设位于x处，则在此处电场强度的大小为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{2}{(x+a)^2}\right) \qquad （2 分）$$

令上式等于零得

$$\frac{1}{(x-a)^2}=\frac{2}{(x+a)^2}$$

求得

$$x=-\left(3+2\sqrt{2}\right)a \qquad （1 分）$$

19．真空中均匀带电球体，其电荷密度为ρ，半径为a，试求

（3） 球内任一点的电位移矢量

（4） 球外任一点的电场强度

解：（1）作半径为r的高斯球面，在高斯球面上电位移矢量的大小不变， （2 分）

根据高斯定理，有

$$D4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3\rho \qquad （2 分）$$

$$\vec{D}=\frac{\rho}{3}\vec{r} \qquad r<a \qquad （1 分）$$

（2）当$r>a$时，作半径为r的高斯球面，根据高斯定理，有

$$D4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi a^3\rho \qquad （2 分）$$

$$\vec{D}=\frac{\rho a^3}{3r^3}\vec{r} \qquad （2 分）$$

电场强度为

$$\vec{E}=\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad （1 分）$$

20． 无限长直线电流I垂直于磁导率分别为μ_1和μ_2的两 种磁介质的交界面，如图 1 所示。试

（3） 写出两磁介质的交界面上磁感应强度满足的方程

（4） 求两种媒质中的磁感应强度 B_1和B_2。

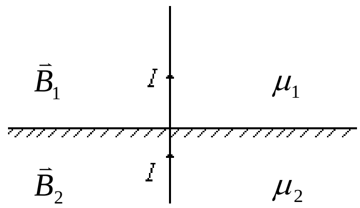

图 1

解：（1）磁感应强度的法向分量连续

$$B_{1n} = B_{2n}$$ （2 分）

根据磁场强度的切向分量连续，即

$$H_{1t} = H_{2t}$$ （1 分）

因而，有

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$ （2 分）

（2）由电流在区域 1 和区域 2 中所产生的磁场均为$\hat{e}_\varphi$，也即是分界面的切向分量，再根据磁场强度的切向分量连续，可知区域 1 和区域 2 中的磁场强度相等。 （2 分）

由安培定律

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$$

得

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$ （1 分）

因而区域 1 和区域 2 中的磁感应强度分别为

$$\vec{B}_1 = \hat{e}_\varphi \frac{\mu_1 I}{2\pi r}$$ （1 分）

$$\vec{B}_2 = \hat{e}_\varphi \frac{\mu_2 I}{2\pi r}$$ （1 分）

五、综合题 （10 分）

21. 设沿＋z 方向传播的均匀平面电磁波垂直入射到理想导体，如图 2 所示，入射波电场的表达式为 $\vec{E} = \hat{e}_y E_0 e^{-j\beta z}$

（1）试画出入射波磁场的方向

（2）求出反射波电场表达式。

解：（1）入射波磁场的方向如图 21-1 所示。

（2）设反射波电场

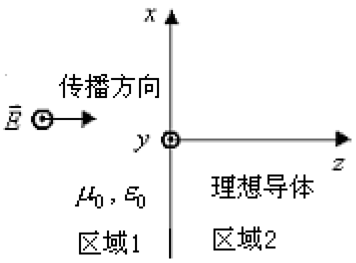

图 2

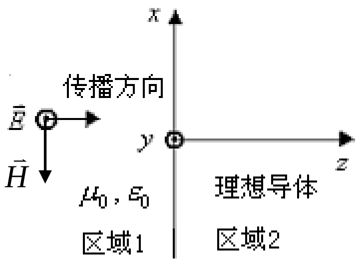

图 21-1

$$\vec{E}_r = \hat{e}_y E_r e^{j\beta z}$$

区域 1 中的总电场为

$$\vec{E} + \vec{E}_r = \hat{e}_y (E_0 e^{-j\beta z} + E_r e^{j\beta z}) \qquad \text{（2 分）}$$

根据 $z = 0$ 导体表面电场的切向分量等于零的边界条件得

$$E_r = -E_0 \qquad \text{（2 分）}$$

因此，设反射波电场为

$$\vec{E}_r = -\hat{e}_y E_0 e^{j\beta z} \qquad \text{（1 分）}$$

《电磁场与电磁波》试题（5）参考答案

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．答：高斯通量定理是指从封闭面发出的总电通量数值上等于包含在该封闭面内的净正电荷。（3 分）

其积分形式和微分形式的表达式分别为：

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} dV = \int_V \rho_V dV$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_V \qquad \text{（2 分）}$$

12．答：变化的电场产生磁场；

变化的磁场产生电场；（3 分）

使电磁场以波的形式传播出去，即为电磁波。（2 分）

13．答：决定不同介质分界面两侧电磁场变化关系的方程称为边界条件。 (5 分)

14．答：其物理意义为：

穿过闭合曲面的磁通量为零，可以理解为：穿过一个封闭面 S 的磁通量等于离开这个封闭面的磁通量，换句话说，磁通线永远是连续的。　（3 分）

其微分形式为：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{（2 分）}$$

三、计算题　（每小题 10 分，共 30 分）

15．已知矢量 $\vec{A} = \hat{e}_x x + \hat{e}_y xy + \hat{e}_z y^2 z$

（3）　求出其散度

（4）　求出其旋度

解

（1）

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{（3 分）}$$

$$= 1 + x + y^2 \qquad \text{（2 分）}$$

（2）

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & y^2 z \end{vmatrix} \qquad \text{(3分）}$$

$$= 2yz\hat{e}_x + y\hat{e}_z \qquad \text{(2分）}$$

16．矢量 $\vec{A} = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y$， $\vec{B} = \hat{e}_x - 3\hat{e}_z$，

（1）分别求出矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的大小

（2） $\vec{A} \cdot \vec{B}$

解：

（1）

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \qquad \text{（3 分）}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \qquad \text{（2 分）}$$

（2）

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad \text{（3 分）}$$

$$=1\times1+2\times0+0\times(-3)=1$$ （2 分）

17．给定矢量函数 $\vec{E}=\hat{e}_x y+\hat{e}_y x$，试

（1）求矢量场 $\vec{E}$ 的散度。

（2）在点 $(3,4)$ 处计算该矢量 $\vec{E}$ 的大小。

解：

（1）

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$ （3 分）

$$=0$$ （2 分）

（2）点 $(3,4)$ 处 $\vec{E}=4\hat{e}_x+3\hat{e}_y$，故其大小为

$$\left|\vec{E}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$$ （5 分）

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．设无限长直线均匀分布有电荷，已知电荷密度为 ρ_l 如图 1 所 示，求

