01. 质点力学解答

一、　选择题

1 B　　2 C　　3D　　4B　　5C　　6 B　　7 B　　8B

二、　填充题

1. 1.5 ms^{-1}
2. 6.4 ms^{-2}　　4.8 ms^{-2}
3. 2.5 m
4. $\dfrac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+(gt)^2}}$　　$\dfrac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2+(gt)^2}}$
5. $\dfrac{m^2g^2}{2K}$
6. 0.9 m s^{-1} , 0.45 m s^{-1}
7. $\dfrac{2(F-\mu mg)^2}{k}$
8. $\sqrt{\dfrac{2k}{mr_0}}$

三、　计算题

1. 解：$a_n = R\omega^2$　　$a_\tau = R\dfrac{d\omega}{dt}$　　$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

（1）t =2 s，a_n= 230.4 m s^{-2}　a_t = 4.8 m s^{-2}

(2) $\sqrt{a_n^2+a_\tau^2} = 2a_\tau$　　$t = 0.66s$　　$\theta = 3.15rad$

(3) $a_n = a_\tau$　　$t = 0.55s$

2. 解：

$$-\mu N = m\frac{dv}{dt}$$

$$N = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\mu\int_0^{\pi} d\theta$$

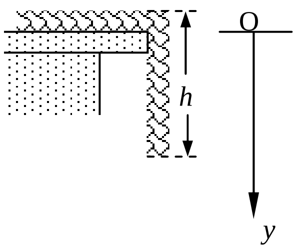
$$v = v_0 e^{-\mu\pi}$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2(e^{-2\mu\pi}-1)$$

3. 解：

$$E_0 = -\frac{m}{L}hg\times\frac{h}{2}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mg\frac{L}{2}$$



$$A_f = -\int fds = \int_h^L -\mu\frac{mg}{L}(L-y)dy = -\frac{\mu mg}{2L}(L-h)^2$$

$A_f = E - E_0$　　得：

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}[(L^2-h^2)-\mu(L-h)^2]}$$

4. 解：　1)、 动量守恒:　　$mv_0 = (m+M)V$

机械能守恒: $\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh$

$$h = \frac{Mv_0^2}{2(m+M)g}$$

2)、动量守恒:　　$mv_0 = mv + Mv'$

机械能守恒: $\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv'^2$

$$v = \frac{m-M}{m+M}v_0$$

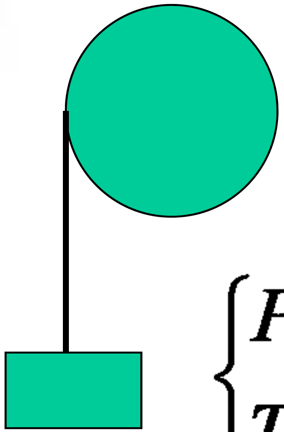
大作业题解

刚体力学

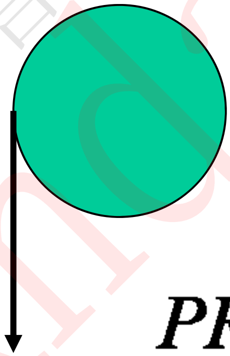
一、选择题

1. 一根轻绳绕在有水平转轴的定滑轮上，滑轮的质量为 m，绳下端挂有一物体。物体所受的重力为 P，滑轮的角加速度为 β。现在将物体去掉，代之以与 P 相等的力直接向下拉绳，滑轮的角加速度将：

（A）不变　　（B）变小　　（C）变大　　（D）无法确定



$$\begin{cases} P-T=mR\beta \\ TR=J\beta \end{cases}$$



$$PR=J\beta'$$

C

2. 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法中正确的是：

（A）只取决于刚体的质量，与质量在空间的分布和轴的位置无关；

（B）取决于刚体的质量和质量在空间的分布，与轴的位置无关；

（C）取决于刚体的质量、质量在空间的分布和轴的位置； C

（D）只取决转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关；

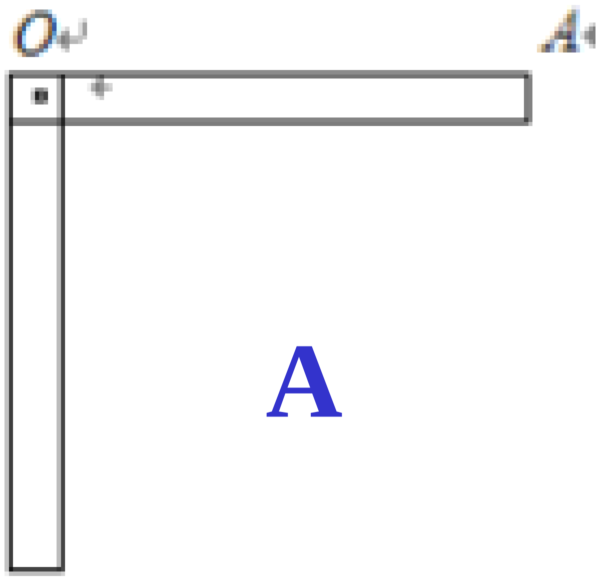
3. 均匀细杆 OA 可通过其一端 O 点，在竖直平面内转动，如图所示。现在使杆由水平位置从静止开始自由下摆，在杆摆到竖直位置的过程中，下列说法正确的是：

(A) 角速度从小到大，角加速度从大到小；

(B) 角速度从小到大，角加速度从小到大；

(C) 角速度从大到小，角加速度从大到小；

(D) 角速度从大到小，角加速度从小到大。



A

4. 几个力同时作用在一个具有固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体

（A）必然不会转动
（B）转速必然不变
（C）转速必然改变
（D）转速可能不变，也可能改变

D

5. 刚体角动量守恒的充分必要条件是：

(A) 刚体不受外力矩的作用； 合外力矩矢量和为0
(B) 刚体所受合外力矩为零；
(C) 刚体所受合外力和合外力矩为零；合外力可以不为0
(D) 刚体的转动惯量和角速度均保持不变. $J\omega$ 不变

B

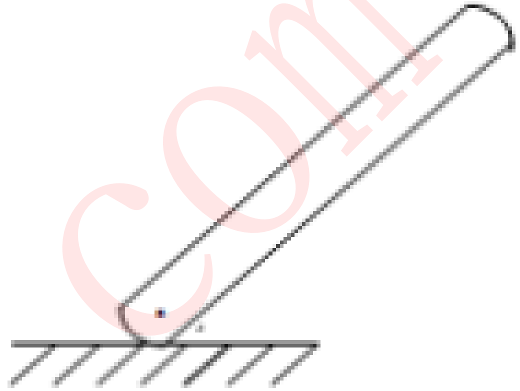
6. 花样滑冰运动员绕过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0。然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$，这时她转动的角速度变为

(A) $\frac{1}{3}\omega_0$　　(B) $\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_0$　　(C) $3\omega_0$　　(D) $\sqrt{3}\,\omega_0$

$$J_0\omega_0 = \frac{1}{3}J_0\omega \;\Rightarrow\; \omega = 3\omega_0$$

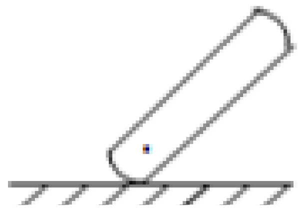
C

7. 一根质量为 m，长度为 l 的细而均匀的棒，其下端绞接在水平面上，并且竖直的立起，如果让它自由落下，则棒将以角速度 ω 撞击地面，如图所示。如果将棒截去一半，初始条件不变，则棒撞击地面的角速度为：



(A) 2ω　　(B) $\sqrt{2}\omega$

(C) ω　　(D) $\dfrac{\omega}{\sqrt{2}}$



B

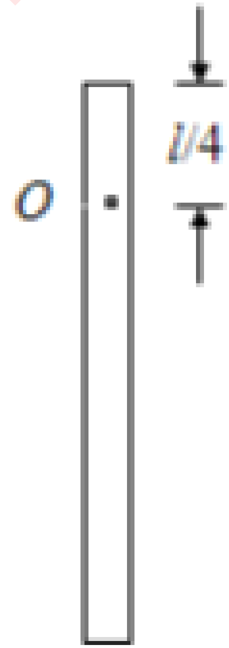
机械能守恒

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

$$mg\frac{l}{4}=\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{m}{2}\frac{l^2}{4}\omega'^2$$

$$\Rightarrow\quad \omega'=\sqrt{2}\omega$$

8. 一根长为 l，质量为 m 的均匀细杆，可绕距离其一端 $\frac{l}{4}$ 的水平轴 O 在竖直平面内转动，当杆自由悬挂时，给它一个起始角速度 ω，如果杆恰能持续转动而不摆动，则：



(A) $\omega \geq 4\sqrt{\frac{3g}{7l}}$　　(B) $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

(C) $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}}$　　(D) $\omega \geq \sqrt{\frac{12g}{l}}$

机械能守恒

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad J = \frac{7}{48}ml^2$$

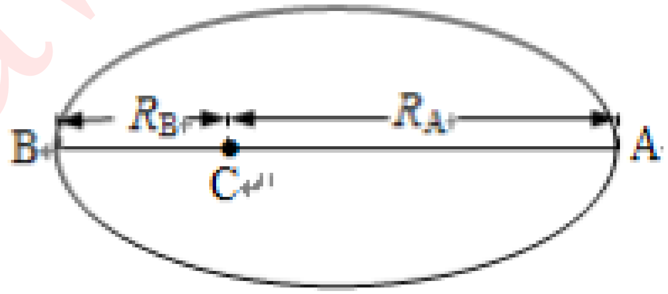
$$\Rightarrow \quad \omega = 4\sqrt{\frac{3g}{7l}}$$

A

9. 如图所示，一人造卫星到地球中心 C 的最大距离和最小距离分别为 R_A 和 R_B。设人造卫星对应的角动量分别为 L_A 和 L_B，动能分别为 E_{kA} 和 E_{kB}，则有

(A) $L_B > L_A$，$E_{kB} > E_{kA}$　(B) $L_B < L_A$，$E_{kB} = E_{kA}$

(C) $L_B = L_A$，$E_{kB} = E_{kA}$　(D) $L_B = L_A$，$E_{kB} > E_{kA}$



$$J_A\omega_A = J_B\omega_B$$

$$\because J_A > J_B \quad \therefore \omega_A < \omega_B$$

$$E_{kB} = \frac{1}{2}J_B\omega_B\omega_B > E_{kA} = \frac{1}{2}J_A\omega_A\omega_A$$

D

二填空题

1．一质量为 m 的质点沿着一条空间曲线运动，其运动方程为

$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$，其中 a、b、ω 均为常数，则

此质点所受的对原点的力矩 $\vec{M}$ = ____________________，

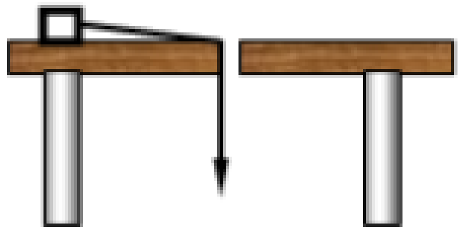
此质点对原点的角动量 $\vec{L}$ = ____________________．

$$\vec{v} = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j} \qquad \vec{a} = -a\omega^2\cos\omega t\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\vec{j}$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = m\vec{r}\times\vec{a} = m\begin{vmatrix} a\cos\omega t & b\sin\omega t & 0 \\ -a\omega^2\cos\omega t & -b\omega^2\sin\omega t & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\begin{vmatrix} a\cos\omega t & b\sin\omega t & 0 \\ -a\omega\sin\omega t & b\omega\cos\omega t & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = mab\,\omega\vec{k}$$

