

中图分类号: TP751.1 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2014)06-0852-07

论文引用格式: Tian D, Xue D Y, Yang Y J. Fractional-order primal-dual model and numerical algorithm for denoising[J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(6): 852-858. [田丹, 薛定宇, 杨雅婕. 分数阶原始对偶去噪模型及其数值算法[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(6): 852-858.] [DOI:10.11834/jig.20140605]

分数阶原始对偶去噪模型及其数值算法

田丹^{1,2}, 薛定宇¹, 杨雅婕²

1. 东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 2. 沈阳大学信息工程学院, 沈阳 110044

摘要: **目的** 结合分数阶微积分理论和对偶理论, 提出了一种与分数阶 ROF 去噪模型等价的分数阶原始对偶模型。从理论上分析了该模型与具有鞍点结构的优化模型在结构上的相似性, 从而可使用求解鞍点问题的数值算法求解该模型。**方法** 使用求解鞍点问题的基于预解式的原始对偶算法对提出模型进行求解, 并采用自适应变步长迭代优化策略提高寻优效率, 弥补了传统数值算法对步长要求过高的缺陷。同时论证了确保算法收敛性的参数取值范围。**结果** 实验结果表明, 提出的分数阶原始对偶模型能够有效地抑制“阶梯效应”, 保护纹理和细节信息, 同时采用的数值算法具有较快的收敛速度。**结论** 提出了一种分数阶原始对偶去噪模型, 该模型可采用一种基于预解式的原始对偶算法进行求解。实验结果表明, 提出的模型能有效改善图像的视觉效果, 采用的数值算法能有效快速收敛。

关键词: 图像去噪; 变分法; 分数阶梯度; 鞍点问题; 原始对偶; 阶梯效应

Fractional-order primal-dual model and numerical algorithm for denoising

Tian Dan^{1,2}, Xue Dingyu¹, Yang Yajie²

1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China;

2. School of Information Engineering, Shenyang University, Shenyang 110044, China

Abstract: Objective By combining fractional calculus and duality theory, a novel fractional-order primal-dual model, which is equivalent with the fractional ROF model, is proposed. We theoretically analyze its structural similarity with the saddle-point optimization model. So the algorithms for solving the saddle-point problem can be used for solving the model.

Method The primal-dual algorithm based on resolvent for solving the saddle-point problem is used for solving the proposed model. The adaptive variable step size iterative optimization strategy is used, which can improve the optimizing efficiency, and remedy the step size limitation of the traditional numerical algorithms. In order to guarantee the convergence of the algorithm, the range of the parameter is given. **Result** The experiment results show that the proposed fractional-order primal-dual model is effective in avoiding the staircase effect and preserving texture and detail information, and the adoptive numerical algorithm has faster convergence speed. **Conclusion** In this paper, we propose a fractional-order primal-dual denoising model, which can be solved by a primal-dual algorithm based on resolvent. The experiment results show that the proposed model can improve the image visual effect effectively, and the adoptive numerical algorithm has faster convergence speed.

Key words: image denoising; variation method; fractional-order gradient; saddle-point problem; primal-dual; staircase effect

收稿日期: 2013-10-13; 修回日期: 2014-01-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(61201378); 国家级“大学生创新创业训练计划”项目(201311035006); 辽宁省教育厅科学研究一般项目(L2013448)

第一作者简介: 田丹(1980—), 女, 讲师, 东北大学系统仿真与应用专业在读博士研究生, 主要研究方向为数字图像处理、分数阶微积分理论的应用。E-mail: www.sltd2008@163.com

0 引言

图像去噪是数字图像处理领域的重要研究课题之一,其主要目的是改善图像质量,便于图像处理后续工作的进行。目前,该领域的研究热点和难点之一,是图像噪声和边缘均属于图像中的高频信息,如何寻找既能有效消除噪声,又能同时保留图像边缘等细节特征的去噪方法。为了解决这一问题,1992年 Rudin 等人^[1]提出了著名的全变分正则化模型,又称 ROF 模型。该模型通过引入能量函数,将图像去噪问题转化为泛函求极值问题。所采用的函数空间允许存在跳跃间断,因此可以较好地保持图像的边缘。然而该模型建立在有界变差(BV)空间,而BV空间的函数具有分段平滑特性,所以去噪后易产生“阶梯效应”,即出现分段平滑现象。近年来,综合考虑具有一阶正则项的 ROF 模型易产生“阶梯效应”,而具有高阶正则项的变分模型虽能抑制“阶梯效应”,但去噪效果不佳的缺点^[2,4],一些学者将分数阶微分理论引入到变分模型中,以解决该新衍生的问题,取得了较好的效果。例如,Zhang 等人^[5]提出了一种分数阶多尺度图像去噪模型,并采用 Chambolle 的投影算法^[6]求解模型。Zhang 等人^[7]提出了一种分数阶变分图像修复模型,并采用梯度下降算法^[8]求解模型。此外,Chen 等人^[9]提出了一种分数阶 TV-L2 图像去噪模型,并采用 Bioucas 的 MM(majorization-minimization)算法^[10]求解模型。