（3） 空间任一点处的电场强度；

（4） 画出其电力线，并标出其方向。

解（1）

由电荷的分布对称性可知，离导线等距离处的电场大小处处相等，方向为沿柱面径向 $\hat{e}_r$，在底面半径为 r 长度为 L 的柱体表面使用高斯定理得：

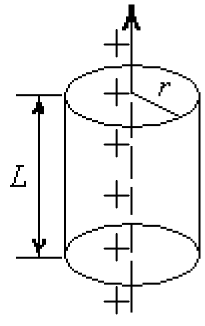

图 1

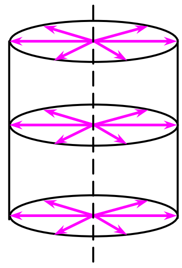
图 18-2

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{顶面} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{底面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$ （3 分）

$$= 2\pi r L E_r + 0 + 0 = \rho_l L / \varepsilon_0$$

可得空间任一点处的电场强度为：

$$\vec{E} = \hat{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ （2 分）

（2）其电力线如图 18-2 所示。（5 分） 注：如图中未标明方向得 3 分

19. 设半径为a的无限长圆柱内均匀地流动着强度为I的电流，设柱外为自由空间，求

（3） 柱内离轴心r任一点处的磁场强度；

（4） 柱外离轴心r任一点处的磁感应强度。

解

（1）由电流的柱对称性可知，柱内离轴心r任一点处的磁场强度大小处处相等，方向为沿柱面切向$\hat{e}_\varphi$，由安培环路定律：

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi r H_\varphi = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I \qquad r < a$$ （3 分）

整理可得柱内离轴心r任一点处的磁场强度

$$\vec{H} = \hat{e}_\varphi \frac{r}{2\pi a^2} I \qquad r < a$$ （2 分）

（2）柱外离轴心r任一点处的磁感应强度也大小处处相等，方向为沿柱面切向$\hat{e}_\varphi$，由安培环路定律：

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I \qquad r > a$$ （3 分）

整理可得柱内离轴心r任一点处的磁感应强度

$$\vec{B} = \hat{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad r > a$$ （2 分）

20．一个点电荷q位于一无限宽和厚的导电板 上方，如图 2 所示，

（3） 计算任意一点的$P(x,y,z)$的电位

（4） 写出$z=0$的边界上电位的边界条件

解:

根据镜像法,镜像点的位置如图 20-1,并建立如图坐标。

（1）任意一点的$P(x,y,z)$的电位表示为

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \qquad （3 分）$$

其中，

$$r_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}$$
$$r_2=\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2} \qquad （2 分）$$

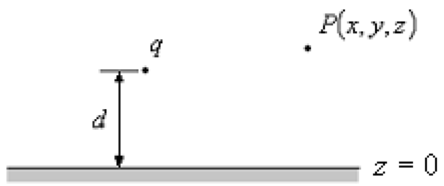

图 2

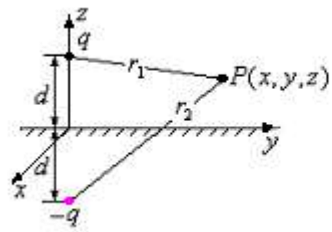

图 20-1

（2）$z=0$的边界上电位的边界条件为

$$\phi\big|_{z=0}=0 \qquad （5 分）$$

五、综合题 （10 分）

21．平面电磁波在$\varepsilon_1=9\varepsilon_0$的媒质 1 中沿$+z$方向传播，在$z=0$处垂直入射到$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$的媒质 2 中，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，如图 3 所示。入射波电场极化为$+x$方向，大小为$E_0$，自由空间的波数为$k_0$，

（1）求出媒质 1 中入射波的电场表达式；

（2）求媒质 2 中的波阻抗。

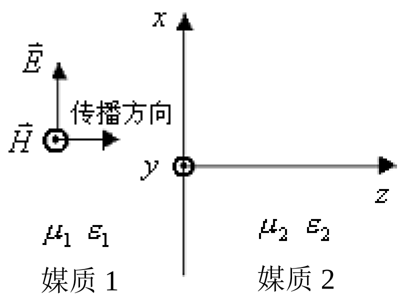

图 3

解：

（1）

在媒质 1 中的波数为

$$k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=\omega\sqrt{\mu_0 9\varepsilon_0}=3k_0$$

(2 分)

媒质 1 中入射波的电场表达式

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_0 e^{-jk_1 z} = \hat{e}_x E_0 e^{-j3k_0 z}$$ （3 分）

（2） 媒质 2 中的波阻抗为

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$ （3 分）

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi$$ （2 分）

《电磁场与电磁波》试题（6）参考答案

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11 答：穿过闭合曲面 S 的通量表达式 $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$ （2 分）

通量表示在单位时间内流体从闭合曲面内流出曲面 S 的正流量与从闭合曲面 S 外流入内部的负流量的代数和，即净流量。 （1 分）

当 $\Phi > 0$，表示流出多于流入，说明此时在 S 内有正源；

当 $\Phi < 0$ 则表示流入多于流出，此时在 S 内有负源；

当 $\Phi = 0$ 则表示流入等于流出，此时在 S 内无源。 （2 分）

12．答：对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷产生的电场称为静电场。（3 分）

静电场是无旋场。 （2 分）

13．答：与传播方向垂直的平面称为横向平面； （1 分）

若电磁场分量都在横向平面中，则称这种波称为平面波；（2 分）

也称为横电磁波即 TEM 波。 （2 分）

14．答：理想导体表面电场所满足的边界条件：

电场的切向分量为零；

$$E_t = 0$$ （3 分）

法向分量满足：

$$E_n = \sigma / \varepsilon_0$$

其中，σ 为导体表面电荷密度。 （2 分）

三、计算题 （每小题 10 分，共 30 分）

15．某矢量函数为 $\vec{E}=-x^2\hat{e}_x+y\hat{e}_y$

（1）试求其散度

（2）判断此矢量函数是否可能是某区域的电场强度（静电场）？

解：

（1）

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$ （3 分）

$$=-2x+1$$ （2 分）

（2）

$$\nabla\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -x^2 & y & 0\end{vmatrix}$$ （2分）

$$=0$$ （1分）

可见，该矢量函数为无旋场，故它可能是某区域的电场强度。 （2 分）

16．已知 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 和 $\vec{C}$ 为任意矢量，若 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$，则是否意味着

