数字信号处理基础习题解答

周利清　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

“数字信号处理”是各高等院校电子类专业和通信类专业学生的一门非常重要的专业基础课。本书是与北京邮电大学出版社新近出版的《数字信号处理基础》相配套的习题解答，它给出了原书中所有习题的详细解答，在解答过程中也说明了所用的公式、定理等依据的出处。读者通过这本习题解答可以更清楚地理解和掌握数字信号处理的基本原理、基本概念和基本算法。

这本书可以作为本科生的配套教材，并且可以作为从事数字信号处理工作的技术人员自学所用。

图书在版编目（CIP）数据

数字信号处理基础习题解答／周利清编著．—北京：北京邮电大学出版社，2005

ISBN 7-5635-1176-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．周…　Ⅲ．数字信号—信号处理—高等学校—解题　Ⅳ．TN911.72-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 124449 号

书　　名：数字信号处理基础习题解答
编　　著：周利清
责任编辑：王晓丹
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（100876）
电话传真：010-62282185（发行部）　010-62283578（FAX）
E-mail：　publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：8
字　　数：173 千字
印　　数：1—3 000 册
版　　次：2005 年 11 月第 1 版　2005 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-1176-8/TN·412　　定　价：14.00 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

前　　言

“数字信号处理”是各高等院校电子类专业和通信类专业学生的一门非常重要的专业基础课,这是一本与北京邮电大学出版社新近出版的《数字信号处理基础》相配套的习题解答。对于原书中所有的习题,在这本书中都有详细的解答过程以及最后答案,同时也说明了解题过程中所用的公式、定理等依据的出处。通过这本习题解答,读者可以更清楚地理解和掌握数字信号处理的基本原理、基本概念和基本算法。

原书共有 9 章,其中第 1 章和第 5 章都是概述性的内容,没有习题,也就未作习题解答,因此共有 7 章的习题解答。希望读者在首先学习原书,基本理解了原书所讲解的基本原理、基本概念和基本算法,并且看懂了有关例题的基础上,再来作各章后面的习题,而且对于每一道习题,最好是先自己做,然后再看习题解答,并且将自己的做法在解题的思路、过程以及答案等方面与习题解答进行比较,这样你将获得较大的收获。笔者认为,做习题主要不在于数量,而是应该每做一题都要认真思考、认真总结,尽量做到做一题就有一题的收获。

上述观点如有不当之处,习题解答中的内容如有错误之处,都欢迎读者批评指正。

这本书可以作为本科生的配套教材,并且可以作为从事数字信号处理工作的技术人员自学所用。

编　者

2005 年 9 月

目　　录

第 2 章　离散系统的性质和离散信号的变换 …………………… 1
第 3 章　离散傅里叶变换……………………………………… 20
第 4 章　快速傅里叶变换……………………………………… 37
第 6 章　IIR 数字滤波器的原理及设计 ……………………… 49
第 7 章　FIR 数字滤波器的原理及设计……………………… 70
第 8 章　数字滤波器的结构…………………………………… 91
第 9 章　数字信号处理中的有限字长效应 ………………… 110

第 2 章
离散系统的性质和离散信号的变换

2.1　有模拟正弦信号 $x_a(t)=3\sin(100\pi t)$，设抽样频率 $f_s=300$ 样值/秒。

(a) 求离散时间信号 $x(n)=x_a(nT_s)$ 的周期 N。

(b) 计算 $x(n)$ 在一个周期内的样值。

解

(a)
$$x_a(t)=3\sin(100\pi t)=3\sin(\Omega_0 t)$$

因此，该正弦信号的角频率

$$\Omega_0=2\pi f_0=100\pi$$

于是可知该正弦信号的频率

$$f_0=50\ \text{Hz}=50\ \text{周/秒}$$

又因为抽样频率 $f_s=300$ 样值/秒，所以在一个周期内的样值数为

$$300\ \text{样值/秒}\div 50\ \text{周/秒}=6\ \text{样值/周}$$

也即离散信号 $x(n)$ 的周期 $N=6$。

(b)
$$\begin{aligned}x(n)&=x_a(nT_s)\\&=3\sin(100\pi nT_s)=3\sin(100\pi n/f_s)\\&=3\sin(100\pi n/300)=3\sin(n\pi/3)\end{aligned}$$

于是可求得 $x(n)$ 在一个周期内的样值：

n	0	1	2	3	4	5
$x(n)$	$3\sin(0)$ $=0$	$3\sin(\pi/3)$ $=2.598$	$3\sin(2\pi/3)$ $=2.598$	$3\sin(\pi)$ $=0$	$3\sin(4\pi/3)$ $=-2.598$	$3\sin(5\pi/3)$ $=-2.598$

2.2　若离散时间信号为 $2\cos(2\pi n/3)$，抽样率为 3 000 Hz，写出所对应的模拟信号的表达式。

解

由于离散信号为

$$x(n)=2\cos(2\pi n/3)$$

故应该令所对应的模拟信号

$$x_a(t)=2\cos(\Omega_0 t)$$

于是又有

$$x(n)=x_a(nT_s)=2\cos(\Omega_0 nT_s)$$

比较 $x(n)$ 的两个表达式，可以得到

$$\Omega_0 nT_s=2\pi n/3$$

故

$$\Omega_0=2\pi/(3T_s)=2\pi f_s/3=2\pi\cdot 3\,000/3=2\,000\pi$$

于是所对应的模拟信号

$$x_a(t)=2\cos(2\,000\pi t)$$

2.3 一个理想抽样器的抽样角频率 $\Omega_s=8\pi\ \mathrm{rad/s}$，抽样后经一个理想的低通滤波器 $H\left(\dfrac{\Omega}{2\Omega_c}\right)$ 来还原，这里 $\Omega_c=4\pi\ \mathrm{rad/s}$。当输入信号分别为 $x_{a1}(t)=2\cos(2\pi t)$、$x_{a2}(t)=\cos(5\pi t)$ 时，分别写出输出信号 $y_{a1}(t)$、$y_{a2}(t)$ 的表达式。

解

抽样周期 $$T_s=2\pi/\Omega_s=0.25\ \mathrm{s}$$

$$x_{a1}(t)=2\cos(2\pi t)=2\cos(\Omega_1 t)=e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}$$

因此 $x_{a1}(t)$ 的频谱 $X_{a1}(\Omega)$ 含有 $\pm 2\pi$ 这两个频率成分，频谱幅度均为 1。由于 $\Omega_1=2\pi<\Omega_s/2=4\pi$，故由 $x_{a1}(t)$ 得到的抽样信号的频谱不会混叠 抽样信号经过 $\Omega_c=4\pi=\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器之后，可以保留 $X_{a1}(\Omega)$ 的所有频率成分，所以输出信号

$$y_{a1}(t)=(1/T_s)(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t})=8\cos(2\pi t)$$

又， $$x_{a2}(t)=\cos(5\pi t)=\cos(\Omega_2 t)=(1/2)(e^{j5\pi t}+e^{-j5\pi t})$$

因此 $x_{a2}(t)$ 的频谱 $X_{a2}(\Omega)$ 含有 $\pm 5\pi$ 这两个频率成分，频谱幅度均为 1/2。由于 $\Omega_2=5\pi>\Omega_s/2=4\pi$，故由 $x_{a2}(t)$ 得到的抽样信号的频谱将发生混叠，在从 $-\Omega_s=-8\pi$ 到 $\Omega_s=8\pi$ 的两个周期之内，抽样信号的频谱不但含有 $\pm 5\pi$ 这两个频率成分，而且含有因为混叠所产生的 $\pm 3\pi$ 这两个频率成分 抽样信号经过 $\Omega_c=4\pi=\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器之后，保留的频率成分为 $\pm 3\pi$，所以输出信号

$$y_{a2}(t)=(1/T_s)(1/2)(e^{j3\pi t}+e^{-j3\pi t})=4\cos(3\pi t)$$

这是与输入信号 $x_{a2}(t)$ 不同频率的余弦信号。

2.4　试画出下面各序列的图形。

(a) $x(n)=0.5^{n}u(n+1)$　　　　(b) $x(n)=2^{n-2}u(n-1)$

(c) $x(n)=\delta(n-1)+u(-n)$　　　　(d) $x(n)=2^{-n}u(n)+u(-n-2)$

解

参见图 T2.4(a)～(d)。

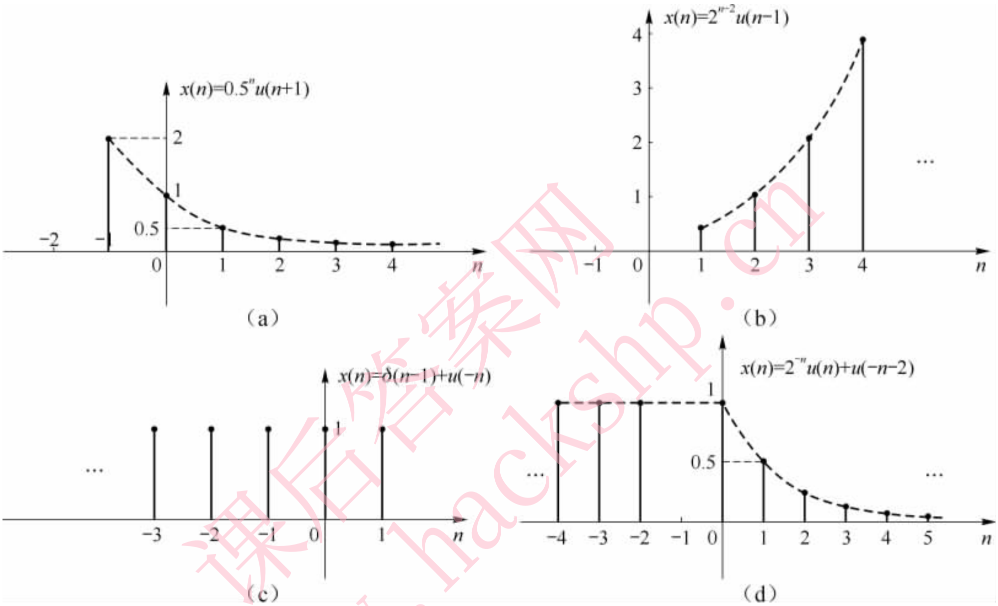


图 T2.4

2.5　下列系统中，$y(n)$ 表示输出，$x(n)$ 表示输入，试确定输入输出关系是否线性？是否时不变？

(a) $y(n)=2x(n)+3$　　　　(b) $y(n)=x^{2}(n)$　　　　(c) $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$

解

设 $x_1(n)$、$x_2(n)$ **是两个任意序列，**a、b **是两个任意常数。**

(a) **系统定义为：**

$$y(n)=T[x(n)]=2x(n)+3$$

① **线性组合的变换：**

$$\begin{aligned}T[ax_1(n)+bx_2(n)]&=2[ax_1(n)+bx_2(n)]+3\\&=2ax_1(n)+2bx_2(n)+3\\&=y'(n)\end{aligned}$$

变换的线性组合：

$$aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=a[2x_1(n)+3]+b[2x_2(n)+3]$$
$$=2ax_1(n)+2bx_2(n)+3(a+b)$$
$$=y''(n)$$

因为 a、b 是任意常数，不可能使 3 恒等于 $3(a+b)$，故 $y'(n)\neq y''(n)$，该系统是非线性的。

② 将 $x(n)$ 先移位后变换：

$$T[x(n+M)]=2x(n+M)+3 \qquad (M\text{ 为一整数})$$

将 $x(n)$ 先变换后移位：

$$y(n)=T[x(n)]=2x(n)+3$$
$$y(n+M)=2x(n+M)+3=T[x(n+M)]$$

所以该系统是时不变的。

(b) 系统定义为：

$$y(n)=T[x(n)]=x^2(n)$$

① 线性组合的变换：

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]^2$$
$$=a^2x_1{}^2(n)+b^2x_2^2(n)+2abx_1(n)x_2(n)$$
$$=y'(n)$$

变换的线性组合：

$$aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=ax_1{}^2(n)+bx_2^2(n)=y''(n)$$

显然 $y'(n)\neq y''(n)$，因此该系统是非线性的。

② 将 $x(n)$ 先移位后变换：

$$T[x(n+M)]=x^2(n+M) \qquad (M\text{ 为一整数})$$

将 $x(n)$ 先变换后移位：

$$y(n)=T[x(n)]=x^2(n)$$
$$y(n+M)=x^2(n+M)=T[x(n+M)]$$

所以该系统是时不变的。

(c) 系统定义为：

$$y(n)=T[x(n)]=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$$

① 线性组合的变换：

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{m=-\infty}^{n}[ax_1(m)+bx_2(m)]$$
$$=a\sum_{m=-\infty}^{n}x_1(m)+b\sum_{m=-\infty}^{n}x_2(m)$$
$$=y'(n)$$

变换的线性组合：

$$aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=a\sum_{m=-\infty}^{n}x_1(m)+b\sum_{m=-\infty}^{n}x_2(m)=y''(n)$$

因为 $y'(n)=y''(n)$，因此该系统是线性的。

② 将 $x(n)$ 先移位后变换：

$$T[x(n+M)]=\sum_{m=-\infty}^{n+M}x(m)\qquad (M\text{ 为一整数})$$

将 $x(n)$ 先变换后移位：

$$y(n)=T[x(n)]=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$$
$$y(n+M)=\sum_{m=-\infty}^{n+M}x(m)=T[x(n+M)]$$

所以该系统是时不变的。

2.6　确定下列系统是否因果的？是否稳定的？

(a) $y(n)=g(n)x(n)$，$g(n)$ 有界

(b) $y(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{n}x(m)$

(c) $y(n)=x(n-n_0)$

解

(a) 假设对某一时刻 n_0，当 $n<n_0$ 时，输入信号不改变，即有 $x_1(n)=x_2(n)$。而输出信号 $y_1(n)=g(n)x_1(n)$，$y_2(n)=g(n)x_2(n)$，于是当 $n<n_0$ 时，也有 $y_1(n)=y_2(n)$，即此时输出也不变化，所以是因果系统。

又，由于 $g(n)$ 有界，故对所有 n，都有 $|g(n)|<\infty$。现在设输入信号 $x(n)$ 有界，也即对所有 n，都有 $|x(n)|<\infty$。而输出 $y(n)=g(n)x(n)$，因此对所有 n，也都有 $|y(n)|=|g(n)||x(n)|<\infty$。这就是说，当输入有界时，输出也有界，所以系统是稳定的。

注意,此题不能用 $h(n)$ 来确定其因果性和稳定性,因为这不是一个 LTI 系统。

(b) 由 2.5 (c) 题已经知道这是一个 LTI 系统,因此可以利用 $h(n)$ 来判定。

$$h(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = u(n)$$

也即当 $n<0$ 时,$h(n)=0$,故为因果系统。

而

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

故系统是非稳定的。

(c) 首先验证它是否是一个 LTI 系统。设 $x_1(n)$、$x_2(n)$ 是两个任意序列,a、b 是两个任意常数。

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ax_1(n-n_0) + bx_2(n-n_0) = y'(n)$$

$$aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ax_1(n-n_0) + bx_2(n-n_0) = y''(n)$$

由于 $y'(n) = y''(n)$,所以是线性系统。

又,设 M 为一整数。

$$T[x(n+M)] = x(n+M-n_0)$$

而

$$y(n+M) = x(n-n_0+M) = T[x(n+M)]$$

所以是时不变系统。

于是可以用 $h(n)$ 来判定。

$$h(n) = T[\delta(n)] = \delta(n-n_0)$$

因此 $h(n)$ 只在 $n=n_0$ 时不为 0。所以,如果 $n_0 \geqslant 0$,那么当 $n<0$ 时,$h(n)=0$,系统是因果的 如果 $n_0<0$,由于 $h(n_0)=1$,所以系统是非因果的。

又,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0) = 1 < \infty$$

所以该系统是稳定的。

2.7 确定下列线性时不变系统是否因果的?是否稳定的?

