第1章

质点运动学

1.1 选择题

(1)根据瞬时速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的定义,及其用直角坐标和自然坐标的表示形式,它的大小 $|\boldsymbol{v}|$ 可表示为[B D F H]。

(A) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　(B) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$　　(D) $\left|\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$

(E) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$　　(F) $\left|\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right|$

(G) $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$　　(H) $\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

(2)根据瞬时加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的定义,及其用直角坐标和自然坐标的表示形式,它的大小 $|\boldsymbol{a}|$ 可表示为[A C G H]。

(A) $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$　　(B) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　　(C) $\left|\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|$　　(D) $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$

(E) $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$　　(F) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$

(G) $\left[\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}t$$

$$dv = \frac{1}{2}t\,dt$$

积分得

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{1}{2}t\,dt$$

$$v = \frac{1}{4}t^2$$

当 $t = 20$ s 时，$v = 100$ m/s。

由 $$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}t^2$$

积分有

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{1}{4}t^2\,dt$$

得 $$x = \frac{1}{12}t^3,\quad t = 20\ \text{s},\quad x = \frac{2000}{3}\ \text{m}$$

第二阶段

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{6}t + \frac{20}{3}$$

$$dv = \left(\frac{1}{6}t + \frac{20}{3}\right)dt$$

积分

$$\int_{100}^v dv = \int_{20}^t \left(\frac{1}{6}t + \frac{20}{3}\right)dt$$

得 $$v = \frac{1}{12}t^2 + \frac{20}{3}t - \frac{200}{3}$$

再积分

$$\int_{\frac{2000}{3}}^x dx = \int_{20}^t \left(\frac{1}{12}t^2 + \frac{20}{3}t - \frac{200}{3}\right)dt$$

得 $$x = \frac{1}{36}t^3 + \frac{20}{6}t^2 - \frac{200}{3}t + \frac{4000}{9}$$

当 $t = 50$ s 时，$v = 475$ m/s，$h = 8916.7$ m。

得

$$x=\frac{|\lambda|d}{|\lambda_1|+|\lambda_2|}$$

当 λ_1 和 λ_2 异号时，$E=0$的直线在电荷线密度小的直导线的外侧。设$|\lambda_1|<|\lambda_2|$，如图所示。

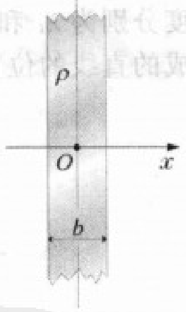
由

$$\frac{|\lambda_1|}{2\pi\varepsilon_0 x}-\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0(x+d)}=0$$

得

$$x=\frac{|\lambda_1|d}{|\lambda_2|-|\lambda_1|}$$

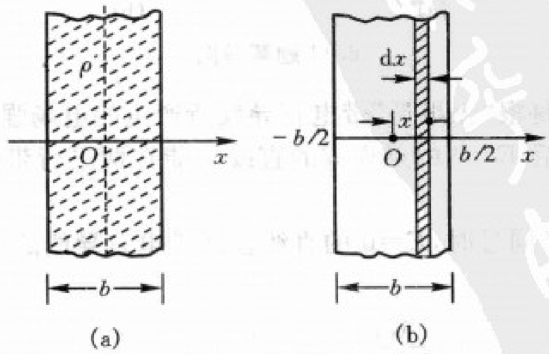
6.12 如图所示厚度为 b 的"无限大"均匀带电平板，其电荷体密度为 ρ。求板外任一点的电场强度。



题 6.12 图

解 取如图所示的坐标系，设所求点的坐标为 x。

(1) 平板外任一点($x>\frac{b}{2}$，或 $x<-\frac{b}{2}$) 的电场强度。在带电平板内任取一层厚度为 $\mathrm{d}x$ 的"无限大" 均匀带电薄层，其电荷面密度为 $\rho\mathrm{d}x$，它在所求点的电场强度的大小为 $\mathrm{d}E=\frac{\rho\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}$。平板上各薄层所产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 方向相同，故整个板所产生的电场强度的大小为



6.12 题解题图

$$E = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\rho \mathrm{d}x}{2\varepsilon_0} = \frac{b\rho}{2\varepsilon_0}$$

当 $\rho > 0$ 时，$\boldsymbol{E}$ 的方向垂直于板面向外；当 $\rho < 0$ 时，$\boldsymbol{E}$ 的方向垂直指向板面。

(2) 平板内任一点$\left(-\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}\right)$的电场强度。过所求点作一平行于板面的平面，将带电板分成两部分，则在所求点产生的电场强度等于这两部分所产生的电场强度的叠加，即

$$E(x) = \frac{\rho\left(x + \frac{b}{2}\right)}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho\left(\frac{b}{2} - x\right)}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

当 $\rho > 0, x > 0$ 或 $\rho < 0, x < 0$ 时，$\boldsymbol{E}(x)$ 沿 x 轴正方向；
当 $\rho < 0, x > 0$ 或 $\rho > 0, x < 0$ 时，$\boldsymbol{E}(x)$ 沿 x 轴负方向。

6.13 电荷均匀分布在半径为 R 的球形空间内，电荷体密度为 ρ。试求球内、球外及球面上的电场强度。

解 根据电荷分布的球对称性，可知电场分布也具有球对称性。以带电球体的球心为球心，作半径为 r 的球形高斯面，由高斯定理知：

$0 \leqslant r < R$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi\rho r^3$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$r = R$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$$

$r > R$ 时

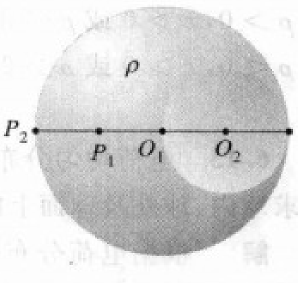
$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

此题也可以把带电球体分割为一层层的同心带电球壳，利用叠加原理，求出

$$E=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r & (r<R)\\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}R & (r=R)\\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2} & (r>R)\end{cases}$$

6.14 半径为 $2R$ 的均匀带电球，电荷体密度为 ρ，球心为 O_1。设想在球内有一个半径为 R 的球形空腔，球心为 O_2，$O_1O_2=R$，如图所示。P_1 和 P_2 在 O_1 和 O_2 的连线上，且 $P_1O_1=R$，$P_2O_1=2R$。根据叠加原理或补偿法求 O_1、O_2、P_1、P_2 四点电场强度的大小。



题 6.14 图

解 该带电球壳所产生的电场，可视为半径为 $2R$、电荷体密度为 $+\rho$ 的带电球体与半径为 R、电荷体密度为 $-\rho$ 的带电球体所产生的电场的叠加，应用上题的结果得

$$E_{O_1}=0+\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}R=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R$$

$$E_{O_2}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R+0=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R$$

$$E_{P_1}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}R-\frac{\rho}{12\varepsilon_0}R=\frac{\rho}{4\varepsilon_0}R$$

$$E_{P_2}=\frac{2\rho}{3\varepsilon_0}R-\frac{\rho}{27\varepsilon_0}R=\frac{17\rho}{27\varepsilon_0}R$$

6.15 氢原子是一个中心带正电 q_e 的原子核(可视为点电荷)，外边是带负电的电子云。在正常状态时，电子云的电荷分布密度是球对称的，且

$$\rho_e = -\frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

式中 a_0 为一常量(玻尔半径)。试求原子电场强度大小的分布。

解 根据电荷分布的球对称性,可知电场分布也具有球对称性。以原子核为球心、以 r 为半径作一球形高斯面,由高斯定理知

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 4\pi r^2 \cdot E = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

q' 为高斯面内包围的总电量。令其中电子云的电量为 q'',则

$$q'' = \iiint \rho_e(r)\mathrm{d}V = -\frac{q_e}{\pi a_0^3}\int_0^r 4\pi r^2 \cdot \mathrm{d}r \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

$$= -\frac{4q_e}{a_0^3}\int_0^r r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}\ \mathrm{d}r = q_e\left(2\frac{r^2}{a_0^2} + 2\frac{r}{a_0} + 1\right)e^{-\frac{2r}{a_0}} - q_e$$

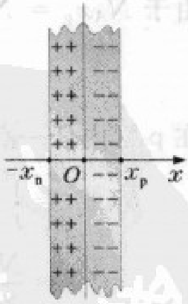
则

$$q' = q_e + q'' = q_e\left(2\frac{r^2}{a_0^2} + 2\frac{r}{a_0} + 1\right)e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

所以

$$E = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(2\frac{r^2}{a_0^2} + 2\frac{r}{a_0} + 1\right)e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

6.16 如图所示,在半导体 pn 结附近总是堆积着正、负电荷,n 区内是正电荷,p 区内是负电荷,两区内的电量相等。把 pn 结看作一对带正、负电荷的“无限大”平板,它们相互接触。x 轴的原点取在 pn 结的交接面上,方向垂直于板面。n 区的范围是 $-x_n \leqslant x \leqslant 0$;p 区的范围是 $0 \leqslant x \leqslant x_p$ ($x_n, x_p > 0$)。设两区内电荷分布都是均匀的,即



题 6.16 图

n 区: $\rho_e(x) = N_D e$

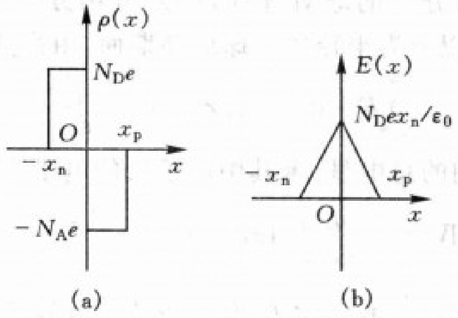
p 区: $\rho_e(x) = N_A e$

这种分布称为突变型模型。其中,N_D 和 N_A 都是常量,且有 $x_n N_D = x_p N_A$(两区内的电荷数量相等)。试证电场强度的大小为

n 区: $E(x) = \dfrac{N_D e}{\varepsilon_0}(x_n + x)$

$$\text{p 区：}\qquad E(x)=\frac{N_A e}{\varepsilon_0}(x_p-x)$$

并画出 $\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 的变化曲线。



6.16 题解题图

解　在 n 区内任一点的电场强度为

$$E(x)=\left(\int_{-x_n}^{x}\frac{N_D e}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x-\int_{x}^{0}\frac{N_D e}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x\right)+\int_{0}^{x_p}\frac{N_A e}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x$$

$$=2\frac{N_D e}{2\varepsilon_0}x+\frac{N_D e}{2\varepsilon_0}x_n+\frac{N_A e}{2\varepsilon_0}x_p$$

由于 $N_A x_p=N_D x_n$，所以上式可写为

$$E(x)=\frac{N_D e}{\varepsilon_0}(x_n+x)$$

在 p 区内任一点的电场强度为

$$E(x)=\int_{-x_n}^{0}\frac{N_D e}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x+\left(-\int_{0}^{x}\frac{N_A e}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x+\int_{x}^{x_p}\frac{N_A e}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{N_D e}{2\varepsilon_0}x_n-2\frac{N_A e}{2\varepsilon_0}x+\frac{N_A e}{2\varepsilon_0}x_p$$

$$=\frac{N_A e}{\varepsilon_0}(x_p-x)$$

题目得证。

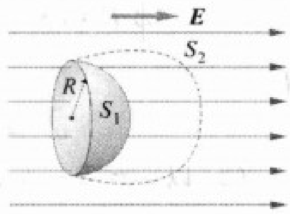
$\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 的变化曲线如图。

6.17　设均匀电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与半径为 R 的半球面的轴平行，试计算通过此半球面 S_1 的电通量。若以半球面的边线为边线，另作一

个任意形状的曲面 S_2，则通过 S_2 面的电通量又是多少？

解 通过 S_2 面的电通量与通过 S_1 面的电通量，都等于通过以 R 为半径的大圆面的电通量，即

$$\Phi_e = ES = \pi R^2 E$$



题 6.17 图

6.18 用高斯定理重新解题 6.10，并画出电场线。

解 作半径为 r 的同心球面为高斯面。

当 $r<R_1$ 时，有

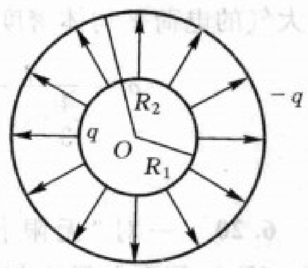
$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

所以 $E=0$；

当 $R_1 < r < R_2$ 时，有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

所以
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



6.18 题解题图

当 $r > R_2$ 时，有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}(q - q) = 0$$

所以 $E=0$。

电场线如图所示。

6.19 实验表明：在靠近地面处的电场强度约为 1.0×10^2 N/C，方向指向地球中心。在离地面 1.5×10^3 m 高处，电场强度约为 20 N/C，方向也是指向地球中心。试求

(1)地球所带的总电量；

(2)离地面 1.5×10^3 m 下的大气层中电荷的平均密度。

解 (1)根据电场分布的对称性，以地球中心为球心，以近似于地球半径 R 为半径作同心球面为高斯面。由高斯定理有：

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = E_1 \cos\pi \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{1i} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_1$$

得

$$q_1 = -4\pi\varepsilon_0 R^2 E_1^2 = -4.6 \times 10^5 \text{ C}$$

(2) 以 $r = R + h$ 为半径作同心球面为高斯面，则由高斯定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = E_2 \cos\pi \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{2i} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_2$$

得

$$q_2 = -4\pi\varepsilon_0 r^2 E_2$$

则大气的电荷平均体密度为

$$\rho = \frac{q_2 - q_1}{\frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3)} = 4.72 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$$

6.20 一对“无限长”的同轴直圆筒，半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$)，筒面上都均匀带电，沿轴线单位长度的电量分别为 λ_1 和 λ_2。试求空间的电场强度分布。

解 根据电场的轴对称分布，以直圆筒轴线为轴，以任一 r 为半径，作一高为 l 的闭合圆柱面为高斯面。由高斯定理有

(1) $r < R_1$ 的区域

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = 0$$

得

$$E = 0$$

(2) $R_1 < r < R_2$ 的区域

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0} l\lambda_1$$

得

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

(3) $r > R_2$ 的区域

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0 l}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

得

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

6.21 半径为 R 的"无限长"的均匀带电直圆柱体，设体密度为 ρ。试求圆柱体内和圆柱体外任一点的电场强度。

解 根据电场的轴对称分布，作一与圆柱体同轴的半径为 r、长为 l 的闭合圆柱面为高斯面。由高斯定理有：

当 $r < R$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2 l\rho$$

得
$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r$$

当 $r > R$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi R^2 l\rho$$

得
$$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

若 $\rho > 0$，$\boldsymbol{E}$ 的方向沿径向向外；若 $\rho < 0$，$\boldsymbol{E}$ 的方向沿径向指向轴线。

6.22 "无限长"的同轴圆柱与圆筒均匀带电。圆柱的半径为 R_1，其电荷体密度为 ρ_1；圆筒的内外半径分别为 R_2 和 R_3（$R_1<R_2<R_3$），其电荷体密度为 ρ_2。试求

(1) 空间任一点的电场强度；

(2) 若当 $r<R_3$ 区域中的电场强度为零，则 ρ_1 和 ρ_2 应有什么样的关系。

解 由电荷分布的轴对称性，可知电场分布亦具有轴对称性。作一半径为 r、长为 l 的闭合同轴圆柱面为高斯面，由高斯定理有：

(1) 当 $r < R_1$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2 l\rho_1$$

得
$$E = \frac{\rho_1}{2\varepsilon_0}r$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi R_1^2 l\rho_1$$

得
$$E=\frac{\rho_1 R_1^2}{2\varepsilon_0 r}$$

当 $R_2<r<R_3$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E\cdot 2\pi r\cdot l=\frac{1}{\varepsilon_0}[\pi R_1^2 l\rho_1+\pi(r^2-R_2^2)l\rho_2]$$

得
$$E=\frac{1}{2\varepsilon_0 r}[R_1^2\rho_1+(r^2-R_2^2)\rho_2]$$

当 $r>R_3$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E\cdot 2\pi r\cdot l=\frac{1}{\varepsilon_0}[\pi R_1^2 l\rho_1+\pi(R_3^2-R_2^2)l\rho_2]$$

得
$$E=\frac{1}{2\varepsilon_0 r}[R_1^2\rho_1+(R_3^2-R_2^2)\rho_2]$$

上述 $\boldsymbol{E}$ 的指向由 ρ_1 和 ρ_2 的正负决定。

(2) 若 $r>R_3$ 的区域内 $E=0$,则

$$R_1^2\rho_1+(R_3^2-R_2^2)\rho_2=0$$

由于 $R_2<R_3$,可见 ρ_1 和 ρ_2 应为异号,即

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=-\frac{R_3^2-R_2^2}{R_1^2}$$

6.23 设气体放电形成的等离子体圆柱内的电荷体密度可表示为

$$\rho(r)=\frac{\rho_0}{\left(1+(\frac{r}{a})^2\right)^2}$$

式中 r 是到轴线的距离,ρ_0 是轴线上的体密度,a 为常量。求圆柱体内的电场强度分布。

解 作一半径为 r、长为 l 的闭合圆柱面为高斯面,由高斯定理有

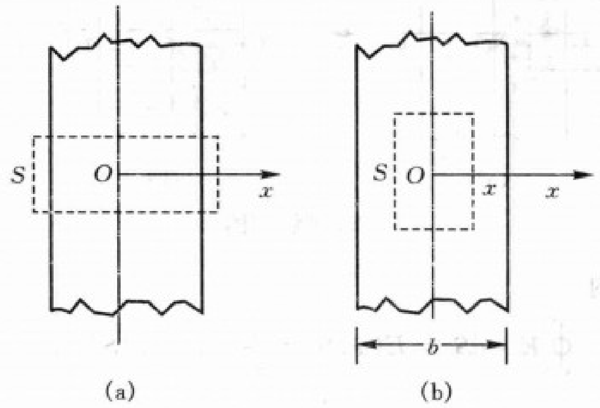
$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E\cdot 2\pi r\cdot l$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{\rho_0}{\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}\cdot 2\pi r\cdot l\cdot \mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi a^2\rho_0 l r^2}{\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