（1）$\vec{B}$ 总等于 $\vec{C}$ 呢？

（2）试讨论之。

解：

（1） 不一定 （5 分）

（2）

由： $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$

知： $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}-\vec{C}\right)=0$ （2 分）

此时当有三种可能：

$$\vec{B}=\vec{C}$$

或　　　$\vec{A}=0$

或　　　$\vec{A}$与$\vec{B}-\vec{C}$相互垂直　　　　（3分）

17．在圆柱坐标系中，一点的位置由$\left(4,\dfrac{2\pi}{3},3\right)$定出，求该点在

（1）直角坐标系中的坐标

（2）写出该点的位置矢量。

解：

（1）设直角坐标系中的坐标为(x,y,z)，由圆柱坐标系与直角坐标系转换关系得：

$$x=\rho\cos\varphi=4\cos\frac{2\pi}{3}=-2 \qquad （2分）$$

$$y=\rho\sin\varphi=4\sin\frac{2\pi}{3}=3.464 \qquad （2分）$$

$$z=3 \qquad （1分）$$

（2）任意点的位置矢量为

$$\vec{r}=x\hat{e}_x+y\hat{e}_y+z\hat{e}_z \qquad （3分）$$

将(x,y,z)的数值代入得该点的位置矢量：

$$\vec{r}=-2\hat{e}_x+3.464\hat{e}_y+3\hat{e}_z \qquad （2分）$$

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．设$z=0$为两种媒质的分界面，$z>0$为空气，其介电常数为$\varepsilon_1=\varepsilon_0$，$z<0$为介电常数$\varepsilon_2=5\varepsilon_0$的媒质 2。已知空气中的电场强度为$\vec{E}_1=4\hat{e}_x+\hat{e}_z$，求

（1）空气中的电位移矢量。

（2）媒质 2 中的电场强度。

解：

（1）

空气中的电位移矢量　　$\vec{D}_1=\varepsilon_0\vec{E}_1$　　　　（3分）

$$=4\varepsilon_0\hat{e}_x+\varepsilon_0\hat{e}_z \qquad （2分）$$

（2）由边界条件如图 18-2 所示,

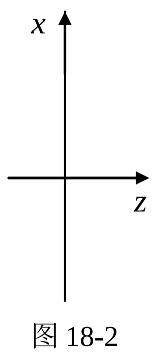

图 18-2

切向分量　　$E_{2x}=E_{1x}=4$

法向分量　　$D_{2z}=D_{1z}=\varepsilon_0$　　　　（3 分）

故：$E_{2z}=D_{2z}/\varepsilon_2=\dfrac{1}{5}$

得媒质 2 中的电场强度为：　$\vec{E}_2=4\hat{e}_x+\dfrac{1}{5}\hat{e}_z$　　　（2 分）

19．设真空中无限长直导线电流为I，沿z轴放置，如图 1 所示。求

（1）空间各处的磁感应强度$\vec{B}$

（2）画出其磁力线，并标出其方向。

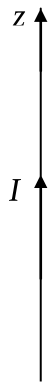

图 1

解：

（1）

由电流的柱对称性可知，柱内离轴心r任一点处的磁场强度大小处处相等，方向为沿柱面切向$\hat{e}_\varphi$，由安培环路定律：

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l}=2\pi rH_\varphi=I \qquad (3\text{ 分})$$

得：
$$\vec{H}=\hat{e}_\varphi\frac{I}{2\pi r}$$

于是空间各处的磁感应强度为：

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}=\hat{e}_\varphi\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (2\text{ 分})$$

(2) 磁力线如图 19-2 所示

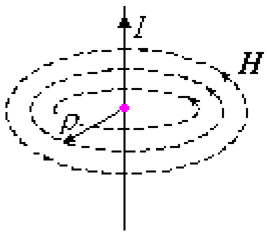

图 19-2

（3 分）

方向：与导线电流方向成右手螺旋。　　　（2 分）

20．平行板电容器极板长为a、宽为b，极板间距为d，设两极板间的电压为U，求

（1）电容器中的电场强度；

（2）上极板上所储存的电荷。

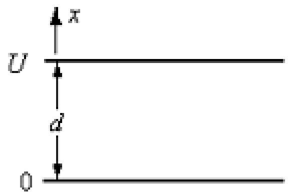

图 2

解

（1）电位满足如下方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=0 \qquad （1 分）$$

边界条件： $\phi|_{x=0}=0 \quad \phi|_{x=d}=U$

方程的通解 $\phi(x)=Cx+D$

由边界条件得： $\phi(x)=\frac{U}{d}x$ （2 分）

故电容器中的电场强度为 $\vec{E}=-\nabla\phi=-\hat{e}_x\frac{U}{d}$ （2 分）

（2）

上极板上的法向矢量为 $\hat{n}=-\hat{e}_x$ （1 分）

故其上的电荷密度为：

$$\sigma=\varepsilon_0\vec{E}\cdot\hat{n}=\frac{\varepsilon_0 U}{d} \qquad （2 分）$$

总的电荷为 $Q=\sigma S=\frac{\varepsilon_0 U}{d}ab$ （2 分）

五、综合题 （10 分）

21．平面电磁波在 $\varepsilon_1=9\varepsilon_0$ 的媒质 1 中沿 $+z$ 方向传播，在 $z=0$ 处垂直入射到 $\varepsilon_2=4\varepsilon_0$ 的媒质 2 中，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。电磁波极化为 $+x$ 方向，角频率为 $300\mathrm{Mrad/s}$，如图 3 所示。

（1）求出媒质 1 中电磁波的波数；

（2）反射系数。

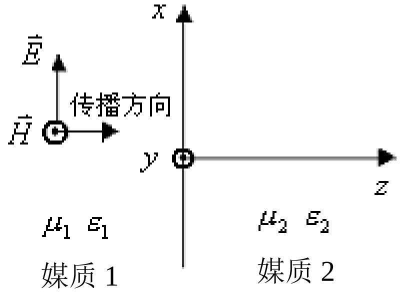

图 3

解

（1）

$$k_0=\frac{\omega}{c}=1 \qquad （1 分）$$

媒质 1 电磁波的波数

$$k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} \qquad （2 分）$$

$$=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{9}=3k_0=3 \qquad （2 分）$$