本文重点研究分数阶变分图像去噪模型的数值计算。研究发现通过对分数阶 ROF 去噪模型作等价变换可得到一种分数阶原始对偶去噪模型,该模型在结构上与具有鞍点结构的优化模型形式相近,可建立对应关系,故可采用一种求解鞍点问题的更为灵活且收敛速度较快的原始对偶算法^[11]求解。针对算法中定义参数,结合分数阶梯度算子的性质,给出了其取值范围,以保证算法的收敛性。实验结果表明,提出的分数阶原始对偶模型和现有的分数阶去噪模型具有相同的特性,即能有效抑制“阶梯效应”,保留更多的图像细节特征。同时采用的原始对偶算法与一些现有的求解分数阶问题的变分算法相比,收敛速度更快。

1 分数阶原始对偶去噪模型的提出

1.1 ROF 去噪模型

1992年,Rudin、Osher 和 Fatemi 提出了著名的

全变分正则化模型,又称 ROF 模型,将图像去噪问题建模为优化问题,表示为

$$\min_{u \in X} \left(\|\nabla u\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|u - g\|_2^2 \right) \quad (1)$$

式中, X 表示有限维向量空间, $\|\cdot\|_v$ 表示 v 范数, ∇ 表示梯度算子, u 表示去噪后图像, g 表示观测图像, λ 表示正则化参数。

模型中第一项称为正则项,在优化过程中起到抑制噪声的作用。第二项称为保真项,主要作用是保持去噪后图像与观测图像的相似性,从而保持图像的边缘特征。而正则化参数 λ 用于平衡正则项与保真项的作用。

下面给出正则项离散形式的定义。假定待处理图像的大小为 $M \times N$,则变分模型中梯度算子的离散化形式为

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2) \quad (2)$$

式中

$$(\nabla u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & i < M \\ 0 & i = M \end{cases} \quad (3)$$

$$(\nabla u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & j < N \\ 0 & j = N \end{cases}$$

则正则项的离散形式可具体定义为

$$\|\nabla u\|_1 = \sum_{i,j} |(\nabla u)_{i,j}| \quad (4)$$

式中

$$|(\nabla u)_{i,j}| = \sqrt{((\nabla u)_{i,j}^1)^2 + ((\nabla u)_{i,j}^2)^2} \quad (5)$$

1.2 分数阶 ROF 去噪模型

在分数阶微分理论发展过程中,出现了多种函数的分数阶微分定义。利用其中的 Grünwald-Letnikov(G-L)定义^[12]构造分数阶梯度算子,其离散形式为

$$(\nabla^\alpha u)_{i,j} = ((\Delta_1^\alpha u)_{i,j}, (\Delta_2^\alpha u)_{i,j}) \quad (6)$$

式中

$$(\Delta_1^\alpha u)_{i,j} = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\alpha u_{i-k,j}$$

$$(\Delta_2^\alpha u)_{i,j} = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\alpha u_{i,j-k} \quad (7)$$

$$C_k^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (8)$$

式中, K 表示分数阶梯度算子的展开项数, $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数。

将 ROF 去噪模型的正则项由一阶扩展到分数阶可得到分数阶 ROF 去噪模型,其离散形式可表示为

$$\min_{u \in X} \left(\|\nabla^\alpha u\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|u - g\|_2^2 \right) \quad (9)$$

模型中分数阶正则项的离散形式可具体定义为

$$\|\nabla^\alpha u\|_1 = \sum_{i,j} |(\nabla^\alpha u)_{i,j}| \quad (10)$$

式中

$$|(\nabla^\alpha u)_{i,j}| = \sqrt{((\Delta_1^\alpha u)_{i,j})^2 + ((\Delta_2^\alpha u)_{i,j})^2} \quad (11)$$

不难看出,一阶梯度算子是由有限项组成的局部算子,而分数阶梯度算子是由无限项组成的全局算子,故分数阶 ROF 模型较经典的一阶 ROF 模型考虑了更多的图像邻域信息,能保护更多的图像细节特征。