得
$$E = \frac{a^2 \rho_0 r}{2\varepsilon_0 (a^2 + r^2)}$$

6.24 用高斯定理重新解题 6.12。



6.24 题解题图

解 由电荷分布的面对称性，分析电场也具有面对称性。

(1)在平板外一点的电场强度

作如图(a)所示的柱形高斯面，由高斯定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2ES = \frac{1}{\varepsilon_0} bS\rho$$

得
$$E = \frac{b\rho}{2\varepsilon_0}$$

(2) 在平板内一点的电场强度

作如图(b) 所示的柱形高斯面，由高斯定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2ES = \frac{1}{\varepsilon_0} 2xS\rho$$

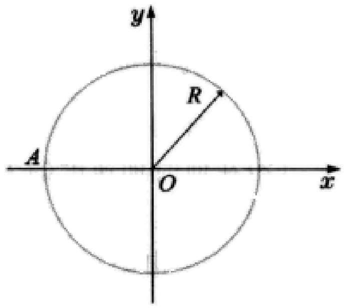
得
$$E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

方向与 6.12 题结果相同。

1.12 一质点沿半径$R=1$ m的圆周运动。$t=0$ 时，质点位于 A 点，如图。然后沿顺时针方向运动，运动学方程为 $s=\pi t^2+\pi t$，其中 s 的单位为 m，t 的单位为 s，试求：

(1) 质点绕行一周所经历的路程、位移、平均速度和平均速率；

(2)质点在第 1 秒末的速度和加速度的大小。



题 1.12 图

解 (1) 质点绕行一周所经历的路程为

$$\Delta s=2\pi R=6.28\ \mathrm{m}$$

由位移和平均速度的定义可知，位移和平均速度均为零，即

$$\Delta \boldsymbol{r}=0$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=0$$

令 $$\Delta s=s(t)-s(0)=\pi t^2+\pi t=2\pi R$$

可得质点绕行一周所需时间

$$\Delta t=1\ \mathrm{s}$$

平均速率为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2\pi R}{\Delta t}=6.28\ \mathrm{m/s}$$

由以上结果可以看出，位移与路程、平均速度与平均速率是不同的。

(2) t 时刻质点的速度和加速度大小为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2\pi t+\pi$$

$$a=\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

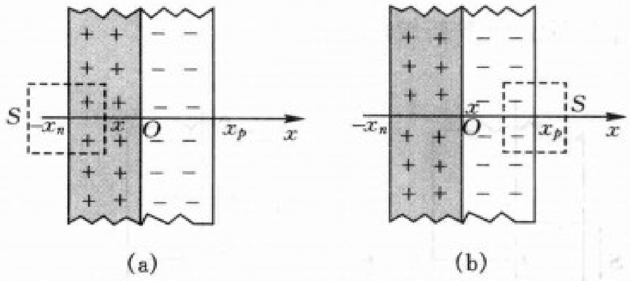
当 $t=1$ s 时

$$v=9.42\ \mathrm{m/s}$$

$$a=89.0\ \mathrm{m/s^2}$$

6.25 用高斯定理重新解题 6.16。

解 作如图所示的闭合柱形高斯面。由高斯定理有：



6.25 题解题图

在 n 区内

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(x)S = \frac{1}{\varepsilon_0}(x_{\mathrm{n}} + x)SN_De$$

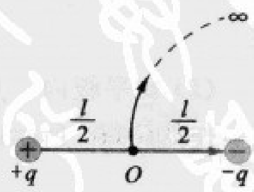
得
$$E(x) = \frac{N_De}{\varepsilon_0}(x_{\mathrm{n}} + x)$$

在 p 区内

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(x)S = \frac{1}{\varepsilon_0}(x_{\mathrm{p}} - x)SN_Ae$$

得
$$E(x) = \frac{N_Ae}{\varepsilon_0}(x_{\mathrm{p}} - x)$$

6.26 把单位正电荷从电偶极子轴线的中点 O 沿任意路径移到无穷远处，求静电力对它做的功。



题 6.26 图

解 图中 O 点的电势为

$$u_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(l/2)} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(l/2)} = 0$$

根据
$$A_{ab} = q_0(u_a - u_b)$$

得
$$A_{O\infty} = 0$$

6.27 在氢原子中，正常状态下电子到质子的距离为 5.29×10^{-11} m，已知氢原子核和电子的带电量各为 $+e$ 和 $-e$（$e = 1.6\times10^{-19}$ C）。把原

子中的电子从正常状态下离核的距离拉开到无穷远处，所需的能量叫做氢原子的电离能。求此电离能是多少电子伏特。

解 由牛顿第二定律知

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=m\frac{v^2}{a}$$

得

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

所以氢原子系统具有的能量为

$$W=E_p+E_k=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}=-13.6\ \text{eV}$$

故氢原子的电离能为+13.6 eV。

6.28 求与点电荷 $q=2.0\times10^{-8}$ C 分别相距 $a=1.0$ m 和 $b=2.0$ m 的两点的电势差。

解

$$\Delta u=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=90\ \text{V}$$

6.29 两个点电荷的电量都是 q，相距为 $2r$，求中垂面上某点的电势。该点到两个点电荷连线中点的距离为 x，说明通过该点的等势线的形状。

解

$$u_p=u_1+u_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{1/2}}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{(x^2+r^2)^{1/2}}$$

等势线是中垂面内半径为 x 的圆，圆心在两电荷的连线的中点。

6.30 有两个带异号的点电荷 $nq(n>1)$ 和 $-q$，相距为 a。证明

(1)电势是零的等势面是一个球面；

(2)球心在两点电荷连线的延长线上，且在 $-q$ 的点电荷的外侧；

(3)这个球面的半径为 $\dfrac{na}{n^2-1}$。

解 取如图所示的坐标系。设 P 点的电势为零，则

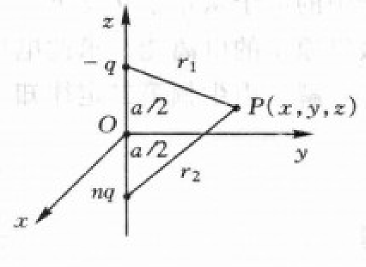
$$\frac{nq}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=0$$

所以 $$\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{n}$$

而

$$r_1=\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$r_2=\left[x^2+y^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$



6.30 题解题图

代入上式中化简得

$$x^2+y^2+\left[z-\frac{(n^2+1)a}{2(n^2-1)}\right]^2=\left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2$$

此式为一球面方程，球心的坐标为$\left(0,0,\frac{n^2+1}{n^2-1}\ \frac{a}{2}\right)$，即球心在 z 轴上。$z=\frac{n^2+1}{n^2-1}\frac{a}{2}>\frac{a}{2}$，说明球心在$-q$ 点电荷的外侧，球面的半径为$\frac{na}{n^2-1}$。

6.31 金元素的原子核可看作均匀带电球体，其半径为 6.9×10^{-15} m，电量为 $q=79\times1.6\times10^{-19}$ C。求它表面上的电势。

解 $$u=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q}{R}=1.65\times10^{7}\ \text{V}$$

6.32 用电势叠加原理求题 6.7 中 P 点的电势。

解 如题 6.7 图所示，在圆柱形薄片上取一宽为 $\mathrm{d}z$ 的圆环，此圆环上所带的电量为 $\mathrm{d}q=\frac{q}{l}\mathrm{d}l$。由均匀带电圆环在轴线上一点的电势关系式及电势叠加原理，有

$$u=\int_0^l\frac{q/l}{4\pi\varepsilon_0[(h+l-z)^2+R^2]^{1/2}}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{h+l+[(h+l)^2+R^2]^{1/2}}{h+(h^2+R^2)^{1/2}}$$

6.33 一半径为 R 的均匀带电球体，其电荷体密度为 ρ。求：①球外任一点的电势；②球表面上的电势；③球内任一点的电势。

解 由高斯定理求出均匀带电球体的电场分布为

$$E=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r & (r<R)\\[2ex] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (r\geqslant R)\end{cases}$$

以无穷远为电势零参考点，则

① 球外一点的电势($r\geqslant R$)

$$u=\int_r^{\infty}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

② 球面上的电势($r=R$)

$$u=\int_R^{\infty}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

③ 球内一点的电势($r<R$)

$$u=\int_r^{R}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)$$

6.34 长为 $2a$ 的直线段上均匀地分布着电量为 q 的电荷。①P 点在线段的垂直平分线上，离线段的中点的距离为 r，求 P 点的电势和 OP 方向上的电场强度分量；②P 点在线段的延长线上，离 O 点的距离为 z，求 P 点的电势和 OP 方向的电场强度分量；③P 点在通过线段端点 A 的垂直面上，离该端点的距离为 r，求 P 点的电势及 AP 方向的电场强度分量。

解 取如图(a)所示的坐标系，以无穷远为电势的零参考点。

① 取电荷元 $\mathrm{d}q$，它在 P 点产生的电势为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{(z^2+r^2)^{1/2}}\\&=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+r^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

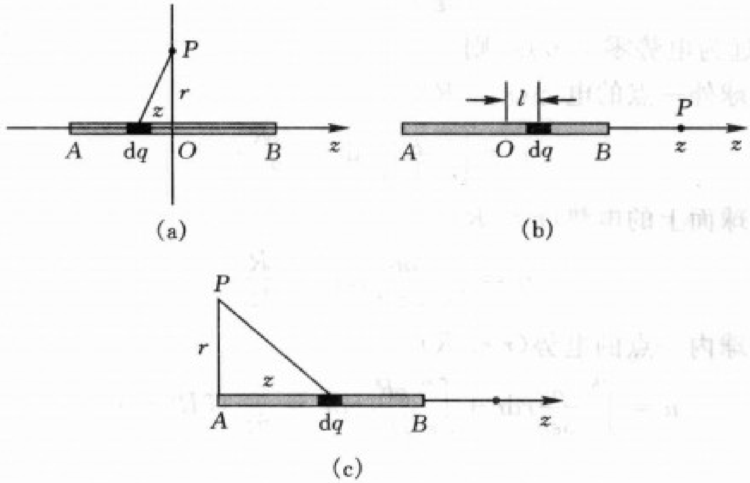
根据电势叠加原理，整个带电直线在 P 点产生的电势为

$$u=\int\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+r^2)^{1/2}}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+r^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}\right)$$

$$E_{OP} = -\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r(a^2+r^2)^{1/2}}$$



6.34 题解题图

② 取如图(b) 所示的电荷元 dq,它在 P 点产生的电势为

$$du = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{z-l} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\frac{dl}{z-l}$$

则整个带电直线在 P 点产生的电势为

$$u = \int\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\frac{dl}{z-l} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\int_{-a}^{a}\frac{dl}{z-l}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln\frac{z+a}{z-a}$$

$$E_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2-a^2}$$

③ 取如图(c) 所示的坐标系和电荷元 dq,在 P 点产生的电势为

$$du = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\frac{dz}{(z^2+r^2)^{1/2}}$$

则整个带电直线在 P 点产生的电势

$$u = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\int_0^{2a} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln\frac{2a + \sqrt{r^2 + 4a^2}}{r}$$

$$E_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{2a + \sqrt{r^2 + 4a^2}}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r(r^2 + 4a^2)^{1/2}}$$

6.35 半径为 R 的“无限长”圆柱体内均匀带电，电荷体密度为 ρ。试求它所产生电场的电势分布(选圆柱的轴线为电势的零参考点)。

解 由高斯定理知带电圆柱体的电场分布

$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0 r} & (r < R) \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r} & (r \geqslant R) \end{cases}$$

其电势分布为：

当 $r < R$ 时

$$u = \int_r^0 \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2$$

当 $r \geqslant R$ 时

$$u = \int_r^R \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}\mathrm{d}r + \int_R^0 \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

6.36 证明在 6.16 题中突变型 pn 结内电势的分布是

n 区： $u = -\dfrac{N_D e}{\varepsilon_0}(x_n x + \dfrac{1}{2}x^2)$

p 区： $u = -\dfrac{N_A e}{\varepsilon_0}(x_p x - \dfrac{1}{2}x^2)$

解 n 区 $u(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{N_D e}{\varepsilon_0}(x_n + x)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{N_D e}{\varepsilon_0}(x_n + \frac{1}{2}x^2)$$

p 区 $\quad u(x)=\int_x^0 \frac{N_A e}{\varepsilon_0}(x_p-x)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{N_A e}{\varepsilon_0}\left(x_p x-\frac{1}{2}x^2\right)$$

6.37 一无限大不导电的薄片在一侧带有面电荷密度 $\sigma=0.10\ \mu C/m^2$，电势差为 50 V 的两等势面应相距多远？

解 由薄片产生的匀强电场的场强为

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{0.1\times10^{-6}}{2\times8.85\times10^{-12}}=5.65\times10^3$$

电势差为 50 V 的两等势面间的距离为

$$d=\frac{\Delta u}{E}=\frac{50}{5.65\times10^3}=8.8\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

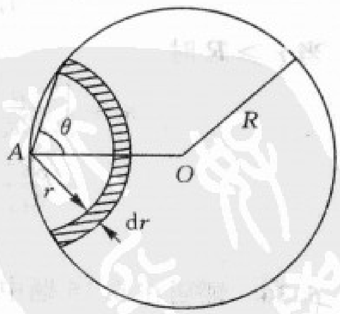
6.38 半径为 R 的薄圆盘均匀带正电荷，电荷面密度为 σ。试求

(1)圆盘轴线上的电势分布；

(2)求圆盘边缘上一点 A 的电势；

(3)比较 A 点和圆心 O 处电势的大小。

解 (1) 把带电圆盘视为无数个不同半径的圆环。在轴线上距盘心为 x 处的 P 点产生的电势，等于这些带电圆环在该点产生的电势的叠加。取半径为 r、宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，其上所带的电量为 $\mathrm{d}q=\sigma\cdot2\pi r\cdot\mathrm{d}r$，它在 P 点产生的电势为



6.38 题解题图

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{(r^2+x^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma2\pi r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{1/2}}$$

则整个带电薄圆盘在 P 点产生的电势为

$$u=\int\mathrm{d}u=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

(2) 如图所示，以 A 为圆心，以 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 分别为半径作细圆环，它带的电量为 $\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2r\theta\cdot \mathrm{d}r$，在 A 点产生的电势为

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}=\frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\theta\mathrm{d}r$$

因为 $r=2R\cos\theta$，所以

$$\mathrm{d}r=-2R\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

故
$$\mathrm{d}u=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\theta(-2R\sin\theta\mathrm{d}\theta)$$

整个带电圆盘在 A 点产生的电势为

$$u_A=\int\mathrm{d}u=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}(-\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta)=\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}(\sin\theta-\theta\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$$

(3) 由(1) 知，当 $x\to 0$ 时，$u_0=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$，因此有 $u_0>u_A$。

6.39 一电子初速为零，在 5000 V 的电压下获得速度后，水平飞入两平行板空间的中央，若平板是水平放置的，且板长 $b=5$ cm，两板间距离 $d=1$ cm。问至少要在两板上加多大电压，才能使电子不再飞出两板的空间？

解 设电子不飞出板间，两板上所加电压为 u，则板间电场强度 $E=\frac{u}{d}$。忽略电子所受的重力，因而有

$$y=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{b}{v}\right)^2\geqslant\frac{d}{2}$$

将 $E=\frac{u}{d}$ 代入上式整理可得

$$u=\left(\frac{d}{b}\right)^2\frac{mv^2}{e}$$

因为加速电压 $u_0=5000$ V，而 $eu_0=\frac{1}{2}mv^2$，故有 $mv^2=2eu_0$，代入得

$$u = \left(\frac{d}{b}\right)^2 \frac{2eu_0}{e} = 2\left(\frac{d}{b}\right)^2 u_0$$
$$= 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times 5000 = 400\ \mathrm{V}$$

6.40 二极管的主要构件是，一个半径为 $R_1 = 5.0 \times 10^{-4}$ m 的圆柱状阴极，和一个套在阴极外的半径为 $R_2 = 45 \times 10^{-4}$ m 的同轴圆筒状阳极。阳极与阴极间电势差为 $u_+ - u_- = 300$ V。

(1)设一电子从阴极出发时的初速度很小，可以忽略不计，求该电子到达阳极时所具有的动能。

(2)试证明两极间距离轴线为 r 的一点处电场强度为

$$E = \frac{1}{r}\frac{u_+ - u_-}{\ln(R_2/R_1)}$$

解 (1) 电场力做功等于电子动能的增量

$$\frac{1}{2}mv^2 = e(u_+ - u_-)$$

由此得

$$v = \sqrt{\frac{2e(u_+ - u_-)}{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 300}{9.1 \times 10^{-31}}}$$
$$= 1.05 \times 10^7\ \mathrm{m/s}$$

(2) 作同轴的闭合圆柱形高斯面，由高斯定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$

解得
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

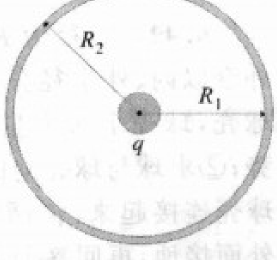
由电势差的定义有

$$u_- - u_+ = \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

因而有
$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0 \frac{u_+ - u_-}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

代入得
$$E=\frac{1}{r}\frac{u_+-u_-}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