2. 质量为 0.05 kg 的小块物体，置于一光滑水平桌面上。有一绳一端连结此物，另一端穿过桌面中心的小孔（如图所示）。该物体原以 $3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ 的角速度在距孔 0.2 m 的圆周上转动，现将绳从小孔缓慢往下拉，使此物体的转动半径减为 0.1 m，则物体的角速度 $\omega=$ ________。



$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

$$\omega = 12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

3. 半径为 30cm 的飞轮，从静止开始以 $0.5\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ 的匀角加速度转动，

则飞轮边缘上一点在飞轮转过 240°时的切向加速度 $a_\tau=$__________，

法向加速度 $a_n=$__________。

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\beta=0.30\times0.5=0.15\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\beta \qquad \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}=0.5 \qquad a_n=r\omega^2$$

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=0.5\int_0^{\frac{4\pi}{3}}\mathrm{d}\theta \qquad =0.30\times\frac{4\pi}{3}=1.26\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

4. 一个作定轴转动的轮子，对轴的转动惯量 $J = 2.0\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，正以角速度 ω_0 匀速转动。现对轮子加一恒定的力矩 $M = -7.0\ \mathrm{N\cdot m}$，经过 8 秒，轮子的角速度为 $-\omega_0$，则 $\omega_0 =$ ________。

转动定律

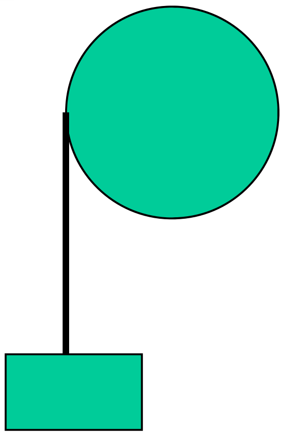
$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^8 M\,\mathrm{d}t = \int_{\omega_0}^{-\omega_0} J\,\mathrm{d}\omega$$

$$\omega_0 = 14\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

5. 一个半径为 R，可绕水平轴转动的定滑轮上绕有一根细绳，绳的另一端挂有一质量为 m 的物体。绳的质量可以忽略，绳与定滑轮之间无相对滑动。若物体的下落加速度为 a，则定滑轮对轴的转动惯量 $J=$ ________。

$$\begin{cases} TR = J\beta \\ mg - T = ma \\ a = R\beta \end{cases} \Rightarrow \quad J = \frac{m(g-a)R^2}{a}$$



6. 设一飞轮的转动惯量为 J，在 $t=0$ 时角速度为 ω_0。此后飞轮受到一制动作用，阻力矩 M 的大小与角速度 ω 的平方成正比，比例系数 k（k > 0）。当 $\omega=\frac{1}{3}\omega_0$ 时，飞轮的角加速度 $\beta=$ ________。从开始制动到 $\omega=\frac{1}{3}\omega_0$ 所经过的时间 $t=$ ________。

$$M=J\beta$$

$$-k\omega^2=J\beta$$

$$\omega=\frac{\omega_0}{3}\text{时,}$$

$$\beta=-\frac{k\omega_0^{\ 2}}{9J}$$

$$-k\omega^2=J\frac{d\omega}{dt}$$

$$-k\int_0^t dt=J\int_{\omega_0}^{\frac{1}{3}\omega_0}\frac{d\omega_0}{\omega_0^2}$$

$$t=\frac{2J}{k\omega_0}$$

7．设有一均匀圆盘形转台，其质量为 M，半径为 R，可绕竖直中心轴转动，初始时角速度为 ω_0。然后，有一质量也为 M 的人以相对圆盘转台恒速率 u 沿半径方向从转台中心轴处向边缘走去，则转台转过的角度与时间 t 的函数关系为________________。

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + Mu^2t^2\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

$$d\theta = \frac{R^2\omega_0 dt}{R^2 + 2u^2t^2}$$

$$\theta = \frac{\omega_0 R}{\sqrt{2}u}\arctan\frac{\sqrt{2}ut}{R}$$

8．有一质量为 m 的人站在一质量为 M、半径为 R 的均质圆盘的边缘，圆盘可绕竖直中心轴转动。系统在初始时为静止，然后人相对圆盘以 v 的速率沿圆盘的边缘走动，圆盘的角速度为____________________。

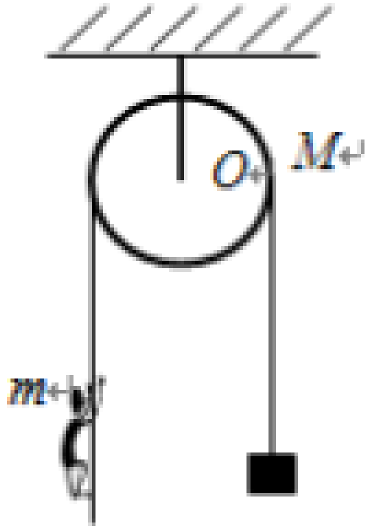
$$0 = muR - \frac{1}{2}MR^2\omega$$

$$0 = 2m(v - R\omega) - MR\,\omega$$

$$\omega = \frac{2mv}{(M+2m)R}$$

二、计算题

1. 如图所示，一轻绳绕过一轻滑轮，绳的一端被一质量为 m 的人抓住，绳的另一端悬挂一质量为 $\frac{m}{2}$ 的物体，定滑轮的质量为 M，半径为 R，可视为匀质圆盘。设人从静止开始以相对绳匀速向上爬行时，绳子与滑轮间无相对滑动，求物体上升的加速度。



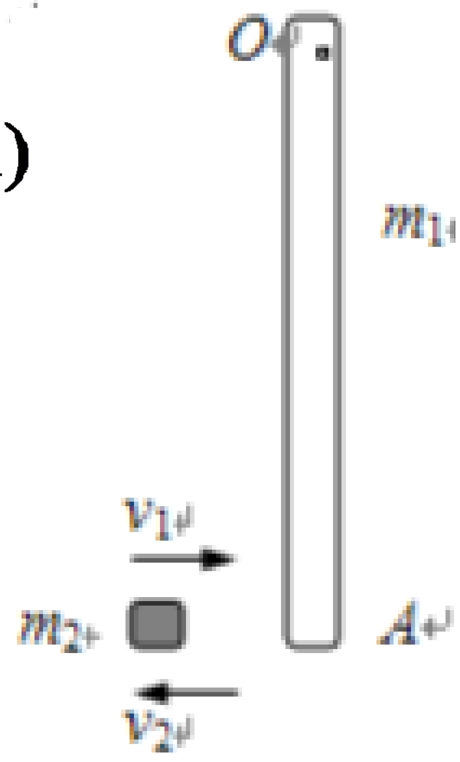
$$mg - T_1 = ma \qquad T_2 - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}ma$$

$$(T_1 - T_2)R = J\beta$$

$$a = \beta R \qquad J = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{mg}{3m + M}$$

2. 有一质量为 m_1、长为 l 的均匀细棒，静止平放在滑动摩擦系数为 μ 的水平桌面上，它可绕通过其端点 O 且与桌面垂直的固定光滑轴转动。另有一水平运动的质量为 m_2 的小滑块，从侧面与棒的另一端 A 垂直相碰撞。已知小滑块在碰撞前后的速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，如图所示。求碰撞后细棒从开始转动到停止的过程所需的时间。



$$m_2 v_1 l = -m_2 v_2 l + \frac{1}{3} m_1 l^2 \omega \qquad (1)$$

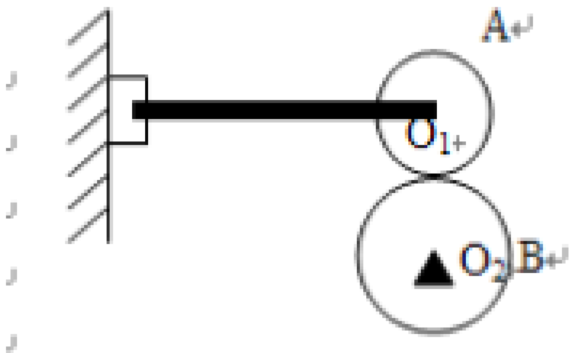
$$M_{\mathrm{f}} = \int_0^l -\mu g \frac{m_1}{l} x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \mu m_1 g l \qquad (2)$$

$$\int_0^t M_{\mathrm{f}} \mathrm{d}t = 0 - \frac{1}{3} m_1 l^2 \omega \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \; t = 2 m_2 \frac{v_1 + v_2}{\mu m_1 g}$$

3. 质量为 m_1、半径为 r_1 的匀质圆盘轮 A，以角速度 ω 绕水平光滑轴 O_1 转动，若此时将其放在质量为 m_2、半径为 r_2 的另一匀质圆盘轮 B 上。B 轮原为静止，并可绕水平光滑轴 O_2 转动。放置后 A 轮的重量由 B 轮支持，如图所示。设两轮之间的摩擦系数为 μ，证明：从 A 轮放在 B 轮上到两轮之间没有相对滑动为止，经过的时间为：$t=\dfrac{m_2 r_1\omega}{2\mu g(m_1+m_2)}$

设两轮之间没有相对滑动时的角速度分别为1和2， 则：



$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

由转动定律：

$$-fr_1=\frac{1}{2}m_1r_1^2\beta_1$$

$$fr_2=\frac{1}{2}m_2r_2^2\beta_2 \qquad f=\mu m_1 g$$

$$\beta_1 = \frac{\omega_1 - \omega}{t} \qquad \beta_2 = \frac{\omega_2 - 0}{t}$$

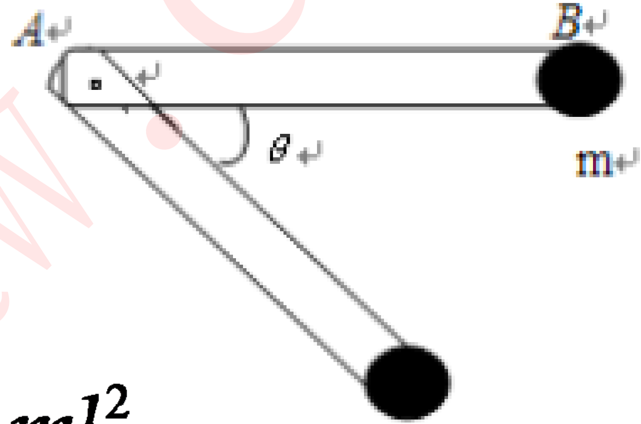
$$-\mu g = \frac{r_1(\omega_1 - \omega)}{2t} \qquad \mu m_1 g = \frac{m_2 r_1 \omega}{2t}$$

$$t = \frac{m_2 r_1 \omega}{2\mu g(m_1 + m_2)}$$

4. 一根质量为 m、长度为 l 的均匀细棒 AB 和一质量为 m 的小球牢固连结在一起，细棒可绕通过其 A 端的水平轴在竖直平面内自由摆动，现将棒由水平位置静止释放，求：