(a) $x(n) = a^n u(n)$,$h(n) = u(n+1)$

(b) $h(n) = (1/2)^n u(n)$

解

(a) 因为

$$h(-1) = u(0) = 1$$

即 $h(n)$ 不满足当 $n<0$ 时为 0,故这个 LTI 系统不是因果的。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n+1) = \sum_{n=-1}^{\infty}1 = \infty$$

故这个 LTI 系统是非稳定的。

(b) 当 $n<0$ 时,因为 $u(n)=0$,故

$$h(n) = (1/2)^n u(n) = 0$$

因此该 LTI 系统是因果的。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-(1/2)} = 2 < \infty$$

故该 LTI 系统是稳定的。

2.8 $x(n)$ 为输入序列,$h(n)$ 为线性时不变系统的单位抽样响应,确定输出序列 $y(n)$。

(a) $x(n) = \{x(-1), x(0), x(1), x(2), x(3)\} = \{0.25, 1, 2, 1, 0.25\}$;$h(n) = u(n)$

(b) $x(n) = \{x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2)\} = \{1, 2, 1, 1, 2\}$;$h(n) = \delta(n-2)$

(c) $x(n) = \{2, -1\}$;$h(n) = \{3, 2, 1\}$

解

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

(a)
$$y(n) = \sum_{k=-1}^{3}x(k)u(n-k) = \begin{cases} 0 & n<-1 \\ \sum_{k=-1}^{n}x(k) & -1\leqslant n\leqslant 3 \\ \sum_{k=-1}^{3}x(k) = 4.5 & n>3 \end{cases}$$

(b)
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-2)x(n-k) = x(n-2)$$

由于 $x(n)$ 定义在 -2 到 2 区间,所以 $y(n)$ 在 0 到 4 区间,依次为:1,2,1,1,2。

(c) 用排序法求这个线性卷积

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

	3	2	1			
-1	2					$y(0)=6$
	-1	2				$y(1)=1$
		-1	2			$y(2)=0$
			-1	2		$y(3)=-1$

2.9 直接计算卷积和，求序列

$$h(n)=\begin{cases}\alpha^n & 0\leqslant n<N\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad 与\quad x(n)=\begin{cases}\beta^{n-n_0} & n\geqslant n_0\\ 0 & n<n_0\end{cases}$$

的卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$。

解

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=n_0}^{\infty}\beta^{k-n_0}h(n-k)$$

(1) 当 $n<n_0$时，$y(n)=0$。

(2) 当 $n_0\leqslant n<n_0+N$ 时，

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{k=n_0}^{n}\beta^{k-n_0}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{k=n_0}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k\\&=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\cdot\frac{(\beta/\alpha)^{n_0}-(\beta/\alpha)^{n+1}}{1-(\beta/\alpha)}\\&=\frac{\alpha^{n-n_0+1}-\beta^{n-n_0+1}}{\alpha-\beta}\qquad(\alpha\neq\beta)\end{aligned}$$

若 $\alpha=\beta$

$$y(n)=\sum_{k=n_0}^{n}\beta^{k-n_0}\alpha^{n-k}=\sum_{k=n_0}^{n}\alpha^{n-n_0}=\alpha^{n-n_0}(n-n_0+1)$$

(3) 当 $n\geqslant n_0+N$ 时，

$$y(n)=\sum_{k=n-N+1}^{n}\beta^{k-n_0}\alpha^{n-k}$$

若 $\alpha\neq\beta$

$$y(n)=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{k=n-N+1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k=\frac{\beta^{n-n_0+1}(\alpha^N\beta^{-N}-1)}{\alpha-\beta}$$

若 $\alpha=\beta$

$$y(n)=\sum_{k=n-N+1}^{n}\alpha^{n-n_0}=N\alpha^{n-n_0}$$

读者可以画出两个序列所在区间的图形来帮助理解 $y(n)$ 的分段表示，以及各表达式中的求和范围。

2.10 已知 LTI 系统的单位抽样响应为

$$h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)-3\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

求单位阶跃响应 (即当输入为单位阶跃信号时的输出) $y(n)$。

解

该系统的单位阶跃响应

$$y(n)=h(n)*u(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)u(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(k)+2\delta(k-1)-3\delta(k-2)+\delta(k-3)]u(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)u(n-k)+2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-1)u(n-k)$$

$$-3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-2)u(n-k)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k-3)u(n-k)$$

$$=u(n)+2u(n-1)-3u(n-2)+u(n-3)$$

2.11 试确定下列序列的傅里叶变换。

(a) $x(n)=0.5\delta(n+1)+0.5\delta(n-1)$

(b) $x(n)=a^n u(n) \quad (0<a<1)$

(c) $x(n)=u(n+3)-u(n-4)$

解

离散信号的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}$$

(a) $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[0.5\delta(n+1)+0.5\delta(n-1)]e^{-jn\omega}$$

$$=0.5\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n+1)e^{-jn\omega}+0.5\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-1)e^{-jn\omega}$$

$$=0.5e^{j\omega}+0.5e^{-j\omega}=\cos\omega$$

(b) $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n u(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}$$

上式中的级数收敛是因为 $|ae^{-j\omega}|=a<1$。

(c) $$x(n)=u(n+3)-u(n-4)=\begin{cases}1 & -3\leqslant n\leqslant 3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

所以

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=-3}^{3}(e^{-j\omega})^n$$

$$=\frac{(e^{-j\omega})^{-3}-(e^{-j\omega})^{4}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{j3\omega}-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

2.12 令 $x(n)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 表示一个序列及其傅里叶变换，利用 $X(e^{j\omega})$ 表示下面各序列的傅里叶变换。

(a) $bx(n)$ （b 为任意常数）

(b) $x(n-n_0)$ （n_0 为整数）

(c) $g(n)=x(2n)$

(d) $g(n)=\begin{cases} x(n/2) & (n\ 为偶数) \\ 0 & (n\ 为奇数) \end{cases}$

解

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

(a) $$X_a(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} bx(n)e^{-jn\omega} = b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = bX(e^{j\omega})$$

(b) $$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-jn\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j(k+n_0)\omega}$$

$$= e^{-jn_0\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jk\omega} = e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$$

(c) $$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-jn\omega} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k为偶数}}^{\infty} x(k)e^{-j\frac{k}{2}\omega}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[x(k)+(-1)^k x(k)]e^{-j\frac{k}{2}\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jk\frac{\omega}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(e^{j\pi})^k e^{-jk\frac{\omega}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jk(\frac{\omega}{2}-\pi)}$$

$$= \frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}X[e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)}]$$

$$= \frac{1}{2}[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(-e^{j\frac{\omega}{2}})]$$

(d) $$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-jn\omega} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} g(2r)e^{-j2r\omega} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)e^{-jr2\omega} = X(e^{j2\omega})$$

2.13 一个 LTI 系统的单位抽样响应为

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

求其频率响应 $H(e^{j\omega})$。设另一系统的频率响应为 $1/H(e^{j\omega})$，单位抽样响应为 $h'(n)$，试证明

$$h(n) * h'(n) = \delta(n)$$

解

$$H(e^{j\omega}) = \mathscr{F}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-jn\omega} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}/2} = \frac{2e^{j\omega}}{2e^{j\omega}-1}$$

因为

$$\mathscr{F}[h'(n)] = 1/H(e^{j\omega})$$

故根据傅里叶变换的卷积特性,有

$$\mathscr{F}[h(n) * h'(n)] = H(e^{j\omega}) \cdot \left(\frac{1}{H(e^{j\omega})}\right) = 1$$

又由于

$$\mathscr{F}[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)e^{-jn\omega} = 1$$

故比较上面二式即有

$$h(n) * h'(n) = \delta(n)$$

2.14　求下列各序列的 z 变换,并指出其零极点和收敛域。

(a) $\delta(n) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)$　　　　(b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n)$

(c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n) - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$　　　　(d) $x(n) = \begin{cases} 3 & 1 \leqslant n \leqslant 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

解

z 变换定义式　　$X(z) = \mathscr{Z}[x(n)] = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

(a)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)z^{-n}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{1}{1-z^{-1}/2} = \frac{4z-1}{2z-1}$$

零点:$X(z)$ 分子的零点,即 $z=1/4$;

极点:$X(z)$ 分母的零点,即 $z=1/2$;

由导出 $X(z)$ 时幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$ 收敛的条件 $|z^{-1}/2| < 1$,即得到 $X(z)$ 的收敛域:$|z| > 1/2$。

(b)
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}z^{-n}$$
$$=\frac{1}{1-z^{-1}/3}=\frac{3z}{3z-1}\qquad(|z^{-1}/3|<1)$$

零点：$z=0$；

极点：$z=1/3$；

收敛域：$|z|>1/3$。

(c)
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)\right]z^{-n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)z^{-n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}z^{-n}-\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}$$
$$=\frac{1}{1-z^{-1}/3}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}z^{n}\qquad(|z^{-1}/3|<1)$$
$$=\frac{3z}{3z-1}+1-\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^{n}$$
$$=\frac{3z}{3z-1}+1-\frac{1}{1-2z}\qquad(|2z|<1)$$
$$=\frac{5z-12z^{2}}{(3z-1)(1-2z)}$$

零点：$z=0$，$z=5/12$；

极点：$z=1/3$，$z=1/2$；

收敛域：$1/3<|z|<1/2$。

(d)
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=1}^{4}3z^{-n}$$
$$=3(z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$$
$$=3\,\frac{z^{3}+z^{2}+z+1}{z^{4}}=3\,\frac{(z^{2}+1)(z+1)}{z^{4}}$$

零点：$z=-1$，$z=\pm\mathrm{j}$；

极点：$z=0$（四阶）；

收敛域：$|z|>0$。

2.15　已知序列 $x(n)$ 的 z 变换为 $X(z)$，收敛域为 $R_{-}<|z|<R_{+}$，用 $X(z)$ 表示下面各序列的 z 变换，并指出各自的收敛域。

(a) $x_1(n)=x(n-1)$　　(b) $x_2(n)=3x(n+2)$

(c) $x_3(n)=2x(-n)$　　(d) $x_4(n)=-2^{n}x(n)$

解

(a) 由 z 变换的移位性质，可知

$$X_1(z)=z^{-1}X(z)$$

收敛域：$R_-<|z|<R_+$，且 $z\neq 0$。

(b) 由 z 变换的线性和移位性质，有

$$X_2(z)=3z^2X(z)$$

收敛域：$R_-<|z|<R_+$，且 $z\neq\infty$。

(c) 由 z 变换的线性和翻转性质，有

$$X_3(z)=3X(1/z)$$

收敛域：$(1/R_+)<|z|<(1/R_-)$。

(d) 由乘以指数序列的 z 变换，可知

$$X_4(z)=-X(z/2)$$

收敛域：$2R_-<|z|<2R_+$。

2.16 设 $F(z)$ 是因果序列 $f(n)$ 的 z 变换，求下列各情况下的 $f(0)$ 和 $f(\infty)$。

(a) $F(z)=(2z-1)/(z-1)$

(b) $F(z)=(e^{-aT}-1)z/[z^2-(1+e^{-aT})z+e^{-aT}]$　　(a、T 均为正数)

解

(a) 由初值定理

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{2-z^{-1}}{1-z^{-1}}=2$$

又，因为 $F(z)$ 只在 $z=1$ 有一阶极点，故可以用终值定理：

$$f(\infty)=\lim_{z\to1}[(z-1)F(z)]=(2z-1)\Big|_{z=1}=1$$

(b) 由初值定理

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{(e^{-aT}-1)z^{-1}}{1-(1+e^{-aT})z^{-1}+e^{-aT}z^{-2}}=0$$

又，由于

$$F(z)=\frac{(e^{-aT}-1)z}{z^2-(1+e^{-aT})z+e^{-aT}}=\frac{(e^{-aT}-1)z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

有两个一阶极点：$z=1$ 在单位圆上，$z=e^{-aT}<1$ 在单位圆内，故可以用终值定理：

$$f(\infty)=\lim_{z\to1}[(z-1)F(z)]=\frac{(e^{-aT}-1)z}{z-e^{-aT}}\Big|_{z=1}=-1$$

2.17 试利用 $x(n)$ 的 z 变换求 $n^2x(n)$ 的 z 变换。

解

利用 z 变换的性质：

$$\mathscr{Z}[nx(n)] = -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$$

现在令

$$X_1(z) = \mathscr{Z}[nx(n)]$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[n^2x(n)] &= -z\frac{\mathrm{d}X_1(z)}{\mathrm{d}z} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}\right)\\ &= -z\left[-\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} - z\frac{\mathrm{d}^2X(z)}{\mathrm{d}z^2}\right]\\ &= z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} + z^2\frac{\mathrm{d}^2X(z)}{\mathrm{d}z^2}\end{aligned}$$

收敛域与 $X(z)$ 的收敛域相同。

2.18 证明，若 $0<|a|<1$ 及 $x(n)=a^{|n|}$，则 $X(z)=\dfrac{z(1-a^2)}{-az^2+(1+a^2)z-a}$，并指出其收敛域。

证

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a^nz^n + \sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(az)^n - 1 + \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad (|az^{-1}|<1)\\ &= \frac{1}{1-az} - 1 + \frac{z}{z-a} \qquad (|az|<1)\\ &= \frac{z-a-z+az^2+a-a^2z+z-az^2}{(1-az)(z-a)}\\ &= \frac{z(1-a^2)}{-az^2+(1+a^2)z-a}\end{aligned}$$