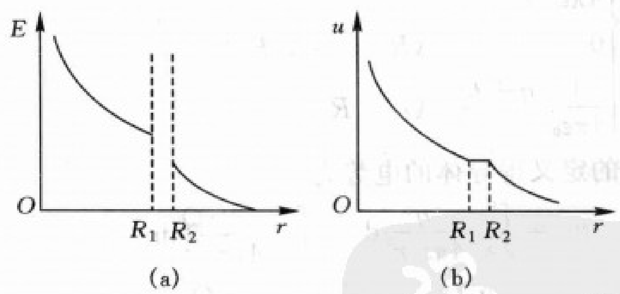
6.41 带电量 q 的点电荷处在导体球壳的中心，球壳的内、外半径分别为 R_1 和 R_2。求球壳内、外及壳上任一点的电场强度和电势；并画出 E-r 和 u-r 曲线。



题 6.41 图

解 应用高斯定理，求出电场强度分布为

$$E=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2} & (r<R_1)\\ 0 & (R_1<r<R_2)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2} & (r>R_2)\end{cases}$$



6.41 题解题图

由电势定义得：

当 $r<R_1$ 时
$$u=\int_r^{R_1}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+0+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

当 $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ 时
$$u=0+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

1.13 一质点沿半径为 R 的圆周运动，运动学方程为 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$，其中 v_0、b 都是常量，试求：

(1)在时刻 t 质点的加速度 $\boldsymbol{a}$；

(2)在何时加速度的大小等于 b；

(3)到加速度大小等于 b 时质点沿圆周运行的圈数。

解 (1) 由用自然坐标表示的运动学方程可得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-b$$

故有

$$\boldsymbol{a}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}\boldsymbol{n}-b\boldsymbol{\tau}$$

(2)令

$$a=\sqrt{\left[\frac{(v_0-bt)^2}{R}\right]^2+b^2}=b$$

解得

$$v_0-bt=0$$

$$t=\frac{v_0}{b}$$

即 $t=\frac{v_0}{b}$ 时，加速度大小为 b。

(3)

$$\begin{aligned}\Delta s&=s(t)-s(0)\\&=v_0\frac{v_0}{b}-\frac{1}{2}b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2=\frac{v_0^{\,2}}{2b}\end{aligned}$$

运行的圈数为

$$n=\frac{\Delta s}{2\pi R}=\frac{v_0^{\,2}}{4\pi Rb}$$

1.14 一质点按规律 $s=t^3+2t^2$ 在圆轨道上运动，s 为沿圆弧的自然坐标，以 m 为单位，t 以 s 为单位。如果当 $t=2$ s 时的总加速度为 $16\sqrt{2}$ m/s^2，求此圆弧的半径。

解 由以自然坐标表示的运动学方程可得

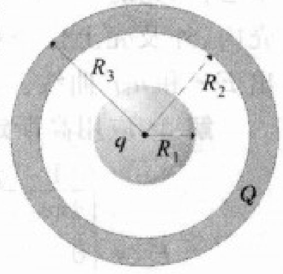
$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=3t^2+4t$$

当 $r > R_2$ 时

$$u = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$E-r$ 和 $u-r$ 线如图(a)、(b) 所示。

6.42 半径为 R_1 的导体球带电量为 q，球外套以内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳，球壳上带电量为 Q。①求球和球壳的电势；②求球与球壳间的电势差；③用导线把球和球壳连接起来，再回答①、②两问；④若将球壳外面接地，再回答①、②两问。



题 6.42 图

解 ① 先由高斯定理求出电场强度分布

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (R_2 < r < R_3) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q+Q}{r^2} & (r > R_3) \end{cases}$$

再根据电势的定义得导体的电势为

$$u_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r + \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

导体壳的电势为

$$u_2 = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

② 导体球与球壳间的电势差为

$$u_1 - u_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

③ 用导线将导体球与球壳连接后，电荷全部分布在球壳的外表面上，其电量为 $q+Q$。在这种情况下，电场强度的分布为

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_3) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q+Q}{r^2} & (r > R_3) \end{cases}$$

此时

$$u_1 = u_2 = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R_3}$$

因此

$$u_1 - u_2 = 0$$

④ 用导线将球壳的外表面接地，则球壳只有内表面有电量 $-q$ 分布。此时，电场强度的分布为

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (r > R_2) \end{cases}$$

因此有

$$u_2 = 0$$

$$u_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$u_1 - u_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

6.43 两个金属球半径分别为 R_1 和 R_2，所带电量分别为 q_1 和 q_2。两球相距很远，将两球用导线连接。设导线很长，两球上电荷仍可视为均匀分布，试证：在静电平衡时，两球上的电荷面密度与它们的半径成反比。

解 设两球连接后处于静电平衡时，两球带电量分别为 q'_1 和 q'_2，则两金属球上电荷的面密度分别为

$$\sigma_1 = \frac{q'_1}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{q'_2}{4\pi R_2^2}$$

而两球的电势则分别为

$$u_1 = \frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$u_2 = \frac{q'_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

由于 $u_1 = u_2$，因而可得 $\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$。

题目得证。

6.44 范德格拉夫起电机的球壳直径为 1.0 m，空气的击穿电场强度为 30 kV/cm，求这起电机最多能达到多高的电势？

解 因为球壳表面电场强度 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，其电势为

$$u=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}R=ER$$

所以起电机能达到的最高电势为

$$u=E_{击}R=30\times10^5\times\frac{1}{2}=1.5\times10^6\ \mathrm{V}$$

6.45 两块平行的金属板相距为 d，用一电源充电，两极板间的电势差为 Δu。将电源断开，在两板间平行地插入一块厚度为 l 的金属板（$l<d$，且与极板不接触），忽略边缘效应，问两金属板间的电势差改变多少？插入的金属板的位置对结果有无影响？

解 充电后，插入金属板时，若板上电荷面密度为 σ，则板间的电场强度为 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，两板间的电势差为

$$\Delta u=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

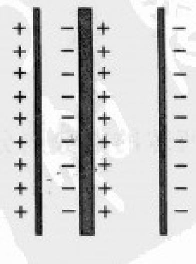
断开电源并插入金属板后，两极板上的电荷分布不会发生变化，而处于静电平衡状态的金属板面出现与极板上电量相同的感应电荷，如图所示。除金属板内 $E=0$ 外，其余空间的电场强度仍为$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，故两极板间的电势差

$$\Delta u'=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-l)$$

电势差的改变

$$\Delta u-\Delta u'=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-l)$$

$$=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l=\frac{l}{d}\Delta u$$



6.45 题解题图

可见金属板的位置对结果无影响。

6.46 两只电容分别为 $C_1=3\ \mu F$，$C_2=6\ \mu F$ 的电容器串联，用电压$U=10$ V的电源给它们充电，然后把电源断开。再把断开的导线两端连接起来，问每只电容器极板上最后所带的电量是多少？

解 零。

6.47 两导体相距很远，相对于无穷远处的电势分别为 u_1 和 u_2，电容分别为 C_1 和 C_2，当用细线把它们连接起来时，将有电荷的流动。计算流动的电量及导体最后的电势。

解 两导体原来带电量为

$$Q_1=C_1u_1$$
$$Q_2=C_2u_2$$

用导线连接后，$u_1=u_2$，电容变为$C=C_1+C_2$。

由电荷守恒定律有

$$Q=Q_1+Q_2$$

因此，导体最后的电势为

$$u=\frac{Q}{C}=\frac{C_1u_1+C_2u_2}{C_1+C_2}$$

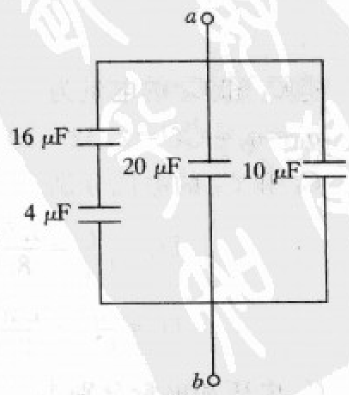
流动的电量为

$$\begin{aligned}Q_1-Q_1'&=C_1u_1-C_1u\\&=\frac{C_1C_2(u_1-u_2)}{C_1+C_2}\end{aligned}$$

6.48 试求图示电容网络的等效电容。

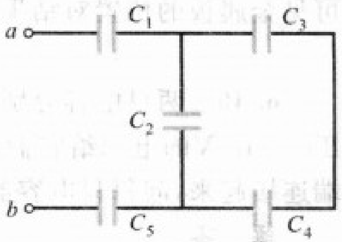
解 等效电路如图所示。等效电容为

$$C=10+20+\frac{1}{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}=33.2\ \mu F$$



6.48 题解题图

6.49 图中 $C_1=C_5=8.4\ \mu F$，$C_2=C_3=C_4=4.2\ \mu F$，a、b 两端的电压 $V_{ab}=220\ V$，求①a、b 两端间的等效电容；②各电容器上电荷量和电压。



题 6.49 图

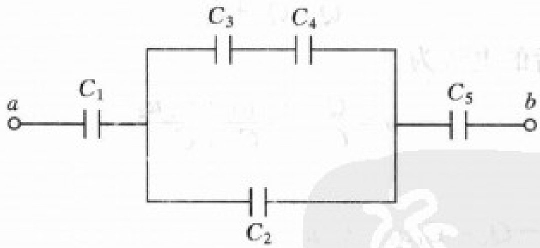
解

①等效电路如图所示。等效电容为

$$C=\cfrac{1}{\cfrac{1}{C_1}+\cfrac{1}{C_5}+\cfrac{1}{C_2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{C_3}+\cfrac{1}{C_4}}}}$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{1}{8.4}+\cfrac{1}{8.4}+\cfrac{1}{4.2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{4.2}+\cfrac{1}{4.2}}}}$$

$$=2.52\ \mu F$$



6.49 题解题图

②C_1 和 C_5 的电量为

$q_1=q_5=CU=2.52\times10^{-6}\times220=5.554\times10^{-4}$

C_1 和 C_5 的电压分别为

$$U_1=\frac{q}{C_1}=\frac{5.554\times10^{-4}}{8.4\times10^{-6}}=66\ V$$

$$U_5=\frac{q}{C_5}=\frac{5.554\times10^{-4}}{8.4\times10^{-6}}=66\ V$$

C_2 电压和电量分别为

$$U_2=(U-U_1-U_5)=(220-66-66)=88\ V$$

$$q_2=C_2U_2=4.2\times10^{-6}\times88=3.7\times10^{-4}\ \text{C}$$

C_3 和 C_4 的电量为

$$q_3=q_4=\frac{1}{\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_4}}U_2=\frac{1}{\frac{1}{4.2\times10^{-6}}+\frac{1}{4.2\times10^{-6}}}\times88$$

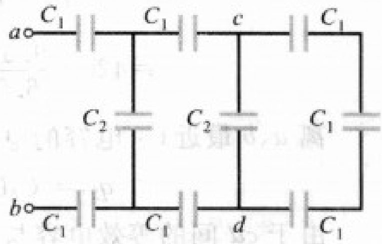
$$=1.848\times10^{-4}\ \text{C}$$

C_1 和 C_5 的电压分别为

$$U_3=\frac{q_3}{C_3}=\frac{1.848\times10^{-4}}{4.2\times10^{-6}}=44\ \text{V}$$

$$U_4=\frac{q_4}{C_4}=\frac{1.848\times10^{-4}}{4.2\times10^{-6}}=44\ \text{V}$$

6.50 图中 $C_1=6.9\ \mu\text{F}$，$C_2=4.6\ \mu\text{F}$，求：①a、b 两端间的等效电容；②在 $V_{ab}=420\ \text{V}$ 时，离 a、b 最近的三个电容器上的电荷量以及 V_{cd}。



题 6.50 图

解 ①等效电路如图所示。cd 间的等效电容为

$$C_{cd}=C_2+\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}}$$

$$=4.6+\frac{1}{\frac{1}{6.9}+\frac{1}{6.9}++\frac{1}{6.9}}=6.9\ \mu\text{F}$$

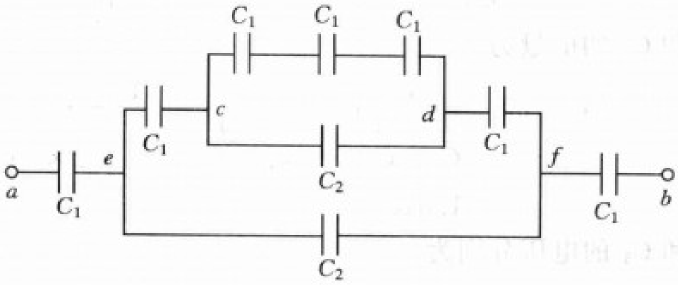
ef 间的等效电容为

$$C_{ef}=C_2+\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{ed}}+\frac{1}{C_1}}=4.6+\frac{1}{\frac{1}{6.9}+\frac{1}{6.9}+\frac{1}{6.9}}=6.9\ \mu\text{F}$$

ab 间的等效电容为 $C_{ab}=\dfrac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{ef}}+\frac{1}{C_1}}=\dfrac{1}{\frac{1}{6.9}+\frac{1}{6.9}+\frac{1}{6.9}}=2.3\ \mu\text{F}$

②离 a、b 最近的两个 C_1 电容的电量为

$$q_1=C_{ab}U=2.3\times10^{-6}\times420=9.66\times10^{-4}\ \text{C}$$



6.50 题解题图

ef 两端的电压为

$$U_{ef}=U-\frac{q_1}{C_1}-\frac{q_1}{C_1}$$

$$=420-\frac{9.66\times10^{-4}}{6.9\times10^{-6}}-\frac{9.66\times10^{-4}}{6.9\times10^{-6}}=140\ \text{V}$$

离 a、b 最近 C_2 电容的电量为

$$q_2=C_2U_{ef}=6.44\times10^{-4}\ \text{C}$$

由于 cd 间的等效电容与 cd 外侧的两个 C_1 电容电容相等，因此

$$U_{cd}=\frac{U_{ef}}{3}=\frac{140}{3}\ \text{V}$$

6.51 有一平行板空气电容器，极板的面积均为 S，极板间距为 d，把厚度为 $d'(d'<d)$ 的金属平板平行于极板插入电容器内（不与极板接触）。计算

(1)插入后电容器的电容；

(2)给电容器充电到电势差为 U_0 后，断开电源，再把金属板从电容器中抽出，外界要做多少功？

解 (1)插入厚度为 d' 的金属板，相当于原来空气电容器间距减小为 $d-d'$，故

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d-d'}$$

(2)充电后 $$Q_0=C_0u_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d-d'}u_0$$

$$W_0=\frac{1}{2}C_0u_0^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d-d'}u_0^2$$

抽出金属板后，电容变为 $C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$，电量不变，则

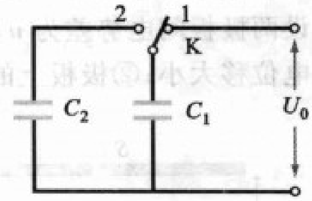
$$u=\frac{Q_0}{C}=\frac{d}{d-d'}u_0$$

$$W=\frac{1}{2}Cu^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 Sd}{(d-d')^2}u_0^2$$

显然，$W>W_0$，故抽出过程中外界需做功

$$A=W-W_0=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 Sd'}{(d-d')^2}u_0^2$$

6.52 图中 $C_1=8\ \mu\text{F}$，$U_0=120\ \text{V}$，$C_2=4\ \mu\text{F}$，K 为单刀双掷开关。把 K 接在 1 处，给 C_1 充电到 120 V；再把 K 接 2 处。计算电容器中能量的变化。



题 6.52 图

解 当 K 合至 1 处，使 C_1 充电，有

$$q_1=C_1u_0=8\times10^{-6}\times120=9.6\times10^{-4}\ \text{C}$$

电容器中的能量

$$W_1=\frac{1}{2}C_1u_0^2=\frac{1}{2}\times8\times10^{-6}\times120^2=5.76\times10^{-2}\ \text{J}$$

当 K 合至 2 处，C_1 向 C_2 放电，电荷重新分布

$$q_1'+q_2'=q_1$$

由 C_1、C_2 上电压相等知

$$q_1':q_2'=C_1:C_2=2:1$$

解得

$$q_1'=6.4\times10^{-4}\ \text{C}$$

$$q_2'=3.2\times10^{-4}\ \text{C}$$

$$u=\frac{q_1'}{C_1}=80\ \text{V}$$

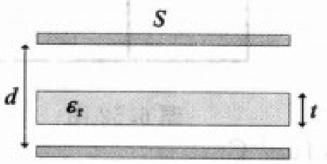
电容器中的能量

$$\begin{aligned}W_2 &= \frac{1}{2}C_1u^2+\frac{1}{2}C_2u^2\\&=0.5\times(8+4)\times10^{-6}\times80^2\\&=3.84\times10^{-2}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

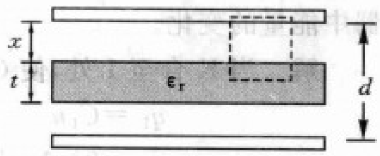
能量变化为

$$\begin{aligned}\Delta W &= W_2-W_1\\&=3.84\times10^{-2}-5.76\times10^{-2}\\&=-1.92\times10^{-2}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

6.53 如图所示，一平行板电容器两极板相距为 d，面积为 S，其中平行于极板放有一层厚度为 t 的电介质，它的相对介电常数为 ε_r。设两极板间电势差为 u，略去边缘效应。试求：①介质中的电场强度和电位移大小；②极板上的电荷 Q；③电容。



题 6.53 图



6.53 题解题图

解 (1)设空气中的场强为 E_0

$$\begin{aligned}u &= E_0x+Et+E_0(d-x-t)\\&=E_0(d-t)+Et\end{aligned}$$

由高斯定理可知，在两板间 $\boldsymbol{D}$ 处处相等

$$E_0=\frac{D}{\varepsilon_0},\qquad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

故

$$\begin{aligned}u &= \frac{D}{\varepsilon_0}(d-t)+\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t\\&=\frac{D}{\varepsilon_0}\left(d-t+\frac{t}{\varepsilon_r}\right)\end{aligned}$$

$$D=\frac{u\varepsilon_0}{d-t+\dfrac{t}{\varepsilon_r}}=\frac{u\varepsilon_0\varepsilon_r}{\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t}$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{u}{\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t}$$