（2）

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}=\frac{120\pi}{3}=40\pi$$

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}=\frac{120\pi}{2}=60\pi$$ （2 分）

$$R=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{60\pi-40\pi}{60\pi+40\pi}=0.2$$ （3 分）

《电磁场与电磁波》试题（7）参考答案

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．答：恒定电流所产生的不随时间变化的磁场称为恒定磁场； （3 分）

它具有无散、有旋特性 （2 分）

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$$

12．答：当穿过线圈所包围面积S的磁通发生变化时，线圈回路C中将会感应一个电动势；（2 分）感应电动势在闭合回路中引起的感应电流的方向是使它所产生的磁场阻止回路中磁通的变化； （1 分）

$$\oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}$$ （2 分）

13．答：电磁波等相位面传播的速度称为相速。 （3 分）

所谓群速则是包络或者是能量传播的速度；

相速v_p与群速v_g的关系式为： $$v_g=\frac{v_p}{1-\frac{\omega}{v_p}\frac{dv_p}{d\omega}}$$ （2 分）

14．高斯通量定理的微分形式为$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$，试写出其积分形式，并说明其意义。

答：

$$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V\rho_V dV=Q$$ （3 分）

它表明从封闭面发出的总电通量数值上等于包含在该封闭面内的净正电荷。 （2 分）

二、计算题 （每小题 10 分，共 30 分）

15．自由空间中一点电荷位于$S(-3,1,4)$，场点位于$P(2,-2,3)$

（1）写出点电荷和场点的位置矢量

（2）求点电荷到场点的距离矢量$\vec{R}$

解：

（1）

点电荷位置矢量 $\vec{r}_s = -3\hat{e}_x + \hat{e}_y + 4\hat{e}_z$ （3 分）

场点位置矢量 $\vec{r}_f = 2\hat{e}_x - 2\hat{e}_y + 3\hat{e}_z$ （2 分）

（2）

点电荷到场点的距离矢量

$\vec{R} = \vec{r}_f - \vec{r}_s$ （3 分）

$\vec{R} = 5\hat{e}_x - 3\hat{e}_y - \hat{e}_z$ （2 分）

16．某二维标量函数$u = y^2 - x$，求

（1）标量函数梯度∇u

（2）求梯度在正x方向的投影。

解：

（1） 对于二维标量场

$\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\hat{e}_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\hat{e}_y$ （3 分）

$= -\hat{e}_x + 2y\hat{e}_y$ （2 分）

（2）梯度在正x方向的投影

$\nabla u \cdot \hat{e}_x = -1$ （5 分）

18．矢量场$\vec{A} = \hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z z$，求

（1）矢量场的散度

（2）矢量场$\vec{A}$在点$(1,2,2)$处的大小。

解：

（1）

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad （3 分）$$

$$= 1+1+1 = 3 \qquad （2 分）$$

（2）矢量场 $\vec{A}$ 在点 $(1,2,2)$ 处的大小

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad （3 分）$$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \qquad （2 分）$$

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．电偶极子电量为 q，正、负电荷间距为 d，沿 z 轴放置，中心位于原点，求

（1）求出空间任一点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ 处的电位表达式

（2）画出其电力线。

解：

（1）　空间任一点 P 处的坐标为 (x,y,z)

则该点处的电位为：

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \qquad （3 分）$$

其中，

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}$$
$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2} \qquad （2 分）$$

（2）电力线图如图 18-2 所示（5 分）

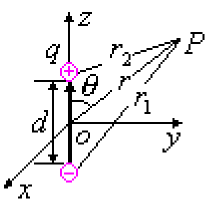

图 1

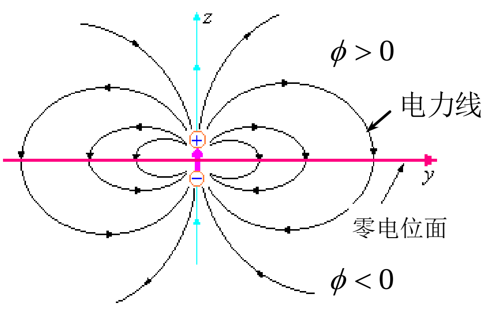

图 18-2

19．同轴线内导体半径为a，外导体半径为b，　内、外导体间介质为空气，其间电压为U

（1）求$r<a$处的电场强度

（2）求$a<r<b$处的电位移矢量

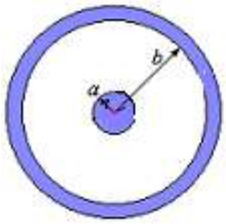

图 2

解：

（1）　导体内部没有电荷分布，故内导体内部$r<a$处的电场强度处处为零。　　　　（5 分）

（2）

设单位长内导体表面电荷密度为ρ_l，由电荷的分布对称性可知，离导线等距离处的电场大小处处相等，方向为沿柱面径向$\hat{e}_r$，在底面半径为r长度为L的柱体表面使用高斯定理得：

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{顶面} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{底面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$
$$= 2\pi rLE_r + 0 + 0 = \rho_l L/\varepsilon_0$$

可得$a<r<b$任一点处的电场强度为：

$$\vec{E} = \hat{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$　　　　（ 3 分）

再由

$$U = \int_{r=a}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{r=a}^{b} \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

得$a<r<b$任一点处的电位移矢量为：

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \hat{e}_r \frac{\varepsilon_0 U}{r\ln(b/a)}$$　　　　（2 分）

20．已知钢在某种磁饱和情况下磁导率$\mu_1 = 2000\mu_0$，当钢中的磁感应强度$\vec{B}_1 = 0.5\times10^{-2}\,\mathrm{T}$、$\theta_1 = 75^\circ$时，此时磁力线由钢进入自由空间一侧后，如图 3 所示。求