（1）刚体绕 A 端的水平轴的转动惯量，

（2）当下摆至 θ 角时，刚体的角速度。



$$J = J_1 + J_2 = ml^2 + \frac{1}{3}ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$$

$$mgl\sin\theta + mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g\sin\theta}{l}}$$

静电场中的导体与介质

选择题1：当一个带电导体达到静电平衡时，

（A）导体表面上电荷密度较大处电势较高；

（B）导体表面曲率较大处电势较高；

（C）导体内部的电势比导体表面的电势高；

（D）导体内任一点与表面上任一点的电势差等于零。

选择题2：选无穷远处为电势零点，半径为R 的导体球带电后，其电势为 U_0，则球外离球心距离为 r 处的电场强度的大小为

(A) $\dfrac{R^2U_0}{r^3}$　　(B) $\dfrac{U_0}{R}$

(C) $\dfrac{RU_0}{r^2}$　　(D) $\dfrac{U_0}{r}$

$$U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\qquad E(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=$$

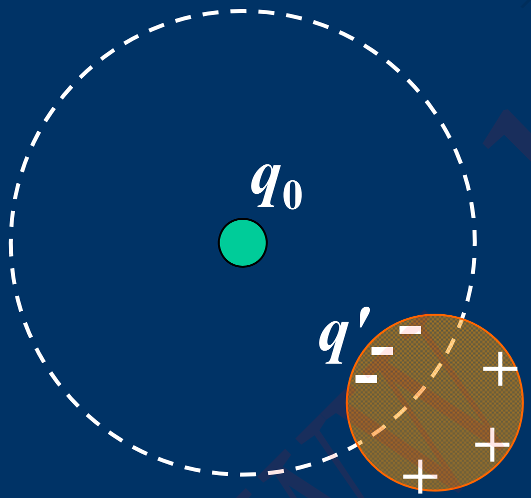
选择题3：在一点电荷产生的静电场中，一块电介质如图放置。以点电荷所在处为球心做一球形闭合面，则对此球形闭合面：

（A）高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的场强；

（B）高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的场强；

（C）由于电介质不对称分布，高斯定理不成立；

（D）即使电介质对称分布，高斯定理也不成立。



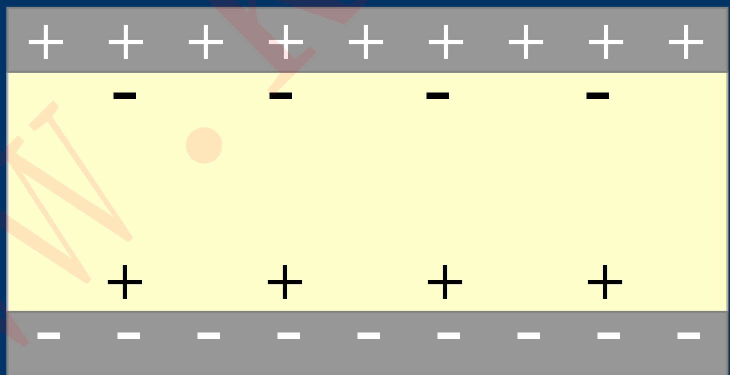
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum(q_0+q')$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0$$

选择题4：一平行板电容器中充满相对介电常数为 ε_r 的各向同性均匀电介质。已知电介质表面极化电荷面密度为 $\pm\sigma'$，则极化电荷在电容器中产生的电场强度的大小为

(A) $\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$ (B) $\dfrac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$

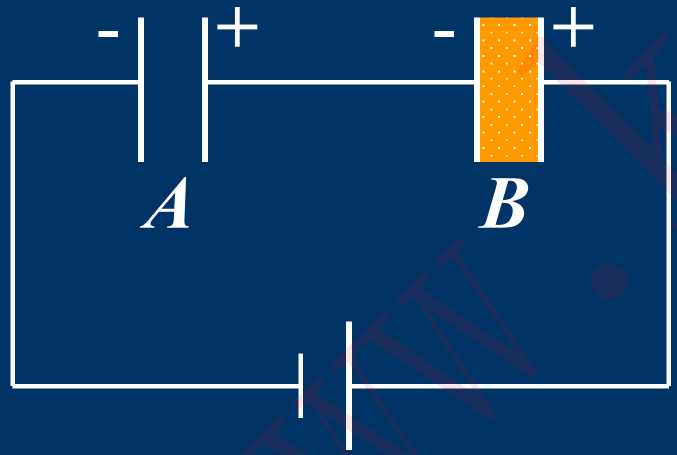
(C) $\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$ (D) $\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_r}$



选择题5： 如图所示，两个同样的平行板电容器A和B，串联后接在电源上，然后把一块相对介电常数为 ε_r 的均匀电介质插入电容器B中，则电容器A中的场强 E_A 与电容器B中的场强 E_B 的变化情况是

（A）E_A不变，E_B增大　　（B）E_A不变，E_B减小

（C）E_A减小，E_B增大　　（D）E_A增大，E_B减小



$$C'_B = \varepsilon_r C_B \qquad C'_B \uparrow$$

$$q = C_{总} V \uparrow \qquad E_A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \uparrow$$

$$E = \frac{V}{d}$$

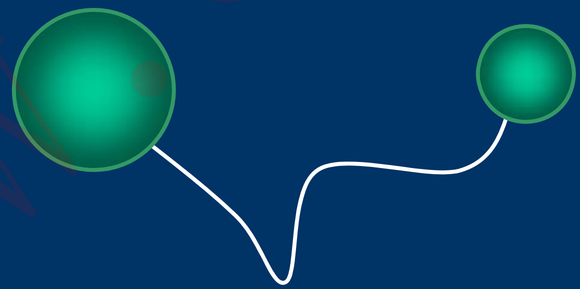
选择题6： 两个半径不同带电量相同的导体球，相距很远。今用一细长导线将它们连接起来，两球带电量重新分配的结果是：

（A）各球所带电量不变；

（B）半径大的球带电量多；

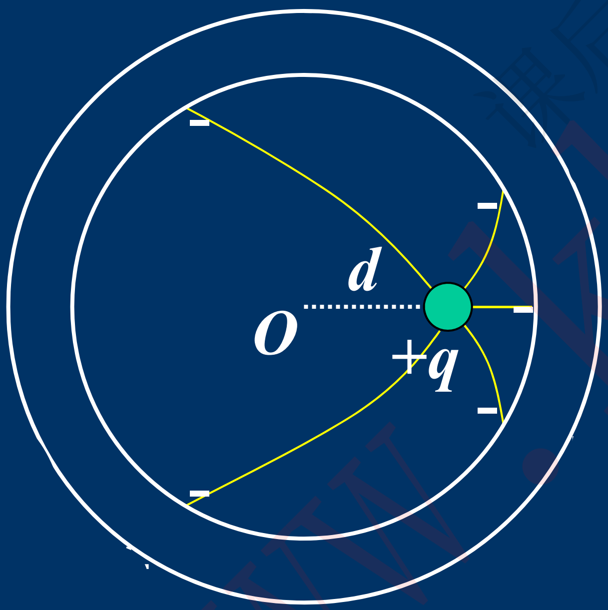
（C）半径大的球带电量少；

（D）无法确定哪一个导体球带电量多。



$$\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=\frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \qquad \frac{q_1'}{q_2'}=\frac{R_1}{R_2} \qquad \frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}=\frac{R_2}{R_1}$$

选择题7：一个未带电的空腔导体球壳，内半径为 R，在腔内离球心的距离为 d 处（$d<R$），固定一电量为 $+q$ 的点电荷，如图所示。用导线把球壳接地后，再把接地线撤去。选无穷远处为电势零点，则球心 O 处电势为



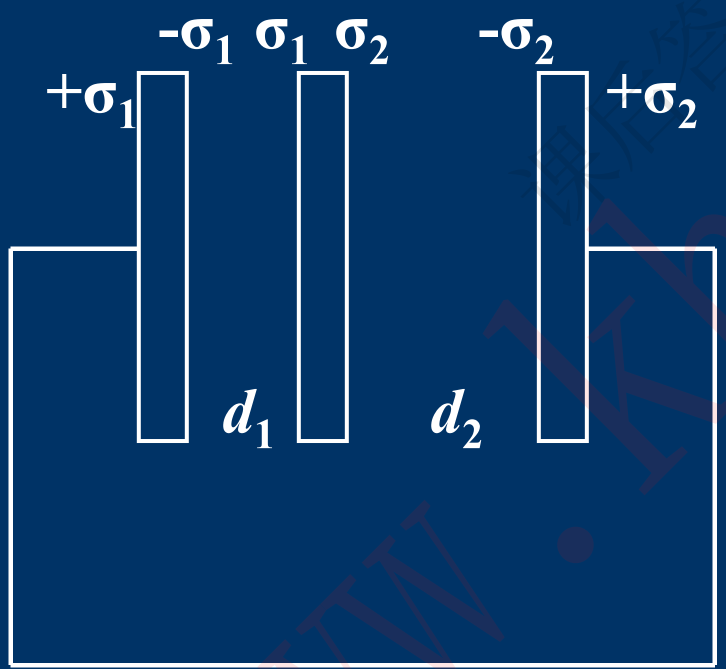
(A) 0

(B) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$

(C) $\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

(D) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{R}\right)$

选择题8：三块相互平行的导体板，相互之间的距离 d_1 和 d_2 比板的线度小得多，外面两板用导线连接起来。若中间板上带电，并假设其左、右两面上电荷面密度分别为σ_1 和σ_2，如图所示。则比值σ_1/σ_2为：

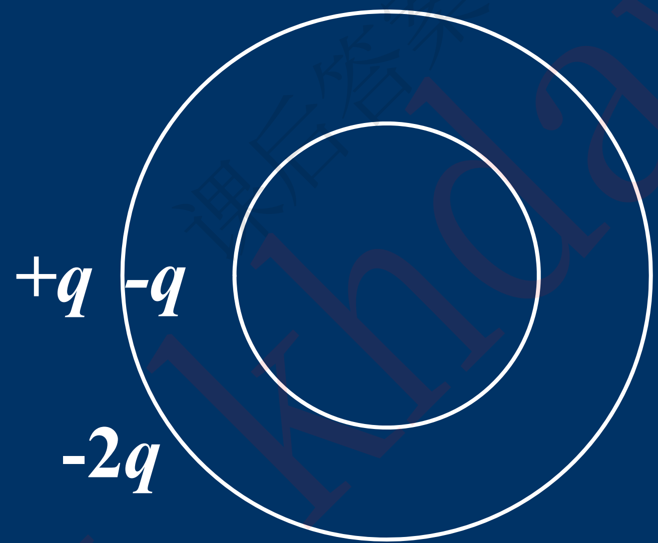


(A) $\dfrac{d_1}{d_2}$　　(B) $\dfrac{d_2}{d_1}$

(C) 1　　(D) $\dfrac{d_2^{\,2}}{d_1^{\,2}}$

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\cdot d_1=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\cdot d_2$$