(2)如图所示，作一柱形高斯面，由高斯定理可得

$$\sigma_0=D$$

$$Q=\sigma_0 S=DS=\frac{u\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t}$$

(3)
$$C=\frac{Q}{u}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t}$$

6.54 在上题中，设未放电介质时极板间电势差为 U_0，然后将电介质插入。试求插入电介质后：①极板上的电荷 Q；②电介质中的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的大小；③电容。

解 (1)极板上所带电量

$$Q=u_0 c_0=\frac{u_0\varepsilon_0 S}{d}$$

(2)用高斯定理求得

$$D=\sigma_0=\frac{Q}{S}=\frac{u_0\varepsilon_0}{d}$$

介质中的 $\boldsymbol{D}$ 与空气中的 $\boldsymbol{D}$ 相等，故介质中的场强

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}=\frac{u_0}{\varepsilon_r d}$$

(3)空气中的场强

$$E_0=\frac{D}{\varepsilon_0}=\frac{u_0}{d}$$

所以

$$u=E_0(d-t)+Et=\frac{u_0}{d}(d-t)+\frac{u_0}{\varepsilon_r d}t$$

$$=\frac{u_0}{\varepsilon_r d}[\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t]$$

故
$$C=\frac{Q}{u}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t}$$

切向与法向加速度大小为

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = 6t + 4$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3t^3 + 4t)^2}{R}$$

当 $t=2$ s 时

$$v = 20\ \mathrm{m/s}$$

$$a_\tau = 16\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n = \frac{400}{R}$$

依题意

$$a=\sqrt{\left(\frac{400}{R}\right)^2+16^2}=16\sqrt{2}$$

得

$$R=2.5\ \mathrm{m}$$

1.15 一质点沿半径为 0.1 m 的圆周运动，其用角坐标表示的运动学方程为 $\theta=2+4t^3$，θ 的单位为 rad，t 的单位为 s，试求：

(1)在 $t=2$ s 时，质点的切向加速度和法向加速度的大小；

(2)当 θ 等于多少时，质点的加速度与半径的夹角成 45°。

解 (1) 质点的角速度及角加速度为

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2$$

$$\beta=\frac{d^2\theta}{dt^2}=24t$$

法向与切向加速度大小为

$$a_n=R\omega^2=144Rt^4$$

$$a_\tau=R\beta=24Rt$$

当 $t=2$ s 时

$$a_n=230.4\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_\tau=4.8\ \mathrm{m/s^2}$$

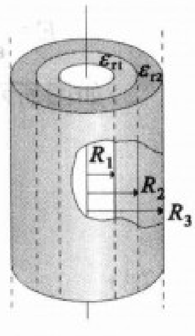
(2)设时刻 t' 时，$\boldsymbol{a}$ 和半径夹角为 45°，此时 $a_n=a_\tau$，即

$$144Rt'^4=24Rt'$$

得

$$t'^3=\frac{1}{6}\ \mathrm{s}$$

6.55 如图所示，为两层均匀电介质充满的圆柱形电容器，两电介质的相对介电常数分别为 ε_{r_1} 和 ε_{r_2}，设沿轴线单位长度上，内、外圆筒的电荷为 λ 与 $-\lambda$。求：①两介质中的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$；②内、外圆筒间的电势差；③此电容器单位长度的电容。



题 6.55 图

解 ① 利用高斯定理得

介质 1 中

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_1$ 均沿 $\boldsymbol{r}$ 向外。

同理，介质 2 中

$$D_2 = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r} \quad (R_2 < r < R_3)$$

$\boldsymbol{D}_2$ 与 $\boldsymbol{E}_2$ 均沿 $\boldsymbol{r}$ 向外。

② 电势差

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r}\mathrm{d}r + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r}\mathrm{d}r \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\ln\frac{R_3}{R_2}\right) \end{aligned}$$

③ 单位长度上的电容

$$C = \frac{\lambda}{u_1 - u_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}\ln\dfrac{R_3}{R_1} + \varepsilon_{r1}\ln\dfrac{R_3}{R_2}}$$

第7章

恒定电流的磁场

7.1 选择题

(1)有两条长直导线各载有5 A的电流，分别沿x、y轴正向流动。在(40,20,0)(cm)处的$\boldsymbol{B}$是[B]。

(A) 3.5×10^{-6} T且沿z轴负向

(B) 2.5×10^{-6} T且沿z轴负向

(C) 4.5×10^{-6} T且沿z轴负向

(D) 5.5×10^{-6} T且沿z轴正向

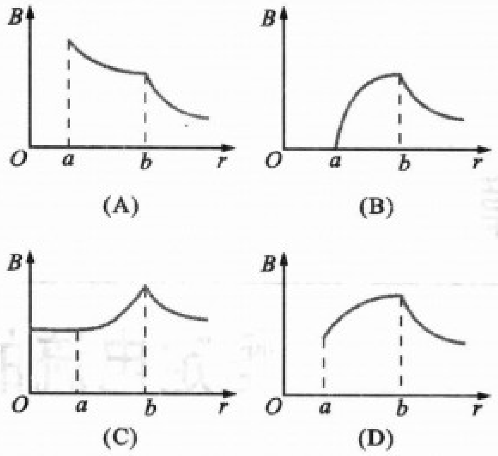
(2)半径为a_1的圆形载流线圈与边长为a_2的方形载流线圈，通有相同的电流，若两线圈中心O_1和O_2的磁感应强度大小相同，则半径与边长之比$a_1 : a_2$为[D]。

题7.1(2)图

(A) $1:1$　　(B) $2^{1/2}\pi:1$

(C) $2^{1/2}\pi:4$　　(D) $2^{1/2}\pi:8$

(3)无限长空心圆柱导体的内、外半径分别为a和b，电流在导体截面上均匀分布，则在空间各处$\boldsymbol{B}$的大小与场点到圆柱中心轴线的距离r的关系，定性地分析如图[B]。



题 7.1(3)图

(4)氢原子处在基态(正常状态)时,它的电子可看作是在半径为 $a=0.53\times10^{-8}$ cm的轨道作匀速圆周运动,速率为2.2×10^{8} cm/s,那么在轨道中心 $\boldsymbol{B}$ 的大小为[B]。

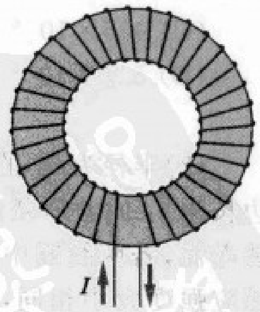
(A) 8.5×10^{-6} T　　(B) 13 T　　(C) 8.5×10^{-4} T

(5)如图所示,一细螺绕环,它由表面绝缘的导线在铁环上密绕而成,每厘米绕 10 匝,当导线中的电流 I 为 2.0 A 时,测得铁环内的磁感应强度的大小为 1.0 T。则可求得铁环的相对磁导率为[B]。

(A) 7.96×10^{2}　　(B) 3.98×10^{2}

(C) 1.99×10^{2}　　(D) 63.3×10^{2}

(真空磁导率 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ T·m/A)

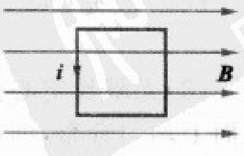


题 7.1(5)图

(6)载流 i 的方形线框,处在匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中,如图所示,线框受到的磁力矩是[A]。

(A)向上　　(B)向下

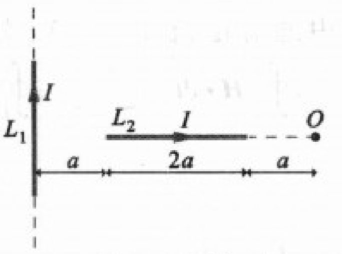
(C)由纸面向外　　(D)由纸面向内



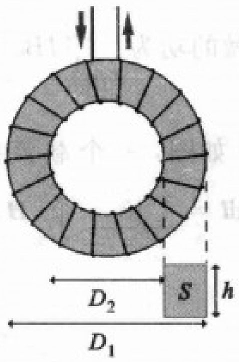
题 7.1(6)图

7.2 填空题

(1)在同一平面内有两条互相垂直的导线 L_1 和 L_2，L_1 为无限长直导线，L_2 是长为 $2a$ 的直导线，二者相对位置如图。若 L_1 和 L_2 同时通以电流 I，那么作用在 L_2 上的力对于 O 点的磁力矩为 $\underline{\dfrac{\mu_0 I^2 a}{\pi}(2\ln 3-1)}$。



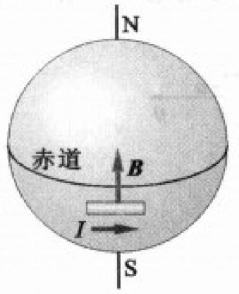
题 7.2(1)图



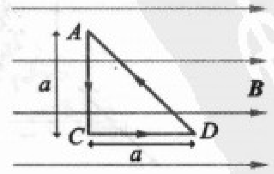
题 7.2(2)图

(2)矩形截面的螺绕环尺寸见图，则在截面中点处的磁感应强度为 $\underline{\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}}$；通过截面 S 的磁通量为 $\underline{\dfrac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\dfrac{D_1}{D_2}}$。

(3)每单位长度的质量为 0.009 kg/m 的导线，取东西走向放置在赤道的正上方，如图。在导线所在的地点的地磁是水平朝北，大小为 3×10^{-5} T，问要使磁力正好支承导线的重量，导线中的电流应为 $\underline{2940\ \text{A}}$。



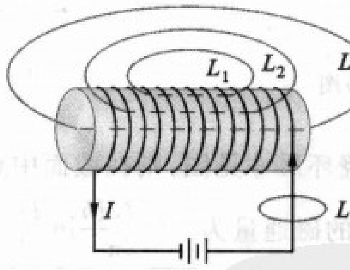
题 7.2(3)图



题 7.2(4)图

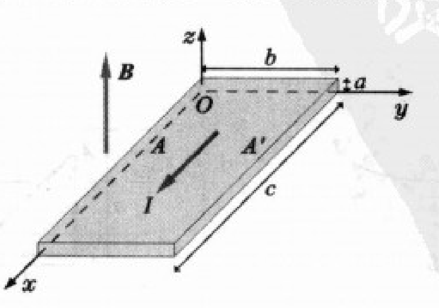
(4)一等腰直角三角形 ACD，直角边长为 a，线圈维持恒定电流 I，放在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中，线圈平面与磁场方向平行，如图。如果 AC 边固定，D 点绕 AC 边向纸面外旋转 $\pi/2$，则磁力所做的功为 $\underline{\dfrac{-IBa^2}{2}}$；如果 CD 边固定，A 点绕 CD 边向纸面外旋转 $\dfrac{\pi}{2}$，则磁力所做的功为 $\underline{\quad 0 \quad}$；如果 AD 边固定，C 点绕 AD 边向纸面外旋转 $\dfrac{\pi}{2}$，则磁力所做的功为 $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{4}IBa^2}$。

(5) 如图，一个载流线圈绕组中通有电流 $I = 3\text{A}$，分别写出 $\oint_{L_1} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \underline{\quad 18 \quad}$；$\oint_{L_2} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \underline{\quad 27 \quad}$；$\oint_{L_3} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \underline{\quad 39 \quad}$；$\oint_{L_4} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \underline{\quad 3 \quad}$。



题 7.2(5)图

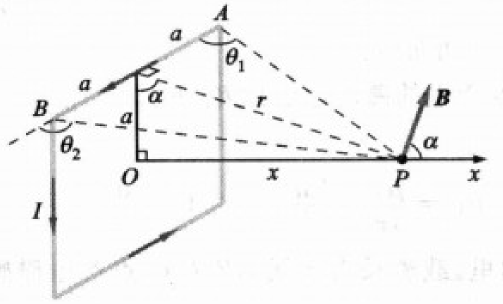
(6)图中所示的是一块半导体样品，其体积是 $a\times b\times c$。沿 x 方向通有电流 I，在 z 方向有均匀磁场 $\boldsymbol{B}$。实验所得的数据是：$a=0.10\text{ cm}$，$b=0.35\text{ cm}$，$c=1.0\text{ cm}$，$I=1.0\text{ mA}$，$B=0.3\text{ T}$，两侧电压 $U_{AA'}=6.55\text{ mV}$。



题 7.2(6)图

该半导体样品载流子浓度是 $\underline{\quad 2.86\times10^{14}/\mathrm{cm}^3 \quad}$，是正电荷导电(p)型还是负电荷导电(n)型 $\underline{\quad \text{n 型} \quad}$。

7.3 载流正方形线圈边长为 $2a$，电流为 I，求此线圈轴线上距中心为 x 处的磁感应强度。



题 7.3 图

解 导线 AB 在 P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1$ 的大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

式中

$$r=\sqrt{x^2+a^2}$$

$$\cos\theta_1=\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{x^2+2a^2}}$$

$$\theta_2=180^\circ-\theta_1$$

所以

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}2\cos\theta_1=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{x^2+2a^2}}$$

$\boldsymbol{B}_1$ 在 x 方向上的分量为

$$B_1x=B_1\cos\alpha=B_1\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{\mu_0 Ia^2}{2\pi(x^2+a^2)\sqrt{x^2+2a^2}}$$

整个正方形线圈在 P 点的磁场沿 x 方向，磁感应强度大小为

$$B=B_x=4B_1x=\frac{2\mu_0 Ia^2}{\pi(x^2+a^2)\sqrt{x^2+2a^2}}$$

方向沿 x 轴正向。

7.4 将一无限长直导线弯成图示的形状，其上载有电流 I，计算圆心 O 点处 $\boldsymbol{B}$ 的大小。

解 如图所示，圆心 O 处的 $\boldsymbol{B}$ 是由长直导线 AB、DE 和 $\frac{1}{3}$ 圆弧导线 $\overset{\frown}{BCD}$ 三部分电流产生的磁场叠加而成。

题 7.4 图

$\overset{\frown}{BCD}$ 在 O 点产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1$ 的大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\mathrm{d}l}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{Ir\,\mathrm{d}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{6r}$$

方向垂直纸面向里。载流长直导线 AB 在 O 点产生磁感应强度 $\boldsymbol{B}_2$ 的大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

其中

$$\theta_1 = 0°,\quad \theta_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$a = r\cos 60° = \frac{r}{2}$$

故

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

方向垂直纸面向里。

载流直导线 DE 在 O 点产生磁感应强度 $\boldsymbol{B}_3$ 的大小为

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1' - \cos\theta_2')$$

其中

$$\theta_1' = \frac{5\pi}{6},\quad \theta_2 = \pi$$

$$a = r\cos 60° = \frac{r}{2}$$

故

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

方向垂直纸面向里。

O 点的合磁感强度的大小为

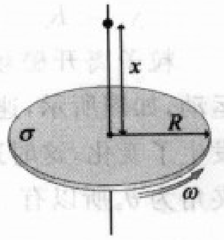
$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

$$= \frac{\mu_0 I}{6r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 0.21\,\frac{\mu_0 I}{r}$$

方向垂直纸面向里。

7.5 半径为 R 的圆片上均匀带电，面密度为 σ。若该片以角速度 ω 绕它的轴旋转，如图所示，求轴线上距圆片中心为 x 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小。



题 7.5 图

解 在圆盘上取一半径为 r、宽度为 $\mathrm{d}r$ 的细环，所带电量为

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

细环转动相当于一圆电流，其电流大小为

$$\mathrm{d}I = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r\,\frac{\omega}{2\pi} = \sigma\omega r\,\mathrm{d}r$$

它在轴线上距盘心为 x 处所产生的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 r^2 \mathrm{d}I}{2(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}}\sigma\omega r\,\mathrm{d}r$$

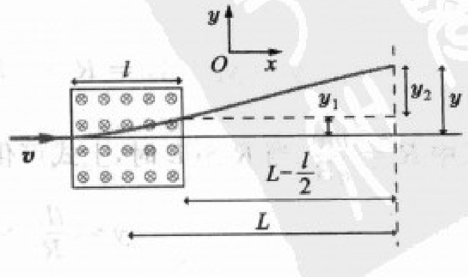
$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\,\frac{r^3}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

总磁感强度大小为

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \frac{r^3}{(r^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left(\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}}-2x\right)$$

7.6 质量为 m 的带电粒子，带有电量 q，以速度 v 射入匀强磁场中，v 的方向与 $\boldsymbol{B}$ 垂直；粒子从磁场出来后，继续运动，如图所示。已知磁场在 x 轴方向的宽度为 l，粒子从磁场出来

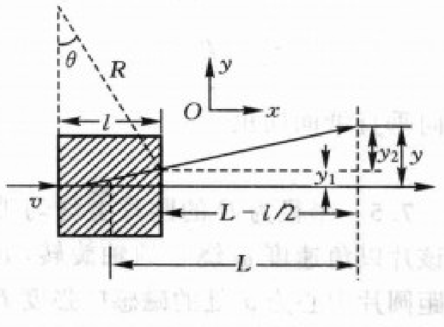


题 7.6 图

后，在 x 方向又前进了 $L-l/2$，求它的偏转距离 y。

解 粒子在磁场区域中沿圆弧轨道运动的圆半径为

$$R=\frac{mv}{qB}$$



7.6 题解题图

由图可知

$$y_1=R-\sqrt{R^2-l^2}$$

粒子离开磁场后作匀速直线运动，如图所示，速率未变，但方向发生了变化，这时速度方向与 x 轴夹角为 θ。所以有

$$v_x=v\cos\theta$$
$$v_y=v\sin\theta$$

带电粒子沿 x 方向前进距离 $\left(L-\frac{l}{2}\right)$ 所需时间为

$$t=\frac{L-\frac{l}{2}}{v_x}=\frac{L-\frac{l}{2}}{v\cos\theta}$$

故

$$y_2=v_yt=v\sin\theta\frac{(L-\frac{l}{2})}{v\cos\theta}=\left(L-\frac{l}{2}\right)\tan\theta$$
$$=\frac{l(L-\frac{l}{2})}{\sqrt{R^2-l^2}}$$