收敛域：

$$|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

2.19 求 $X(z)$ 在所有可能收敛区域的反变换。

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

解

$X(z)$ 的极点：$z=1$（二阶），$z=2$，故收敛域有下面 3 种情况：

(1) $|z|<1$

(2) $1<|z|<2$

(3) $|z|>2$

令

$$X_1(z)=X(z)z^{n-1}=\frac{z^n}{(z-1)^2(z-2)}$$

显然这里 $m=1$，分界点为 $1-m=0$。

(1) 积分围线 C 在 $|z|<1$ 内。

$n\geqslant 0$：$X_1(z)$ 在 C 内（包括 C 上）解析，故 $x(n)=0$；

$n<0$：$X_1(z)$ 在 C 外有极点 $z=1$（二阶）和 $z=2$，故

$$\begin{aligned}x(n)&=-\{\mathrm{Res}[X_1(z),z=1]+\mathrm{Res}[X_1(z),z=2]\}\\&=-\left\{\frac{1}{1!}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^n}{z-2}\right]_{z=1}+\left[\frac{z^n}{(z-1)^2}\right]_{z=2}\right\}\\&=-[-(n+1)+2^n]=n+1-2^n\end{aligned}$$

因此

$$x(n)=(n+1-2^n)u(-n-1)$$

(2) 围线 C 在 $1<|z|<2$ 内。

$n\geqslant 0$：$X_1(z)$ 在 C 内有二阶极点 $z=1$，故

$$x(n)=\mathrm{Res}[X_1(z),z=1]=-(n+1)$$

$n<0$：$X_1(z)$ 在 C 外有极点 $z=2$，故

$$x(n)=-\mathrm{Res}[X_1(z),z=2]=-2^n$$

因此

$$x(n)=-(n+1)u(n)-2^n u(-n-1)$$

(3) 积分围线 C 在 $|z|>2$ 内。

$n\geqslant 0$：$X_1(z)$ 在 C 内有极点 $z=1$（二阶）和 $z=2$，故

$$x(n)=\mathrm{Res}[X_1(z),z=1]+\mathrm{Res}[X_1(z),z=2]=-(n+1)+2^n$$

$n<0$：$X_1(z)$ 在围线 C 外（包括 C 上）解析，故 $x(n)=0$。

因此

$$x(n)=[2^n-(n+1)]u(n)$$

2.20 已知 $X(z)=\dfrac{1}{1-z}$。

(a) 若 $|z|>1$,求 $x(n)$。

(b) 若 $|z|<1$,求 $x(n)$。

解

(a) $$X(z)=\frac{1}{1-z}=-\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=-z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^{n}=-z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}$$

根据 z 变换的定义式以及 z 变换的移位性质,可知

$$x(n)=-u(n-1)$$

(b) $$X(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}=\sum_{n=0}^{-\infty}z^{-n}$$

所以

$$x(n)=u(-n)$$

2.21 有一线性时不变系统的单位抽样响应为 $h(n)$,输入信号为 $x(n)$,若

$$x(n)=\begin{cases}3^{-n} & n\geqslant 0\\ 2^{n} & n<0\end{cases}\qquad h(n)=\begin{cases}2^{-n} & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

用两种方法求该系统的输出信号 $y(n)$:(a) 直接求线性卷积;(b) 用 z 变换求。

解

(a) $$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}x(n-k)$$

当 $n<0$,对于 $k\geqslant 0$,由于 $n-k<0$,故

$$x(n-k)=2^{n-k}$$

所以

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}2^{n-k}=2^{n}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-2k}=2^{n}\frac{1}{1-2^{-2}}=\frac{4}{3}2^{n}=2^{n+2}/3$$

当 $n\geqslant 0$, $$y(n)=\sum_{k=0}^{n}2^{-k}3^{-(n-k)}+\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-k}2^{n-k}$$

$$=3^{-n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{k}+2^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-2k}$$

$$=3^{-n}\frac{1-(3/2)^{n+1}}{1-(3/2)}+2^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}(-2)\left[1-3^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+2^{n}\left[\frac{1}{1-(1/4)}-\frac{1-(1/4)^{n+1}}{1-(1/4)}\right]$$

$$=-2\times 3^{-n}+3\times 2^{-n}+(4/3)\times 2^{n}-(4/3)\times 2^{n}+(1/3)\times 2^{-n}$$

$$=-2\times 3^{-n}+(10/3)\times 2^{-n}$$

故

$$y(n)=[(10/3)\times 2^{-n}-2\times 3^{-n}]u(n)+(2^{n+2}/3)u(-n-1)$$

(b)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}2^{n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1}/3)^{n}$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^{n}+\frac{1}{1-z^{-1}/3}\qquad(|z^{-1}/3|<1)$$

$$=-1+\frac{1}{1-z/2}+\frac{3z}{3z-1}\qquad(|z/2|<1)$$

$$=\frac{5z}{(2-z)(3z-1)}$$

由式中幂级数的收敛条件可以得到 $X(z)$ **的收敛域**：$1/3<|z|<2$。

又，

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-2^{-1}z^{-1}}=\frac{2z}{2z-1}\qquad(|1/2z|<1)$$

由式中幂级数的收敛条件可以得到 $H(z)$ **的收敛域**：$|z|>1/2$。

于是有：

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{10z^{2}}{(2-z)(3z-1)(2z-1)}$$

收敛域：$1/2<|z|<2$。

下面用留数法求 $Y(z)$ **的反变换** $y(n)$。

令

$$Y_1(z)=Y(z)z^{n-1}=\frac{10z^{n+1}}{(2-z)(3z-1)(2z-1)}$$

这里 $m=2$，**故分界点为** $1-m=-1$。**积分围线** C **在** $Y(z)$ **的收敛域内。**

当 $n<-1$，**因** $Y_1(z)$ **在** C **外有极点** $z=2$，**因此**

$$y(n)=-\mathrm{Res}[Y_1(z),z=2]=\left.\frac{10z^{n+1}}{(3z-1)(2z-1)}\right|_{z=2}=2^{n+2}/3$$

当 $n\geqslant -1$，**因** $Y_1(z)$ **在** C **内有极点** $z=1/2$ **和** $z=1/3$，**因此**

$$y(n)=\mathrm{Res}[Y_1(z),z=1/2]+\mathrm{Res}[Y_1(z),z=1/3]$$

$$=\left.\frac{10z^{n+1}}{2(2-z)(3z-1)}\right|_{z=1/2}+\left.\frac{10z^{n+1}}{3(2-z)(2z-1)}\right|_{z=1/3}$$

$$=(10/3)\times 2^{-n}-2\times 3^{-n}$$

于是，

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \frac{2^{n+2}}{3}u(-n-2) + \left[\frac{10}{3}2^{-n} - 2\times 3^{-n}\right]u(n+1) \\
&= \frac{2^{n+2}}{3}u(-n-1) - \frac{2^{(-1)+2}}{3} + \left[\frac{10}{3}2^{-n} - 2\times 3^{-n}\right]u(n) \\
&\quad + \left[\frac{10}{3}2^{-(-1)} - 2\times 3^{-(-1)}\right] \\
&= \frac{2^{n+2}}{3}u(-n-1) + \left[\frac{10}{3}2^{-n} - 2\times 3^{-n}\right]u(n)
\end{aligned}
$$

(a)与(b)的结果相同。

2.22 已知 $X(z)=\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{1/2}\ (z\neq\infty)$,求 $x(n)$。

解

$$X(z) = \mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!} + \mathrm{e}^{1/2} = \mathrm{e}^{1/2}z^{0} + \sum_{n=0}^{-\infty}\frac{1}{(-n)!}z^{-n}$$

所以

$$x(n)=\mathrm{e}^{1/2}\delta(n)+\frac{1}{(-n)!}u(-n)$$

2.23 令 $x(n)$ 是一因果序列,又设 $x(0)\neq 0$,试证明在 $z=\infty$ 处 $X(z)$ 没有极点和零点。

证

由于 $x(n)$ 为因果序列,故由初值定理有:

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=x(0)$$

而 $x(0)$ 是一个不为 0 的有限数,即 $X(\infty)=x(0)$ 既不等于 0 也不等于 ∞,这就是说,在 $z=\infty$ 处 $X(z)$ 既无零点也无极点。

2.24 研究一线性时不变系统,该系统的输入和输出满足差分方程:

$$y(n)=x(n)-\frac{1}{2}y(n-1)$$

从下列诸项中选取两个满足该系统的单位抽样响应。

(a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$ (b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)$ (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n-1)$

(d) $2^{n}u(n)$ (e) $n^{1/2}u(n)$ (f) $(-2)^{n}u(-n-1)$

(g) $2^{-n}u(n)$ (h) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n-1)$ (i) $-(-2)^{n}u(-n-1)$

解

对差分方程两边进行 z 变换:

$$Y(z)=X(z)-(1/2)z^{-1}Y(z)$$

该 LTI 系统的系统函数：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1+z^{-1}/2}=\frac{z}{z+1/2}$$

极点为 $z=-1/2$，因此 $H(z)$ 的收敛域或者为 $|z|>1/2$，或者为 $|z|<1/2$。

对于 $|z|>1/2$，有

$$h(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

与 (a) 相同，因此 (a) 是满足该系统的单位抽样响应。

对于 $|z|<1/2$，有

$$h(n)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

与 (h) 相同，故 (h) 也是满足该系统的单位抽样响应。

第3章
离散傅里叶变换

3.1 已知：$x(n)=\begin{cases} n^2 & 0\leqslant n\leqslant 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，$h(n)=R_5(n-1)$。以 $N=6$ 为周期来延拓这两个序列，分别得到周期序列 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{h}(n)$，求这两个周期序列的周期卷积 $\tilde{y}_N(n)$（只需求出 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 区间的值）。

解

$$\tilde{y}_N(n)=\sum_{m=0}^{5} x(m)\tilde{h}(n-m)$$

$\tilde{h}(n)$ 的主值序列为 0，1，1，1，1，1。

m								0	1	2	3	4	5					
$x(m)$								0	1	4	9	0	0					
$\tilde{h}(-m)$	…	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	…	

将 $\tilde{h}(-m)$ 逐次向右移位就得到各 $\tilde{h}(n-m)$，在主值区间与 $x(m)$ 对应相乘并相加就得到周期卷积。下面是周期卷积在主值区间的各个值。

n	0	1	2	3	4	5
$\tilde{y}_N(n)$	14	13	10	5	14	14

3.2 如果 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的周期序列，则它也是周期为 $2N$ 的周期序列。把 $\tilde{x}(n)$ 看作周期为 N 的周期序列，令 $\tilde{X}_1(k)$ 表示其 DFS，再把 $\tilde{x}(n)$ 看作周期为 $2N$ 的周期序列，再令 $\tilde{X}_2(k)$ 表示其 DFS，试利用 $\tilde{X}_1(k)$ 确定 $\tilde{X}_2(k)$。

解

$$\tilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}$$

而
$$\tilde{X}_2(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{kn}+\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n+N)W_{2N}^{k(n+N)}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{N}^{nk/2}+\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}\cdot W_{2N}^{kN}$$
$$=\tilde{X}_1\left(\frac{k}{2}\right)+(W_{2N}^{N})^{k}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{N}^{nk/2}$$
$$=\tilde{X}_1\left(\frac{k}{2}\right)+(-1)^{k}\tilde{X}_1\left(\frac{k}{2}\right)$$
$$=\begin{cases}2\tilde{X}_1\left(\frac{k}{2}\right) & k\text{ 为偶数}\\ 0 & k\text{ 为奇数}\end{cases}$$

3.3 研究两个周期序列 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$。$\tilde{x}(n)$ 的周期为 N，$\tilde{y}(n)$ 的周期为 M。序列 $\tilde{w}(n)$ 定义为 $\tilde{w}(n)=\tilde{x}(n)+\tilde{y}(n)$。

(a) 试证明 $\tilde{w}(n)$ 是周期性的，NM 是它的周期。

(b) 令 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 为 $\tilde{X}(k)$，$\tilde{y}(n)$ 的 DFS 为 $\tilde{Y}(k)$，试利用 $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{Y}(k)$ 表示 $\tilde{W}(k)$。

解

(a) 因为
$$\tilde{w}(n+MN)=\tilde{x}(n+MN)+\tilde{y}(n+NM)$$
$$=\tilde{x}(n)+\tilde{y}(n)=\tilde{w}(n)$$
所以 $\tilde{w}(n)$ 是以 MN 为周期的周期序列。

(b)
$$\tilde{W}(k)=\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{w}(n)W_{MN}^{kn}$$
$$=\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{kn}+\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{y}(n)W_{MN}^{kn}$$
式中第一项：
$$\sum_{n=0}^{MN-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{kn}=\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{n=rN}^{(r+1)N-1}\tilde{x}(n)W_{MN}^{kn}$$
$$=\sum_{r=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{N-1}\tilde{x}(s+rN)W_{MN}^{k(s+rN)}$$
$$=\sum_{r=0}^{M-1}W_{MN}^{krN}\sum_{s=0}^{N-1}\tilde{x}(s)W_{N}^{s\frac{k}{M}}$$

$$= \sum_{r=0}^{M-1} W_M^{kr} \widetilde{X}\left(\frac{k}{M}\right)$$

$$= \widetilde{X}\left(\frac{k}{M}\right) \sum_{r=0}^{M-1} W_M^{rk}$$

$$= \begin{cases} M \cdot \widetilde{X}\left(\frac{k}{M}\right) & k = lM \\ 0 & k \neq lM \end{cases} \quad (l \text{ 为整数})$$

同理可得到式中第二项：

$$\sum_{n=0}^{MN-1} \widetilde{y}(n) W_{MN}^{kn} = \widetilde{Y}\left(\frac{k}{N}\right) \sum_{r=0}^{N-1} W_N^{rk}$$

$$= \begin{cases} N \cdot \widetilde{Y}\left(\frac{k}{N}\right) & k = lN \\ 0 & k \neq lN \end{cases} \quad (l \text{ 为整数})$$

于是可以得到

$$\widetilde{W}(k) = \begin{cases} M \cdot \widetilde{X}\left(\frac{k}{M}\right) + N \cdot \widetilde{Y}\left(\frac{k}{N}\right) & k = lM \text{ 并且 } k = mN \\ M \cdot \widetilde{X}\left(\frac{k}{M}\right) & k = lM \text{ 并且 } k \neq mN \\ N \cdot \widetilde{Y}\left(\frac{k}{N}\right) & k \neq lM \text{ 并且 } k = mN \\ 0 & k \neq lM \text{ 并且 } k \neq mN \end{cases} \quad (l、m \text{ 均为整数})$$

3.4　计算下列有限长序列 $x(n)$ 的 DFT，假设长度为 N。

(a) $x(n) = \delta(n)$

(b) $x(n) = \delta(n - n_0)$　　$0 < n_0 < N$

(c) $x(n) = a^n$　　$0 \leqslant n \leqslant N-1$

(d) $x(n) = \{1, 2, -3, -1\}$

解

(a) $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{nk} = W_N^0 = 1 \qquad (0 \leqslant k \leqslant N-1)$$