填空题1：如图所示，两同心导体球壳，内球壳带电量$+q$，外球壳带电量 $-2q$．静电平衡时，外球壳的内表面带电量为______$-q$______；外表面带电量为______$-q$______。

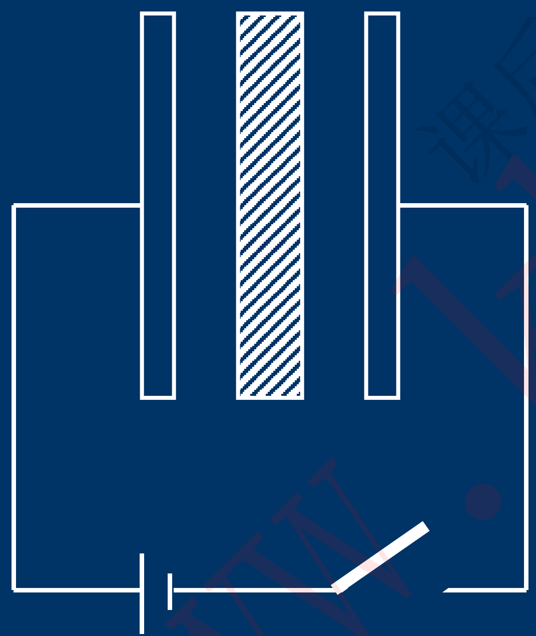


填空题2：两个点电荷在真空中相距为r_1时相互作用力等于它们在某一“无限大”各向同性均匀电介质中相距为r_2时的相互作用力，则该电介质的相对介电常数ε_r = ________。

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_2^2}$$

$$\varepsilon_r=\frac{r_1^2}{r_2^2}$$

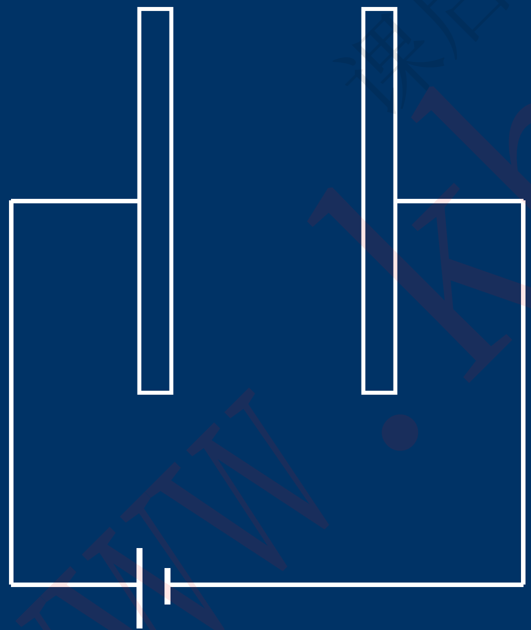
填空题3：一空气平行板电容器，两极板间距为d，充电后板间电压为U_0，然后将电源断开，在两板间平行地插入一厚度为 $d/3$ 的金属板，则板间电压变为$U =$ ____________ .



$$U_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d$$

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{3} d = \frac{2}{3} U_0$$

填空题4：一空气平行板电容器，电容量为C，两极板间距为d．充电后，两极板间相互作用力为F，则两极板间的电势差为$U=\sqrt{\dfrac{2Fd}{C}}$，极板上电荷量大小为$q=\sqrt{2Fcd}$．

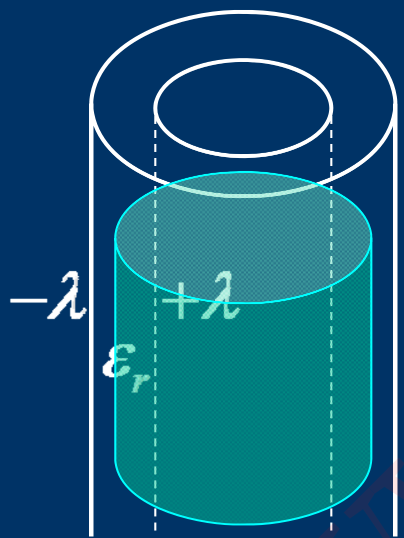


$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$F=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\sigma S$$

$$C=\frac{q}{U}$$

填空题5： 半径为 R_1 和 R_2 的两个同轴金属圆筒，其间充满着相对介电常数为 ε_r 的均匀电介质。设两圆筒上单位长度带电量分别 $+\lambda$ 为和 $-\lambda$ ，则介质中电位移矢量的大小 $D =$ $\underline{\dfrac{\lambda}{2\pi r}}$，电场强度的大小 $E =$ $\underline{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}}$.



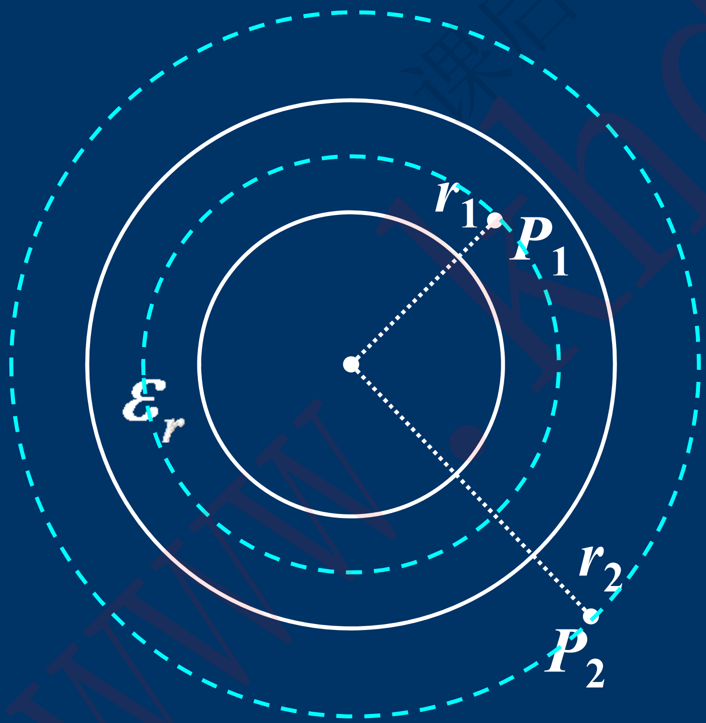
$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0 \qquad D\cdot 2\pi rh = \lambda h$$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_r\varepsilon_0 E$$

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} E\cdot dr \qquad C = \frac{q}{\Delta U}$$

填空题6：带电量为 Q_0 的导体球外部，有一层相对介电常数为 ε_r 的介质球壳，如图所示。在介质球壳内、外分别有两点 P_1、P_2，已知 $OP_1=r_1$、$OP_2=r_2$，则 $D_{P_1}=$ $\underline{Q_0/4\pi r_1^2}$，$D_{P_2}=$ $\underline{Q_0/4\pi r_2^2}$，

$E_{P_1}=$ $\underline{Q_0/4\varepsilon_0\varepsilon_r\pi r_1^2}$，$E_{P_2}=$ $\underline{Q_0/4\varepsilon_0\pi r_1^2}$，



$$D\cdot 4\pi r^2 = Q_0$$

$$E_{r_1} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$E_{r_2} = \frac{D}{\varepsilon_0}$$

填空题7：如图所示，两块很大的导体平板平行放置，面积都是S，两导体平板带电量分别是Q_1和Q_2。若不计边缘效应，则A、B、C、D四个表面上的电荷面密度分别是 $\sigma_A=$ ________，$\sigma_B=$ ________，

$\sigma_C=$ ________，$\sigma_D=$ ________。

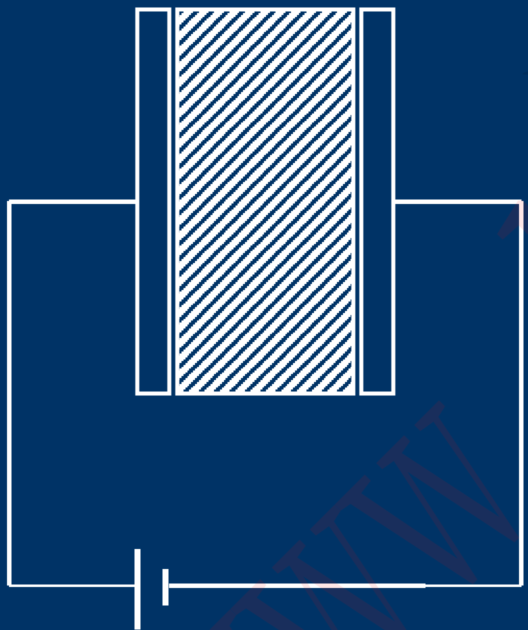
$$\sigma_A=\frac{Q_1+Q_2}{2S}$$

$$\sigma_B=\frac{Q_1-Q_2}{2S}$$

$$\sigma_C=-\frac{Q_1-Q_2}{2S}$$

$$\sigma_D=\frac{Q_1+Q_2}{2S}$$

填空题8：一平行板电容器，充电后与电源保持联接，然后使两极板间充满相对介电常数为ε_r的各向同性均匀电介质，这时两极板上的电量是原来的$\underline{\ \ \varepsilon_r\ \ }$倍；电场强度是原来的$\underline{\ \ 1\ \ }$倍；电容量是原来的$\underline{\ \ \varepsilon_r\ \ }$倍；电场能量是原来的$\underline{\ \ \varepsilon_r\ \ }$倍。



$$q = CU = \varepsilon_r C_0 U = \varepsilon_r q_0$$

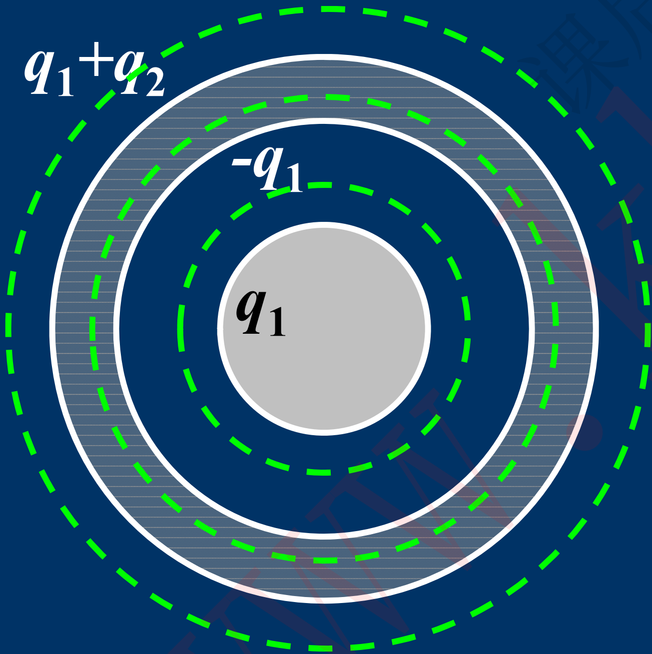
$$E = \frac{U}{d} = E_0$$

$$W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \varepsilon_r E_0$$

计算题1： 金属球的半径 $R_1=5.0\text{cm}$，带电量 $q_1=0.6\times10^{-8}\text{C}$，球外有一同心金属球壳，球壳内、外半径分别是 $R_2=7.5\text{cm}$，$R_3=9.0\text{cm}$，所带总电量为 $q_2=2\times10^{-8}\text{C}$．求：