（1）$\vec{B}_2$与法线的夹角θ_2

（2）磁感应强度$\vec{B}_2$的大小

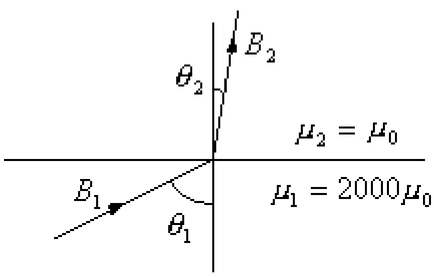

图 3

解：

（1） 由

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (3\text{分})$$

$$\tan\theta_2=\frac{\mu_2}{\mu_1}\tan\theta_1$$

$$\theta_2=0.107^\circ \qquad （2\text{分}）$$

（2） 边界上电流为零，由边界条件

$$B_1\cos\theta_1=B_2\cos\theta_2 \qquad （3\text{分}）$$

$$B_2=B_1\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

$$B_2=0.129\times10^{-2}\,\mathrm{T} \qquad （2\text{分}）$$

五、综合题 （10 分）

21．平面电磁波在$\varepsilon_1=9\varepsilon_0$的媒质 1 中沿$+z$方向传播，在$z=0$处垂直入射到$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$的媒质 2 中，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。极化为$+x$方向，如图 4 所示。

（1）求出媒质 2 中电磁波的相速；

（2）透射系数。

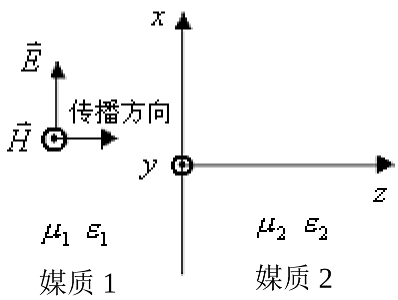

图 4

解：

（1）

媒质 2 中电磁波的相速为：

$$v_{p2}=\frac{1}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}=\frac{1}{2\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \qquad (3\text{分})$$

$$=\frac{c}{2}=1.5\times10^8\,\mathrm{m/s} \qquad (2\text{分})$$

（2）

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} = \frac{120\pi}{3} = 40\pi$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} = \frac{120\pi}{2} = 60\pi$$ （2 分）

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{120\pi}{60\pi + 40\pi} = 1.2$$ （3 分）

《电磁场与电磁波》试题（8）参考答案

二、简述题 （每小题 5 分，共 20 分）

11．答：它表明时变场中的磁场是由传导电流 $\vec{J}$ 和位移电流 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 共同产生 （3 分）。

该方程的积分形式为

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ （2 分）

12．答：与传播方向垂直的平面称为横向平面； （1 分）

若电磁场分量都在横向平面中，则称这种波称为平面波；（2 分）

也称为横电磁波。 （2 分）

13．答：（1）线电荷密度： $\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$ （2 分）

表示单位长电荷量。

（2） 面电荷密度： $\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$ （2 分）

表示单位面积上的电荷量。

（3） 体电荷密度：

$$\rho_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

表示单位体积上的电荷量。 （1 分）

14．答： 定义矢量场 $\vec{A}$ 环绕闭合路径 C 的线积分为该矢量的环量，其表达式为

$$\Gamma = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$ （3 分）

讨论：

如果矢量的环量不等于零，则在C内必然有产生这种场的旋涡源；如果矢量的环量等于零，则我们说在C内没有旋涡源。（2 分）

三、计算题 （每小题 10 分，共 30 分）

15．矢量$\vec{A}=\hat{e}_x 2+\hat{e}_y 3-\hat{e}_z 4$和$\vec{B}=\hat{e}_x$，求

（1）它们之间的夹角

（2）矢量$\vec{A}$在$\vec{B}$上的分量。

解：

（1）

根据$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$ （2 分）

$$A=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=5.385$$

$$B=1$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(2\hat{e}_x+3\hat{e}_y-4\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_x=2$$

$$\cos\theta=\frac{2}{5.385\times 1}=0.3714$$ （2 分）

所以 $\theta=68.12^\circ$ （1 分）

（2）

矢量$\vec{A}$在$\vec{B}$上的分量为 $\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{B}=\vec{A}\cdot\vec{B}=2$ （5 分）

16．矢量场在球坐标系中表示为$\vec{E}=\hat{e}_r r$，

（1）写出直角坐标中的表达式

（2）在点$(1,2,2)$处求出矢量场的大小。

解

（1）直角坐标中的表达式

$$\vec{E}=\hat{e}_r r=\vec{r}$$ (3分）

$$=x\hat{e}_x+y\hat{e}_y+z\hat{e}_z$$ （2分）

(2)

$$E=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (3分)$$
$$=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3 \qquad (2分)$$

17．某矢量场$\vec{A}=\hat{e}_x y+\hat{e}_y x$，求

（1）矢量场的旋度

（2）矢量场$\vec{A}$的在点$(1,1)$处的大小

解：

(1)

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0\end{vmatrix} \qquad （3分）$$
$$=0 \qquad （2分）$$

(2) 矢量场$\vec{A}$的在点$(1,1)$处的大小为：

$$A=\sqrt{y^2+x^2} \qquad （3 分）$$

$$=\sqrt{2} \qquad （2 分）$$

四、应用题 （每小题 10 分，共 30 分）

18．自由空间中一点电荷电量为 2C，位于$S(1,2,1)$处，设观察点位于$P(3,4,5)$处，求

（1）观察点处的电位

（2）观察点处的电场强度。

解：

（1）任意点(x,y,z)处的电位

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}} \qquad （3 分）$$

将观察点代入

$$\phi(3,4,5)=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2+(5-1)^2}} \qquad （2 分）$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{6}\pi\varepsilon_0}$$

（2）

源点位置矢量 $\vec{r}_s = \hat{e}_x + 2\hat{e}_y + \hat{e}_z$

场点位置矢量 $\vec{r}_f = 3\hat{e}_x + 4\hat{e}_y + 5\hat{e}_z$ （2 分）

点电荷到场点的距离矢量

$$\vec{R} = \vec{r}_f - \vec{r}_s = 2\hat{e}_x + 2\hat{e}_y + 4\hat{e}_z$$ （1 分）

$$R = 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(3,4,5) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{R} \\ &= \frac{1}{48\sqrt{6}\pi\varepsilon_0}\left(\hat{e}_x + \hat{e}_y + 2\hat{e}_z\right)\end{aligned}$$ （2 分）

19．无限长同轴电缆内导体半径为a，外导体的内、外半径分别为b和c。电缆中有恒定电流流过（内导体上电流为I、外导体上电流为反方向的I），设内、外导体间为空气，如图 1 所示。