(b) $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) W_N^{nk} = W_N^{n_0 k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant N-1)$$

(c) $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} (aW_N^k)^n$$

$$= \frac{1 - (aW_N^k)^N}{1 - aW_N^k} = \frac{1 - a^N}{1 - aW_N^k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant N-1)$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)}\quad X(k) &= \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{nk} \\
&= W_4^0 + 2W_4^k - 3W_4^{2k} - W_4^{3k} \\
&= 1 + 2W_4^k - 3W_2^k - W_4^{3k} \\
&= 1 + 2(-\mathrm{j})^k - 3(-1)^k - \mathrm{j}^k \qquad (0 \leqslant k \leqslant 3)
\end{aligned}$$

3.5　长度 $N=4$ **的序列** $x(n)$ **如图** P3.5 **所示，试画出下面各序列的图形。**

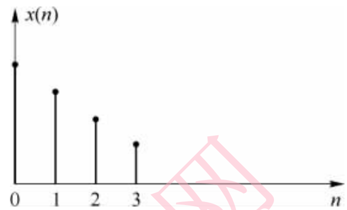


图 P3.5

(a) $x_1(n) = x((n)_5)$

(b) $x_2(n) = \tilde{x}(n+3)R_5(n)$

(c) $x_3(n) = x((n-2)_4)R_4(n)$

(d) $x_4(n) = x((-2)_4)R_4(n)$

(e) $x_5(n) = x((n)_6)R_6(n)$

解

参见图 T3.5 (a) ~ (e)。

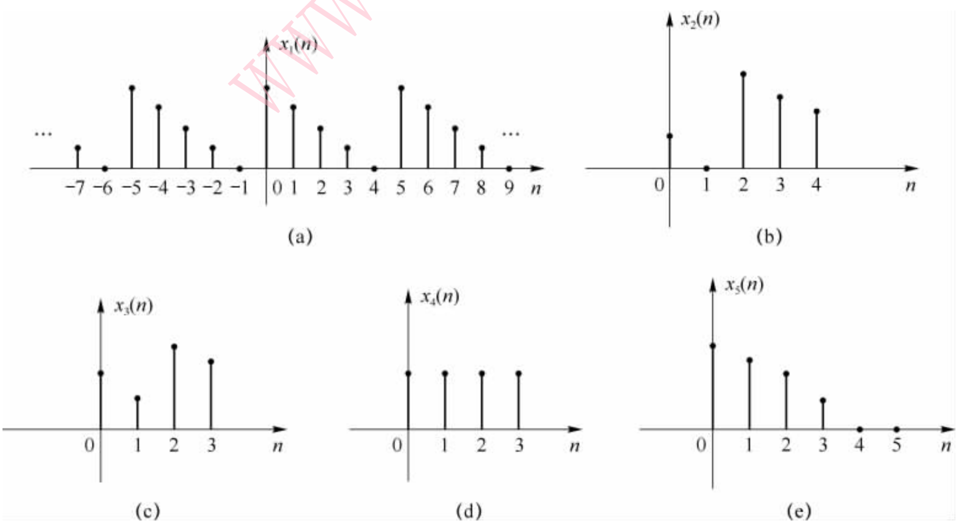


图 T3.5

3.6 已知 $x_1(n)=\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$x_2(n)=\delta(n-2)$。将这两个序列以周期 $N=6$ 分别作周期延拓得到 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$，求这两个周期序列的周期卷积在主值区间的值。

解

$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{5}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$\tilde{x}_2(n)$ 的主值序列为：0,0,1,0,0,0。

m								0	1	2	3	4	5					
$\tilde{x}_1(m)$								a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5					
$\tilde{x}_2(-m)$	…0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1…

将 $\tilde{x}_2(-m)$ 逐次向右移位就得到各 $\tilde{x}_2(n-m)$，在主值区间与 $\tilde{x}_1(m)$ 对应相乘并相加就得到周期卷积。下面是周期卷积在主值区间的各个值。

n	0	1	2	3	4	5
$\tilde{y}(n)$	a_4	a_5	a_0	a_1	a_2	a_3

3.7 令 $X(k)$ 表示 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT，$X(k)$ 本身也是一个 N 点序列。如果计算 $X(k)$ 的 DFT 得到一序列 $x_1(n)$，试用 $x(n)$ 表示 $x_1(n)$。

解

$$\begin{aligned}x_1(n)&=\mathrm{DFT}[X(k)]=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{kn}\\&=\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{r=0}^{N-1}x(r)W_N^{rk}]W_N^{kn}\\&=\sum_{r=0}^{N-1}x(r)\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(r+n)}\end{aligned}$$

上式中 $0\leqslant n\leqslant N-1$。

而

$$\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(r+n)}=\begin{cases}N & r+n=lN\\0 & r+n\neq lN\end{cases}\quad (l\text{ 为整数})$$

所以

$$x_1(n)=x((lN-n))_N R_N(n)\cdot N=N\cdot x((-n))_N R_N(n)$$

3.8　若 $x(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]$**,求证** $\mathrm{IDFT}[x(k)]=\frac{1}{N}X((-n)_N)R_N(n)$。

证

$$\mathrm{IDFS}[\tilde{x}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}(k)W_N^{-kn}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{X}(r)W_N^{-rk}\right]W_N^{-kn}$$
$$=\frac{1}{N^2}\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{X}(r)\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(-r-n)}$$

而

$$\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(-r-n)}=\begin{cases}N & -r-n=lN\\ 0 & -r-n\neq lN\end{cases}\quad (l\text{ 为整数})$$

所以

$$\mathrm{IDFS}[\tilde{x}(k)]=\frac{1}{N^2}\tilde{X}(-lN-n)\cdot N=\frac{1}{N}\tilde{X}(-n)$$

于是

$$\mathrm{IDFT}[x(k)]=\frac{1}{N}\tilde{X}(-n)R_N(n)=\frac{1}{N}X((-n)_N)R_N(n)$$

3.9　令 $X(k)$ **表示** N **点序列** $x(n)$ **的** N **点** DFT**,试证明:**

(a) **如果** $x(n)$ **满足关系式** $x(n)=-x(N-1-n)$**,则** $X(0)=0$。

(b) **当** N **为偶数时,如果** $x(n)=x(N-1-n)$**,则** $X\left(\frac{N}{2}\right)=0$。

证

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\qquad (k=0,1,\cdots,N-1)$$

(a)

$$X(0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)$$

N **为偶数:**

$$X(0)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(n)+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(N-1-n)$$
$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)+x(N-1-n)]$$
$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)-x(n)]=0$$

N 为奇数：

$$X(0)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}x(n)+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}x(N-1-n)+x\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

$$=x\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}[x(n)+x(N-1-n)]$$

$$=x\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}[x(n)-x(n)]$$

$$=x\left(\frac{N-1}{2}\right)+0=x\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

而 $x(n)$ 中间的一项应当满足：

$$x\left(\frac{N-1}{2}\right)=-x\left(N-1-\frac{N-1}{2}\right)=-x\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

因此必然有

$$x\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$$

这就是说，当 N 为奇数时，也有 $X(0)=0$。

(b) 当 N 为偶数：

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n\frac{N}{2}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)(-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)(-1)^n+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(N-1-n)(-1)^{N-1-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)(-1)^n+(-1)^{N-1}\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)(-1)^{-n}$$

当 N 为偶数时，$N-1$ 为奇数，故 $(-1)^{N-1}=-1$；又由于 $(-1)^{-n}=(-1)^n$，故有

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)(-1)^n-\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)(-1)^n=0$$

3.10 已知序列 $x_1(n)=a^nu(n)\ (0<a<1)$，其 z 变换为 $X_1(z)$；又知序列 $x(n)$ 定义在区间 $0\leqslant n\leqslant N-1$，并且 $X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$。如果 $X(k)$ 与 $X_1(z)$ 之间满足关系

$$X(k)=X_1(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}\qquad(k=0,1,\cdots,N-1)$$

试求序列 $x(n)$，并且将 $x(n)$ 表示为 a^n 的函数。

解

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_1(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}\right] W_N^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)\, z^{-m}\Big|_{z=W^{]}KG*3]-k_N}\right] W_N^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)\, W_N^{km} W_N^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)}
\end{aligned}
$$

因为

$$
\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} N & m-n=rN \\ 0 & m-n\neq rN \end{cases} \quad (r\ \text{为整数})
$$

再考虑到 m **为非负整数，于是有**

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{\infty} x_1(n+rN)\cdot N \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} a^{n+rN} = a^n \sum_{r=0}^{\infty}(a^N)^r \\
&= \frac{a^n}{1-a^N} \qquad (0\leqslant n\leqslant N-1)
\end{aligned}
$$

由于 $0<a<1$**，故有** $0<a^N<1$**，上式中幂级数的收敛条件是满足的。**

3.11　设 $\tilde{x}(n)$ **是周期为** N **的周期序列，线性时不变系统** $H(z)$ **的单位抽样响应** $h(n)$ **是定义在** $0\leqslant n\leqslant N-1$ **区间的有限长序列。如果** $\tilde{x}(n)$ **是系统** $H(z)$ **的输入信号，求证输出信号** $\tilde{y}(n)$ **为**

$$
\tilde{y}(n) = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} H(W_N^{-k})\,\tilde{X}(k)\, W_N^{-nk}
$$

证

系统函数 $H(z)$ **是冲激响应** $h(n)$ **的** z **变换：**

$$
H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\, z^{-n}
$$

而有限长序列 $h(n)$ **的 DFT 为：**

$$
\begin{aligned}
H(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) (W_N^{-k})^{-n} \\
&= H(z)\Big|_{z=W_N^{-k}} = H(W_N^{-k})
\end{aligned}
$$

由于 $h(n)$ 是 LTI 系统,所以输出为

$$\tilde{y}(n) = h(n) * \tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)\tilde{x}(n-m)$$

如果将 $h(n)$ 作以 N 为周期的周期延拓得到 $\tilde{h}(n)$,那么上式说明,$\tilde{y}(n)$ 是周期序列 $\tilde{h}(n)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 的周期卷积,故它们的 DFS 有:

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{H}(k)\tilde{X}(k)$$

于是

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}(n) &= \mathrm{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}(k) W_N^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(k)\tilde{X}(k) W_N^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\tilde{X}(k) W_N^{-nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(W_N^{-k})\tilde{X}(k) W_N^{-nk}
\end{aligned}
$$

证毕。

3.12 长度为 8 的有限长序列 $x(n)$ 的 8 点 DFT 为 $X(k)$,长度为 16 的一个新序列定义为

$$
y(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{2}\right) & n = 0,2,\cdots,14 \\ 0 & n = 1,3,\cdots,15 \end{cases}
$$

试用 $X(k)$ 来表示 $Y(k) = \mathrm{DFT}[y(n)]$。

解

$$
\begin{aligned}
Y(k) &= \sum_{n=0}^{15} y(n) W_{16}^{nk} \\
&= \sum_{r=0}^{7} y(2r) W_{16}^{2rk} + \sum_{r=0}^{7} y(2r+1) W_{16}^{(2r+1)k} \\
&= \sum_{r=0}^{7} x(r) W_8^{rk} \qquad (k = 0,1,\cdots,15)
\end{aligned}
$$

而

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{nk}\qquad(k=0,1,\cdots,7)$$

因此,当 $k=0,1,\cdots,7$ 时,$Y(k)=X(k)$ 当 $k=8,9,\cdots,15$ 时,令 $k=l+8$ $(l=0,1,\cdots,7)$,得到:

$$Y(l+8)=\sum_{r=0}^{7}x(r)W_8^{r(l+8)}=\sum_{r=0}^{7}x(r)W_8^{rl}=X(l)$$

即

$$Y(k)=X(k-8)$$

于是有

$$Y(k)=\begin{cases}X(k) & k=0,1,\cdots,7\\ X(k-8) & k=8,9,\cdots,15\end{cases}$$

3.13 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列,并且 $X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$。现将 $x(n)$ 的每相邻两点之间补进 $r-1$ 个零值点,得到一个长度为 rN 的有限长序列 $y(n)$,即有

$$y(n)=\begin{cases}x(n/r) & n=ir,i=0,1,2,\cdots,N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

试求 $\mathrm{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 之间的关系。

解

$$\begin{aligned}Y(k)&=\mathrm{DFT}[y(n)]=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)W_{rN}^{nk}\\&=\sum_{i=0}^{N-1}y(ir)W_{rN}^{irk}\\&=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ik}\qquad(k=0,1,\cdots,rN-1)\end{aligned}$$

当 $k=0,1,\cdots,N-1$:

$$Y(k)=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ik}=X(k)$$

当 $k=l+mN$,这里 $l=0,1,\cdots,N-1$,$m=1,2,\cdots,r-1$:

$$\begin{aligned}Y(k)&=Y(l+mN)=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{i(l+mN)}\\&=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{il}=X(l)=X(k-mN)\end{aligned}$$

总结起来,有

$$Y(k)=\mathrm{DFT}[y(n)]=X((k))_N\qquad(k=0,1,\cdots,rN-1)$$

3.14 已知 $x_1(n)=\{1,2,3,4\}$，$x_2(n)=\{1,0,1,0\}$，求 $x_3(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)$，并求 $\tilde{x}_1(n)$ 与 $\tilde{x}_2(n)$ 的周期卷积 $\tilde{x}_3(30)$。

解

下面用矩阵乘法求循环卷积

$$x_3(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)$$

$$\begin{pmatrix} x_3(0)\\ x_3(1)\\ x_3(2)\\ x_3(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2(0) & x_2(3) & x_2(2) & x_2(1)\\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(3) & x_2(2)\\ x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & x_2(3)\\ x_2(3) & x_2(2) & x_2(1) & x_2(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0)\\ x_1(1)\\ x_1(2)\\ x_1(3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\4\\6\end{pmatrix}$$

而

$$\tilde{x}_3(30)=x_3((30)_4)=x_3(2)=4$$

3.15 已知 $x_1(n)=\begin{cases}-n & 0\leqslant n\leqslant 5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$x_2(n)=\begin{cases}n+1 & 0\leqslant n\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求循环卷积 $x_3(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)$，令 $N=6$。

(a) 用同心圆法

(b) 用矩阵乘法

解

$$x_1(n)=\{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$$

$$x_2(n)=\{1,2,3,0,0,0\}$$

根据图 T3.15 可以求得

$$x_3(n)=\{-22,-16,-4,-10,-16,-22\}$$

(a)