（1）距球心 6.0 cm，8.0 cm 和 10.0 cm 处的场强和电势；

（2）如果用导线把两个导体连结起来，上述各点场强和电势又各为多少？

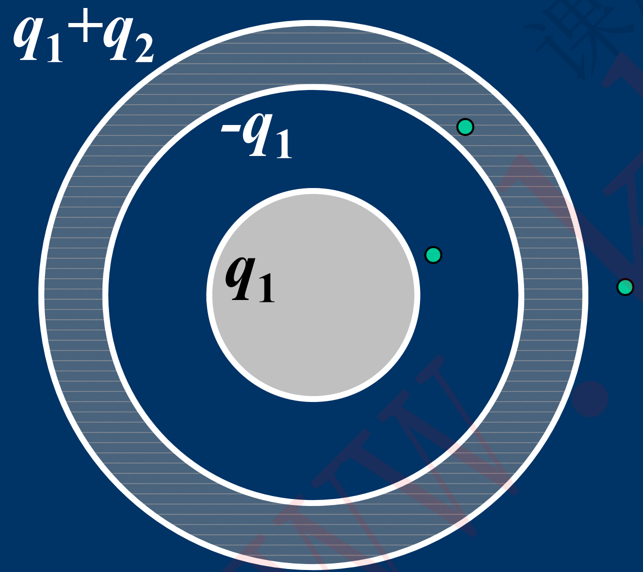


解：（1）

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\sum q_i$$

$$4\pi r^2 E=\sum q_i$$

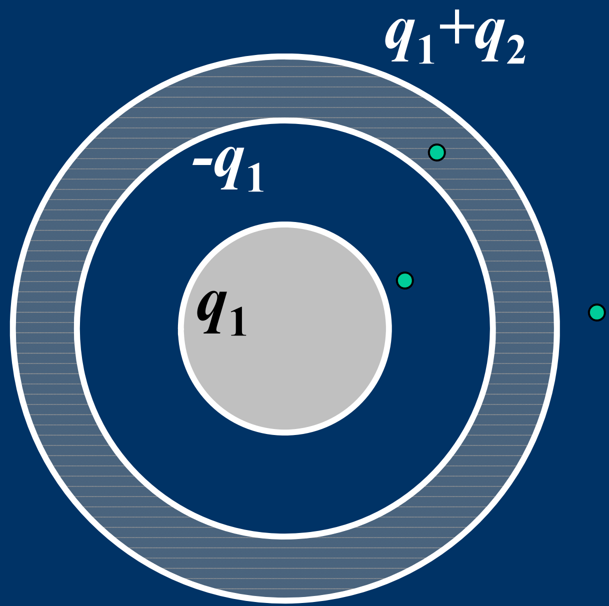
$$E=\begin{cases}0 & (r<R_1)\\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1<r<R_2)\\ 0 & (R_2<r<R_3)\\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R_3)\end{cases}$$

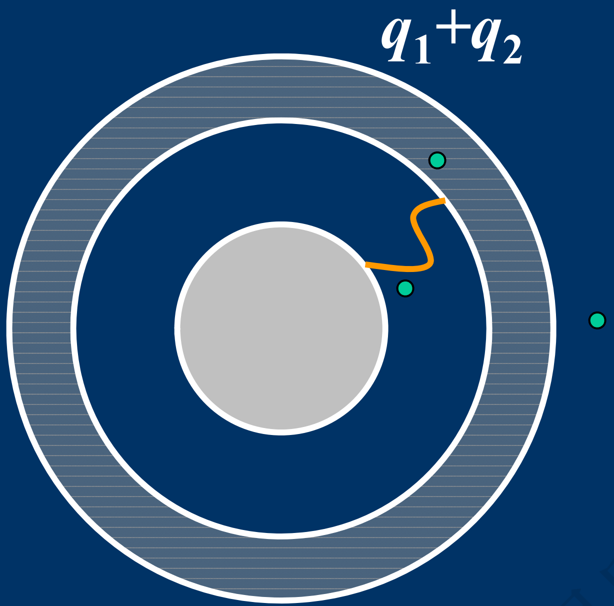


$$U(r)=\int_r^{\infty}E\cdot \mathrm{d}r$$

$$U=\sum_i U_i$$

$$U=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\dfrac{-q_1}{4\pi\varepsilon_0R_2}+\dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0R_3} & (r<R_1)\\[2ex] \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0r}+\dfrac{-q_1}{4\pi\varepsilon_0R_2}+\dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0R_3} & (R_1<r<R_2)\\[2ex] \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0R_3} & (R_2<r<R_3)\\[2ex] \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0r} & (r>R_3)\end{cases}$$



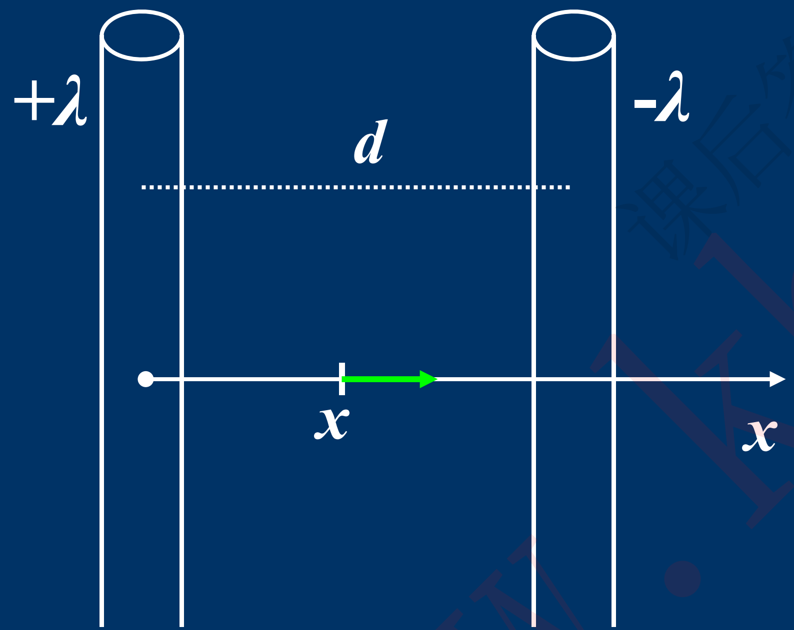


解：（2）

$$E=\begin{cases}0 & (r<R_3)\\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R_3)\end{cases}$$

$$U=\begin{cases}\dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & (r<R_3)\\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r>R_3)\end{cases}$$

计算题2：半径为a的两根无限长平行直导线，它们之间的距离为d，且$d >> a$. 若导线均匀带电，试求导线单位长度的电容量。



$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}$$

$$U_A-U_B=\int_a^{d-a}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^{d-a}E\,dx$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}\approx\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$$

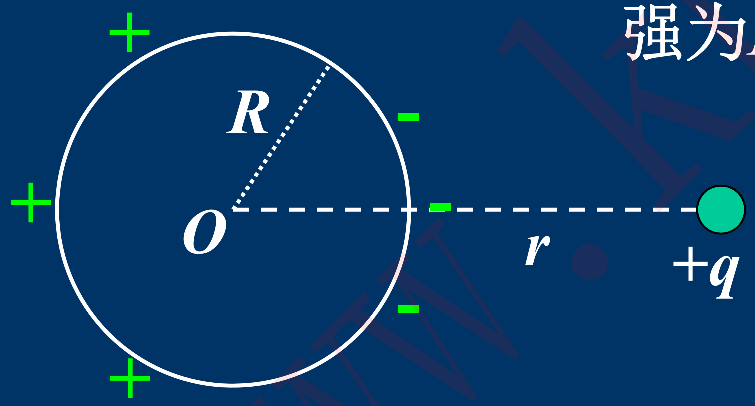
$$C=\frac{q}{\Delta U}=\frac{\lambda\times 1}{U_A-U_B}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}$$

计算题3：如图所示，在一不带电的金属球旁，有一点电荷 $+q$，金属球半径为 R，点电荷 $+q$ 与金属球球心的间距为 d，试求：

（1）金属球上感应电荷在球心处产生的电场强度。

（2）若取无穷远处为电势零点，金属球的电势为多少？

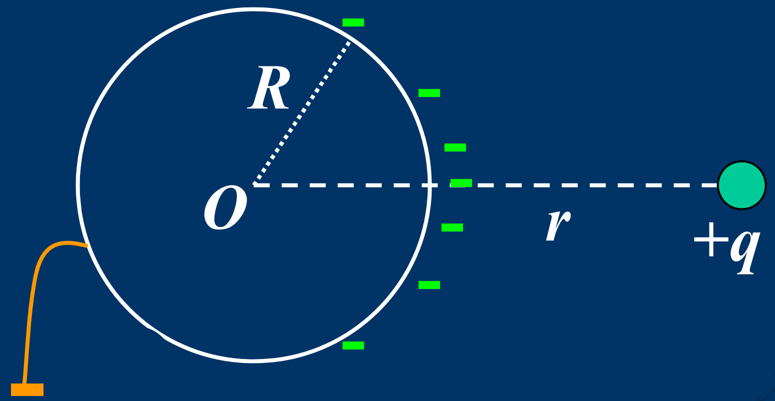
（3）若将金属球接地，球上的净电荷是多少？



解:（1）设点电荷 $+q$ 在 O 点产生的场强为 E_1，球面上感应电荷在 O 点产生的场强为 E_2， O 点的总场强为 E，有

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$$

$$\vec{E}_2 = -\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



（2）点电荷$+q$ 、感应电荷在O点产生的电势分别为：

$$U_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\qquad U_2=0$$

由电势叠加原理，O点的电势（即为金属球的电势，因为静电平衡时导体是等势体）

$$U=U_1+U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（3）接地，金属球 $U=0$

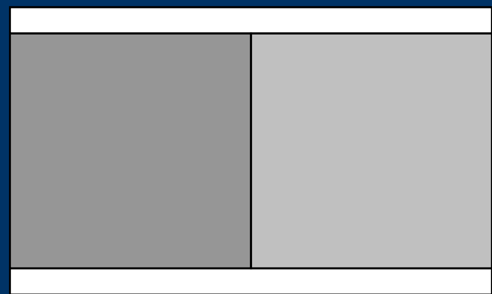
$$\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=0\qquad q_2=-\frac{R}{r}q$$

计算题4． 平行板电容器，两极板带电±Q，极板面积S，板间距为d，相对介电常数分别 ε_{r_1}、ε_{r_2} 为　　　　　、的电介质各充满板间的一半，如图所示。试问：

两介质所对的极板上自由电荷面密度各是多少？

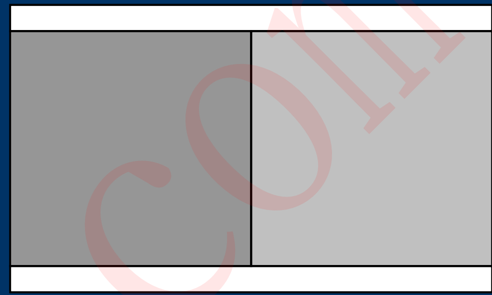
两介质表面的极化电荷面密度是多少？此电容器的电容量是多大？

4.解：（1）设两介质所对的极板上的面电荷密度分别为和。两极板都是导体，故两个极板电势差处处相等，即



$$E_1 d_1 = E_2 d_2$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}} \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}}$$