（1）求$a < r < b$处的磁场强度

（2）求$r > c$处的磁场强度。

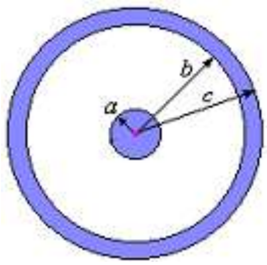

图 1

解：

（1）

由电流的对称性可知，柱内离轴心r任一点处的磁场强度大小处处相等，方向为沿柱面切向$\hat{e}_\varphi$，由安培环路定律：

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi r H_\varphi = I \qquad a < r < b$$ （3 分）

可得 同轴内外导体间离轴心r任一点处的磁场强度

$$\vec{H} = \hat{e}_\varphi \frac{I}{2\pi r} \qquad a < r < b$$ （2 分）

（2）$r > c$区域同样利用安培环路定律

此时环路内总的电流为零，即

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi r H_\varphi = I - I = 0$$ （3 分）

$r > c$ 处的磁场强度为

$$\vec{H}=0 \qquad (2分)$$

20．平行板电容器极板长为a、宽为b，极板间距为d，如图 2 所示。设$x=d$的极板上的自由电荷总量为Q，求

（1） 电容器间电场强度;

（2） 电容器极板间电压。

图 2

解:

（1） 建立如图 20-1 所示坐标。

设上极板的电荷密度为σ，则

$$\sigma=\frac{Q}{ab} \qquad (1分)$$

极板上的电荷密度与电场法向分量的关系为

$$\sigma=\varepsilon_0 E_n=\frac{Q}{ab} \qquad (2分)$$

由于平行板间为均匀电场，故

$$\vec{E}=-\hat{e}_x E_n=-\hat{e}_x\frac{Q}{\varepsilon_0 ab} \qquad (2分)$$

（2） 由:

$$U=\int_{x=d}^{0}\vec{E}\,\hat{e}_x dx \qquad (3分)$$

将上面电场代入得:

$$U=\frac{Qd}{\varepsilon_0 ab} \qquad (2分)$$

五、综合题 （10 分）

21．平面电磁波在$\varepsilon_1=9\varepsilon_0$的媒质 1 中沿$+z$方向传播，在$z=0$处垂直入射到$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$的媒质 2 中，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。极化为$+x$方向，如图 3 所示。

（1）求出媒质 2 电磁波的波阻抗;

（2）求出媒质 1 中电磁波的相速。

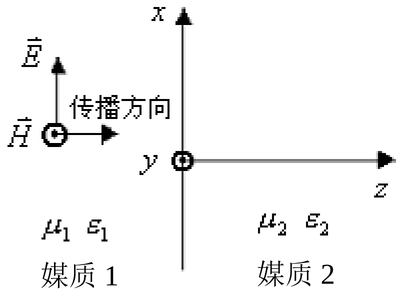

图 3

解

（1） 媒质 2 电磁波的波阻抗

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} \qquad (3分)$$

$$=\frac{120\pi}{2}=60\pi \qquad (2分)$$

（2）媒质 1 中电磁波的相速

$$v_{p1}=\frac{1}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}=\frac{1}{3\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \qquad (3分)$$

$$=\frac{c}{3}=1.0\times10^8\,\text{m/s} \qquad (2分)$$

《电磁场与电磁波》试题（9）参考答案

一. 填空题（共 20 分，每小题 4 分）

1. 0；0

2. $grad u=\nabla u$；$\nabla u=e_x\frac{\partial u}{\partial x}+e_y\frac{\partial u}{\partial y}+e_z\frac{\partial u}{\partial z}$

3. $\vec{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l1}\oint_{l2}\frac{I_1 d\vec{l}_1\times(I_2 d\vec{l}_2\times\vec{e}_r)}{|\vec{r}|^2}$；$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{|\vec{r}|^2}$

4. $\oint_s B\bullet dS=0$；$\oint_c H\bullet dl=I$

5. $D=\varepsilon E$；介质的本构方程

二. 判断题（共 20 分，每小题 2 分）

×，√，√，√，√，×，√，√，×，√

三. 简答题（共 30 分，每小题 5 分）

1. 对于矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$，

$\vec{A}\bullet\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$，其中 θ 为 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 向量的夹角；

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_n|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$，$\vec{e}_n$ 为 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 右手法则确定。

若 $\vec{A}=\vec{e}_x A_x+\vec{e}_y A_y+\vec{e}_z A_z$，$\vec{B}=\vec{e}_x B_x+\vec{e}_y B_y+\vec{e}_z B_z$，

$\vec{A}\bullet\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$；

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e_x}(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{e_y}(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{e_z}(A_xB_y-A_yB_x)$

2.通量：矢量场 A 沿其中有向曲面 S 中某一侧面的曲面积分，

$I_s=\oint_s A\bullet dS$；矢量 $\vec{A}$ 沿场中某一封闭的有向曲线 l 的曲线积分为环量，

$I_l=\oint_l \vec{A}\bullet d\vec{l}$

3. $\oint_s J\bullet dS=0$；$\nabla\bullet J=0$

4. $\oint_s D\bullet dS=q$，$\nabla\bullet D=\rho$；

$\oint_l E\bullet dl=0$，$\nabla\times E=0$

5. $J_{1n}=J_{2n}$ 即 $\gamma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\gamma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$；$E_{1t}=E_{2t}$ 即 $\varphi_1=\varphi_2$

6.在无自由电流的空间(J=0)H 是无旋的，$\nabla\times H=0$，因而 H 可以用一个标量函数的负梯度表示，令 $H=-\nabla\varphi_m$，式中 φ_m 称为标量磁位，单位为安培，其中的负号是为了与电位的定义相对应而人为附加的。

四.计算题（共 30 分，每小题 10 分）

1．由电位分布求解电场强度和电荷分布,一般用关系式 $\vec{E}=-\nabla\varphi,\rho=\nabla\cdot(\varepsilon_0E)$ 可得到

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=-\nabla(ax^2+b)=-2ax\vec{e_x}$$
$$\rho=\nabla\cdot(\varepsilon_0E)=-2a\varepsilon_0$$