1.3 分数阶原始对偶去噪模型及其与鞍点优化模型的关系

结合分数阶微积分理论和对偶理论,等价变换分数阶 ROF 去噪模型,提出一种分数阶原始对偶去噪模型。首先给出分数阶散度的定义:

定义1 对于任意的2维变量 $p = (p^1, p^2) \in Y$, Y 表示有限维向量空间,分数阶散度的离散形式可定义为

$$\operatorname{div}^\alpha p = (\operatorname{div}^\alpha p)_{i,j} \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$$

式中

$$(\operatorname{div}^\alpha p)_{i,j} = (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\alpha p_{i+k,j}^1 + (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k C_k^\alpha p_{i,j+k}^2 \quad (13)$$

文献[5]中证明了分数阶 ROF 模型中的分数阶正则项可作如下等价变换,即

$$\|\nabla^\alpha u\|_1 = \sup_p \langle p, \nabla^\alpha u \rangle_Y = \sup_p \langle (-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p, u \rangle_X$$

$$\text{当且仅当 } |p_{i,j}| = \sqrt{(p_{i,j}^1)^2 + (p_{i,j}^2)^2} \leq 1 \quad (14)$$

式中, $(\cdot)$ 表示共轭运算。

依据该特性提出一种分数阶原始对偶去噪模型,即分数阶 ROF 去噪模型的原始对偶描述,表示为

$$\min_{u \in X} \max_{p \in Y} \langle (-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p, u \rangle_X + \frac{\lambda}{2} \|u - g\|_2^2 - \delta_P(p) \quad (15)$$

式中, $P = \{p \in Y \mid \|p\|_\infty = \max_{i,j} |p_{i,j}| \leq 1\}$ 表示对偶空间。 $\delta_P(\cdot)$ 是对偶空间中的指示函数,即分数阶正则项的拓扑对偶,表示为

$$\delta_P(p) = \begin{cases} 0 & p \in P \\ +\infty & p \notin P \end{cases} \quad (16)$$

而分数阶 ROF 图像去噪模型对偶描述的推导,可令式(15)原始对偶模型中对偶变量 p 固定,对原始变量 u 求导,得

$$u = g - \frac{(-1)^\alpha}{\lambda} \operatorname{div}^\alpha p \quad (17)$$

再代回到式(15),可得到对偶问题描述,即

$$\max_{p \in Y} \left(\langle (-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p, g \rangle_Y - \frac{1}{2\lambda} \|(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p\|_2^2 - \delta_P(p) \right) \quad (18)$$

下面分析提出的分数阶原始对偶去噪模型与具有鞍点结构的优化模型在形式上的相似性。具有鞍点结构的优化问题可描述为^[11]

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} (\langle Ax, y \rangle + G(x) - F^*(y)) \quad (19)$$

式中, X, Y 表示有限维实向量空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, A 表示任意线性算子, G 和 F 表示任意函数, F^* 表示 F 的拓扑对偶。

将优化模型中变量 x 看成原始变量,变量 y 看成对偶变量,则可将此鞍点问题看成是如下原始问题和对偶问题的原始对偶描述。其中,原始问题可表示为

$$\min_{x \in X} (F(Ax) + G(x)) \quad (20)$$

对偶问题可表示为

$$\max_{y \in Y} - (G^*(-A^*y) + F^*(y)) \quad (21)$$

不难看出,如将原始问题式(20)与分数阶 ROF 模型建立对应关系,即令 $F(Ax)$ 对应分数阶正则项, $G(x)$ 对应保真项。则提出的分数阶原始对偶去噪模型可与鞍点优化模型建立对应关系,即 $A = (-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha, G(u) = \frac{\lambda}{2} \|u - g\|_2^2, F^*(p) = \delta_P(p)$ 。

2 分数阶原始对偶数值算法

针对具有鞍点结构的优化问题,文献[11]中提出了一种基于预解式的原始对偶数值计算方法。令原始变量 x 固定,对对偶变量 y 求导,可得到变量 y 的预解式为

$$y = (I + \nabla F^*)^{-1}(y + Ax) \quad (22)$$

同理,令对偶变量 y 固定,对原始变量 x 求导,可得到变量 x 的预解式为

$$x = (I + \nabla G)^{-1}(x - Ay) \quad (23)$$

式中, ∇F^* 和 ∇G 分别对应函数 F^* 和 G 的梯度。定

义参数 $L = \|A\| = \max\{\|Ax\| \mid x \in X, \|x\| \leq 1\}$, 则当函数 F^* 和 G 中至少有一个为凸函数时, 算法可描述如下:

1) 初始化. 给定初始步长 $\tau_0 > 0, \sigma_0 > 0$, 且满足 $\tau_0 \sigma_0 L^2 \leq 1$. 令 $(x^0, y^0) \in X \times Y, \bar{x}^0 = x^0$.