$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_{r_1}} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_{r_2}}$$

$$\sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} = Q$$

$$\sigma_1 = \frac{2\varepsilon_{r_1} Q}{(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2})S}$$

$$\sigma_2 = \frac{2\varepsilon_{r_2} Q}{(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2})S}$$

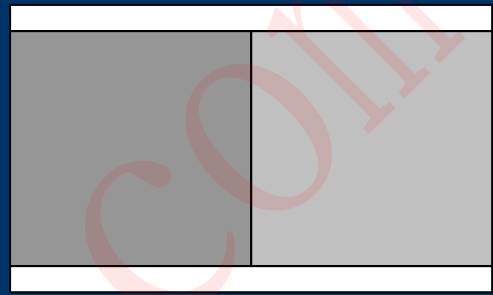
（2）介质表面的极化电荷面密度

$$\sigma' = P_n = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$$

$$\sigma_2' = (1 - \frac{1}{\varepsilon_{r_2}})\sigma_1 = \frac{2Q}{(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2})S}(\varepsilon_{r_2} - 1)$$

$$\sigma_1' = (1 - \frac{1}{\varepsilon_{r_1}})\sigma_1 = \frac{2Q}{(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2})S}(\varepsilon_{r_1} - 1)$$

（3）两部分的电容分别是



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} S}{2d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} S}{2d}$$

两电容并联，得总电容

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2})$$

第七章 电流与磁场解答

一、选择题

1．B　2．B　3．D　4．D　5．B　6．D　7．B　8．C

二、填空题

1．$B=\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$；0

2．3.14×10^{-3} T

3．0

4．水平面内，$B_1=\sqrt{3}B_2$

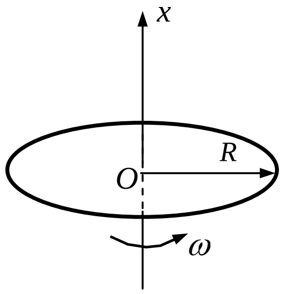
5．1：1

6．$\dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{m_e F}{R}}$

7．0.0217N • m

8．$\dfrac{4}{\pi}$

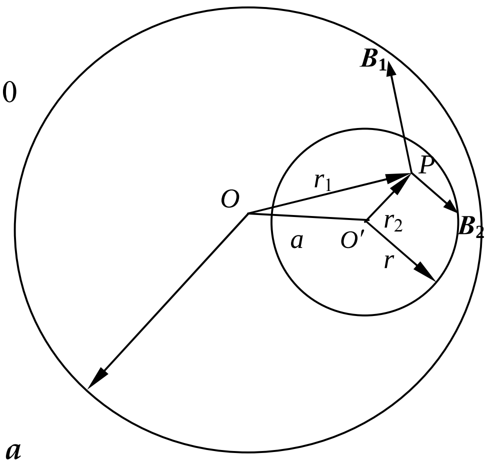
三、计算题



1．解：电流强度为$I=2\pi R\lambda\times\dfrac{\omega}{2\pi}$，按圆电流轴线上磁场的公式，轴线上距圆心为 x 处的磁感应强度为 $B=B_x=\dfrac{\mu_0 R^3\lambda\omega}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$，方向沿 Ox 轴正向。

圆心处 $x=0$，$B_0=B_x=\dfrac{\mu_0\lambda\omega}{2}$

2．解：电流密度 $\delta=\dfrac{I}{\pi(R^2-r^2)}$



（1）O' 处磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_1=\dfrac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{B}_2=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{B}_{o'}=\boldsymbol{B}_1=\dfrac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a}$

（2）空腔内任一点的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{r}_1$$

$$\boldsymbol{B}_2=-\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{r}_2$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\delta}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a}$$

由此结果可知空腔内任意点 P 处磁感应强度与空腔轴线上 O' 处磁感应强度相同，因此空腔

内为均匀磁场。

3.

解： 建立如图所示的坐标，取电流元 $I_2 dl$，

其受力 $dF = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$

大小为：$dF = I_2 dl\ B = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 R d\theta}{2\pi(5+x)}$ 方向如图。

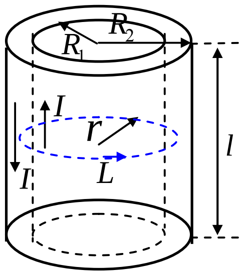
$$dF_x = dF\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R\cos\theta d\theta}{2\pi(5+R\cos\theta)}$$

$$F_x = \int dF_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta d\theta}{5+3\cos\theta}$$

$$= \mu_0 I_1 I_2\left(\frac{5}{\sqrt{5^2-3^2}}-1\right) = 1.88\times10^{-5}\text{N}$$

4．解：作半径为 r 的同轴圆为安培环路，由有介质安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I$$



得：$2\pi rH = I \qquad (R_1 < r < R_2)$

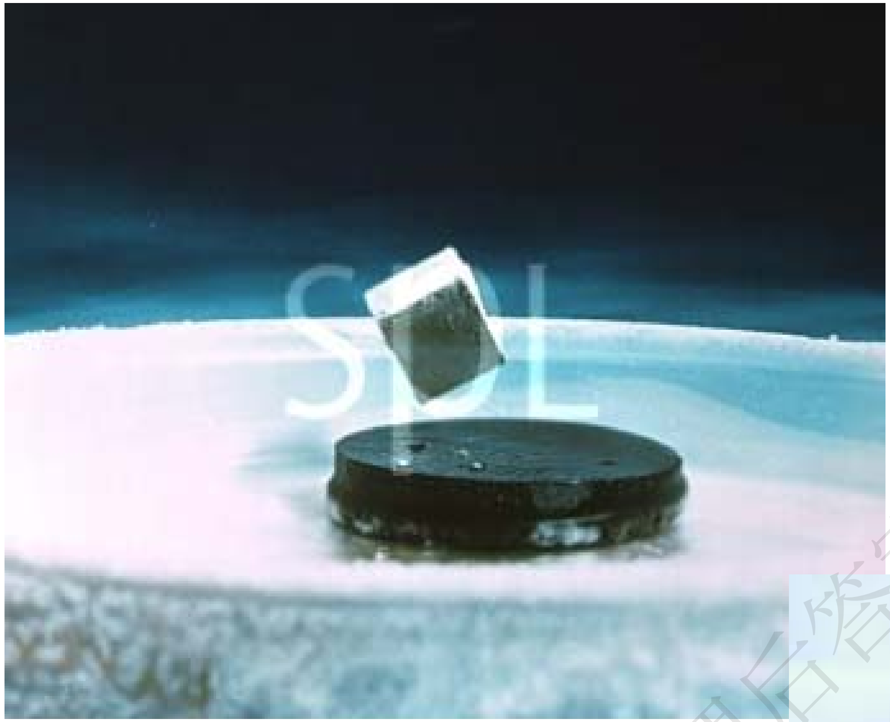
$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

磁能密度：$w_m = \dfrac{1}{2}BH = \dfrac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$

体积元：$dV = 2\pi r dr l$

磁场能量：$W_m = \int w_m dV = \int_{R_1}^{R_2}\dfrac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}\cdot 2\pi r dr l = \dfrac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$



一、选择题

1. 在无限长的载流直导线附近放置一矩形闭合线圈，开始时线圈与导线在同一平面内，且线圈中两条边与导线平行。当线圈以相同的速度作如图 6-1 所示的三种不同方向的平动时，线圈中的感应电流

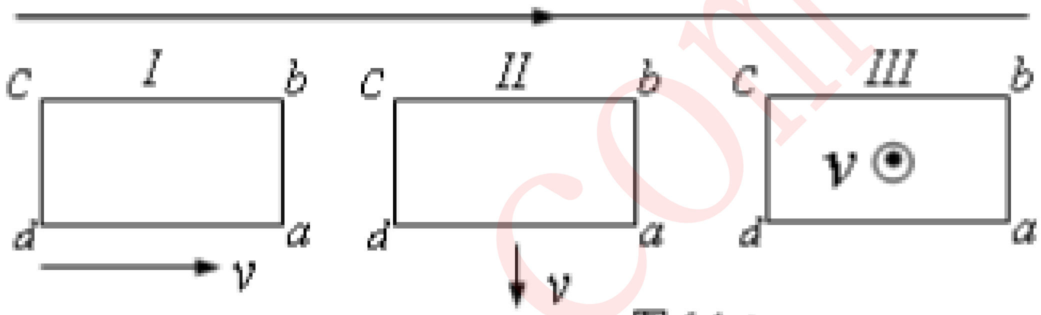


图 6-1

(A) 以情况 I 中为最大；　　(B) 以情况 II 中为最大；

(C) 以情况III中为最大；　　(D) 在情况 I 和 II 中相同。

(**B**)

解： I 中磁通量无变化，$\varepsilon_i = 0$；

III中磁通量变化很小，$\varepsilon_i \approx 0$；

所以 II 中，ε_i 最大

2. 若用条形磁铁竖直插入木质圆环中，则环中

(A) 产生感应电动势，也产生感应电流

(B) 产生感应电动势，不产生感应电流

(C) 不产生感应电动势，也不产生感应电流

(D) 不产生感应电动势，产生感应电流

(B)

3. 在一个磁性很强的长的条形磁铁附近放一条可以自由弯曲的软导线，如图 6-2 所示。当电流从上向下流经软导线时，软导线将：

(A) 不动

(B) 被磁铁推至尽可能远

(C) 被磁铁吸引靠近它，但导线平行于磁棒

(D) 缠绕在磁铁上，从上向下看，电流是顺时针方向流动的

(E) 缠绕在磁铁上，从上向下看，电流是逆时针方向流动的

(**E**)

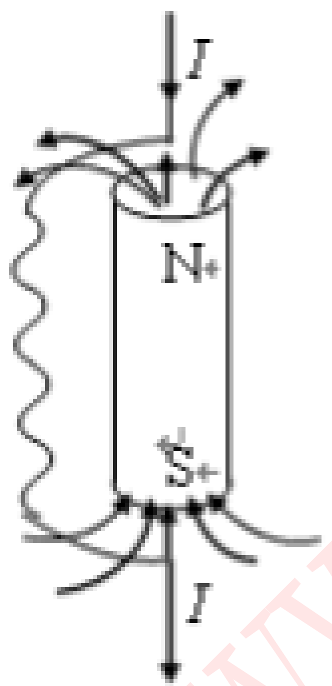


图 6-2

解： 磁铁的磁力线如图所示，由安培定律 $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ 可知：

导线上部 a 点受力方向垂直纸面向里⊗，下部 b 点受力方向垂直纸面向外⊙，所以软导线将缠绕在磁铁上，从上向下看，电流是逆时针方向流动的。

4. 如图 6-3 所示。一矩形线框（长边与磁场边界平行）以匀速 v 自左侧无场区进入均匀磁场又穿出，进入右侧无场区，那么，线框中电流 I 随时间 t 的变化关系为：