2.此题不便应用高斯定律求解。我们利用式 $\varphi=\int_S\frac{\rho_s\mathrm{d}S'}{4\pi\varepsilon_0R^2}$，首先计算轴线上任一点的电位，然后经过求梯度运算得出电场。以无穷远点为零电位参考点，场点（0，0，z）的电位为

$$\varphi=\int_S\frac{\rho_s\mathrm{d}S'}{4\pi\varepsilon_0R}$$

式中电荷分布区域用带撇的坐标 (r',φ',z') 表示，所求场点区域用不带撇的坐标（r, φ, z）表示，积分是在电荷分布的有源区域进行的。

$$\varphi=\frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{z^2+r'^2}}$$

$$=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}[\sqrt{z^2+a^2}-|z|]$$

于是

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=\begin{cases}\vec{e}_z\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] & z>0\\ -\vec{e}_z\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[1+\dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] & z<0\end{cases}$$

由圆盘上电荷分布的对称性也可以判断出，在 Z 轴上电场强度的方向应仅有 $\vec{e}_z$ 分量。

3. 由于电流均匀分布，所以导体中的电流密度 $J=\dfrac{I}{\pi a^2}$

导体内外的磁感应强度关于圆柱轴对称，因此利用安培环路定律求解最为方便。

应用安培环路定律：$\oint_l\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\int_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

在 $r<a$ 处：$2\pi rB_\varphi=\mu_0J\pi r^2$ 所以 $B_\varphi=\dfrac{\mu_0Jr}{2}=\dfrac{\mu_0Ir}{2\pi a^2}$

在 $r>a$ 处：$2\pi rB_\varphi=\mu_0I$ 所以 $B_\varphi=\dfrac{\mu_0I}{2\pi r}$

《电磁场与电磁波》试题（10）参考答案

一、填空题（共 20 分，每小题 4 分）

1. 0，1，$-\vec{e}_y$，0

2. $divA(r)=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\dfrac{\oint_s A(r)\bullet dS(r)}{\Delta\tau}$；$\nabla\bullet\vec{A}$

3. $\int_\tau\nabla\bullet Ad\tau=\oint_s A\bullet dS$；$\oint_C A\bullet dl=\int_S rotA\bullet dS$

4. $\nabla\bullet D=\rho$；$\nabla\times E=0$

5. $B(r)=\mu_0 H(r)$；真空的磁特性方程或本构关系

二. 判断题（共 20 分，每小题 2 分）

√，√，×，√，√，×，√，×，√，×

三. 简答题（共 30 分，每小题 5 分）

1. $\nabla\varphi=\frac{d\varphi}{dx}\overrightarrow{e_x}+\frac{d\varphi}{dy}\overrightarrow{e_y}+\frac{d\varphi}{dz}\overrightarrow{e_z}$

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z}\\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz}\\ \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\varphi}{dz}\end{pmatrix}=(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y})\overrightarrow{e_x}-(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z})\overrightarrow{e_y}+(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y})\overrightarrow{e_z}$$

$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$

2. $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{m0}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\Big|_{m0}$，其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为方向余弦，表示数量场沿某一方向的变化率。

3. 电场强度表示电场中某单位试验正点电荷所受到的力，其定义式为：$\lim_{q\to 0}\frac{F}{q}=E$。库仑定律是描述真空中两个静止点电荷之间相互作用的规律，其表达式为：F=$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\overrightarrow{e_R}$。

4. 实际边值问题的边界条件分为三类：第一类是整个边界上的电位函数均已知，第二类是已知整个边界上的电位法向导数，第三类是一部分边界上电位已知，而另一部分边界上的电位法向导数已知。

5. $\oint_S B\bullet dS=0$；$\nabla\bullet B=0$

6. $n\bullet(B_1-B_2)=0$或$B_{1n}=B_{2n}$；$n\times(H_1-H_2)=J_S$

四. 计算题（共 30 分，每小题 10 分）

1．解：

为了使用高斯定理，再半径为 b 的空腔内分别加上密度为+ρ，-ρ的体电荷，这样，任何一点的电场就当于带正电的大球体和一个带负电的小球体共同作用的结果. 正负电体所成生

的电场分别由高斯定理计算

正电体在空腔内产生的电场为

$$\vec{E}_1=\frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}\vec{e_{r_1}}$$

负电体在空腔内产生的电场为

$$\vec{E}_2=-\frac{\rho r_2}{3\varepsilon_0}\vec{e_{r_2}}$$

单位向量 $\vec{e_{r_1}}$ $\vec{e_{r_2}}$ 分别以大小球体的球心为球面坐标的原点, 考虑到

$$r_1\vec{e_{r_1}}-r_2\vec{e_{r_2}}=c\vec{e_x}=\vec{c}$$

最后得到空腔内的电场为

$$\vec{E}=-\frac{\rho c}{3\varepsilon_0}\vec{e_x}$$

2．解：

$$\vec{E}_1=\frac{\rho r}{3\varepsilon}\vec{e_r}=\frac{\rho r}{4\pi\varepsilon a^3}\vec{e_r}\ ,\vec{E}_2=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e_r}$$

静电能量为

$$W_e=\int\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}dV=\int\frac{1}{2}\varepsilon\cdot E_1{}^2dV+\int\frac{1}{2}\varepsilon_0E_2^2dV$$

$$=\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon(\frac{\rho r}{4\pi\varepsilon a^3})^2 4\pi r^2dr+\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon_0(\frac{\rho r}{4\pi\varepsilon r^3})^2 4\pi r^2dr$$

$$=\frac{q^2}{40\pi\varepsilon a}+\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

3. 证明：

与给定矢位相应的磁场为

$$\vec{B_1}=\nabla\times\vec{A_1}=\begin{pmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \cos y & \sin x & 0\end{pmatrix}=\vec{e_z}(\cos x+\sin y)$$

$$\vec{B_2}=\nabla\times\vec{A_2}=\begin{pmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \sin x+x\sin y & 0\end{pmatrix}=\vec{e_z}(\cos x+\sin y)$$

所以, 两者的磁场相同. 与其相应的电流分布为

$$\overrightarrow{J_1}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\overrightarrow{A_1}=\frac{1}{\mu_0}(\overrightarrow{e_x}\cos y+\overrightarrow{e_y}\sin x)$$

$$\overrightarrow{J_2}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\overrightarrow{A_2}=\frac{1}{\mu_0}(\overrightarrow{e_x}\cos y+\overrightarrow{e_y}\sin x)$$

可以验证, 矢位 $\overrightarrow{A_1}$ 满足矢量泊松方程, 即

$$\nabla^2\overrightarrow{A_1}=\nabla^2(\overrightarrow{e_x}\cos y+\overrightarrow{e_y}\sin x)=-(\overrightarrow{e_x}\cos y+\overrightarrow{e_y}\sin x)=-\mu_0\overrightarrow{J_1}$$