2) 计算

$$\begin{cases} y^{n+1} = (I + \sigma_n \nabla F^*)^{-1}(y^n + \sigma_n A \bar{x}^n) \\ x^{n+1} = (I + \tau_n \nabla G)^{-1}(x^n - \tau_n A^* y^{n+1}) \\ \theta_n = 1/\sqrt{1+2\gamma\tau_n}, \tau_{n+1} = \theta_n \tau_n, \sigma_{n+1} = \sigma_n/\theta_n \\ \bar{x}^{n+1} = x^{n+1} + \theta_n(x^{n+1} - x^n) \end{cases} \quad (24)$$

3) 计算原始对偶间隔, 定义为

$$\zeta(x, y) = \max_{y' \in Y} (\langle y', Ax \rangle - F^*(y') + G(x)) - \min_{x' \in X} (\langle y, Ax' \rangle - F^*(y) + G(x')) \quad (25)$$

当该指标满足给定的迭代终止条件时, 迭代终止; 否则, 令 $n = n + 1$, 转步骤 2)。

不难看出, 原始对偶间隔是对偶问题和原始问题的目标函数差值。该差值在鞍点处可达到最小^[11], 故以该指标设定阈值, 可保证算法收敛到最优解。

考虑到提出的分数阶原始对偶去噪模型与具有鞍点结构的优化模型在形式上的相似性, 并且去噪模型中保真项 $G(u) = \frac{\lambda}{2} \|u - g\|_2^2$ 为凸函数, 满足算法的前提条件, 故可采用上述数值算法实现图像去噪的优化过程。该算法实现了自适应变步长迭代, 可有效提高寻优效率, 弥补了一些传统数值算法对步长要求过高的缺陷。

在数值算法实现中, 需要确定预解算子 $(I + \sigma \nabla F^*)^{-1}$, $(I + \tau \nabla G)^{-1}$ 和线性算子 A 。因为 $F^*(p) = \delta_p(p)$, $G(u) = \frac{\lambda}{2} \|u - g\|_2^2$, 所以

$$p = (I + \sigma \nabla F^*)^{-1}(\tilde{p}) \Leftrightarrow p_{i,j} = \frac{\tilde{p}_{i,j}}{\max(1, |\tilde{p}_{i,j}|)} \quad (26)$$

$$u = (I + \tau \nabla G)^{-1}(\tilde{u}) \Leftrightarrow u_{i,j} = \frac{\tilde{u}_{i,j} + \tau \lambda g_{i,j}}{1 + \tau \lambda} \quad (27)$$

式中, $\tilde{p} = p + \sigma A \bar{u}$, $\tilde{u} = u - \tau A^* p$, $A = (-1)^\alpha \text{div}^\alpha$ 。

下面具体给出求解提出的分数阶原始对偶去噪模型的算法流程:

1) 初始化. 给定初始步长 $\tau_0 > 0, \sigma_0 > 0$, 且满足 $\tau_0 \sigma_0 L^2 \leq 1$. 令 $(u^0, p^0) \in X \times Y, \bar{u}^0 = u^0$ 。

2) 计算

$$\begin{cases} p^{n+1} = (p^n + \sigma_n A \bar{u}^n) / \max(1, |p^n + \sigma_n A \bar{u}^n|) \\ u^{n+1} = (u^n - \tau_n A^* p^{n+1} + \tau_n \lambda g) / (1 + \tau_n \lambda) \\ \theta_n = 1/\sqrt{1+2\gamma\tau_n}, \tau_{n+1} = \theta_n \tau_n, \sigma_{n+1} = \sigma_n/\theta_n \\ \bar{u}^{n+1} = u^{n+1} + \theta_n(u^{n+1} - u^n) \end{cases} \quad (28)$$

式中, $A = (-1)^\alpha \text{div}^\alpha$ 。

3) 计算原始对偶间隔, 定义如下:

$$\zeta(u, p) = \max_{p' \in Y} (\langle p', Au \rangle - F^*(p') + G(u)) - \min_{u' \in X} (\langle p, Au' \rangle - F^*(p) + G(u')) \quad (29)$$