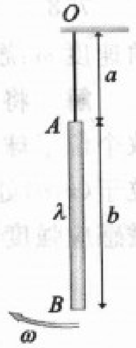
故总偏转为

$$y=y_1+y_2=R-\sqrt{R^2-l^2}+\frac{l(L-\frac{l}{2})}{\sqrt{R^2-l^2}}$$

式中 $R=\frac{mv}{qB}$。当 $R\gg L$ 时，上式可化简为

$$y\approx\frac{lL}{R}=\frac{qlLB}{mv}$$

7.7 有一长为 b、线密度为 λ 的带电线段 AB，绕与一端距离为 a 的 O 点旋转，如图。设旋转角速度为 ω，转动过程中线段 A 端距轴 O 的距离 a 保持不变，求带电线段在 O 点产生的磁感应强度和磁矩。



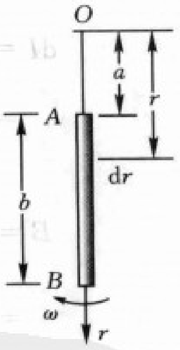
题 7.7 图

解 由于带电线段 AB 的不同位置绕 O 点转动的线速度不同，在 AB 上任取一线元 $\mathrm{d}r$，它距 O 点的距离为 r，如图所示，其上带电量为 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}r$，当 AB 以角速度 ω 旋转时，$\mathrm{d}q$ 形成环形电流，其电流强度为

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega\mathrm{d}q}{2\pi}=\frac{\lambda\omega}{2\pi}\mathrm{d}r$$

根据圆电流在圆心 O 的磁感应强度为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}$$



7.7 题解题图

则有

$$\mathrm{d}B=\frac{\lambda\omega\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

带电线段 AB 旋转时在 O 点的总磁感应强度为

$$B_0=\int\mathrm{d}B=\frac{\lambda\omega\mu_0}{4\pi}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$=\frac{\lambda\mu_0\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

当 $\lambda>0$ 时，方向垂直纸面向里。

旋转带电线元 $\mathrm{d}r$ 的磁矩为

$$\mathrm{d}p_{\mathrm{m}}=\pi r^2\mathrm{d}I=\frac{\lambda\omega}{2}r^2\mathrm{d}r$$

转动带电线段 AB 的总磁矩

$$p_{\mathrm{m}}=\int\mathrm{d}p_{\mathrm{m}}=\int_a^{a+b}\frac{\lambda\omega}{2}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda\omega}{6}[(a+b)^3-a^3]$$

方向垂直纸面向里。

$$\theta(t')=2+4t'^3=2.67\ \text{rad}$$

1.16 一圆盘半径为 3 m，它的角速度在 $t=0$ 时为 3.33π rad/s，以后均匀地减小，到 $t=4$ s 时角速度变为零。试计算圆盘边缘上一点在 $t=2$ s 时的切向加速度和法向加速度的大小，并在图上画出它们的方向。

解 因角速度均匀地减小，故有

$$\beta=\frac{\omega(4)-\omega(0)}{4-0}$$

$$=\frac{0-3.33\pi}{4}=-0.83\pi\ \text{rad/s}^2$$

因圆盘作匀角加速运动，故有

$$\omega=\omega_0+\beta t=3.33\pi-0.83\pi t$$

当 $t=2$ s 时

$$\omega=3.33\pi-0.83\pi\times 2=1.67\pi\ \text{rad/s}$$

法向与切向加速度分别为

$$a_n=R\omega^2=82.4\ \text{m/s}^2$$

$$a_\tau=R\beta=-7.8\ \text{m/s}^2$$

1.17 一圆盘由静止开始加速，在 6 s 内，它的角速度均匀地增加到 6.67π rad/s。圆盘以这一角速度转一段时间后，制动装置使它在 5 min内停止。如果圆盘的转动总圈数为3 100转，试计算圆盘转动的总时间。

解 (1)从 $t=0$ 到 $t=6$ s，圆盘作匀加速转动

$$\beta_1=\frac{\omega(6)-\omega(0)}{6-0}=1.11\pi\ \text{rad/s}^2$$

$$\Delta\varphi=\frac{1}{2}\beta_1 t^2=20\pi\ \text{rad}$$

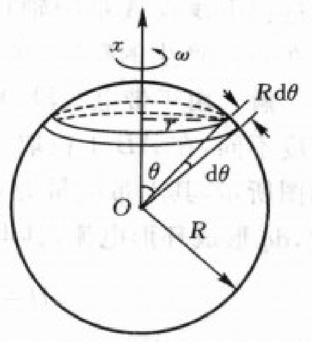
$$n_1=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=10$$

(2)从开始制动到完全停止，历时 $\Delta t=300$ s，圆盘作匀减速转动。

开始制动时，角速度为 $\omega=6.67\pi$ rad/s，有

7.8 一半径为 R 的球面上均匀分布着电荷，面密度为 σ_0，当它以角速度 ω 绕直径旋转时，求在球心处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小。

解 将绕直径旋转的带电球面视为无数个位于球面上的同轴圆电流，如图所示。位于(r,θ)处的电流 $\mathrm{d}I$ 在球心 O 处产生的磁感应强度的大小为



7.8 题解题图

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{r^2\mathrm{d}I}{R^3} \quad ①$$

$$\mathrm{d}I=\sigma\mathrm{d}sf \quad ②$$

$$\mathrm{d}s=2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \quad ③$$

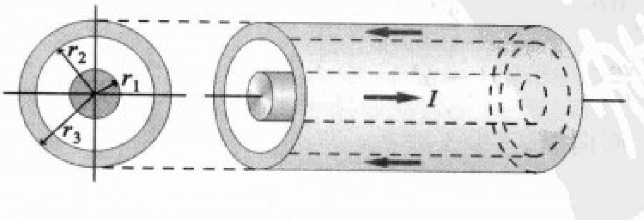
而 $r=R\sin\theta$，$f=\dfrac{\omega}{2\pi}$，代入得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I&=\sigma 2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\frac{\omega}{2\pi}\\&=\sigma\omega R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}B&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left(-\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{3}\bigg|_0^{\pi}+\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&=\frac{2\mu_0\sigma\omega R}{3}\end{aligned}$$

7.9 电缆由导体圆柱和一同轴的导体圆筒构成，使用时电流 I 从导体流出，从另一导体流回，电流均匀分布在横截面上，如图所示。设圆柱体的半径为 r_1，圆筒的内、外半径分别为 r_2 和 r_3，若场点到轴线的



题 7.9 图

距离为 r，求 r 从 $0\to\infty$ 范围内各处磁感应强度的大小。

解 在导体横截面内，以导体轴线为圆心作半径为 r 的圆为积分环路，如图所示，则根据安培环路定理有

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

当 $r < r_1$ 时

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi r_1^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$$

当 $r_1 < r < r_2$ 时

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当 $r_2 < r < r_3$ 时

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 \left[I - \frac{\pi(r^2 - r_2^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} I \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 I (r_3^2 - r^2)}{2\pi(r_3^2 - r_2^2) r}$$

当 $r > r_3$ 时

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I - I = 0$$

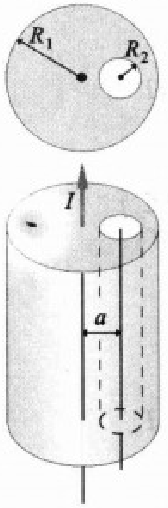
$$B = 0$$

7.10 图中所示是一根无限长的圆柱形导体，半径为 R_1，其内有一半径为 R_2 的无限长圆柱形空腔，它们的轴线相互平行，距离为 $a(R_2 < a < R_1 - R_2)$，I 沿导体轴线方向流动，且均匀地分布在横截面上。求：

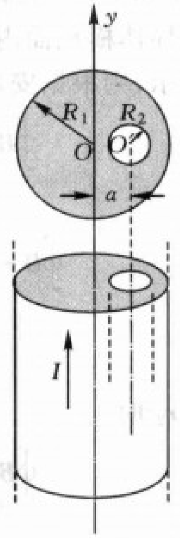
(1)圆柱体轴线上 $\boldsymbol{B}$ 的大小；

(2)空腔部分轴线上 $\boldsymbol{B}$ 的大小；

(3)设 $R_1 = 10$ mm，$R_2 = 0.5$ mm，$a = 5.0$ mm，$I = 20$ A，分别计算上述两处 $\boldsymbol{B}$ 的大小。



题 7.10 图



7.10 题解题图

解　如图所示，设圆柱形导体可看作电流沿 y 轴正向、半径为 R_1 的圆柱导体和电流沿 y 轴负向、半径为 R_2 的圆柱导体所组成，其中

$$I_1 = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}\pi R_1^2 = \frac{I}{(R_1^2 - R_2^2)}R_1^2$$

$$I_2 = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}\pi R_2^2 = \frac{I}{(R_1^2 - R_2^2)}R_2^2$$

应用叠加原理，圆柱体轴线上一点 O 的磁感应强度

$$B_0 = B_{R_1} + B_{R_2}$$

因 $R_1 = 0, B_{R_1} = 0$，根据磁场中的安培环路定理，得

$$B_0 = B_{R_2} = \frac{\mu_0 I R_2^2}{2\pi a(R_1^2 - R_2^2)}$$
$$= 2 \times 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

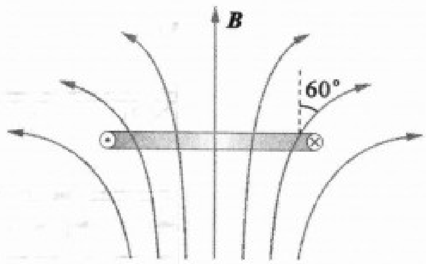
同理，空腔轴线上的磁感应强度

$$B_{O'} = B_{O'1} + B_{O'2}$$

因 $R_2 = 0, B_{O'2} = 0$，故

$$B_{O'1} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi(R_1^2 - R_2^2)} = 2 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

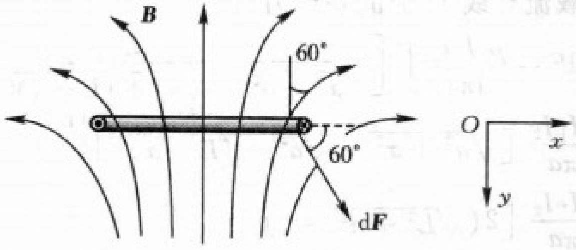
7.11 一细导线弯成半径为 4.0 cm的圆环，置于不均匀的外磁场中，磁场方向对称于圆心并都与圆平面的法线成 60°角，如图所示。导线所在处 $\boldsymbol{B}$ 的大小是 0.1 T，计算当电流 $I=15.8$ A时线圈所受的合力。



题 7.11 图

解 因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}F_x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}F_y\boldsymbol{j}$$



7.11 题解题图

由于对称性，所以导线受合力方向沿 y 轴，如图所示，可知

$$\mathrm{d}F_y=BI\,\mathrm{d}l\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}BI\,\mathrm{d}l$$

$$F_y=\int\mathrm{d}F_y=2\int_{\text{半圆}}\mathrm{d}F_y=\int_{\text{半圆}}\sqrt{3}IB\,\mathrm{d}l$$

$$=\sqrt{3}IB\int_{\text{半圆}}\mathrm{d}l=\sqrt{3}\pi RIB=0.34\ \mathrm{N}$$

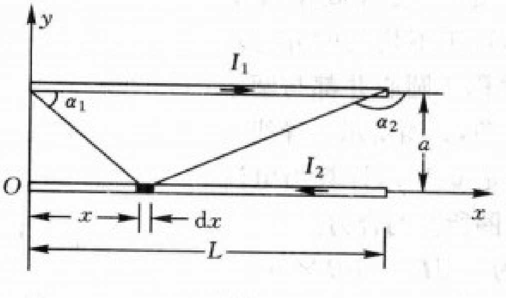
方向沿 y 轴垂直向下。

7.12 设真空中有两条长均为 L，相距为 a，分别通有平行反向电流 I_1 和 I_2 的载流直导线，求它们之间的相互作用力。

解 如图所示，在载流导线 I_2 上取一电流元$I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，该电流元受到磁力的大小为

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{F}|=|I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}|=I_2B\mathrm{d}x$$

其中 $B=\frac{\mu_0I_1}{4\pi a}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$。



7.12 题解题图

作用在载流导线 I_2 上的安培力为

$$F=\int_0^L \mathrm{d}F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}\int_0^L\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{L-x}{\sqrt{a^2+(L-x)^2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}\left[\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2+(L-x)^2}\right]\Big|_0^L$$

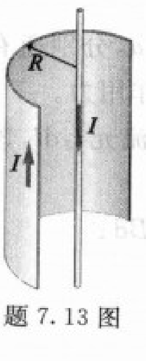
$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}\left[2\left(\sqrt{L^2+a^2}-a\right)\right]$$

$\boldsymbol{F}$ 的方向竖直向下。同理可计算出电流 I_2 对 I_1 的作用力大小为 $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}2(\sqrt{L^2+a^2}-a)$，方向竖直向上。

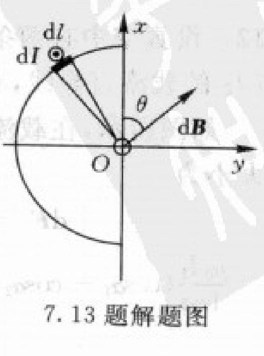
7.13 如图所示，一半径为 R 的无限长半圆柱面导体，其上电流与其轴线上一无限长直导线的电流等值、反向，电流 I 在半圆柱面上均匀分布。求：

(1)轴线上导线单位长度所受的力；

(2)若将另一无限长直导线(通有方向与半圆柱面相同的电流 I)代替圆柱面，产生同样的作用力，该导线应放在何处？



题 7.13 图



7.13 题解题图

解　(1) 先求出半圆柱面上的电流在轴线处的磁感应强度。把载流圆柱面视为一系列载流长直导线的组合，则

$$i = \frac{I}{\pi R}$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 i \mathrm{d}l}{2\pi R}$$

由于对称性，可知 $\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴方向，如图所示。

$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 i R \mathrm{d}\theta}{2\pi R}\cos\theta$$

$$B = \int \mathrm{d}B_x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 i \cos\theta \mathrm{d}\theta}{2\pi} = \frac{\mu_0 i}{\pi} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$F = BIl = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$$

或

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}\boldsymbol{j}$$

(2) 要使无限长直导线对圆柱面轴线上的电流产生同样的作用力，则导线必在该处产生同样的磁感应强度，即

$$\frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \mathrm{d}}$$

故

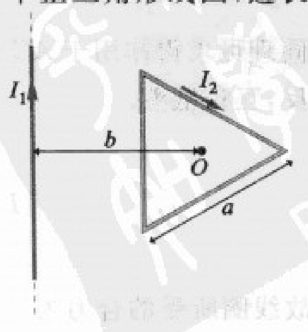
$$d = \frac{\pi R}{2}$$

因而，另一导线应放在 $y = -\dfrac{\pi R}{2}$ 处。

7.14　载有电流 I_1 的长直导线，旁边有一个正三角形线圈，边长为 a，电流为 I_2，它们共面，如图所示。三角形一边与长直导线平行，三角形中心到直导线的距离为 b，求 I_1 对该三角形的作用力。

解　如图所示，I_1 在 AB 线上各点的磁感应强度的大小均相等

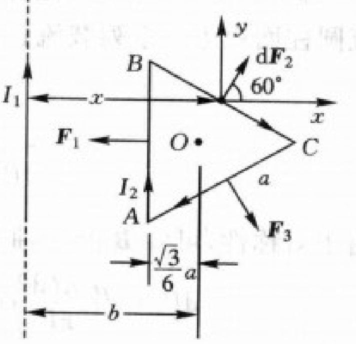
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(b - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)}$$



题 7.14 图

而作用在 AB 上力的大小则为

$$F_1 = I_2 B_1 a = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi\left(b - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)}$$



7.14 题解题图

$\boldsymbol{F}_1$ 的方向如图所示。在 BC 上任取电流元 $I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，它到直导线的距离为 r，则该电流元受力的大小为

$$\mathrm{d}F_2 = I_2 B_2 \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}\mathrm{d}l$$

因为 $\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}x}{\cos 30^\circ}$，所以 BC 上受力的大小为

$$F_2 = \int \mathrm{d}F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \cos 30^\circ}\int_{b-\frac{\sqrt{3}}{3}a}^{b+\frac{\sqrt{3}}{3}a}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\ln\left(\frac{b+\frac{a}{\sqrt{3}}}{b-\frac{a}{2\sqrt{3}}}\right)$$

方向如图。

$$F_{2x} = F_2\cos 60^\circ = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\sqrt{3}\pi}\ln\left(\frac{b+\frac{a}{\sqrt{3}}}{b-\frac{a}{2\sqrt{3}}}\right)$$

$$F_{2y} = F_2\sin 60^\circ = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{b+\frac{a}{\sqrt{3}}}{b-\frac{a}{2\sqrt{3}}}\right)$$

同理可求得作用于 AC 边上的力 $\boldsymbol{F}_3$ 及 F_{3x} 和 F_{3y}，但 $F_{2y} = F_{3y}$，方向相反，互相抵消。

$$F_{3x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\sqrt{3}\pi}\ln\left(\frac{b+\frac{a}{\sqrt{3}}}{b-\frac{a}{2\sqrt{3}}}\right)$$

故线圈所受的合力为

$$F = F_{2x} + F_{3x} - F_1$$

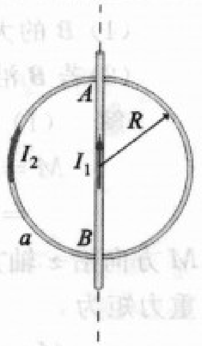
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{b+\frac{a}{\sqrt{3}}}{b-\frac{a}{2\sqrt{3}}} - \frac{a}{6-\frac{\sqrt{3}}{6}a}\right)$$