但是 矢位 $\overrightarrow{A_2}$ 不满足矢量泊松方程. 即

$$\nabla^2\overrightarrow{A_2}=\nabla^2[\overrightarrow{e_y}(\sin x+x\sin y)]=-\overrightarrow{e_y}(\sin x+x\sin y)\neq-\mu_0\overrightarrow{J_2}$$

这是由于 $\overrightarrow{A_2}$ 的散度不为 0, 当矢位不满足库仑规范时, 矢位与电流的关系为

$$\nabla\times\nabla\times\overrightarrow{A_2}=-\nabla^2\overrightarrow{A_2}+\nabla(\nabla\cdot\overrightarrow{A_2})=\mu_0\overrightarrow{J_2}$$

可以验证, 对于矢位 $\overrightarrow{A_2}$, 上式成立, 即

$$-\nabla^2\overrightarrow{A_2}+\nabla(\nabla\cdot\overrightarrow{A_2})=\overrightarrow{e_y}(\sin x+x\sin y)+\nabla(x\cos y)$$

$$=\overrightarrow{e_y}(\sin x+x\sin y)+\overrightarrow{e_x}\cos y-\overrightarrow{e_y}x\sin y$$

$$=\overrightarrow{e_y}\sin x+\overrightarrow{e_x}\cos y=\mu_0\overrightarrow{J_2}$$

《电磁场与电磁波》试题（11）参考答案

一. 填空题（共 20 分，每小题 4 分）

1. 0，1，$-\overline{e}_x$，0

2. $\nabla=\overline{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\overline{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\overline{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$；一阶矢性微分算子

3. $\oint_s J\bullet dS=0$；$\nabla\bullet J=0$

4. $J_{1n}=J_{2n}$；$E_{1t}=E_{2t}$

5. 磁感应强度 B(r)；磁场强度 H(r)

二. 判断题（共 20 分，每小题 2 分）

√，×，√，×，√，√，√，×，√，√

三. 简答题（共 30 分，每小题 5 分）

1. 力线上任意点的切线方向必定与该点的矢量方向相同，即(dr/dl)× F(r)=0，上式乘以 dl 后，得 dr×F(r)=0，式中 dr 为力线切向的一段矢量，dl 为力线上的有向微分线段。在直角坐标系内可写成 $\frac{dx}{F_x(r)}=\frac{dy}{F_y(r)}=\frac{dz}{F_z(r)}$

2. 矢量 $\vec{A}$ 沿场中某一封闭的有向曲线 l 的曲线积分为环量，其旋度为该点最大环量面密度。

$I_l=\oint_l \vec{A}\bullet d\vec{l}$，rot $\vec{A}=\nabla\times\vec{A}$

3. $\vec{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l1}\oint_{l2}\frac{I_1 d\vec{l}_1\times(I_2 d\vec{l}_2\times\vec{e_r})}{|\vec{r}|^2}$；$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e_r}}{|\vec{r}|^2}$

4. 静电场是无旋的矢量场，它可以用一个标量函数的梯度表示，此标量函数称为电位函数。静电场中，电位函数的定义为 $E=-grad\varphi=-\nabla\varphi$

5. $\oint_s B\cdot ds=0$；$\nabla\bullet B=0$；$\oint_c H\cdot dl=I$；$\nabla\times H=J$

6. 由于 $\nabla\cdot(\nabla\times A)=0$，而 $\nabla\cdot B=0$，所以令 $B=\nabla\times A$，A 称为矢量磁位，它是一个辅助性质的矢量。从确定一个矢量场来说，只知道一个方程是不够的，还需要知道 A 的散度方程后才能唯一确定 A，在恒定磁场的情况下，一般总是规定 $\nabla\cdot A=0$，这种规定为库仑规范。

四. 计算题（共 30 分，每小题 10 分）

1. 解：

$$rot(\varphi\vec{A})=\nabla\times(\varphi\vec{A})=\varphi\nabla\times\vec{A}+\nabla\varphi\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{pmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz}\\ 0 & x^2yz & 3xy^2\end{pmatrix}=(3xy+x^3y)\vec{e_x}-3y^2\vec{e_y}+3x^2yz)\vec{e_z}$$

而

$$\nabla\varphi\times\vec{A}=\begin{pmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ 6xy & 3x^2 & 0\\ 0 & x^2yz & 3xy^2\end{pmatrix}=9x^3y^2\vec{e_x}-18x^2y^3\vec{e_y}+6x^4y^2z\vec{e_z}$$

所以

$$rot(\varphi\vec{A})=\nabla\times(\varphi\vec{A})=3x^2y^2[(9x-x^3)\vec{e_x}-9y\vec{e_y}+5x^2z\vec{e_z}]$$

2. 解：

由高斯定律可知

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_3}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q/\varepsilon_0$$

据题意上下端面 S_2、 S_3 的面法线方向与电场方向垂直，则上式中对 S_2、S_3 的积分等于零，而侧面 S_1 面的法线方向与电场方向平行，则

$$\int_{S_1}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} E_r \cdot \mathrm{d}S = 2\pi r E_r$$

封闭面内包含的总电荷量 q 为 ρ_1，所以 $E = E_r = \dfrac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$

3.解：球外空间的电位满足拉普拉斯方程，边界条件是 $r = a$ ，$\varphi = U$ ；$r \to \infty$ ，$\varphi = 0$ 。因电位及其场均具有对称性，即 $\varphi = \varphi(r)$，故拉普拉斯方程为

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = 0$$

对上式直接积分得：$\varphi = -\dfrac{C_1}{r} + C_2$

由于 $r \to \infty$ ，$\varphi = 0$ ，故 $C_2 = 0$ ，为了决定常数 $\varphi = U$ ，利用边界条件 $r = a$ ，$\varphi = U$ 得

$$U = -\frac{C_2}{a},\ C_2 = -aU$$

因此 $$\varphi = \begin{cases} \dfrac{aU}{r} & r \ge a \\ U & r \le a \end{cases}$$

众所周知，带电导体是一个等电位体，故上式中 $r \leq a$ 区域内电位处处等于 U。由电场强度 $E(r)$ 可求得电位的负梯度得到

$$E(r) = -\nabla\varphi(r) = -e_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} e_r\dfrac{aU}{r^2} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$