当该指标满足给定的迭代终止条件时, 迭代终止; 否则, 令 $n = n + 1$, 转步骤 2)。

下面考虑算法的收敛性问题, 文献[11]中已给出了收敛性证明, 但需满足参数 L 的定义, 故这里求取参数 L 的取值范围。

因为

$$\begin{aligned} \|(-1)^\alpha \text{div}^\alpha p\|^2 &= \sum_{i,j} (w_0 p_{i,j}^1 + w_1 p_{i+1,j}^1 + \cdots + w_{K-1} p_{i+K-1,j}^1 + \\ &\quad w_0 p_{i,j}^2 + w_1 p_{i,j+1}^2 + \cdots + w_{K-1} p_{i,j+K-1}^2)^2 \leq \\ &2K \times \sum_{i,j} (w_0 p_{i,j}^1)^2 + (w_0 p_{i,j}^2)^2 + (w_1 p_{i+1,j}^1)^2 + \\ &\quad (w_1 p_{i,j+1}^2)^2 + \cdots + (w_{K-1} p_{i+K-1,j}^1)^2 + (w_{K-1} p_{i,j+K-1}^2)^2 \leq \\ &2K \times (w_0^2 + w_1^2 + \cdots + w_{K-1}^2) \|p\|^2 \leq \\ &2K \times (w_0^2 + w_1^2 + \cdots + w_{K-1}^2) \end{aligned}$$

所以

$$L = |A| = \|(-1)^\alpha \text{div}^\alpha\| \leq \sqrt{2K \times (w_0^2 + w_1^2 + \cdots + w_{K-1}^2)} \quad (30)$$

式中, $w_i = (-1)^i C_i^\alpha$, K 表示分数阶散度定义中展开的项数。

3 数值实验与分析

基于预解式的原始对偶算法中, 需要计算分数阶算子 $A = (-1)^\alpha \text{div}^\alpha$ 的伴随算子 A^* , 如将图像视为向量, 根据线性代数理论, 可得出作用于向量时 A 的伴随矩阵等于 A 的转置。为了方便算法的实现,

实验中首先对图像进行向量化处理。即通过逐行扫描的方式,将图像矩阵转换为列向量,这样对于 $M \times N$ 的图像,图像矩阵的位置 (i,j) 对应列向量中的位置 $(i-1) \times N + j$ 。

算法参数设定如下,分数阶散度算子中令 $K = 20$,算法初始步长 $\sigma_0 = \tau_0 = 1/L$ 。为了保证数据项 $G(u)$ 的一致凸特性,应满足 $\gamma = c \times \lambda$,其中, $c \in (0, 1]$,这里令 $c = 0.35$ 。 λ 表示 ROF 模型的调整参数,即保真项的权值,该值受噪声强度、图像内容、灰度值范围等因素的影响。但对于某一特定图像,只有在某个值的邻域内,去噪效果才会比较好。用试错法进行确定,前提条件是保证去噪图像峰值信噪比尽可能大。

3.1 分数阶原始对偶模型去噪效果的分析

首先,从频域角度分析模型中分数阶次的选取范围。图 1 中给出了分数阶微分在几个典型阶次 α 下的幅频特性响应曲线。不难看出,随着阶次的增加,信号的中频和低频成分能有效增强。针对图像,中频成分对应图像的纹理部分,高频成分对应图像的边缘和噪声部分。综合考虑模型对噪声的抑制能力和对图像细节特征的保护能力,本文选取 $\alpha \in (1, 2)$ 。

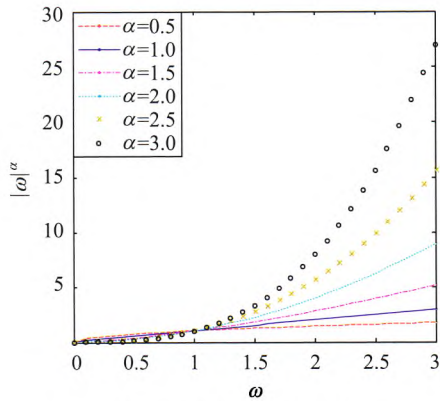


图 1 幅频特性响应曲线
Fig. 1 Amplitude-frequency response

为了分析模型的去噪性能,首先选取临床心脏超声图像作为测试图像,定性分析不同分数阶次下,模型的去噪效果,如图 2 所示。实验中设定迭代次数 $n = 200$,调整参数 $\lambda = 8$ 。