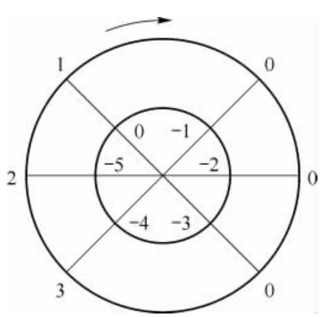


图 T3.15

(b)
$$\begin{bmatrix} x_3(0) \\ x_3(1) \\ x_3(2) \\ x_3(3) \\ x_3(4) \\ x_3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(5) & x_2(4) & x_2(3) & x_2(2) & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(5) & x_2(4) & x_2(3) & x_2(2) \\ x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & x_2(5) & x_2(4) & x_2(3) \\ x_2(3) & x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & x_2(5) & x_2(4) \\ x_2(4) & x_2(3) & x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & x_2(5) \\ x_2(5) & x_2(4) & x_2(3) & x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \\ x_1(4) \\ x_1(5) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \\ -16 \\ -4 \\ -10 \\ -16 \\ -22 \end{bmatrix}$$

两种方法的结果完全相同。

3.16　计算上题的两个序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的线性卷积 $y(n)$，与上题算出的 $x_3(n)$ 比较，说明 $x_3(n)$ 中的哪些点相当于 $y(n)$ 中对应的点。要使上题中的循环卷积与线性卷积 $y(n)$ 完全相同，循环卷积的长度最少为多少？

解

下面用排序法计算线性卷积：

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

$$\begin{array}{lcccccccc} x_1(n) & & & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ x_2(-n) & 3 & 2 & 1 & & & & & \end{array}$$

计算结果为

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$y(n)$	0	-1	-4	-10	-16	-22	-22	-15

线性卷积 $y(n)$ 之长 $N=6+3-1=8$，而循环卷积 $x_3(n)$ 长度为 6，$8-6=2$，因此，$x_3(n)$ 的前 2 个值是 $y(n)$ 的前面 2 个值与后面 2 个值的混叠，$x_3(n)$ 的后 4 个值才与 $y(n)$ 中对应的值相同。要使 $x_3(n)$ 与 $y(n)$ 完全相同，循环卷积的长度最少为 8。

3.17　用 8 kHz 的抽样率对模拟语音信号抽样，为进行频谱分析，计算了 512 点的 DFT。试确定频域抽样点之间的频率间隔，请分别计算出 $\Delta\omega$、$\Delta\Omega$ 和 Δf。

解

$$\text{频域抽样点之间的频率间隔} = \text{频域周期} / \text{一个周期的抽样点数}$$

对于数字角频率：

$$\Delta\omega = 2\pi/512 = 0.0123\ \text{rad}$$

对于模拟角频率：

$$\Delta\Omega = \Omega_s/512 = 2\pi f_s/512 = 0.0123 \times 8000 = 98.4\ \text{rad/s}$$

对于模拟频率：

$$\Delta f = f_s/512 = 8000/512 = 15.625\ \text{Hz}$$

3.18 利用 DFT 对一模拟信号进行频谱分析，抽样间隔为 $T_s = 0.1$ ms，要求频率分辨率不大于 10 Hz。

(a) 确定所允许处理信号的最高频率 f_m。

(b) 问一个周期中的抽样点数最少是多少（必须是 2 的正整数幂）？

(c) 确定信号的最小记录长度，也就是时域重复的一个周期的最小长度。

解

抽样频率为

$$f_s = 1/T_s = 1/(0.1 \times 10^{-3}) = 10000\ \text{Hz}$$

(a) 根据抽样定理，应当满足 $f_s \geqslant 2f_m$，所以

$$f_m \leqslant f_s/2 = 5000$$

因此所允许处理信号的最高频率为 5 000 Hz。

(b) 根据要求，$\Delta f \leqslant 10$ Hz，故

$$\Delta\omega = \Delta\Omega \cdot T_s = 2\pi\Delta f/f_s \leqslant 2\pi \times 10/10000 = \pi/500$$

$$\text{一个周期中的抽样点数} = (2\pi/\Delta\omega) \geqslant 2\pi/(\pi/500) = 1000$$

为了满足 2 的正整数幂的条件，一个周期中的抽样点数最少为 $N = 1024 = 2^{10}$。

(c) 时域重复的一个周期的最小长度 = 一个周期的最少抽样点数 × 时域抽样间隔

$$= NT_s = 1024 \times 0.1 \times 10^{-3} = 0.1024\ \text{s}$$

3.19 要利用重叠保留法来计算一个不定长序列 $x(n)$ 通过一线性时不变系统 $h(n)$ 的响应 $y(n)$，$h(n)$ 之长度为 $M = 50$。为此，将 $x(n)$ 分段，每段长度 $N_1 = 60$，每次取出的各段必须重叠 v 个样值，与 $h(n)$ 进行 128 点循环卷积后所得结果中应该保留 s 个样值，将这些从每一段保留的样值连接在一起时，得到的序列就是所要求的 $y(n)$。

(a) $v = ?$

(b) $s = ?$

(c) 设循环卷积的输出序列序号为 0～127，求保留的 s 个点之起点序号与终点序号，即从循环卷积所得的 128 点中取出哪些点去和前后各段取出的点连接起来而得到 $y(n)$。

解

(a) **每次取出的各段重叠的点数**

$$v = M - 1 = 49$$

(b) **循环卷积所得结果中应该保留的点数**

$$s = N_1 = 60$$

(c) **若循环卷积所得的序列序号为** 0～127**,则保留的** 60 **个点的起点序号为** 49**,终点序号为** 108**。**

3.20　已知有限长序列 $x(n)\ (0 \leqslant n \leqslant N-1)$ **的** DFT **为** $X(k)$**,试利用** $X(k)$ **导出下列各序列的** DFT**。**

(a) $x(N-1-n) \quad (0 \leqslant n \leqslant N-1)$

(b) $x(2n) \quad (0 \leqslant n < N/2$, N **为偶数**)

(c) $y(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0 & N \leqslant n \leqslant 2N-1 \end{cases}$

解

(a)
$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[x(N-1-n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(N-1-n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{m=N-1}^{0} x(m) W_N^{(N-1-m)k} \\ &= W_N^{(N-1)k} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-mk} \\ &= W_N^{-k} X((-k))_N R_N(k)\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[x(2n)] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{nk} \\ &= \sum_{\substack{m=0 \\ m\text{为偶数}}}^{N-2} x(m) W_{N/2}^{\frac{m}{2}k} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2}[x(m) + (-1)^m x(m)] W_N^{mk} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk} + \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m x(m) W_N^{mk}\right]\end{aligned}$$

因为

$$(-1)^m = (e^{j\pi})^m = (e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot(-\frac{N}{2})})^m = (W_N^{-\frac{N}{2}})^m$$

所以

$$\mathrm{DFT}[x(2n)] = \frac{1}{2}[X(k) + \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-\frac{N}{2}m} W_N^{mk}]$$
$$= \frac{1}{2}[X(k) + \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{m(k-\frac{N}{2})}]$$
$$= \frac{1}{2}[X(k) + X((k-\frac{N}{2}))_N] \quad (k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1)$$

(c) $$\mathrm{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{2N-1} y(n) W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{2N}^{nk}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n\frac{k}{2}} = X(\frac{k}{2}) \quad (k = 0,1,\cdots,2N-1)$$

3.21　设 $x(n) = a_n$ $(0 \leqslant n \leqslant 13)$；$h(n) = b_n$ $(0 \leqslant n \leqslant 3)$。先直接求线性卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$，然后分别用重叠相加法和重叠保留法计算此线性卷积，按每段长为 5 进行分段 $(N_1 = 5)$。比较 3 种方法所得结果。

解

① **用排序法直接求线性卷积**

			a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
b_3	b_2	b_1	b_0													

结果为：

n	0	1	2
$y(n)$	a_0b_0	$a_0b_1+a_1b_0$	$a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$
n	3	4	5
$y(n)$	$a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0$	$a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0$	$a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1+a_5b_0$
n	6	7	8
$y(n)$	$a_3b_3+a_4b_2+a_5b_1+a_6b_0$	$a_4b_3+a_5b_2+a_6b_1+a_7b_0$	$a_5b_3+a_6b_2+a_7b_1+a_8b_0$
n	9	10	11
$y(n)$	$a_6b_3+a_7b_2+a_8b_1+a_9b_0$	$a_7b_3+a_8b_2+a_9b_1+a_{10}b_0$	$a_8b_3+a_9b_2+a_{10}b_1+a_{11}b_0$
n	12	13	14
$y(n)$	$a_9b_3+a_{10}b_2+a_{11}b_1+a_{12}b_0$	$a_{10}b_3+a_{11}b_2+a_{12}b_1+a_{13}b_0$	$a_{11}b_3+a_{12}b_2+a_{13}b_1$
n	15	16	
$y(n)$	$a_{12}b_3+a_{13}b_2$	$a_{13}b_3$	

② **重叠相加法**

$x(n)$ **按每段长为** $N_1=5$ **进行分段,各段分别与** $h(n)$ **进行线性卷积得到** $y_k(n)$**。**

$x_0(n)$ **为**:a_0,a_1,a_2,a_3,a_4　　$y_0(n)$ **的序号**:$n=0,1,2,3,4,5,6,7$

$x_1(n)$ **为**:a_5,a_6,a_7,a_8,a_9　　$y_1(n)$ **的序号**:$n=5,6,7,8,9,10,11,12$

$x_2(n)$ **为**:$a_{10},a_{11},a_{12},a_{13}$　　$y_2(n)$ **的序号**:$n=10,11,12,13,14,15,16$

将 n **相同的** $y_k(n)$ **相加,最后得到的** $y(n)$ $(n=0,1,\cdots,16)$ **与线性卷积的结果完全相同。**

③ **重叠保留法**

$x(n)$ **仍然按照每段长为** $N_1=5$ **进行分段,但是每段往前重叠** $4-1=3$ **点取出。取出的各段** $x_k(n)$ **为:**

$$x_0(n):0,0,0,a_0,a_1,a_2,a_3,a_4$$

$$x_1(n):a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9$$

$$x_2(n):a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{13},0$$

$x_k(n)$ **的长度均为** $5+3=8$,$x_0(n)$ **在前面补了** 3 **个** 0,**而** $x_2(n)$ **因长度不够,在后面补了一个** 0。**现在将** $h(n)$ **后面补** 4 **个** 0,**使其长度也为** 8,**然后与各段** $x_k(n)$ **分别进行** 8 **点循环卷积,得到各个循环卷积的结果** $y'_k(n)$ **如下:**

$y'_0(n)$	$a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1$	$a_3b_3+a_4b_2$
	a_4b_3	a_0b_0
	$a_0b_1+a_1b_0$	$a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$
	$a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0$	$a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0$
$y'_1(n)$	$a_2b_0+a_7b_3+a_8b_2+a_9b_1$	$a_2b_1+a_3b_0+a_8b_3+a_9b_2$
	$a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0+a_9b_3$	$a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1+a_5b_0$
	$a_3b_3+a_4b_2+a_5b_1+a_6b_0$	$a_4b_3+a_5b_2+a_6b_1+a_7b_0$
	$a_5b_3+a_6b_2+a_7b_1+a_8b_0$	$a_6b_3+a_7b_2+a_8b_1+a_9b_0$
$y'_2(n)$	$a_7b_0+a_{12}b_3+a_{13}b_2$	$a_7b_1+a_8b_0+a_{13}b_3$
	$a_7b_2+a_8b_1+a_9b_0$	$a_7b_3+a_8b_2+a_9b_1+a_{10}b_0$
	$a_8b_3+a_9b_2+a_{10}b_1+a_{11}b_0$	$a_9b_3+a_{10}b_2+a_{11}b_1+a_{12}b_0$
	$a_{10}b_3+a_{11}b_2+a_{12}b_1+a_{13}b_0$	$a_{11}b_3+a_{12}b_2+a_{13}b_1$

将 $y_0'(n)$、$y_1'(n)$、$y_2'(n)$ 的前 3 个值去掉，再将保留的各个值前后连接起来，就得到 $y(n)$ 的各个值，但是与前两种方法得到的 $y(n)$ 比较，少了最后两个，即 $y(15)$ 和 $y(16)$。这是因为前两种方法所做的都是线性卷积，得到了完整的结果，这些结果包括了 $h(n)$ 部分地移出 $x(n)$ 所在区间的 $y(n)$ 的最后 3 个值，即 $y(14)$、$y(15)$ 和 $y(16)$ 在用重叠保留法时，如果要得到 $y(n)$ 的全部结果，则 $x(n)$ 后面应该补 3 个 0，但是为了使每段循环卷积的长度都相同 (8 点)，就在 $x_2(n)$ 后面只补了一个 0，这样所得到的循环卷积 $y_2'(n)$ 的后面当然就少了两个值。

第 4 章
快速傅里叶变换

4.1　如果一台通用计算机的速度为平均每次复乘需要 400 ns,每次复加需要 50 ns,今用来计算 $N = 1\,024$ 点的 DFT,问直接运算需要多少时间?用基 2 FFT 运算需要多少时间?

解

直接计算,需要复乘 N^2 次,复加 $N(N-1)$ 次,故共需时间为:

$$\begin{aligned}T_1 &= N^2 \times 400\ \text{ns} + N(N-1) \times 50\ \text{ns}\\ &= 0.42\ \text{s} + 0.052\,4\ \text{s}\\ &= 0.472\,4\ \text{s}\end{aligned}$$

用基 2 FFT 计算,需要复乘 $\frac{N}{2}\log_2\frac{N}{2}$ 次,复加 $N\log_2 N$ 次,故共需时间为:

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{N}{2}\log_2\frac{N}{2} \times 400\ \text{ns} + N\log_2 N \times 50\ \text{ns}\\ &= 0.001\,84\ \text{s} + 0.000\,512\ \text{s}\\ &= 0.002\,352\ \text{s}\end{aligned}$$

4.2　一通用微处理器的速度为平均每次复乘需 40 ns,每次复加需 4 ns。如果要求该处理器用基 2 FFT 算法进行实时频谱分析,信号按每段长为 512 点分段。

(a) 每秒钟能够处理多少段信号?

(b) 最高抽样频率为多少?

(c) 能够进行实时处理的信号的最高频率是多少?