方向向右。

7.15 如图所示，有一半径为 R 的圆形电流 I_2，在沿其直径 AB 方向上有一无限长直线电流 I_1，方向见图。求：

(1)半圆弧 AaB 所受作用力的大小和方向；

(2)整个圆形电流所受作用力的大小和方向。



题 7.15 图

解 a 处受电磁力的方向沿径向向外，b 处受力方向沿径向指向中心 O，在右半圆上任取电流元，其所在处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\sin\theta}$$

B 的方向为 $\otimes$，则 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所受的磁力大小为

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{f}| = |I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}| = I_2\mathrm{d}lB$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2\mathrm{d}\theta}{2\pi\sin\theta}$$

$$\mathrm{d}f_x = \mathrm{d}f\sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}f_y = \mathrm{d}f\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cot\theta\mathrm{d}\theta$$

$$f_x = \int_{右半圆}\mathrm{d}f_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2$$

$$f_y = \int_{右半圆}\mathrm{d}f_y = 0$$

由于作用在左半圆的合力也是沿 x 正方向，故作用在整个圆电流上的合力

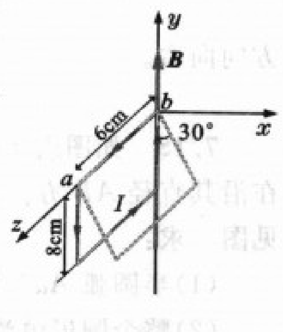
$$f = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\mathrm{d}\theta = \mu_0 I_1 I_2$$

沿 x 轴正向。

7.16 如图所示，矩形线圈的面积是 $8\times6\ \mathrm{cm}^2$，质量为 0.10 g/cm，可绕 ab 边自由转动。磁场沿 y 轴正方向。当线圈中电流为 10 A 时，线圈偏离平衡位置与铅直方向成 30°角，求：

(1) $\boldsymbol{B}$ 的大小；

(2)若 $\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴方向，线圈又将如何？



题 7.16 图

解 (1) 线圈所受的力矩为

$$M = ISB\sin\theta = ISB\sin(90^\circ - 30^\circ)$$
$$= Il_1 l_2 B\sin60^\circ$$

M 方向沿 z 轴方向。

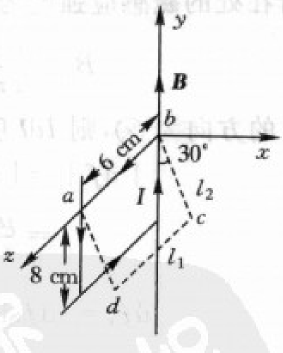
重力矩为

$$M_G = M_{bc} + M_{cd} + M_{da}$$
$$= (l_1 + l_2)\rho g l_2 \sin30^\circ$$

ρ 为导线的密度，M_G 方向沿 z 轴负方向。线圈平衡时

$$Il_1 l_2 B\sin60^\circ = (l_1 + l_2)\rho g l_2 \sin30^\circ$$

故 $$B = \frac{\rho g}{I}\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)\tan30^\circ$$
$$= \frac{0.01\times9.8}{10}\times\left(1+\frac{8}{6}\right)\times0.58$$
$$= 1.32\times10^{-2}\ \mathrm{T}$$



7.16 题解题图

(2) 由 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{B}$ 知，若 $\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴方向，则 $\theta = 0$，可得 $M = 0$，线圈不受磁力矩作用，将静止在垂直位置不偏转。

7.17 半径为 $R=0.10$ m 的半圆形闭合线圈，载有电流 $I=10$ A，置于均匀的外磁场中，磁场方向与线圈平面平行，$\boldsymbol{B}$ 的大小是 5.0×10^{-1} T。求：

(1)线圈所受的力矩；

(2)在力矩作用下，线圈转过 90°角时，力矩做的功是多少？

解 (1)$M = p_m B\sin 90^\circ = IBS = I\dfrac{\pi R^2}{2}B$

$$= 10 \times \frac{\pi \times 0.1^2}{2} = 7.85 \times 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

(2)$A = \int_0^{\pi/2} M \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} ISB\sin\theta \mathrm{d}\theta$

$$= 7.85 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

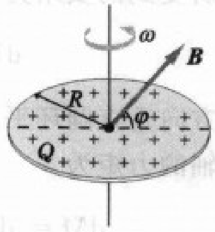
或根据回路中电流不变，因而有

$$A = I\Delta\Phi_m = I(BS\cos 0^\circ - BS\cos 90^\circ)$$

$$= IBS = 10 \times 5.0 \times 10^{-1} \times \frac{\pi \times 0.1^2}{2}$$

$$= 7.85 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

7.18 盘面与均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 成 φ 角的带正电圆盘，半径为 R，电荷量 Q 均匀分布在表面上。圆盘以角速度 ω 绕通过盘心，与盘面垂直的轴转动。求此带电旋转圆盘在磁场中所受的磁力矩。



题 7.18 图

解 取距盘心 r 处宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，带电量为 $\mathrm{d}q$，则

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S = \sigma(2\pi r \mathrm{d}r)$$

由于圆盘以 ω 旋转，故圆环中电流

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{\mathrm{d}q\omega}{2\pi} = \sigma\omega r \mathrm{d}r \quad \left(\text{式中 } \sigma = \frac{Q}{\pi R^2}\right)$$

环中电流的磁矩

$$\mathrm{d}p_m = \mathrm{d}IS = \sigma\pi\omega r^3 \mathrm{d}r$$

故

$$p_m = \int \mathrm{d}p_m = \int_0^R \sigma\omega\pi r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{4}\sigma\pi\omega R^4 = \frac{1}{4}\omega Q R^2$$

磁力矩

$$M = p_m B\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{4}\omega Q R^2 B\cos\varphi$$

方向按 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{B}$ 决定，垂直于 $\boldsymbol{p}_m$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所组成的平面。

$$\beta_2=\frac{0-6.67\pi}{300}=-0.022\pi\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$\Delta\varphi=6.67\pi\times300-\frac{1}{2}\times0.022\pi\times300^2$$

$$=1\ 000\pi\ \mathrm{rad}$$

$$n_3=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=500$$

(3)匀速转动阶段所转过的圈数为

$$n_2=3100-(10+500)=2590$$

所经历的时间为

$$\Delta t=\frac{\Delta\theta}{\omega}=\frac{2\pi n_2}{6.67\pi}=\frac{2\times2590}{6.67}=777\ \mathrm{s}$$

三阶段所经历的总时间为

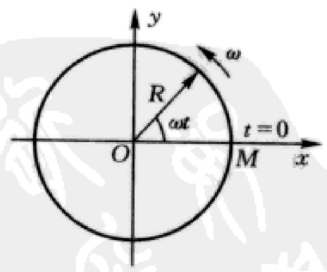
$$6+777+300=1083\ \mathrm{s}=18.05\ \mathrm{min}$$

1.18 试写出以矢量形式表示的质点作匀速圆周运动的运动学方程，并证明作匀速圆周运动质点的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的标积等于零，即 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=0$。

解 取坐标系如图，以直角坐标系表示的质点运动学方程为

$$x=R\cos\omega t$$

$$y=R\sin\omega t$$



1.18 题解题图

以矢量形式表示的质点运动学方程为

$$\boldsymbol{r}=R\cos(\omega t)\boldsymbol{i}+R\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$$

速度和加速度分别为

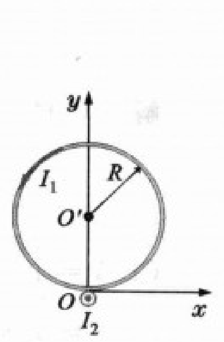
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\omega R\sin(\omega t)\boldsymbol{i}+\omega R\cos(\omega t)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\omega^2R\cos(\omega t)\boldsymbol{i}+\omega^2R\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$$

7.19 真空中有一半径为 R 的圆线圈通有电流 I_1，另有一电流为 I_2 的无限长直导线，与圆线圈平面垂直，且与圆线圈相切（彼此绝缘），如图所示。求：



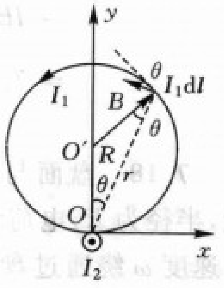
题 7.19 图

(1)圆线圈在图示位置时所受到的磁力矩；

(2)圆线圈将怎样运动；

(3)若长直导线 I_2 改放在圆线圈中心位置，此时线圈受到的磁力矩为多大。

解 (1) 取如图(a) 所示的坐标，在圆环 p 处取一电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，长直导线在该处产生的磁感应强度为 $B=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$，方向如图所示。电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所受到的安培力为



7.19 题解题图

$$\mathrm{d}F=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}I_1\mathrm{d}l\sin\theta$$

方向垂直圆环平面（即纸面）向外。该安培力对 y 轴的力矩为

$$\mathrm{d}M=\mathrm{d}Fr\sin\theta=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}l$$

由图可知

$$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}(2\theta)=2R\mathrm{d}\theta$$

整个圆线圈受到的磁力矩为

$$M=\int\mathrm{d}M=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin^2\theta 2R\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2 R$$

(2) 圆线圈在磁力矩作用下将发生转动，对着 y 轴看其转动方向为顺时针方向，如图(b) 所示，最后处于圆线圈与长直导线共面的平衡位置。

(3) 当长直导线 I_2 处于圆线圈中心，且 I_2 流向与圆线圈平面垂直时，由于电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所受到的安培力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=0$（此时 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角处处为零，故线圈所受到的磁力矩 $M=0$，线圈不转动）。

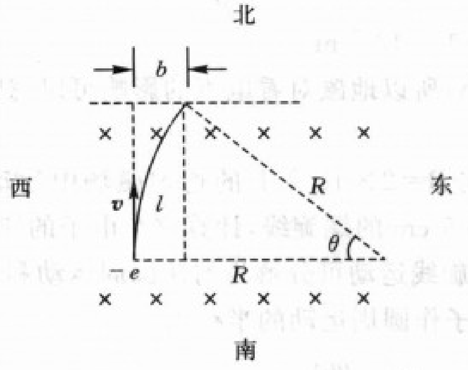
7.20 在显像管里，电子沿水平方向从南向北运动，动能是 1.2×10^4 eV，该处地球磁场的磁感应强度在竖直方向的分量的方向向下，大小是 0.55×10^{-4} T。问：

(1)由于地球磁场的影响，电子如何偏转；

(2)电子的加速度多大；

(3)电子在显像管内运动 20 cm 时，偏转有多少。

解 (1) 运动电子受到地磁场的作用，由洛仑兹力 $\boldsymbol{f}=-e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 可以确定电子向东偏转。



7.20 题解题图

(2) 电子所受洛仑兹力的大小为

$$f=evB$$

又因
$$f=ma_n=evB$$

故
$$a_n=\frac{ev_B}{m}$$

电子动能
$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

故
$$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{\frac{2\times1.2\times10^4\times1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}}$$
$$=6.5\times10^7\quad \text{m/s}$$

$$a_n=\frac{ev_B}{m}$$
$$=\frac{1.6\times10^{-19}\times6.5\times10^7\times5.5\times10^{-5}}{9.1\times10^{-31}}=6.3\times10^{14}\ \text{m/s}^2$$

(3) 电子受洛仑兹力作用而沿圆弧运动，其轨道半径为

$$R = \frac{mv}{eB}$$

$$= \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 6.5 \times 10^{7}}{1.6 \times 10^{-19} \times 5.5 \times 10^{-5}} = 6.7\ \mathrm{m}$$

由图可知，电子偏转距离为

$$b = R - R\cos\theta = R\left[1 - \cos\left(\frac{l}{R}\right)\right]$$

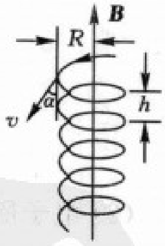
$$= 6.7 \times \left[1 - \cos\left(\frac{20 \times 10^{-2}}{6.7}\right)\right]$$

$$= 9.1 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

由于偏转距离微小，所以地磁对看电视的影响可以忽略。

7.21 电子在 $B = 2 \times 10^{-3}$ T 的均匀磁场中运动，其轨迹是半径为 2.0 cm、螺距为 5 cm 的螺旋线，计算这个电子的速度大小。

解 电子螺旋线运动可分解为匀速圆周运动和匀速直线运动，电子作圆周运动的半径为



7.21 题解题图

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB}$$

而

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}$$

螺旋线的距离

$$h = v_{\parallel} T = v\cos\alpha \cdot \frac{2\pi m}{eB} \quad ①$$

(1) 式中的 α 为电子运动的速度与螺旋线轴线间的夹角。由几何关系知

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \quad ②$$

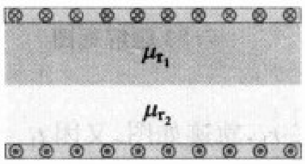
由 ①、② 式得

$$v = \frac{eB}{m}\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

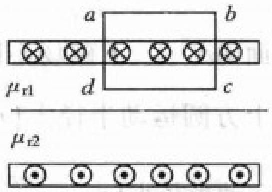
$$= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 20 \times 10^{-4}}{9.1 \times 10^{-31}} \times \sqrt{(2.0 \times 10^{-2})^2 + \frac{(5.0 \times 10^{-2})^{22}}{4\pi^2}}$$

$$= 7.57 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s}$$

7.22 在两块无限大的导体平板上均匀地通有电流，每块导体板单位宽度的电流均为 I，两块板上的电流互相平行，方向相反。两块导体板之间插有两块相对磁导率为 μ_{r_1} 及 μ_{r_2} 的顺磁质，如图所示。试求两板之间的 H_1；H_2；B_1；B_2。



题 7.22 图



7.22 题解题图

解 介质上束缚电流和导体板中传导电流在两导体板处侧产生的磁感应强度为 O。以如图所示的矩形 $abcd$ 为积分路径，则

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_c^d \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_c^d H\,\mathrm{d}l = H_i \cdot \overline{cd}$$

根据介质中的安培环路定理

$$H_1 \cdot \overline{cd} = I \cdot \overline{cd}$$

$$H_1 = I$$

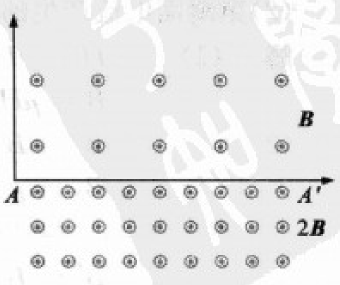
$$B_1 = \mu_{r1}\mu_0 H_1 = \mu_{r1}\mu_0 I$$

同理中可得

$$H_1 = I$$

$$B_2 = \mu_{r2}\mu_0 H_2 = \mu_{r2}\mu_0 I$$

7.23 有两个与纸面垂直的磁场以平面 AA' 为界面，如图所示。已知它们的磁感应强度的大小分别为 B 和 $2B$，设有一质量为 m、电荷量为 q 的粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 自下向上地垂直射达界面 AA'，试画出带电粒子运动的轨迹，并求出带电粒子运动的周期和沿分界面方向的平均速率。

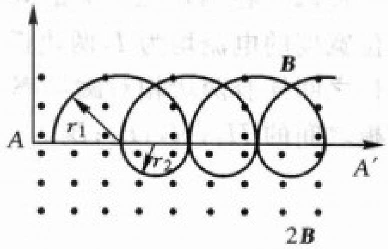


题 7.23 图

解 带电粒子在磁场中作圆周运动时，有

$$\frac{mv^2}{r} = Bqv$$

即 $$r = \frac{mv}{Bq}$$



7.23 题解题图

由于界面 AA' 上、下磁场不同，粒子在 AA' 面上方圆运动半径大$\left(r_1 = \dfrac{mv}{Bq}\right)$，下方圆运动半径小$\left(r_2 = \dfrac{mv}{2Bq}\right)$，故得 $r_2 = \dfrac{1}{2}r_1$，轨迹如图。又因 $t_1 = \dfrac{T_1}{2} = \dfrac{\pi r_1}{v}$，$t_2 = \dfrac{\pi r_2}{v}$，粒子运动的周期为

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\pi(r_1 + r_2)}{v} = \frac{\pi(3r_2)}{v} = \frac{3m\pi}{2Bq}$$

每一周期粒子沿 AA' 平面移动的距离为

$$l = 2(r_1 - r_2) = r_1$$

故带电粒子沿 AA' 平面向右移动的平均速率为

$$v = \frac{r_1}{T} = \frac{2v}{3\pi}$$

7.24 将磁导率为 $\mu = 50\times10^{-4}$ Wb/(A·m)的铁磁质做成一个细圆环，环上密绕线圈，单位长度匝数 $n=500$，形成有铁芯的螺绕环。当线圈中电流 $I=4$ A 时，试计算：

(1)环内 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 的大小；

(2)束缚面电流产生的附加磁感应强度。

解 (1) $$H = nI = 500\times4 = 2\times10^3\ \text{A/m}$$
$$B = \mu H = 50\times10^{-4}\times2\times10^3 = 10\ \text{T}$$

(2) $$B' = B - B_0$$
$$B_0 = \mu_0 nI = 4\pi\times10^{-7}\times2\times10^3\times4 = 0.01\ \text{T}$$
$$B' = B - B_0 = 10 - 0.01 = 9.99 \approx 10\ \text{T}$$

7.25 螺绕环平均周长 $l=10\ \text{cm}$，环上线圈 $N=200$ 匝，线圈中电流 $I=100\ \text{mA}$。试求：

(1)管内 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的大小；

(2)若管内充满相对磁导率$\mu_r=4200$的磁介质，管内 $\boldsymbol{B}$ 的大小。

解 (1)
$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I_0$$
$$H2\pi r=NI_0$$
$$H=\frac{NI_0}{2\pi r}=\frac{200\times 0.1}{0.1}=200\ \text{A/m}$$
$$B_0=\mu_0 nI_0$$
$$=4\pi\times 10^{-7}\times\frac{200}{0.1}\times 0.1=2.5\times 10^{-4}\ \text{T}$$