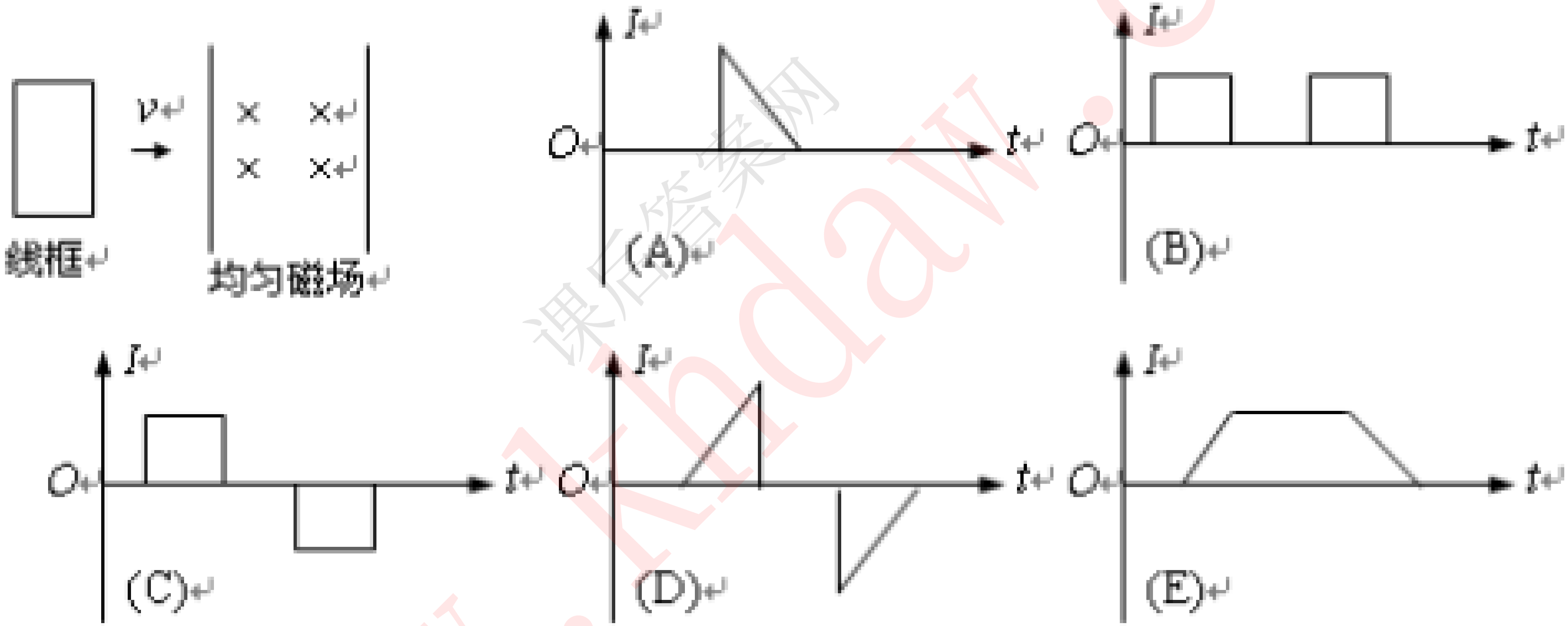


图 6-3

（ C ）

5. 有两个长直密绕螺线管，长度及线圈匝数均相同，半径分别为 r_1 和 r_2。管内充满均匀介质，其磁导率分别为 μ_1 和 μ_2。设 $r_1:r_2=1:2$，$\mu_1:\mu_2=2:1$，当将两只螺线管串联在电路中通电稳定后，其自感系数之比 L_1：L_2 与磁能之比 W_{m1}：W_{m2} 分别为：

(A) $L_1:L_2=1:1$，$W_{m1}:W_{m2}=1:1$　　(B) $L_1:L_2=1:2$，$W_{m1}:W_{m2}=1:1$

(C) $L_1:L_2=1:2$，$W_{m1}:W_{m2}=1:2$　　(D) $L_1:L_2=2:1$，$W_{m1}:W_{m2}=2:1$

（ C ）

$$L=\mu n^2 V$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2$$

6. 真空中一根无限长直细导线上通有电流强度为 I 的电流，则距导线垂直距离为 a 的空间某点处的磁能密度为：

(A) $\frac{1}{2}\mu_0(\frac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$　　(B) $\frac{1}{2\mu_0}(\frac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$

(C) $\frac{1}{2}(\frac{2\pi a}{\mu_0 I})^2$　　(D) $\frac{1}{2\mu_0}(\frac{\mu_0 I}{2a})^2$　　(**B**)

解： $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$　$w_m=\frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{\mu_0}=\frac{1}{2\mu_0}\cdot(\frac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$。

7. 在圆柱形空间内有一磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场，如图 6-4 所示。$\vec{B}$ 的大小以速率 $\dfrac{dB}{dt}$ 变化，有一长度为 L_0 的金属棒先后放在磁场的两个不同位置 ab 和 $a'b'$，那么，金属棒在这两个位置时棒内的感应电动势的大小关系为

(A) $\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{a'b'}\neq 0$ (B) $\varepsilon_{a'b'}>\varepsilon_{ab}$ (C) $\varepsilon_{a'b'}<\varepsilon_{ab}$ (D) $\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{a'b'}=0$

B

$$\varepsilon=\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

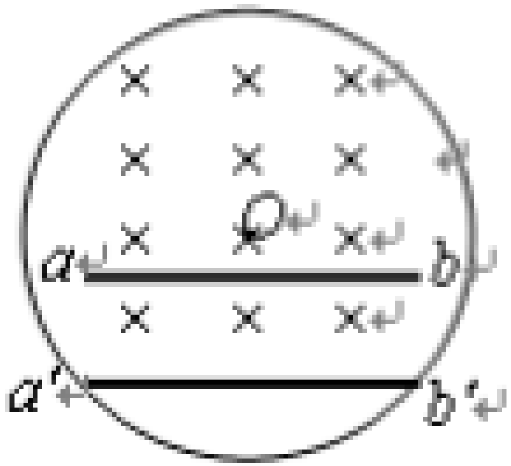


图 6-4

8. 如图 6-5 所示，平板电容器（忽略边缘效应）充电时，沿环路 L_1、L_2磁场强度 $\vec{H}$ 的环流中，必有：

(A) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} > \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$　　(B) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

(C) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} < \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$　　(D) $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$

（ C ）

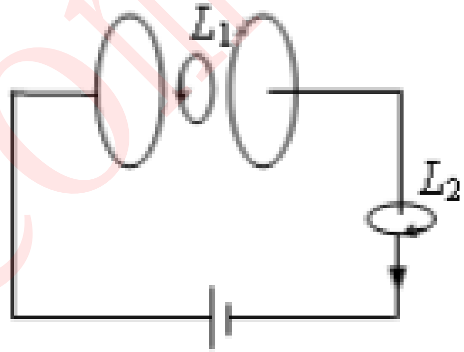


图 6-5

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_o + I_d$$

二、填空题

1. 一根直导线在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中以速度 $\vec{v}$ 运动切割磁力线，导线中对应于非静电力的场强（称作非静电场场强）$\vec{E}_k$ = ________。

$\vec{v}\times\vec{B}$

$$\varepsilon=\int_l(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

2. 载有恒定电流 I 的长直导线旁有一半圆环导线 cd，半圆环半径为 b，环面与直导线垂直，且半圆环两端点连线的延长线与直导线相交，如图 6-6 所示。当半圆环以速度 $\vec{v}$ 沿平行于直导线的方向平移时，半圆环上的感应电动势的大小是________。

$$\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\cdot\ln\frac{a+b}{a-b}$$

$$\varepsilon_{\widehat{cd}}=\varepsilon_{\overline{cd}}=\int_l(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{a-b}^{a+b}\frac{\mu_0 I v}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

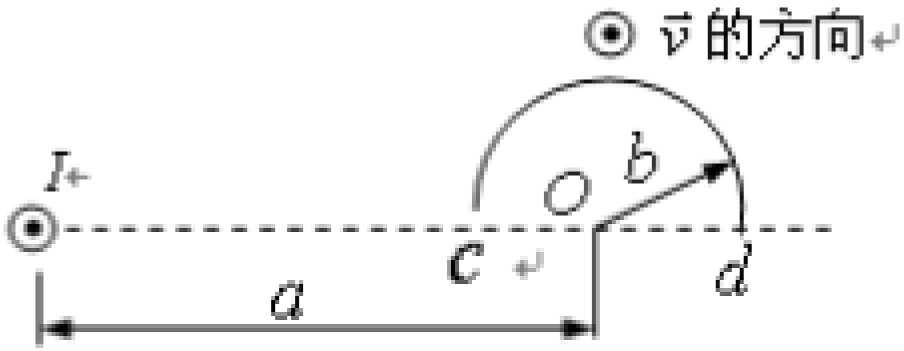


图 6-6

3. 如图 6-7 所示，一半径为 r 的很小的金属圆环，在初始时刻与一半径为 a($a >> r$)的大金属圆环共面且同心。在大圆环中通以恒定的电流 I，方向如图，如果小圆环以角速度 ω 绕其任一方向的直径转动，并设小圆环的电阻为 R，则任一时刻 t 通过小圆环的磁通量 Φ =____________；小圆环中的感应电流 i =____________。

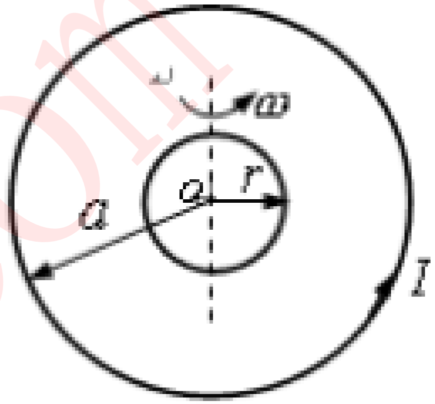


图 6-7

解： $a >> r$，通过小圆环的磁通量

$$\Phi \approx B_0 S \cos\omega t = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \pi r^2 \cdot \cos\omega t$$

小圆环中的感应电流

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I \omega}{2Ra} \cdot \pi r^2 \cdot \sin\omega t$$

4. 一无铁芯的长直螺线管，在保持其半径和总匝数不变的情况下，把螺线管拉长一些，则它的自感系数将__减小__。(增大、减少和不变)

$$L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

5. 自感系数 $L=0.3\mathrm{H}$ 的长直螺线管中通以 $I=8\mathrm{A}$ 的电流时，螺线管存储的磁场能量 $W=$______。

解： $W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\times0.3\times8^2=9.6(\mathrm{J})$。

6. 如图 6-8 所示，直角三角形金属框架 abc 放在均匀磁场中，磁场 $\vec{B}$ 平行于 ab 边，bc 的长度为 l。当金属框架绕 ab 边以匀角速度 ω 转动时($\vec{\omega}$ 的方向为 $\vec{B}$ 的方向)，abc 回路中的感应电动势 $\varepsilon=$______；a、c 两点之间的电势差 $U_a-U_c=$______。