如果采用 DFT 定义直接计算,重新回答上述 3 个问题。

解

① **采用基 2 FFT 算法**

(a) 处理一段信号所需时间:

$$\begin{aligned}T_1 &= (512/2)\log_2(512/2) \times 40 + 512\log_2 512 \times 4\\ &= 81\,920 + 18\,432 = 100\,352\ \text{ns}\end{aligned}$$

所以每秒钟能够处理 $1/T_1=1/(100\,352\times10^{-9})\approx9\,965$ 段信号。

(b) 每秒钟的抽样点数：

$$512\times9\,965=5\,102\,080$$

故最高抽样频率为 $f_s=5\,102.08$ kHz。

(c) 能够进行实时处理的信号的最高频率为

$$f_s/2\approx5\,100/2=2\,550\text{ kHz}$$

② 采用 DFT 定义直接计算

(a) 处理一段信号所需时间：

$$\begin{aligned}T_2&=512^2\times40+512\times511\times4\\&=10\,485\,760+1\,046\,528=11\,532\,288\text{ ns}\end{aligned}$$

所以每秒钟能够处理 $1/T_2=1/(11\,532\,288\times10^{-9})\approx87$ 段信号。

(b) 每秒钟的抽样点数：

$$512\times87=44\,544$$

故最高抽样频率为 $f_s=44\,544$ Hz。

(c) 能够进行实时处理的信号的最高频率为

$$f_s/2=44\,544/2=22\,272\text{ Hz}\approx22\text{ kHz。}$$

4.3 已知 $x(n)$ 长度为 4，并且 $x(n)=3(n+1)$ $(n=0,1,2,3)$。按照基 2 FFT 算法的信号流图计算 $X(k)$，请写出流图中各个节点处的值。

解

信号流图如图 T4.3 所示：

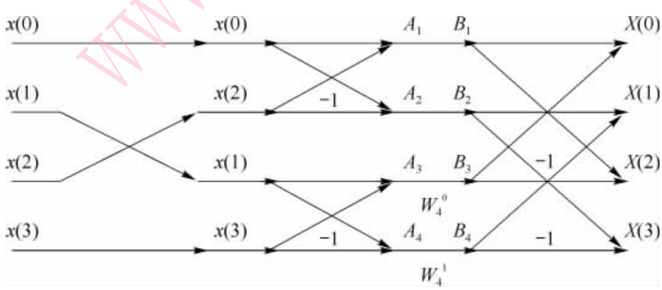


图 T4.3

$x(0)=3$	$A_1=x(0)+x(2)=12$	$B_1=A_1=12$	$X(0)=B_1+B_3=30$
$x(1)=6$	$A_2=x(0)-x(2)=-6$	$B_2=A_2=-6$	$X(1)=B_2+B_4=-6+6\mathrm{j}$
$x(2)=9$	$A_3=x(1)+x(3)=18$	$B_3=A_3\cdot W_4^0=A_3=18$	$X(2)=B_1-B_3=-6$
$x(3)=12$	$A_4=x(1)-x(3)=-6$	$B_4=A_4\cdot W_4^1=-6\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/4}=-6(-\mathrm{j})=6\mathrm{j}$	$X(3)=B_2-B_4=-6-6\mathrm{j}$

4.4　已知一线性时不变系统的冲激响应为 $h(n)$，试用计算机分析其频谱，即求出 $H(k)$ $(0\leqslant k\leqslant 20)$。

$h(0) = h(20) = 0.000\,365\,42$

$h(1) = h(19) = 0.001\,137\,12$

$h(2) = h(18) = 0$

$h(3) = h(17) = -0.006\,379\,90$

$h(4) = h(16) = -0.016\,988\,22$

$h(5) = h(15) = -0.020\,926\,16$

$h(6) = h(14) = 0$

$h(7) = h(13) = 0.057\,580\,99$

$h(8) = h(12) = 0.141\,689\,86$

$h(9) = h(11) = 0.218\,676\,19$

$h(10) = 0.25$

解

按照基 2 时间抽选的 FFT 算法，用高级语言编写计算机程序，运行后输出结果如下：

$H(0) = 1.000\,311 + \mathrm{j}0.000\,000$　　$H(1) = -0.970\,938 - \mathrm{j}0.146\,345$

$H(2) = 0.735\,557 + \mathrm{j}0.226\,889$　　$H(3) = -0.297\,387 - \mathrm{j}0.143\,214$

$H(4) = 0.036\,019 + \mathrm{j}0.024\,557$　　$H(5) = 0.000\,421 + \mathrm{j}0.000\,390$

$H(6) = 0.000\,050 + \mathrm{j}0.000\,063$　　$H(7) = -0.000\,017 - \mathrm{j}0.000\,030$

$H(8) = -0.000\,016 - \mathrm{j}0.000\,041$　　$H(9) = -0.000\,007 - \mathrm{j}0.000\,030$

$H(10) = -0.000\,001 - \mathrm{j}0.000\,010$　　$H(11) = -0.000\,001 + \mathrm{j}0.000\,010$

$H(12) = -0.000\,007 + \mathrm{j}0.000\,030$　　$H(13) = -0.000\,016 + \mathrm{j}0.000\,041$

$H(14) = -0.000\,017 + \mathrm{j}0.000\,030$　　$H(15) = 0.000\,050 - \mathrm{j}0.000\,063$

$H(16) = 0.000\,421 - \mathrm{j}0.000\,390$　　$H(17) = 0.036\,019 - \mathrm{j}0.024\,557$

$H(18) = -0.297\,387 + \mathrm{j}0.143\,215$　　$H(19) = 0.735\,556 - \mathrm{j}0.226\,890$

$H(20) = -0.970\,937 + \mathrm{j}0.146\,349$

4.5　画出 $N=16$ 的基 2 时间抽选的 FFT 算法的信号流图。

解

参见图 T4.5。

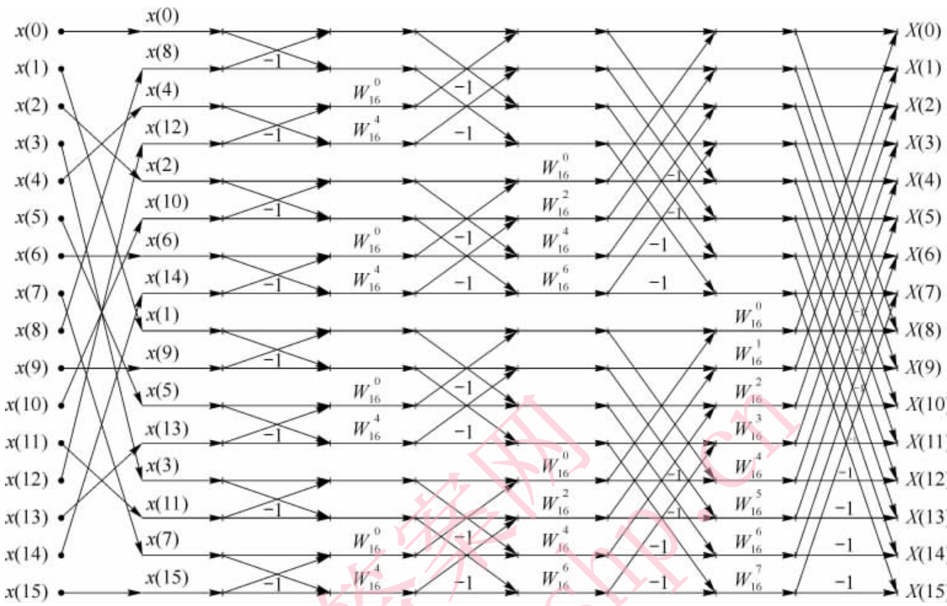


图 T4.5

4.6　用高级语言编程上机练习。已知

$$x(n)=\begin{cases}Q^n & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & n<0,\ n\geqslant N\end{cases}\qquad N=2^5$$

这里 $Q=0.9+\mathrm{j}0.3$。**可以推导出**

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}(QW_N^k)^n=\frac{1-Q^N}{1-QW_N^k}\qquad (k=0,1,\cdots,N-1)$$

首先根据这个式子计算 $X(k)$ **的理论值,然后计算输入序列** $x(n)$ **的** 32 **个值,再利用基** 2 **时间抽选的** FFT **算法,计算** $x(n)$ **的** DFT $X(k)$**,与** $X(k)$ **的理论值比较(要求计算结果最少** 6 **位有效数字)。**

解

程序运行结果输出数据如下:

输入序列 $x(n)$**:**

$x[0]=1.000\,000+\mathrm{j}0.000\,000$　　$x[1]=0.900\,000+\mathrm{j}0.300\,000$

$x[2]=0.720\,000+\mathrm{j}0.540\,000$　　$x[3]=0.486\,000+\mathrm{j}0.702\,000$

$x[4]=0.226\,800+\mathrm{j}0.777\,600$　　$x[5]=-0.029\,160+\mathrm{j}0.767\,880$

$x[6] = -0.256\,608 + \mathrm{j}0.682\,344$ $\quad x[7] = -0.435\,650 + \mathrm{j}0.537\,127$

$x[8] = -0.553\,224 + \mathrm{j}0.352\,719$ $\quad x[9] = -0.603\,717 + \mathrm{j}0.151\,480$

$x[10] = -0.588\,789 - \mathrm{j}0.044\,783$ $\quad x[11] = -0.516\,476 - \mathrm{j}0.216\,941$

$x[12] = -0.399\,746 - \mathrm{j}0.350\,190$ $\quad x[13] = -0.254\,714 - \mathrm{j}0.435\,095$

$x[14] = -0.098\,714 - \mathrm{j}0.467\,999$ $\quad x[15] = 0.051\,557 - \mathrm{j}0.450\,814$

$x[16] = 0.181\,645 - \mathrm{j}0.390\,265$ $\quad x[17] = 0.280\,560 - \mathrm{j}0.296\,745$

$x[18] = 0.341\,528 - \mathrm{j}0.182\,903$ $\quad x[19] = 0.362\,246 - \mathrm{j}0.062\,154$

$x[20] = 0.344\,667 + \mathrm{j}0.052\,735$ $\quad x[21] = 0.294\,380 + \mathrm{j}0.150\,862$

$x[22] = 0.219\,684 + \mathrm{j}0.224\,090$ $\quad x[23] = 0.130\,448 + \mathrm{j}0.267\,586$

$x[24] = 0.037\,164 + \mathrm{j}0.279\,974$ $\quad x[25] = -0.050\,545 + \mathrm{j}0.263\,125$

$x[26] = -0.124\,428 + \mathrm{j}0.221\,649$ $\quad x[27] = -0.178\,480 + \mathrm{j}0.162\,156$

$x[28] = -0.209\,279 + \mathrm{j}0.092\,397$ $\quad x[29] = -0.216\,070 + \mathrm{j}0.020\,373$

$x[30] = -0.200\,575 - \mathrm{j}0.046\,485$ $\quad x[31] = -0.166\,572 - \mathrm{j}0.102\,009$

在现在所用的一般计算机中,如果采用的是浮点算法,那么按 6 位有效数字来打印输出数据时,$X(k)$ 的理论值与用 FFT 算法得到的 $X(k)$ 之间是没有差别的,只有在小数点后面 15 位以上,才能够看到二者之间的差别。因此,所得到的 $X(k)$ 的数据如下:

$X[0] = 0.693\,973 + \mathrm{j}3.499\,716$ $\quad X[1] = 2.792\,268 + \mathrm{j}8.050\,456$

$X[2] = 9.402\,965 - \mathrm{j}9.135\,014$ $\quad X[3] = 1.866\,445 - \mathrm{j}3.833\,833$

$X[4] = 1.131\,823 - \mathrm{j}2.234\,157$ $\quad X[5] = 0.904\,794 - \mathrm{j}1.534\,629$

$X[6] = 0.799\,557 - \mathrm{j}1.139\,609$ $\quad X[7] = 0.739\,606 - \mathrm{j}0.882\,314$

$X[8] = 0.700\,862 - \mathrm{j}0.698\,565$ $\quad X[9] = 0.673\,576 - \mathrm{j}0.558\,478$

$X[10] = 0.653\,109 - \mathrm{j}0.446\,245$ $\quad X[11] = 0.636\,991 - \mathrm{j}0.352\,689$

$X[12] = 0.623\,788 - \mathrm{j}0.272\,086$ $\quad X[13] = 0.612\,613 - \mathrm{j}0.200\,642$

$X[14] = 0.602\,883 - \mathrm{j}0.135\,703$ $\quad X[15] = 0.594\,200 - \mathrm{j}0.075\,313$

$X[16] = 0.586\,277 - \mathrm{j}0.017\,949$ $\quad X[17] = 0.578\,900 + \mathrm{j}0.037\,652$

$X[18] = 0.571\,898 + \mathrm{j}0.092\,607$ $\quad X[19] = 0.565\,136 + \mathrm{j}0.147\,983$

$X[20] = 0.558\,492 + \mathrm{j}0.204\,881$ $\quad X[21] = 0.551\,859 + \mathrm{j}0.264\,522$

$X[22] = 0.545\,134 + \mathrm{j}0.328\,365$ $\quad X[23] = 0.538\,214 + \mathrm{j}0.398\,257$

$X[24] = 0.531\,002 + \mathrm{j}0.476\,678$ $\quad X[25] = 0.523\,404 + \mathrm{j}0.567\,132$

$X[26] = 0.515\,362 + \mathrm{j}0.674\,850$ $\quad X[27] = 0.506\,926 + \mathrm{j}0.808\,101$

$X[28] = 0.498\,467 + \mathrm{j}0.980\,906$ $\quad X[29] = 0.491\,389 + \mathrm{j}1.219\,207$

$X[30] = 0.490\,732 + \mathrm{j}1.577\,082$ $\quad X[31] = 0.517\,354 + \mathrm{j}2.188\,833$

4.7 设 $x(n)$ 是一个长度为 N、定义在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 的实序列，现在对其进行频谱分析，频率抽样点 z_k 在单位圆上均匀分布，即有 $z_k = e^{j(2\pi/M)k}$ $(k=0,1,\cdots,M-1)$，而 M 为 2 的正整数幂。要求用一次 M 点基 2 FFT 算法求出 $x(n)$ 的 z 变换，即频谱 $X(z_k)$，试问在下面各种情况下，分别如何进行有效的处理？

(a) $M = N$

(b) $M > N$

(c) $M < N < 2M$

解

(a) $M = N$ 时，要求的 $X(z_k)$ 就是 $x(n)$ 的 DFT，即 $X(k)$，因此，用一次 M 点基 2 FFT 算法就可以求出。

(b) $M > N$ 表示频谱抽样点数大于时域序列 $x(n)$ 的长度，这时只需要在 $x(n)$ 的后面补 $M-N$ 个 0，使其长度与 M 相等，就可以用一次 M 点基 2 FFT 算法得到 $X(k)$，也即 M 个点上的频谱 $X(z_k)$。

(c) 当 $M < N < 2M$ 时，可以在 $x(n)$ 后面补 $2M-N$ 个 0，于是得到一个长度为 $2M$ 的实序列 $x(n)$，再将它按奇偶分组得到两个长度为 M 的实序列，然后将这两个实序列组合成一个长度为 M 的复序列，用一次 M 点基 2 FFT 算法就可以同时得到这两个实序列的 DFT，再将这两个 DFT 适当组合，就可以得到 $2M$ 点的 DFT，这就是 $x(n)$ 的 $2M$ 个频谱值，而 $2M$ 个频率抽样点是均匀地分布在单位圆上的，因此，最后只需要从 $k=0$ 开始，每隔一个频谱值取出一个，就得到了要求的在单位圆上均匀分布的 M 个抽样点上的频谱 $X(z_k)$。