(2)
$$B=\mu H=\mu_0\mu_r H$$
$$=4\pi\times 10^{-7}\times 4\,200\times 200=1.05\ \text{T}$$

第 8 章

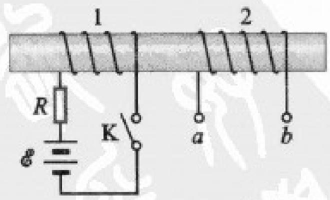
电磁感应与电磁场

8.1 选择题

(1) $\boldsymbol{E}_{\mathrm{k}}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分别是电源中的非静电场和静电场的场强，rI 为内阻上的电势降落，取从电源负极经电源内部到正极为积分路径，则 $\int_{-}^{+}\boldsymbol{E}_{\mathrm{k}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=$ [B]；$\int_{-}^{+}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=$ [A]；$\int_{-}^{+}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=$ [C]。

(A) 端电压 u　　(B) 电动势 $\mathscr{E}$　　(C) rI

(2)一棒状铁芯密绕着线圈 1 和线圈 2，如图所示。按下电键 K，并取线圈 2 回路面积的法线正方向为 $\boldsymbol{n}$，应用法拉第电磁感应定律判断 $\mathscr{E}_{\mathrm{i}}$ 方向的方法，对于线圈 2 回路，正确的判断是[C]。



题 8.1(2)图

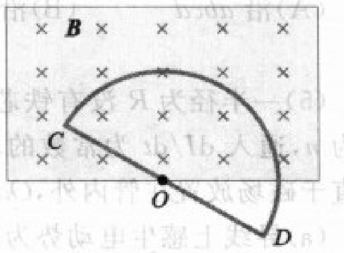
(A)$\Phi<0,\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}>0,\ \mathscr{E}_{\mathrm{i}}<0,U_a<U_b$

(B)$\Phi>0,\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}<0,\ \mathscr{E}_{\mathrm{i}}>0,U_a>U_b$

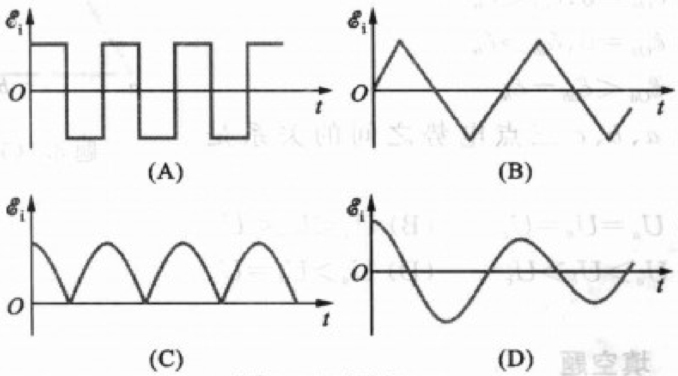
(C)$\Phi<0,\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}<0,\ \mathscr{E}_{\mathrm{i}}>0,U_a>U_b$

(D)$\Phi<0,\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}<0,\mathscr{E}_{\mathrm{i}}<0,U_a<U_b$

(3)一半圆形的闭合金属导线绕轴 O 在矩形均匀分布的恒定磁场中作逆时针方向的匀速转动，如图(a)所示。图(b)中能表示导线中感应电动势 $\mathscr{E}_i-t$ 的函数关系的曲线为[A]。



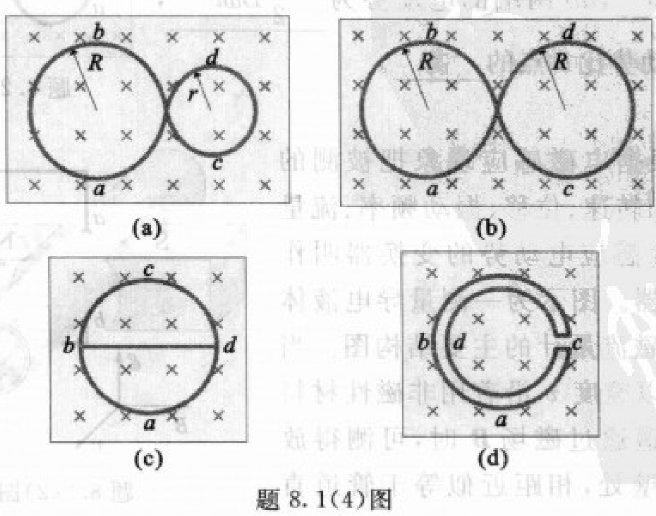
题 8.1(3)图(a)



题 8.1(3)图(b)

(4)均匀磁场中有几个闭合线圈，如图所示。当磁场不断减小时，在各回路中产生的感应电流的方向各为：

(a)[A]　(b)[C]　(c)[A]　(d)[A]



题 8.1(4)图

(A)沿 $abcd$　　　(B)沿 $dcba$　　　(C)无感应电流

(5)一半径为 R 没有铁芯的无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为 n，通入 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ 为常数的增长电流。如图所示。将导线 Oab 和 bc 垂直于磁场放置在管内外，$Oa=ab=bc=R$。

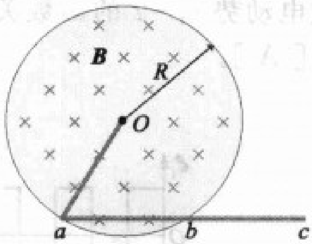
(a)导线上感生电动势为[C]。

(A) $\mathscr{E}_{Oa}=\mathscr{E}_{ab}=\mathscr{E}_{bc}$

(B) $\mathscr{E}_{Oa}=0, \mathscr{E}_{ab}<\mathscr{E}_{bc}$

(C) $\mathscr{E}_{Oa}=0, \mathscr{E}_{ab}>\mathscr{E}_{bc}$

(D) $\mathscr{E}_{Oa}<\mathscr{E}_{ab}=\mathscr{E}_{bc}$



题 8.1(5)图

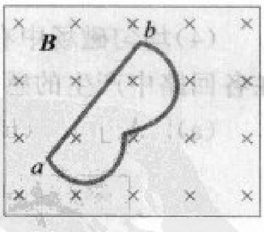
(b) a、b、c 三点电势之间的关系是[B]。

(A) $U_a=U_b=U_c$　　(B) $U_a<U_b<U_c$

(C) $U_a>U_b>U_c$　　(D) $U_a>U_b=U_c$

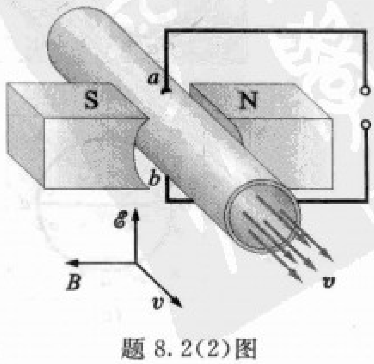
8.2 填空题

(1)把一根导线弯成平面曲线放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，绕其一端 a 以角速率 ω 逆时针方向旋转，转轴与 $\boldsymbol{B}$ 平行，如图所示。则，整个回路电动势为 0 ，ab 两端的电动势为 $\frac{1}{2}B\omega l^2$ ，a 点的电动势比 b 点的 高 。



题 8.2(1)图

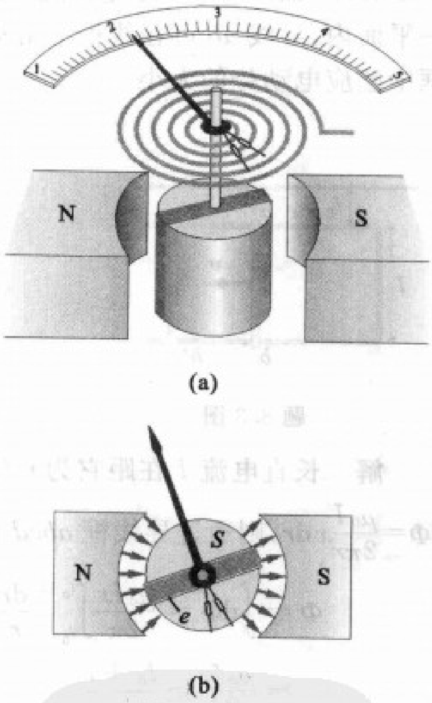
(2)根据电磁感应现象把被测的非电量(如转速、位移、振动频率、流量等)转化为感应电动势的变换器叫作感应变换器。图示为一测量导电液体流量的电磁流量计的主要结构图。当导电液体以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿着用非磁性材料制成的管道通过磁场 $\boldsymbol{B}$ 时，可测得放置管道内壁处，相距近似等于管道直



题 8.2(2)图

径 D 的两个电极 a 与 b 间的感应电动势 $\mathscr{E}_{ab}=$ $\underline{\quad BvD \quad}$，已知液体流量 $Q=\dfrac{\pi D^2}{4}v$，它与 $\mathscr{E}_{ab}$ 的关系为 $\mathscr{E}=KQ$，式中 $K=$ $\underline{\quad \dfrac{4B}{\pi D} \quad}$ 叫作仪表常数。

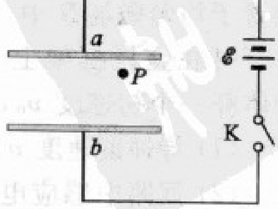
(3)图(a)为磁电式仪表的结构原理图，其动线圈绕在面积为 S 的铝框架 e 上，放在磁感强度为 $\boldsymbol{B}$ 的辐射状磁场中，如图(b)所示。当被测电流通入线圈，在磁力作用下，线圈以角速度 ω 转动，铝框在随线圈转动过程中产生的感应电动势 $\mathscr{E}=$ $\underline{\quad BS\omega \quad}$，已知铝框架的电阻为 R，则框内产生感应电流 $i=$ $\underline{\quad \dfrac{BS\omega}{R} \quad}$，磁场对铝框产生的力矩 $M=$ $\underline{\quad \dfrac{B^2S^2\omega}{R} \quad}$，此力矩的作用为<u>阻力力矩，使线圈较快地停止在平衡位置处</u>。



题 8.2(3)图

(4) 一长直螺线管，单位长度上的线圈匝数为 n，横截面积为 S。在螺线管上绕一线圈，其匝数为 N。螺线管和线圈的互感系数为 $\underline{\quad \alpha Nn\mu_0 S \quad}$；若螺线管上通有电流 $I=I_0\mathrm{e}^{-\alpha t}$，则线圈上的互感电动势为 $\underline{\quad \alpha Nn\mu_0 SI_0\mathrm{e}^{-\alpha t} \quad}$；若线圈上通有电流 $I=I_0\mathrm{e}^{-\alpha t}$，则螺线管上的互感电动势为 $\underline{\quad \alpha Nn\mu_0 SI_0\mathrm{e}^{-\alpha t} \quad}$。

(5)极板面积为 S，相距为 l 的圆形平板电容器，两极板间充满介电常数为 ε 的电介质，当电键 K 按下后，两极板上的电量 $Q=Q_0(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$，式中 Q_0 和 τ 均为常数，则极板间位移电流密度的大小为 $\underline{\quad \dfrac{Q_0}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad}$，位移



题 8.2(5)图

因此

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = v_x a_x + v_y a_y = 0$$

1.19 一质点运动学方程为 $x=t^2$，$y=(t-1)^2$，其中 x、y 以 m 为单位，t 以 s 为单位。

(1)试写出质点的轨迹方程，并在 Oxy 平面内示意地画出轨迹曲线；

(2)质点的速度何时取极小值？

(3)试求当速度大小等于 10 m/s 时，质点的位置坐标；

(4)试求时刻 t 质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解 (1) 由运动学方程消去 t，可得轨迹方程

$$t=\sqrt{x}$$

$$y=(\sqrt{x}-1)^2$$

图略，轨迹为一抛物线。

(2) t 时刻质点的速度为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2(t-1)$$

速度大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4t^2+4(t-1)^2}$$

令 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，得 $t=0.5$，即 $t=0.5$ s 时速度取极小值。

(3)令 $\qquad v=\sqrt{4t^2+4(t-1)^2}=10$

得 $t=4$，带入运动学方程，有

$$x(4)=16 \text{ m}$$

$$y(4)=9 \text{ m}$$

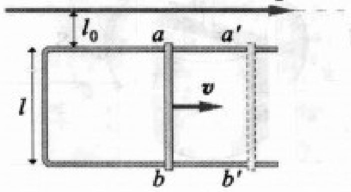
(4) 切向加速度为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{4t^2+4(t-1)^2}$$

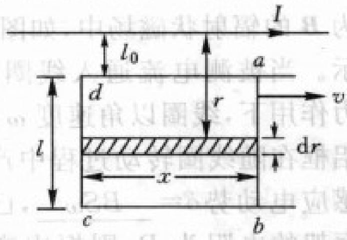
$$=\frac{2(2t-1)}{\sqrt{t^2+(t-1)^2}}$$

电流方向为 <u>$a \to b$</u>。画出极板间某点 P 处电场强度和磁场强度的方向。

8.3 如图所示，长直载流导线载有电流 I，一导线框与它处在同一平面内，导线 ab 可在线框上滑动。若 ab 向右以匀速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，求线框中感应电动势的大小。



题 8.3 图



8.3 题解题图

解 长直电流 I 在距它为 r 处的面元 $\mathrm{d}s = x\mathrm{d}r$ 处产生的磁通量为 $\mathrm{d}\Phi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}x\,\mathrm{d}r$，则通过导线框 $abcd$ 的磁通量为

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \frac{\mu_0 I x}{2\pi}\int_{l_0}^{l_0+l}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I x}{2\pi}\ln\frac{l_0+l}{l_0}$$

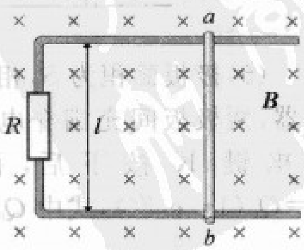
$$\mathscr{E} = \left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ln\frac{l_0+l}{l_0}$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{l_0+l}{l_0}$$

8.4 如图所示，一电阻为 R 的金属框架置于均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，长为 l，质量为 m 的导体杆可在金属框架上无摩擦地滑动。现给导体杆一个初速度 $\boldsymbol{v}_0$，求：

(1) 导体的速度 v 与时间 t 的函数关系；

(2) 回路中感应电流与时间 t 的函数关系；



题 8.4 图

(3) 在时间 $t\to\infty$ 时，回路产生的焦耳热是多少？

解 (1)设导体杆的速度为 v，所受安培力为

$$F = IBl = \frac{Blv}{R}Bl = \frac{B^2l^2v}{R}$$

根据牛顿第二定律，有

$$\frac{B^2l^2v}{R} = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^t \frac{B^2l^2}{mR}\mathrm{d}t = -\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$v = v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$

(2) $i = \dfrac{Blv}{R} = \dfrac{Bl}{R}v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$

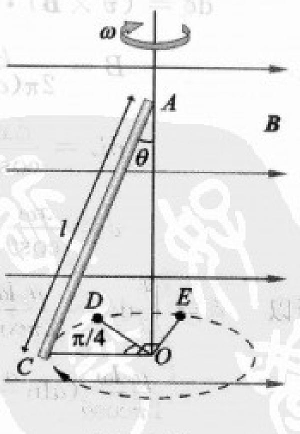
(3) $W = \displaystyle\int_0^\infty \mathscr{E}i\mathrm{d}t = \int_0^\infty (Blv_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t})(\frac{Bl}{R}v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t})\mathrm{d}t$

$= \dfrac{1}{2}mv_0^2$

8.5 长为 l 的直导线 AC，在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中与竖直方向 AO 夹角为 θ，以角速度 ω 沿顺时针方向转动，如图所示。求：

(1)当转到图示位置时，A 和 C 两点间的动生电动势的大小和方向；

(2)当 C 点转到 D 点或 E 点时，A 和 C 两点间的电动势的大小。



题 8.5 图

解 (1)

$$\mathscr{E}_{AC} = \int_A^C(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^l VB\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}l$$

式中 φ 为 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角，此处 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$，又

$V = l\sin\theta\omega$

所以

$$\mathscr{E}_{AC} = B\omega\sin\theta\cos\theta\int_0^l l\mathrm{d}l = \frac{1}{2}B\omega l^2\cos\theta\sin\theta$$

方向为 $A\to C$，即 A 处电势低，C 处电势高。

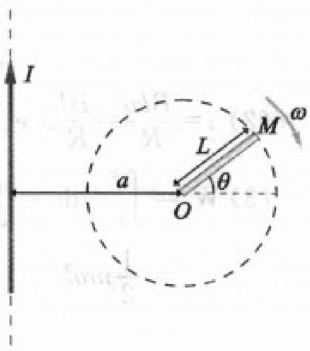
(2) 在 D 点处 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,所以

$$\mathscr{E}_{AD}=B\omega\sin\theta\cos\theta\sin45^{\circ}\int_0^l l\mathrm{d}l$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}B\omega l^2\cos\theta\sin\theta$$

在 E 点处 $\varphi=0$,故 $\mathscr{E}_{AE}=0$。

8.6 如图所示,一长直导线内通有恒定电流 I,电流方向向上。导线旁有一长度为 L 的金属棒,绕其一端点 O 在一竖直平面内,以角速度 ω 匀速转动。O 点至导线的距离为 a,当金属棒转至 OM 位置时,试求棒内电动势的大小和方向。