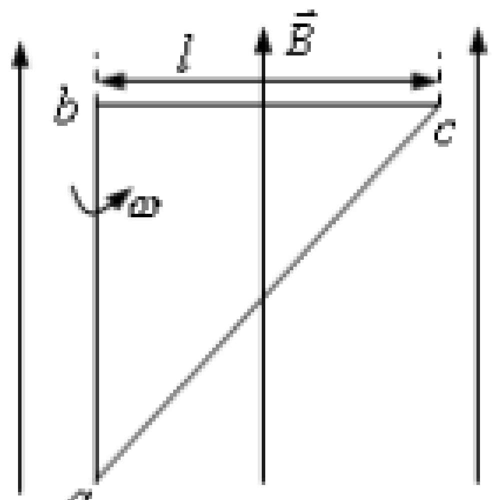


图 6-8

解： abc 回路 Φ 不变，$\varepsilon=0$。

$$U_a-U_c=U_b-U_c=-\frac{1}{2}B\omega l^2$$

7. 充了电的由半径为 r 的两块圆板组成的平行板电容器，在放电时两板间的电场强度的大小为 $E=E_0 e^{-\frac{t}{RC}}$，式中 E_0、R、C 均为常数。则两板间的位移电流的大小为____________；其方向与场强方向__________。

解： $$I_D=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\cdot S=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\cdot S$$

$$=-\frac{\varepsilon_0 E_0}{RC}\pi r^2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

其流向与场强方向相反。

8. 反映电磁场基本性质和规律的积分形式的麦克斯韦方程组为：

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{i=0}^{n} q_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_{i=0}^{n} I_i+\frac{d\Phi_e}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

试判断下列结论是包含于或者等效于哪一个麦克斯韦方程式的，将你确定的方程式用代号填在相应结论后的空白处：

（1）变化的磁场一定伴随有电场：__2__；

（2）磁感应线是无头无尾的：__3__；　　（3）电荷总伴随有电场：__1__。

三、计算题：

1．将等边三角形平面回路 ACDA 放在磁感应强度为 $\vec{B}=\vec{B}_0 t$ （其中 $\vec{B}_0$ 为常矢量）的均匀磁场中，回路平面垂直于磁场方向，如图 6-9 所示。回路的 CD 段为滑动导线，以匀速 $\vec{v}$ 远离 A 端运动，且始终保持回路为等边三角形。设滑动导线 CD 到 A 端的垂直距离为 x，且初始 $x=0$。试求回路 ACDA 中的感应电动势 ε 和时间 t 的关系。

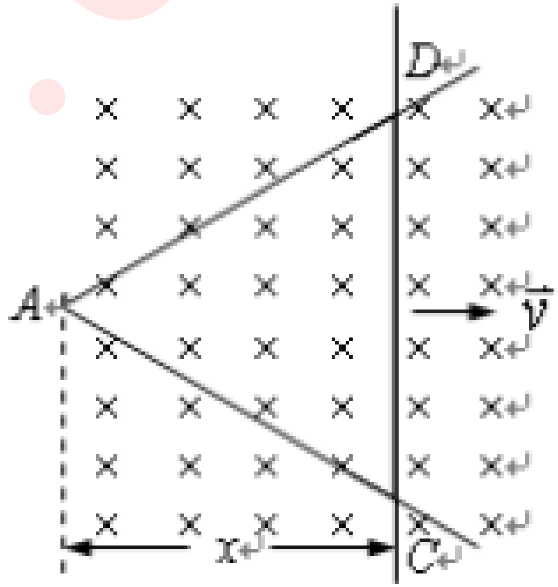


图 6-9

$$\varepsilon_1=-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\int\frac{d(B_0 t)}{dt}dS=\int B_0 dS$$

$$=B_0 x^2\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}B_0 v^2 t^2$$

$$\varepsilon_2=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{CD}=vB\cdot 2x\tan 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}B_0 v^2 t^2$$

$$\therefore\ \varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\frac{\sqrt{3}}{3}B_0 v^2 t^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}B_0 v^2 t^2=\sqrt{3}B_0 v^2 t^2$$

解二：

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 t \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

$$= B_0 t \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} v^2 t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} B_0 v^2 t^3$$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3} B_0 v^2 t^2$$

方向：逆时针

2. 一矩形截面螺绕环（$\mu_r=1$），由细导线均匀密绕而成，内半径为 R_1，外半径为 R_2，高为 b，共 N 匝，如图 6-10 所示。求此螺绕环的自感系数。如果在螺绕环内通以交变电流 $i=I_0\cos\omega t$，求感应电动势。（已知 $R_1=8\times10^{-2}$ m，$R_2=2.4\times10^{-1}$ m，$b=6\times10^{-2}$ m，$N=1000$ 匝，$I_0=5$ A，$\omega=100\pi$ rad/s）

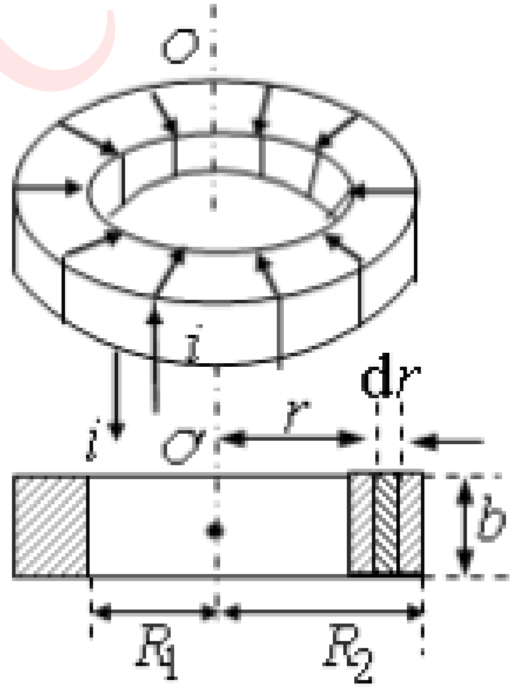


图 6-10

$$(1)\quad B=\frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}$$

$$\Phi=\int B\mathrm{d}S=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}b\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 NIb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L=\frac{N\Phi}{I}\frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\varepsilon=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 N^2 b\omega I_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\sin\omega t=6\pi\ln 3\sin 100\pi t=20.7\sin 100\pi t$$

3．无限长直导线通以电流 $I = I_0 \exp(-4t)$。有一与之共面的矩形线圈，其长边与长直导线平行。已知长边为 L，两长边距离长直导分别为 a、b，位置如图 6-11 所示。

求：（1）矩形线圈内的感应电动势的大小和感应电动势的方向。

（2）导线与线圈的互感系数。

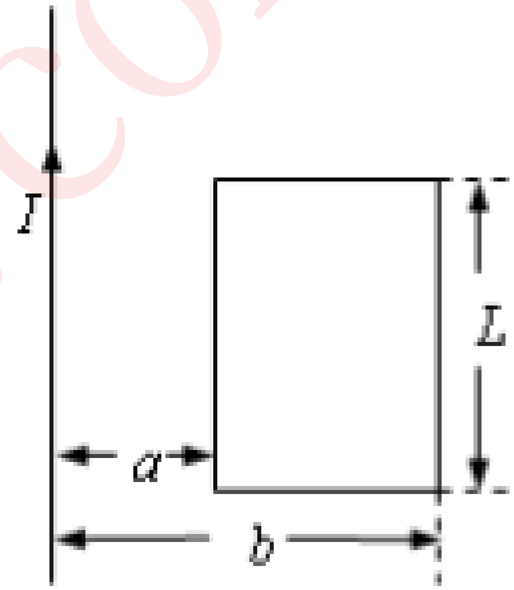


图 6-11

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = BL\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} L\mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi x} L\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\because \quad I = I_0 e^{-4t} \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -4I_0 e^{-4t} \qquad \therefore \quad \varepsilon_i = \frac{2\mu_0 L I_0}{\pi}\ln\frac{b}{a} e^{-4t}$$

方向为顺时针

3．无限长直导线通以电流 $I = I_0 \exp(-4t)$。有一与之共面的矩形线圈，其长边与长直导线平行。已知长边为 L，两长边距离长直导分别为 a、b，位置如图 6-11 所示。

求：（1）矩形线圈内的感应电动势的大小和感应电动势的方向。

（2）导线与线圈的互感系数。

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\dfrac{\mu_0 L I}{2\pi} \ln \dfrac{b}{a}}{I} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

4．如图 6-12 在两载流均匀为 I 的长直导线中间放一固定倒 U 型支架，支架由导线和电阻 R 串联成。另一质量为 m，长为 L 的金属棒，可在支架上无摩擦滑动，现静止释放，求能达到的最大速度。

解：建立如图坐标。X 处合场强为：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+r}+\frac{1}{l+r-x}\right)$$

由于棒下滑产生的感应电流 I_1 方向向右。

安培力（向上）：

$$F=\int_0^l BI_1\mathrm{d}x=\int_0^l \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+r}+\frac{1}{l+r-x}\right)I_1\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{r+l}{r}I_1=\alpha I_1 \qquad 令\ \alpha=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{r+l}{r}$$

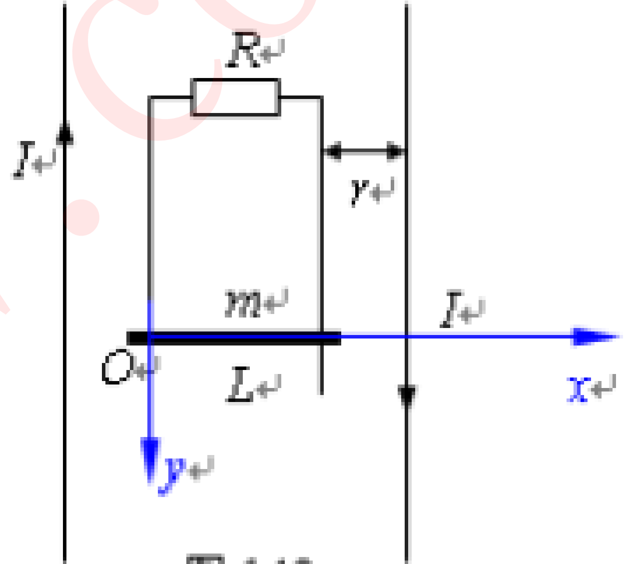


图 6-12

合力为：$mg-\alpha I_1=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ $\quad\therefore\quad$ $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\alpha}{m}I_1=g$

求感应电流：

$$\Phi=\int_0^l By\,\mathrm{d}x=y\int_0^l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+r}+\frac{1}{l+r-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{r+l}{r}y=\alpha y$$

$$|\varepsilon|=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha y)=\alpha v\quad\Rightarrow\quad I_1=\frac{|\varepsilon|}{R}=\frac{\alpha}{R}v$$

将 I_1 代入微分方程： $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\alpha^2}{mR}v=g$

分离变量解方程： $\int_0^v\frac{mR}{-\alpha^2 v+mRg}\mathrm{d}v=\int_0^t\mathrm{d}t$

所以， $v=\frac{mgR}{\alpha^2}\left(1-e^{-\frac{\alpha^2}{mR}t}\right)$ 　　极限速度： $\lim\limits_{t\to\infty}v=\frac{mgR}{\alpha^2}$