图 2 中可清晰看出分数阶模型较一阶模型能有效抑制“阶梯效应”,即分段平滑现象。而与二阶模型相比,能更有效地去除噪声。随着分数阶次的增加,图像的细节保护能力能有效增强,但也残留更多的噪声成分。这一结果符合前面关于分数阶微分的

万方数据

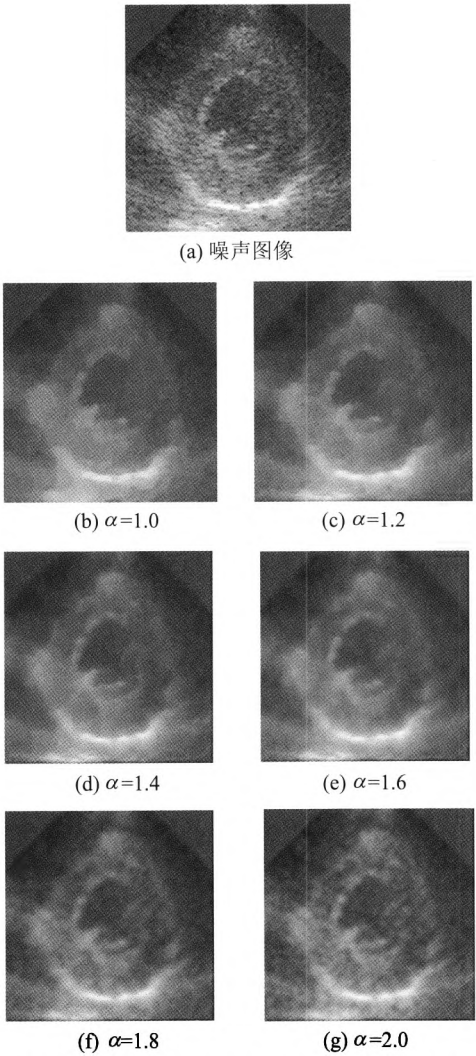


图 2 不同阶次下心脏超声图像去噪效果比较
Fig. 2 Comparison of denoised results under different orders on a cardiac ultrasound image

频率特性分析。

采用峰值信噪比 (PSNR) 作为量化指标,进行评价和定量分析模型的去噪性能。

$$PSNR = 10 \lg \frac{\max_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N} |(u_0)_{i,j}|^2}{\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [(u_0)_{i,j} - u_{i,j}]^2} \quad (31)$$

式中, u_0 表示无噪声的原始图像, u 表示去噪后图像。

该指标适用于原始图像已知情况下,去噪性能的测试。这里选取标准 Lena 图像作为测试图像,并加入均值为 0,标准差分别为 10、20 和 30 的高斯白噪声。设定实验的迭代次数 $n = 200$,比较不同分数阶次作用下的去噪效果。图 3 中给出了标准差为