题 8.6 图

解 长 $\mathrm{d}L$ 的金属棒上产生的动生电动势为

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=Bv\mathrm{d}l$$

又
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+x)}$$

$$\mathrm{d}L=\frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta}$$

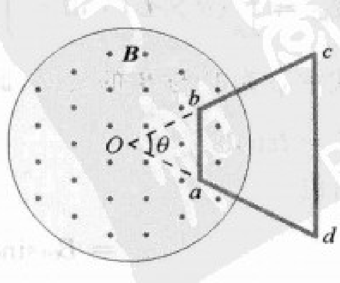
$$v=\frac{x\omega}{\cos\theta}$$

所以
$$\mathscr{E}=\int_0^L\mathrm{d}\mathscr{E}=\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\cos\theta}\int_0^{L\sin\theta}\frac{x\mathrm{d}x}{a+x}$$

$$=\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\cos\theta}\left(a\ln\frac{a+L\cos\theta}{a}-L\cos\theta\right)$$

方向由 O 指向 M。

8.7 均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 被限制在半径 $R=0.10\ \mathrm{m}$ 的无限长圆柱空间内,方向垂直纸面向外,设磁场以 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t=100\ \mathrm{T/s}$ 的变化率匀速增加,已知 $\theta=\pi/3$,$Oa=Ob=0.04\ \mathrm{m}$,



题 8.7 图

试求等腰梯形导线框 $abcd$ 的感应电动势，并判断感应电流的方向。

解 根据法拉第电磁感应定律，感生电动势的大小为

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S \\ &= \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}\overline{ab}h\right) \\ &= \left(\frac{100}{6}\pi - 4\sqrt{3}\right) \times 10^{-2}\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

式中 h 为由 O 到 $\overline{ab}$ 的垂距。

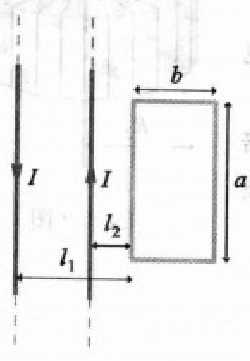
第二种解法：

用 $\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{E}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 积分方法求解。

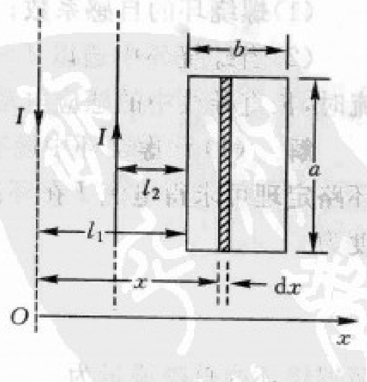
8.8 如图所示，两条平行长直载流输电导线，和一矩形的导线框共面，已知两导线中的电流同为 $I = I_0 \sin\omega t$，但方向相反，导线框的长为 a，宽为 b。求：

(1)输电回路与导线框之间的互感系数；

(2)回路中的感应电动势。



题 8.8 图



8.8 题解题图

解 (1) 两条载流长直导线在空间一点产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-(l_1-l_2)}\right]$$

通过线框的磁通量为

$$\Phi = \iint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int Ba\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left[\int_{l_1}^{l_1+b} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_{l_1}^{l_1+b} \frac{\mathrm{d}x}{x - l_1 + l_2}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{l_1+b}{l_1}\,\frac{l_2}{l_2+b}\right)$$

互感系数

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{l_1+b}{l_1}\,\frac{l_2}{l_2+b}\right)$$

(2) $$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

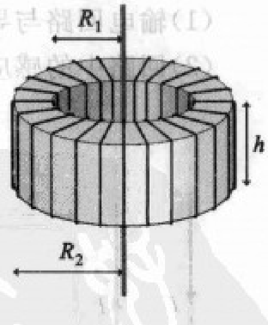
$$= \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{l_1+b}{l_1}\,\frac{l_2}{l_2+b}\right)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 a\omega}{2\pi}\cos\omega t \ln\frac{l_2(l_1+b)}{l_1(l_2+b)}$$

8.9 一截面为矩形的螺绕环，内外半径分别为 R_1 和 R_2，高为 h，共有 N 匝，螺绕环的轴处放一无限长直导线。求：

(1)螺绕环的自感系数；

(2)当螺绕环中通以 $I = I_0\sin\omega t$ 的交变电流时，长直导线中的感应电动势。



题 8.9 图

解 (1) 设螺绕环中通有电流 I，则由安培环路定理可求得电流 I 在环内产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

而螺绕环内总磁通量为

$$\Phi = N\int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = N\int_{R_{1/2}}^{R_{2/2}} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

所以螺绕环的自感系数

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}N^2 h \ln\frac{R_2}{R_1}$$

(2) 设无限长直导线通以电流 I，则在螺绕环中产生的总磁通量为

$$\Phi = N\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = N\int_{R_{1/2}}^{R_{2/2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

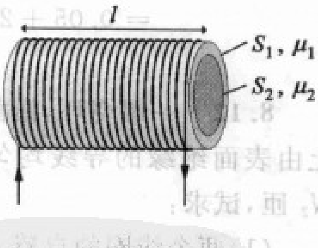
则长直导线对螺绕环的互感系数

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 Nh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

由于长直导线对螺绕环的互感系数与螺绕环对长直导线的互感系数相等，所以当螺绕环通以 $I = I_0\sin\omega t$ 电流时，长直导线中的感应电动势为

$$\mathscr{E} = -M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{-\mu_0 Nh\omega I_0}{2\pi}\cos\omega t \ln\frac{R_2}{R_1}$$

8.10 如图所示，螺线管的管心是两个套在一起的同轴圆柱体，其截面积分别为 S_1 和 S_2，磁导率分别为 μ_1 和 μ_2，管长为 l，匝数为 N。求螺线管的自感系数（设管的截面很小）。



题 8.10 图

解 由安培环路定理，可得长直螺线管内磁场 $H = nI$。又 $B = \mu H$，故介质 1 中 $B_1 = \mu_1 nI$，介质 2 中 $B_2 = \mu_2 nI$，穿过 N 匝线圈的螺线管的总磁通量为

$$N\Phi = N(B_1 S_1 + B_2 S_2)$$

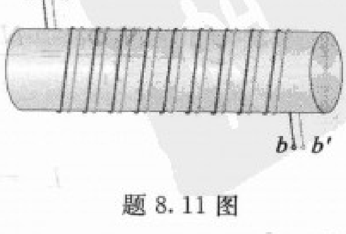
所以

$$L = \frac{N\Phi}{I} = N\mu_1 nS_1 + N\mu_2 nS_2 = \frac{\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2}{l}N^2$$

8.11 在一纸筒上绕有两个相同的线圈 ab 和 $a'b'$，两个线圈的自感都是 0.05 H，如图所示。求：

(1) a 和 a' 相接时，b 和 b' 间的自感；

(2) a' 与 b 相接时，a 和 b' 间的自感。



题 8.11 图

解 (1) 当 a' 与 a 相接、在 b 与 b' 之间通以电流时，两线圈中的电流等值反向，穿过线圈的总磁通量为 0，故

$$L = \frac{\Phi}{I} = 0$$

(2) a' 与 b 相接，对 a 和 b' 两端，则为两个线圈顺接串联，此时穿过线圈的总磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_{11} + \Phi_{12} + \Phi_{21} + \Phi_{22} \\ &= L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{12} I_1 + L_2 I_2\end{aligned}$$

此处

$$I_1 = I_2 = I$$

$$M_{12} = M_{21} = M = \sqrt{L_2 L_1}$$

所以

$$\begin{aligned}L &= \frac{\Phi}{I} = L_1 + 2M + L_2 \\ &= 0.05 + 2\sqrt{(0.05)^2} + 0.05 = 0.2\ \text{H}\end{aligned}$$

8.12 一螺绕环，横截面的半径为 a，中心线的半径为 R，$R \gg a$，其上由表面绝缘的导线均匀地密绕两个线圈，一个为 N_1 匝，另一个为 N_2 匝，试求：

(1) 两个线圈的自感 L_1 和 L_2；

(2) 两个线圈的互感 M；

(3) M 与 L_1 和 L_2 的关系。

解 (1) 设匝数为 N_1 的螺绕环中通以电流 I_1，它在本螺绕环中产生的磁感应强度为

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \frac{\mu_0 N_1}{2\pi R} I_1$$

故

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1 B_1 S_1}{I_1} = \frac{\mu_0 {N_1}^2 \pi a^2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 {N_1}^2 a^2}{2R}$$

同样

$$L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} = \frac{\mu_0 {N_2}^2 a^2}{2R}$$

(2) 设螺绕环 1 中通电流 I_1，它在螺绕环 2 中产生的总磁通量为

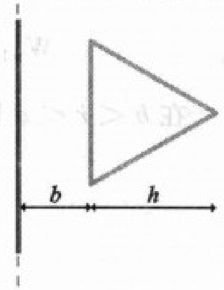
$$\Phi_{21} = N_2 B_1 S_2 = N_2 \mu_0 n_1 I_1 \pi a^2$$

故互感系数

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = N_2 \mu_0 n_1 I_1 \pi a^2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{2R}$$

(3)$M = \sqrt{L_1 L_2}$，此两线圈为完全耦合。

8.13 如图所示，一等边三角形与长直导线共面放置，求它们之间的互感系数。



题 8.13 图

解 设长直导线中通以电流 I，则电流 I 在三角形线框中产生的磁通量为

$$\Phi = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= 2\int_0^{b+h} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} y \mathrm{d}x$$

其中 $y = (b+h-x)\tan 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(b+h-x)$$

所以

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi}\int_0^{b+h} \frac{b+h-x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi}\left[(b+h)\ln\frac{b+h}{b} - h\right]$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\sqrt{3}\pi}\left[(b+h)\ln\frac{b+h}{b} - h\right]$$

8.14 一根同轴电缆由内圆柱体和与它同轴的外圆筒构成，内圆柱的半径为 a，圆筒的内、外半径为 b 和 c。电流 I 由外圆筒流出，从内圆柱体流回。在横截面上电流都是均匀分布的。

(1)求下列各处每米长度内的磁能密度 ω_m：圆柱体内、圆柱体与圆筒之间、圆筒内、圆筒外；

(2)当 $a=1.0$ mm，$b=4.0$ mm，$c=5.0$ mm，$I=10$ A 时，每米长度

同轴电缆中储存多少磁能？

解 (1) 在 $r<a$ 的圆柱体内，由安培环路定理得

$$H=\frac{Ir}{2\pi a^2}$$

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\quad(\text{此处取导体内 }\mu_r\approx 1)$$

则
$$\omega_m=\frac{1}{2}BH=\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$$

圆柱体内每米长度的磁场能量为

$$W_{m1}=\int\omega_m \mathrm{d}V=\int_0^a\frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

在 $b<r<a$ 区域内

$$H=\frac{I}{2\pi r}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

故此区域中

$$\omega_m=\frac{1}{2}BH=\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

此区域中每米长的磁场能量为

$$W_{m2}=\int\omega_m \mathrm{d}V=\int_a^b\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

在 $c<r<b$ 区域内，环形截面积为 $\pi(c^2-b^2)$，此区域内单位截面积上的电流为 $\dfrac{I}{\pi(c^2-b^2)}$，由安培环路定理，可求此区域内的 H 和 B 为

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=2\pi rH=\left[I-\frac{I}{\pi(c^2-b^2)}\pi(r^2-b^2)\right]$$

故
$$H=\frac{I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}$$

所以

$$\omega_m=\frac{1}{2}BH=\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)^2$$

内、外半径分别为 b、c 的环形柱筒内，每米长度的磁场能量为

$$W_{m3}=\int\frac{1}{2}BH\,dV=\int_b^c\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)^2 2\pi r\,dr$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi(c^2-b^2)^2}\int_b^c\frac{(c^2-r^2)}{r}dr$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi(c^2-b^2)^2}\left(4c^4\ln\frac{c}{b}-3c^4+4c^2b^2-b^4\right)$$

在 $r>c$ 区域内

$$H=0,\quad B=0,\quad \omega_m=0,\quad W_m=0$$

(2) 每米长度同轴电缆内储存的磁能为上述磁能之和

$$W=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}$$

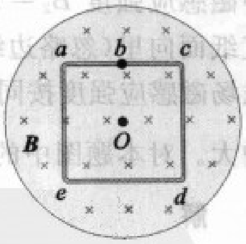
$$=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{1}{4}+\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{4(c^2-b^2)^2}\left(4c^2\ln\frac{c}{b}-3c^4+4b^2c^2-b^4\right)\right]$$

$$\approx 1.7\times 10^{-5}\ \mathrm{J/m}$$

8.15 长直螺线管内磁场的磁感应强度按 0.1 T/s 的速率增加，管内有一边长 $l=0.2$ m 的正方形导体回路，其中心在螺线管的轴线上，b 为 ac 的中点，求：

(1) a、b 两点有旋电场的电场强度；

(2) $abcd$ 折线上的感生电动势。



题 8.15 图

解 (1)变化磁场产生的感生电场的电力线，是一组圆心在螺线管轴线上的圆。以其中一条半径为 r 的圆为积分路径 L，则

$$\oint_L \boldsymbol{E}_V\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_L E_V\cdot dl=E_V\oint_L dl=E_V 2\pi r$$

根据 $\oint \boldsymbol{E}_V\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}d\boldsymbol{S}$，有

$$E_V 2\pi r=-\frac{dB}{dt}\pi r^2$$

$$E_V=-\frac{dB}{dt}\frac{r}{2}$$

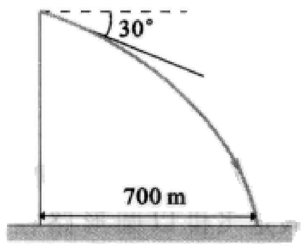
总加速度为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{8}$$

因此,法向加速度为

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\frac{2}{\sqrt{t^2+(t-1)^2}}$$

1.20 当飞行员投出雷达诱饵时,飞机正以 290.0 km/h 的速率及 30°角俯冲,见图。已知投出点与诱饵落地点水平距离为 700 m。试求诱饵在空中飞行的时间,及投出点离地面的高度。



题 1.20 图

解 设投出时飞机速度为 v_0,诱饵在空中飞行时间为 t,投出点离地面的高度为 h,依题意,有

水平距离 $R=v_0\cos30^\circ t$

$$t=\frac{R}{v_0\cos30^\circ}=\frac{700}{\dfrac{290.0\times10^3}{3600}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=10.0\ \text{s}$$

离地面的高度 $h=v_0\sin30^\circ t+\dfrac{1}{2}gt^2$

$$=\frac{290.0\times10^3}{3600}\times\frac{1}{2}\times10+\frac{1}{2}\times9.8\times10^2$$

$$=892.7\ \text{m}$$

1.21 一人站在 Oxy 平面上的某点(x_1,y_1)处,以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 铅垂向上抛出一球。

(1)试以时间 t 为变量写出球的位矢 $\boldsymbol{r}$;

(2)求出球的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$。

解 (1)起抛点的坐标为$(x_1,y_1,0)$,球竖直向上作匀减速运动,加速度为$-g\boldsymbol{k}$,因而球的运动学方程为

$$x=x_1$$

$$y=y_1$$

$$E_{Va} = -\frac{0.1}{2}\sqrt{\left(\frac{0.2}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{2}\right)^2} = 7.1 \times 10^{-3}\ \mathrm{V/m}$$

$$E_{Vb} = -\frac{0.1}{2} \times 0.1 = 5 \times 10^{-3}\ \mathrm{V/m}$$

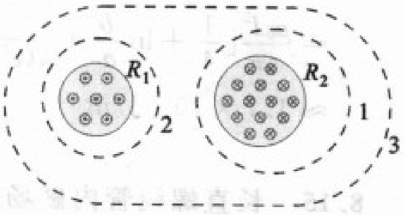
(2)导体回路上的电动势为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}l^2 = 0.1 \times 0.2^2 = 4 \times 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

因此 $abcd$ 上的电动势为

$$\mathscr{E}_{abcd} = \frac{\mathscr{E}}{2} = \frac{0.4 \times 10^{-3}}{2} = 2 \times 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

8.16 在半径 $r_1 = 20.0\ \mathrm{cm}$ 和 $r_2 = 30.0\ \mathrm{cm}$的圆形区域 R_1 和 R_2 中有匀强磁场，R_1 中的磁感应强度为 $B_1 = 50\ \mathrm{mT}$，方向垂直纸面向外，R_2 中磁感应强度 $B_2 = 75.0\ \mathrm{mT}$，方向垂直纸面向里(忽略边缘效应)。两部分磁场磁感应强度按同一速率 $8.5\ \mathrm{mT/s}$ 增大。对本题图中的三条路径分别计算 $\oint \boldsymbol{E}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 。



题 8.16 图

解

$$\oint_{L2} \boldsymbol{E}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}t}\pi r_1^2$$
$$= -(8.50 \times 10^{-3}) \times 3.14 \times (20.0 \times 10^{-2})^2$$
$$= -1.07 \times 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

$$\oint_{L1} \boldsymbol{E}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}\pi r_2^2$$
$$= -(-8.50 \times 10^{-3}) \times 3.14 \times (30 \times 10^{-2})^2$$
$$= 2.40 \times 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

$$\oint_{L3} \boldsymbol{E}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B_2\pi r_2^2 + B_1\pi r_1^2) = -\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2)$$
$$= -(-8.50 \times 10^{-3}) \times 3.14$$

$$\times [(30.0 \times 10^{-2})^2 - (20.0 \times 10^{-2})^2]$$
$$= 1.33 \times 10^{-3} \text{ V}$$

8.17 设电荷在半径为 R 的圆形平板电容器极板上均匀分布(边缘效应忽略不计)。当它接在圆频率为 ω 的简谐交流电路中,电流为 $i=I_0\cos\omega t$。计算电容器极板间磁感应强度的分布(用 r 表示离极板轴线的距离)。

解 利用安培环路定理,以圆心在轴线半径为 r 的圆为积分路径,有

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r H = I_D = \frac{i}{\pi R^2}\pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} i$$

因此

$$H = \frac{r I_0}{2\pi R^2}\cos\omega t$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 r I_0}{2\pi R^2}\cos\omega t$$