4.8 对信号 $x(t) = e^{-0.1t}$ $(t \geqslant 0)$ 进行频谱分析。

(a) 根据傅里叶变换求出其频谱 $X(\Omega)$ 的表达式。

(b) 如果用 $T_s = 0.75$ s 的抽样周期对 $x(t)$ 抽样，求所得离散信号的频谱的重复周期 Ω_s。

(c) 求 $|X(\Omega_s/2)|$ 与 $|X(\Omega)|$ 的最大值的比值 c。

(d) 如果要用基 2 FFT 算法来求出该信号的离散频谱，设时域重复周期为 T_1，并且要求 $x(T_1)$ 与 $x(t)$ 的最大值之比值不大于 c，问时域的抽样点数 N 最少为多少？所对应的 $T_1 = $？

解

(a)
$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-0.1t}e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \frac{-1}{0.1 + j\Omega}e^{-(0.1+j\Omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{0.1 + j\Omega}$$

(b)
$$\Omega_s = 2\pi / T_s = 2\pi / 0.75 \approx 8.4 \text{ rad/s}$$

(c)
$$|X(\Omega)| = |0.1 + j\Omega|^{-1} = (0.1^2 + \Omega^2)^{-1/2}$$

显然,当 $\Omega = 0$ 时 $|X(\Omega)|$ 取最大值：

$$|X(0)| = (0.1^2)^{-1/2} = 10$$

而

$$|X(\Omega_s/2)| = |X(4.2)| = (0.1^2 + 4.2^2)^{-1/2} \approx 0.238$$

所以

$$c = |X(\Omega_s/2)| / |X(0)| = 0.238/10 \approx 0.024$$

(d) 显然,所给的指数函数信号 $x(t)$ 当 $t = 0$ 时取最大值：

$$x(0) = e^{-0.1\times 0} = 1$$

按题意要求

$$x(T_1)/x(0) = x(T_1) \leqslant c = 0.024$$

而

$$x(T_1) = e^{-0.1T_1}$$

于是由 $e^{-0.1T_1} \leqslant 0.024$ 得到：

$$-0.1T_1 \leqslant \ln 0.024 \approx -3.73$$

由此得到 $T_1 \geqslant 37.3$ s 又知道 $T_1 = NT_s$,N 为一个周期的抽样点数。故应该要求 $NT_s \geqslant 37.3$,于是

$$N \geqslant 37.3/T_s = 37.3/0.75 \approx 49.7$$

因为要用基 2 FFT 算法来求频谱,因此要求 N 为 2 的正整数幂,故 N 的最小值为 $2^6 = 64$,此时时域重复周期

$$T_1 = 64T_s = 64 \times 0.75 = 48 \text{ s}$$

4.9 已知两个 N 点实序列 $u(n)$ 和 $v(n)$ 的 DFT 分别为 $U(k)$ 和 $V(k)$，现在需要求出序列 $u(n)$ 和 $v(n)$，试用一次 N 点 IFFT 运算来实现。

解

令
$$x(n) = u(n) + jv(n)$$

根据 DFT 的线性有
$$X(k) = U(k) + jV(k)$$

这里离散频谱 $X(k)$、$U(k)$、$V(k)$ 都是复序列。用下标 r、i 分别表示实部和虚部,则有

$$X(k) = X_r(k) + jX_i(k)$$

$$U(k) = U_r(k) + jU_i(k)$$

$$V(k) = V_r(k) + jV_i(k)$$

于是有

$$X_r(k)+jX_i(k)=U_r(k)+jU_i(k)+j[V_r(k)+jV_i(k)]$$
$$=[U_r(k)-V_i(k)]+j[U_i(k)+V_r(k)]$$

所以有

$$X_r(k)=U_r(k)-V_i(k)$$
$$X_i(k)=U_i(k)+V_r(k)$$

因此，由 $U(k)$ 和 $V(k)$ 的实部和虚部按照上面的两个式子分别得到 $X(k)$ 的实部和虚部，也就是得到 $X(k)$ 之后，作一次 N 点的复数 IFFT 运算，就得到 $x(n)$，而 $x(n)$ 的实部就是 $u(n)$，虚部就是 $v(n)$。于是用一次 N 点 IFFT 运算就同时得到了两个 N 点实序列 $u(n)$ 和 $v(n)$。

4.10 已知长度为 $2N$ 的实序列 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 的各个数值 $(k=0,1,\cdots,2N-1)$，现在需要由 $X(k)$ 计算 $x(n)$，为了提高效率，请设计用一次 N 点 IFFT 来完成。

解

如果将 $x(n)$ 按奇偶分为两组，即令

$$\left.\begin{aligned}u(n)&=x(2n)\\ v(n)&=x(2n+1)\end{aligned}\right\}n=0,1,\cdots,N-1$$

那么就有

$$\left.\begin{aligned}X(k)&=U(k)+W_{2N}^{k}V(k)\\ X(k+N)&=U(k)-W_{2N}^{k}V(k)\end{aligned}\right\}k=0,1,\cdots,N-1$$

其中 $U(k)$、$V(k)$ 分别是实序列 $u(n)$、$v(n)$ 的 N 点 DFT，$U(k)$、$V(k)$ 可以由上式解出：

$$\left.\begin{aligned}U(k)&=\frac{1}{2}[X(k)+X(k+N)]\\ V(k)&=\frac{1}{2}W_{2N}^{-k}[X(k)-X(k+N)]\end{aligned}\right\}k=0,1,\cdots,N-1$$

由于 $X(k)$ $(k=0,1,\cdots,2N-1)$ 是已知的，因此可以将 $X(k)$ 前后分半按上式那样组合起来，于是就得到了 $U(k)$ 和 $V(k)$。到此，就可以像 4.9 题那样来处理了，也即令

$$y(n)=u(n)+jv(n)$$

根据 $U(k)$、$V(k)$，作一次 N 点 IFFT 运算，就可以同时得到 $u(n)$ 和 $v(n)$ $(n=0,1,\cdots,N-1)$，它们分别是 $x(n)$ 的偶数点和奇数点序列，于是序列 $x(n)$ $(n=0,1,\cdots,2N-1)$ 也就求出了。

4.11 在下列说法中选择正确的结论。Chirp-z 变换可以用来计算一个有限时宽序列 $h(n)$ 在 z 平面实 z 轴上诸点 $\{z_k\}$ 的 z 变换 $H(z)$，而 z_k 的表达式为

(a) $z_k = a^k$，$k = 0,1,\cdots,N-1$，a 为实数，$a \neq 0$，$a \neq \pm 1$。

(b) $z_k = ak$，$k = 0,1,\cdots,N-1$，a 为实数，$a \neq 0$。

(c) (a) 和 (b) 两者都行。

(d) (a) 和 (b) 两者都不行，即 Chirp-z 变换不能计算 z 为实数抽样时的 $H(z)$。

解

用 CZT 算法求 z 变换的 z 平面上的点的表示式为

$$z_k = AW^{-k}$$

其中：$k = 0,1,\cdots,N-1$；$A = A_0 e^{j\theta_0}$，$W = W_0 e^{-j\varphi_0}$，A_0、W_0 为正实数。

(a) $z_k = a^k$，可以认为 $A = 1$，$W = a^{-1}$，于是

$$H(z_k) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z_k^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) a^{-nk}$$

在推导出的 CZT 算法最后的表达式

$$H(z_n) = W^{n^2/2}[y(n) * x(n)]$$

中

$$\begin{cases} y(n) = h(n) A^{-n} W^{n^2/2} = h(n) a^{-n^2/2} \\ x(n) = W^{-n^2/2} = a^{n^2/2} \end{cases}$$

于是可以用 CZT 算法求得 $H(z_k)$ $(k = 0,1,\cdots,N-1)$。

(b) $z_k = ak$，这时变量 k 是 z_k 的因子，而不在指数上，因此在 $H(z_k)$ 的表达式中不会出现“nk”形式的指数，故不能用 CZT 算法来求 z 变换 $H(z_k)$。

因此，应该选择 (a)。

4.12 设 $x(n)$ 是一个 M 点 $(0 \leqslant n \leqslant M-1)$ 的有限长序列，其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) z^{-n}$$

令 $X(z)$ 在单位圆上 N 个等间隔点上的抽样 $X(z_k)$ 为

$$X(z_k) = X(z)\big|_{z=z_k} \quad (z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, k = 0,1,\cdots,N-1)$$

这里 M 和 N 都是较大的正整数，问如何用 CZT 算法快速算出全部 N 点 $X(z_k)$ 值来。

解

$$z_k = AW^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad (k = 0,1,\cdots,N-1)$$

于是有

$$\begin{cases} A=1 \\ W^{-1}=e^{j2\pi/N} \end{cases} \quad (W_0=1, \varphi_0=2\pi/N)$$

CZT 算法：

$$X(z_n) = W^{n^2/2}[y(n) * h(n)] \quad (n=0,1,\cdots,N-1)$$

其中：

$$W^{n^2/2} = e^{-j\frac{\pi}{N}n^2}$$

$$y(n) = x(n)A^{-n}W^{n^2/2} = x(n)e^{-j\frac{\pi}{N}n^2} \quad (n=0,1,\cdots,M-1)$$

$$h(n) = W^{-n^2/2} = e^{j\frac{\pi}{N}n^2}$$

线性卷积

$$g(n) = y(n) * h(n) \quad (n=0,1,\cdots,N-1)$$

拟用 L 点循环卷积来计算：

$$g_L(n) = y(n) \otimes h'(n) = \left[\sum_{r=0}^{L-1} y(r)\tilde{h}'(n-r)\right]R_L(n)$$

而该循环卷积可以用基 2 FFT 算法来快速实现，为此，令

$$L = M+N-1+K = 2^s$$

这里，s 是满足此关系的最小正整数，s 确定后，再取 K 为满足此关系的最小正整数或 0。而 $h'(n)$ 如下选取：

$$h'(n) = \begin{cases} h(n) = W^{-n^2/2} & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ \text{任意值} & N \leqslant n \leqslant N+K-1 \\ h(n-L) = W^{-(n-L)^2/2} & N+K \leqslant n \leqslant L-1 \end{cases}$$

当然，也要在 $y(n)$ 后面补 $N-1+K$ 个 0，使其长度为 L。于是

$$g_L(n) = \mathrm{IFFT}[Y(k)H'(k)]$$

但是，对于这个 L 点的 IFFT，只需要取出 $g_L(n)$ 的前 N 个值，即为所需的 $g(n)$，再乘以 $W^{n^2/2}$ 就得到所要求的 $X(z_n)$。

4.13 已知 $x(n)$ 当 $0 \leqslant n \leqslant 7$ 时等于 1，n 为其他值时 $x(n)$ 均为 0。z 平面路径为：$A_0=0.6, \theta_0=\pi/3$，$W_0=1.2$，$\varphi_0=2\pi/20$。用 CZT 算法计算复频谱 $X(z_k)$ $(k=0,1,\cdots,9)$ 要求：

(1) 画出 z_k 的路径；

(2) 写出 $y(n)$、$h(n)$ 的表达式；

(3) 当利用循环卷积 $g_L(n)=y(n)\otimes h'(n)$ 来计算线性卷积 $g(n)=y(n)*h(n)$ 时，写出 $h'(n)$ 的分段表达式；

(4) 若计算循环卷积时需用基 2 FFT，写出 $h'(n)$ 的分段表达式。

解

(1) 参见图 T4.13。

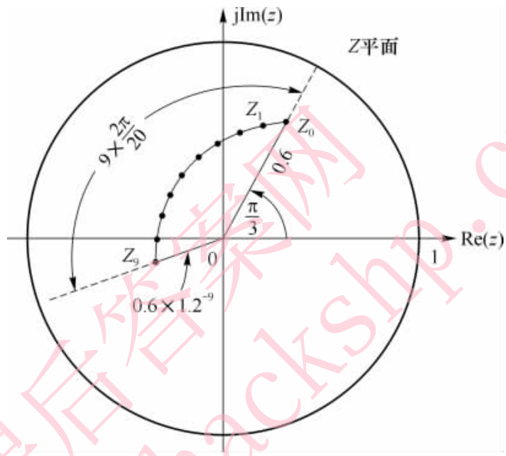


图 T4.13

(2)
$$W=W_0e^{-j\varphi_0}=1.2e^{-j\pi/10}$$
$$A=A_0e^{j\theta_0}=0.6e^{j\pi/3}$$
$$\begin{aligned}y(n)&=x(n)A^{-n}W^{n^2/2}\\&=0.6^{-n}e^{-jn\pi/3}\cdot 1.2^{n^2/2}e^{-jn^2\pi/20}\quad (n=0,1,\cdots,7)\end{aligned}$$
$$h(n)=W^{-n^2/2}=1.2^{-n^2/2}e^{jn^2\pi/20}$$

(3)
$$h'(n)=\begin{cases}h(n) & 0\leqslant n\leqslant M-1=9\\ h(n-L) & 10\leqslant n\leqslant L-1\end{cases}$$
$$(L=M+N-1=10+8-1=17)$$

此时 17 点循环卷积 $g_L(n)$ 的前 10 个值即为所需要的线性卷积 $g(n)$。

(4) $h'(n)=\begin{cases} h(n) & 0\leqslant n\leqslant 9 \\ 0\ (\text{任意数}) & 10\leqslant n\leqslant 24 \\ h(n-32) & 25\leqslant n\leqslant 31 \end{cases}$

$(M+N-1+K=10+8-1+15=32=2^5)$

此时用基 2 32 点 FFT 和 IFFT 计算循环卷积 $g_L(n)=y(n)\otimes h'(n)$，取其结果的前 10 个值即为所需要的 $g(n)$。

第 6 章
IIR 数字滤波器的原理及设计

6.1　模拟低通滤波器的指标如图 P6.1 所示。

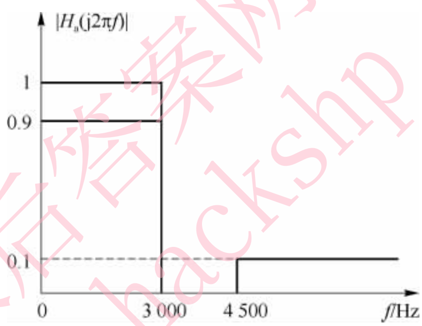


图 P6.1

(a) 计算 B 型滤波器的参数 Ω_c 和 N。

(b) 计算 C 型滤波器的参数 ε 和 N。

解

(a) 令通带边界频率为基准频率，则通带边界的标称频率 $\Omega_1 = 1$，而阻带边界的标称频率

$$\Omega_2 = 4\ 500\ \text{Hz}/3\ 000\ \text{Hz} = 1.5$$

B 型滤波器的平方幅度特性：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\Omega_c}\right)^{2N}\Omega^{2N}}$$