20 时,几个典型阶次作用下,去噪效果图及其局部图的比较。表 1 中给出了去噪图像峰值信噪比的比较。

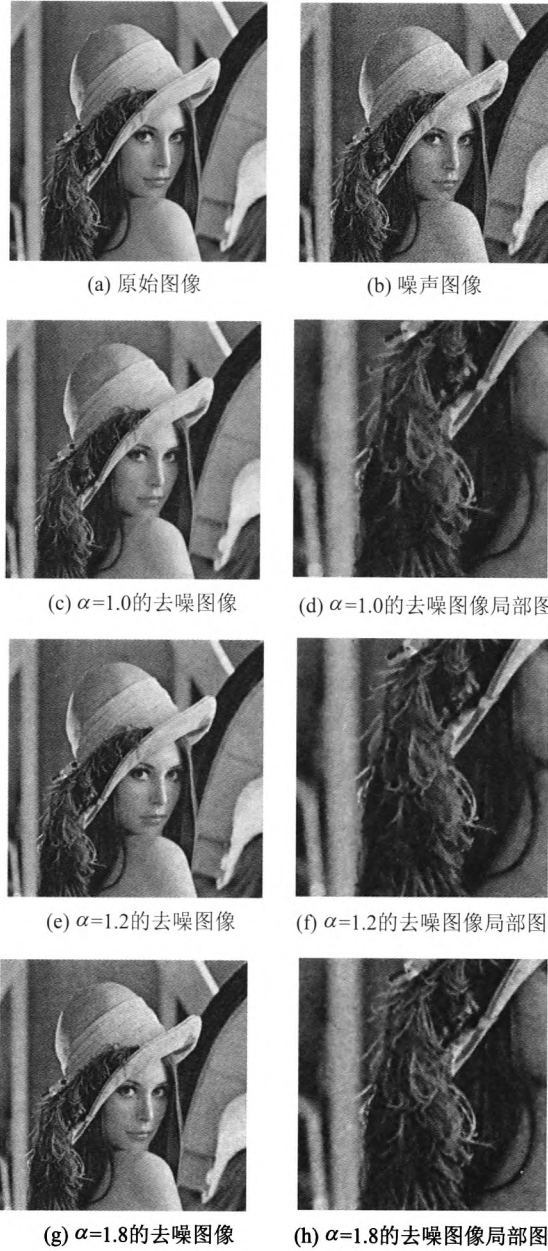


图 3 典型阶次下去噪效果及其局部效果的比较
Fig. 3 Comparison of denoised results and their local enlargements under classical orders

图 3 中可清晰看出分数阶较一阶情况能有效抑制“阶梯效应”,并且在发丝部位能明显看出分数阶能保留更多的图像细节特征,但随着分数阶次的增加,会残留更多的图像噪声。

实验结果表明,峰值信噪比呈现先增大后减小的变化规律。这验证了选取 α 范围的合理性。

表 1 不同阶次下去噪图像峰值信噪比的比较
Table 1 Comparison of PSNR at different order

σ	α					
	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
10	32.275 8	32.310 1	32.390 5	32.456 5	32.563 7	32.550 6
20	30.384 3	30.393 1	30.451 0	30.483 1	30.602 2	30.569 2
30	28.375 3	28.535 5	28.590 8	28.738 1	28.828 3	28.744 1

3.2 算法的性能分析和比较

本节定量分析采用的基于预解式的原始对偶算法的收敛性和收敛速度。首先跟踪模型对应的原始问题和对偶问题的能量函数差值,即原始对偶间隔的变化情况。从理论上讲,原始对偶间隔等于零时,模型的解可收敛于鞍点,即达到最优解。选取含有均值为 0,标准差为 30 高斯白噪声的 Lena 图像作为测试图像,设置参数 $\lambda = 8$ 。图 4 中给出了几个典型分数阶次作用下去噪迭代过程中原始对偶间隔的变化曲线。结果表明,当 $1 < \alpha \leq 1.5$ 时,算法能有效快速收敛于鞍点,而当 $1.5 < \alpha < 2$ 时,算法收敛速度明显减慢。该结论进一步验证了,当分数阶阶次增加时,去噪模型在保护更多图像细节和边缘特征的同时,也残留了更多的图像噪声,噪声去除能力减弱。

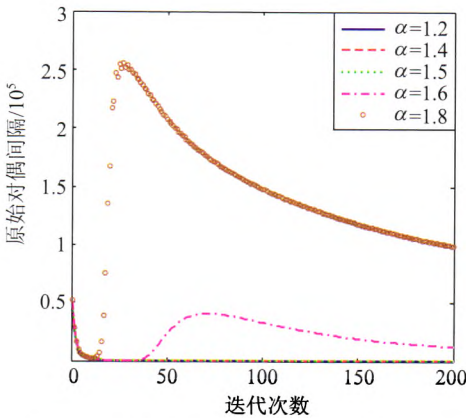


图 4 不同分数阶次时模型的收敛性比较
Fig. 4 Comparison of convergence under different fractional orders

此外,为了说明该算法在变分数值算法中的快速性优势,将其与一些经典算法进行比较,包括 Chambolle 的投影算法, Bioucas 的 MM 算法和 Beck 的快速梯度算法^[13]。选取 Lena 图像作为测试图像,加入均值为 0,标准差(σ)分别为 10、20 和 30 的高斯白噪声。表 2 中给出了当 $\alpha = 1.0, \lambda = 8$, 解的均方根误差 $\varepsilon \leq 10^{-4}$ 时几种变分数值算法的迭代次数和 CPU 时间的比较。

表2 几种变分算法迭代次数和 CPU 时间(*t*)的比较

Table 2 Comparison of the number of iterations and the CPU times on several variation algorithms

σ		文献[6]	文献[10]	文献[13]	本文算法
10	<i>n</i>	397	63	78	56
	<i>t/s</i>	15.79	49.02	6.82	2.50
20	<i>n</i>	245	50	78	52
	<i>t/s</i>	9.78	43.25	8.26	2.33
30	<i>n</i>	187	37	78	47
	<i>t/s</i>	7.52	39.34	10.52	2.13

不难看出,本文采用的基于预解式的原始对偶算法收敛速度明显优于其他测试算法。

由定义可知,一阶梯度算子是由有限项组成的局域算子,而分数阶梯度算子是由无限项组成的全局算子,所以分数阶模型的实现在速度上要比一阶情况慢。表3中给出了去噪 Lena 图像,当 $\lambda = 8$, 解的均方根误差 $\varepsilon \leq 10^{-4}$, 在不同分数阶次下分数阶原始对偶算法的迭代次数和 CPU 时间的比较。

表3 不同分数阶次下迭代次数和 CPU 时间(*t*)的比较

Table 3 Comparison of the number of iterations and the CPU times under different fractional order

σ		α			
		1.2	1.4	1.6	1.8
10	<i>n</i>	80	93	108	126
	<i>t/s</i>	8.34	9.72	11.26	12.87
20	<i>n</i>	78	94	112	132
	<i>t/s</i>	8.07	9.63	11.83	13.54
30	<i>n</i>	73	89	109	130
	<i>t/s</i>	7.45	9.13	11.24	13.19

结果表明,随着分数阶次的增加,算法的收敛速度变慢。这与前面关于原始对偶间隔变化情况的测试结论相一致。

4 结 论

提出了一种与分数阶 ROF 去噪模型等价的分数阶原始对偶去噪模型。它与鞍点优化模型在结构上具有相似性,故可采用一种求解鞍点问题的原始对偶数值算法实现。该算法采用自适应变步长迭代,弥补了一些传统数值算法对步长要求过高的缺陷。实验结果表明,提出的分数阶原始对偶模型能

有效改善图像的视觉效果,抑制“阶梯效应”,保留纹理和细节信息。同时采用的基于预解式的原始对偶数值算法在特定参数取值范围内能有效收敛,且收敛速度较快。

参考文献(References)

[1] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259-268.

[2] Ma S X, Jiang C S. A new method for image blind restoration based on fourth-order PDE[J]. Journal of Image and Graphics, 2010, 15(1): 26-30. [马少贤,江成顺. 基于四阶偏微分方程的盲图像恢复模型[J]. 中国图象图形学报, 2010, 15(1): 26-30.]

[3] Liu X, Huang L, Guo Z. Adaptive fourth-order partial differential equation filter for image denoising[J]. Appl. Math. Letters, 2011, 24(8): 1282-1288.

[4] Sun J, Pan Z K, Wei W B, et al. High-order image diffusion model on implicit surfaces[J]. Journal of Image and Graphics, 2010, 15(10): 1449-1453. [孙军,潘振宽,魏伟波,等. 隐式曲面上图像扩散的高阶模型[J]. 中国图象图形学报, 2010, 15(10): 1449-1453.]

[5] Zhang J, Wei Z H, Xiao L. Adaptive fractional-order multi-scale method for image denoising[J]. J. Math. Imaging Vis., 2012, 43: 39-49.

[6] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. J. Math. Imaging Vis., 2004, 20: 89-97.

[7] Zhang Y, Pu Y F, Hu J R, et al. A class of fractional-order variational image inpainting models[J]. Appl. Math. Inf. Sci., 2012, 6(2): 299-306.

[8] Vogel C R. Computational Methods for Inverse Problems[M]. Philadelphia: SIAM, 2002.

[9] Chen D, Sun S, Zhang C, et al. Fractional-order TV-L2 model for image denoising[J]. Central European Journal of Physics, 2013: 1-9.

[10] Figueiredo M A T, Bioucas-Dias J M, Nowak R D. Majorization-minimization algorithms for wavelet-based image restoration[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2007, 16(12): 2980-2991.

[11] Chambolle A, Pock T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging[J]. J. Math. Imaging Vis., 2011, 40(1): 120-145.

[12] Odubny I. Fractional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1999.

[13] Beck A, Teboulle M. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems[J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2009, 18(11): 2419-2434.

分数阶原始对偶去噪模型及其数值算法

作者: [田丹](#), [薛定宇](#), [杨雅婕](#), [Tian Dan](#), [Xue Dingyu](#), [Yang Yajie](#)
作者单位: [田丹, Tian Dan\(东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 沈阳大学信息工程学院, 沈阳110044\)](#), [薛定宇, Xue Dingyu\(东北大学信息科学与工程学院, 沈阳, 110004\)](#), [杨雅婕, Yang Yajie\(沈阳大学信息工程学院, 沈阳, 110044\)](#)
刊名: [中国图象图形学报](#) 
英文刊名: [Journal of Image and Graphics](#)
年, 卷(期): 2014, 19(6)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_zgtxtxxb-a201406005.aspx