对于通带边界：

$$|H_a(j\Omega_1)|^2 = \frac{1}{1+(1/\Omega_c)^{2N}} = 0.9^2$$

于是得到

$$B^2=(1/\Omega_c)^{2N}=\frac{1}{0.9^2}-1=0.234\ 57$$

对于阻带边界：

$$|H_a(j\Omega_2)|^2=\frac{1}{1+B^2\Omega_2^{2N}}=0.1^2$$

于是得到

$$\Omega_2^{2N}=\frac{(1/0.1^2)-1}{B^2}=\frac{99}{0.234\ 57}=422.05$$

而 $\Omega_2=1.5$，故有

$$2N=\lg 422.05/\lg 1.5=14.909$$

于是取 $N=8$。再由

$$B^2=(1/\Omega_c)^{2N}$$

有

$$\Omega_c^{-16}=B^2=0.234\ 57$$

故

$$\Omega_c=0.234\ 57^{-1/16}=1.095$$

于是实际的截止频率

$$\Omega'_c=\Omega_c\Omega'_1=1.095\times 2\pi\times 3\ 000=20\ 640\ \text{rad/s}$$

(b) 在 (a) 中已得到通带边界和阻带边界标称频率分别为 $\Omega_1=1$，$\Omega_2=1.5$。由

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2}=0.9^2=0.81$$

得到

$$\varepsilon^2=\frac{1}{0.81}-1=0.234\ 57$$

故 $\varepsilon=0.484\ 32$。

由阻带要求有

$$|H_a(j\Omega_2)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2(\Omega_2)}\leqslant 0.1^2=0.01$$

故有

$$C_N^2(\Omega_2)=C_N^2(1.5)\geqslant\frac{1/0.01-1}{\varepsilon^2}=422.05$$

于是有

$$C_N(1.5)\geqslant 20.544$$

递推公式

$$C_{N+1}(1.5)=3C_N(1.5)-C_{N-1}(1.5)$$

由 $C_0(1.5)=1$，$C_1(1.5)=1.5$，可以得到 $\begin{cases} C_2(1.5)=3\times1.5-1=3.5 \\ C_3(1.5)=3\times3.5-1.5=9 \\ C_4(1.5)=3\times9-3.5=23.5>20.544 \end{cases}$

因此 $N=4$。

6.2　求 $N=3$ 时 0.5 dB 模拟低通 C 型滤波器的系统函数。

解

由

$$RW_{\text{dB}}=10\lg(1+\varepsilon^2)$$

有

$$\lg(1+\varepsilon^2)=0.05$$

所以

$$\varepsilon=(10^{0.05}-1)^{1/2}=0.349\,3$$

$$\alpha=\varepsilon^{-1}+\sqrt{1+\varepsilon^{-2}}=1/0.349\,3+\sqrt{1+1/0.349\,3^2}\approx5.895$$

$$a=(\alpha^{1/3}-\alpha^{-1/3})/2=(5.895^{1/3}-5.895^{-1/3})/2\approx0.626$$

$$b=(\alpha^{1/3}+\alpha^{-1/3})/2=(5.895^{1/3}+5.895^{-1/3})/2\approx1.18$$

左半平面的极点为

$$s_k=\sigma_k+\mathrm{j}\Omega_k$$

其中

$$\sigma_k=-a\sin\frac{(2k-1)\pi}{2N}\quad \Omega_k=b\cos\frac{(2k-1)\pi}{2N}\quad (k=1,2,3)$$

故有

$$\sigma_1=-a\sin(\pi/6)=-0.313\qquad \Omega_1=b\cos(\pi/6)=1.022$$

$$\sigma_2=-a\sin(3\pi/6)=-0.626\qquad \Omega_2=b\cos(3\pi/6)=0$$

$$\sigma_3=-a\sin(5\pi/6)=-0.313\qquad \Omega_3=b\cos(5\pi/6)=-1.022$$

因此，系统函数的分母多项式为

$$\begin{aligned}Q(s)&=(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\\&=(s+0.313-\mathrm{j}1.022)(s+0.626)(s+0.313+\mathrm{j}1.022)\\&=s^3+1.252s^2+1.534\,3s+0.715\,2\end{aligned}$$

该 C 型低通滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{\varepsilon^{-1}2^{1-N}}{Q(s)} = \frac{0.349\,3^{-1}\times 2^{-2}}{Q(s)}$$

$$= \frac{0.715\,7}{s^3 + 1.252s^2 + 1.534\,3s + 0.715\,2}$$

6.3 模拟带通滤波器的指标如图 P6.3 所示，用 B 型特性逼近，求其系统函数。

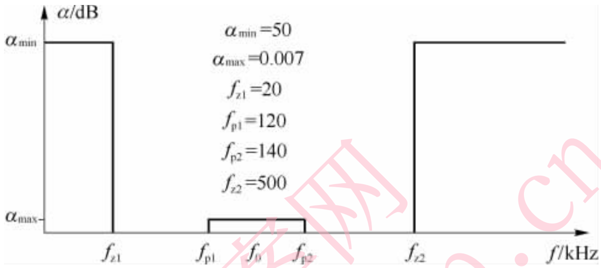


图 P6.3

解

带通滤波器的中心频率为

$$f_0 = \sqrt{f_{p1}f_{p2}} = \sqrt{120\times 140} \approx 129.615\ \text{kHz}$$

标称化带宽（相对带宽）

$$\delta = \beta_{p2} - \beta_{p1} = \frac{f_{p2}}{f_0} - \frac{f_{p1}}{f_0} = \frac{140-120}{129.615} \approx 0.154\,3$$

而

$$\beta_{z1} = \frac{f_{z1}}{f_0} = \frac{20}{129.615} \approx 0.154\,3$$

$$\beta_{z2} = \frac{f_{z2}}{f_0} = \frac{500}{129.615} \approx 3.86$$

$$\beta_{z1}\beta_{z2} \approx 0.6 \neq 1$$

这说明 f_{z1} 与 f_{z2} 并不关于 f_0 几何对称，所以应该调整（这里显然应该增大）f_{z1} 或者 f_{z2}。如果增大 f_{z2}，会使高端过渡带变宽，不满足设计要求；如果增大 f_{z1}，将使低端过渡带变窄，特性比要求的还好些，因此，应该增大 f_{z1}（β_{z1}）。实际上，只需要保持 β_{z2} 不变，由于 $(1/\beta_{z2}) = 0.259 > 0.154\,3$，这自然就会使 $\beta_{z1} = 1/\beta_{z2}$ 增大了。因此，应以 β_{z2} 为准来计算低通的 Ω_z。

$$\Omega_z = \frac{1}{\delta}\left(\beta_{z2} - \frac{1}{\beta_{z2}}\right) = \frac{3.86 - 0.259}{0.1543} \approx 23.34$$

下面就可以求出通带边界 $\Omega_p = 1$、阻带边界 $\Omega_z = 23.34$ 的 B 型低通滤波器的参数 Ω_c 和 N 了。

将衰减化为平方幅度

$$\alpha_{\max} = 10\lg\frac{1}{|H(j\Omega_p)|^2} = 0.007$$

于是有

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (1/\Omega_c)^{2N}\Omega_p^{2N}} = \frac{1}{10^{0.0007}}$$

由于 $\Omega_p = 1$，故可以得到

$$B^2 = (1/\Omega_c)^{2N} = 10^{0.0007} - 1 = 0.0016 \tag{6.1}$$

又

$$\alpha_{\min} = 10\lg\frac{1}{|H(j\Omega_z)|^2} = 50$$

于是有

$$|H(j\Omega_z)|^2 = \frac{1}{1 + B^2\Omega_z^{2N}} = \frac{1}{10^5}$$

因此

$$\begin{aligned}\Omega_z^{2N} &= (10^5 - 1)/B^2 \\ &= 99\,999/0.0016 = 62\,499\,375\end{aligned}$$

于是

$$2N = \lg 62\,499\,375/\lg 23.34 = 5.6983$$

所以取 $N = 3$。又由(6.1)式可以得到

$$\Omega_c = (0.0016^{1/2N})^{-1} = 0.0016^{-1/6} = 2.924$$

$N = 3$ 的 B 型低通滤波器的系统函数

$$H(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2)} \tag{6.2}$$

而

$$s_0 = j\Omega_c e^{j\pi/6} = \Omega_c e^{j2\pi/3}$$

$$s_1 = j\Omega_c e^{j\pi/2} = \Omega_c e^{j\pi}$$

$$s_2 = j\Omega_c e^{j5\pi/6} = \Omega_c e^{j4\pi/3}$$

代入(6.2)式有

$$H(s)=\frac{\Omega_c^3}{s^3+2\Omega_c s^2+2\Omega_c^2 s+\Omega_c^3}$$

于是所要求的B型带通滤波器的系统函数为

$$F(p)=H(s)\Big|_{s=\frac{p+1/p}{\delta}=\frac{p^2+1}{\delta p}}$$

$$=\frac{\Omega_c^3}{\left(\frac{p^2+1}{\delta p}\right)^3+2\Omega_c\left(\frac{p^2+1}{\delta p}\right)^2+2\Omega_c^2\left(\frac{p^2+1}{\delta p}\right)+\Omega_c^3}$$

$$=\frac{2.924^3\times0.1543^3p^3}{(p^2+1)^3+2\times2.924\times0.1543p(p^2+1)^2+2\times2.924^2\times0.1543^2p^2(p^2+1)+2.924^3\times0.1543^3p^3}$$

$$=\frac{0.0918p^3}{(p^2+1)^3+0.9p(p^2+1)^2+0.407p^2(p^2+1)+0.0918p^3}$$

6.4 一个数字低通滤波器的截止频率为 $\omega_c=0.2\pi$，令抽样频率 $f_s=1$ kHz。

(a) 如果用冲激响应不变法来设计，问相应的模拟低通滤波器的截止频率 f_c 为多少？

(b) 如果用双线性变换法来设计，问相应的模拟低通滤波器的截止频率 f_c 为多少？

解

(a) 相应的模拟低通滤波器的截止频率

$$\Omega_c=\omega_c/T_s=\omega_c f_s=0.2\pi\times1000=200\pi\ \text{rad/s}$$

而

$$f_c=\frac{\Omega_c}{2\pi}=100\ \text{Hz}$$

(b) 相应的模拟低通滤波器的截止频率

$$\Omega_c=\frac{2}{T_s}\tan\frac{\omega_c}{2}=2f_s\tan(0.1\pi)=649.84\ \text{rad/s}$$

而

$$f_c=\frac{\Omega_c}{2\pi}=103.4\ \text{Hz}$$

6.5 试分别用冲激响应不变法和双线性变换法将下列模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 变为数字系统函数 $H(z)$。

(a) $H_a(s)=\dfrac{3}{(s+1)(s+3)}$，$T_s=0.5$ s

(b) $H_a(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$，$T_s=2$ s

(c) $H_a(s)=\dfrac{3s+2}{2s^2+3s+1}$，$T_s=0.1\text{ s}$

解

① **冲激响应不变法**

(a)
$$H_a(s)=\frac{3}{(s+1)(s+3)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)$$

故有

$$H(z)=T_s\left(\frac{3/2}{1-e^{-T_s}z^{-1}}-\frac{3/2}{1-e^{-3T_s}z^{-1}}\right)$$
$$=0.75\left(\frac{z}{z-e^{-0.5}}-\frac{z}{z-e^{-1.5}}\right)$$

(b)
$$H_a(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$
$$=\frac{1}{j\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s+1/2-j\sqrt{3}/2}-\frac{1}{s+1/2+j\sqrt{3}/2}\right)$$

故有

$$H(z)=\frac{T_s}{j\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1-e^{(-1/2+j\sqrt{3}/2)T_s}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{(-1/2-j\sqrt{3}/2)T_s}z^{-1}}\right)$$
$$=\frac{j2}{\sqrt{3}}\left(\frac{z}{z-e^{-1}e^{-j\sqrt{3}}}-\frac{z}{z-e^{-1}e^{j\sqrt{3}}}\right)$$

(c)
$$H_a(s)=\frac{3s+2}{2s^2+3s+1}=\frac{3s+2}{(2s+1)(s+1)}$$
$$=\frac{1}{2s+1}+\frac{1}{s+1}=\frac{1/2}{s+1/2}+\frac{1}{s+1}$$

故有

$$H(z)=T_s\left(\frac{1/2}{1-e^{-0.5T_s}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-T_s}z^{-1}}\right)$$
$$=\frac{0.05z}{z-e^{-0.05}}+\frac{0.1z}{z-e^{-0.1}}$$

② **双线性变换法**

(a)
$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{3}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=4\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$
$$=\frac{3(1+z^{-1})}{[4(1-z^{-1})+1+z^{-1}][4(1-z^{-1})+3(1+z^{-1})]}$$
$$=\frac{3(1+z^{-1})}{(5-3z^{-1})(7-z^{-1})}$$

(b)
$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{1}{s^2+s+1}\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$
$$=\frac{(1+z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2+(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1+z^{-1})^2}$$
$$=\frac{(1+z^{-1})^2}{3+z^{-2}}$$

(c)
$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{3s+2}{2s^2+3s+1}\Big|_{s=20\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$
$$=\frac{3\times 20(1-z^{-1})(1+z^{-1})+2(1+z^{-1})^2}{2\times 20^2(1-z^{-1})^2+3\times 20(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1+z^{-1})^2}$$
$$=\frac{62+4z^{-1}-58z^{-2}}{861-1\,598z^{-1}+741z^{-2}}$$

6.6 用冲激响应不变法将以下 $H_a(s)$ 转换为 $H(z)$，抽样周期为 T。

(a) $H_a(s)=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

(b) $H_a(s)=\dfrac{A}{(s-s_0)^2}$

解

(a)
$$H_a(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+a+b\mathrm{j}}+\frac{1}{s+a-b\mathrm{j}}\right)$$

故有

$$H(z)=\frac{T}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(a+b\mathrm{j})T}z^{-1}}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(a-b\mathrm{j})T}z^{-1}}\right)$$
$$=\frac{T}{2}\left(\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}bT}}+\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}\mathrm{e}^{\mathrm{j}bT}}\right)$$

(b) **模拟滤波器的冲激响应**

$$h_a(t)=\mathscr{L}^{-1}[H_a(s)]=A\cdot t\cdot\mathrm{e}^{s_0 t}u(t)$$

数字滤波器的冲激响应

$$h(n)=Th_a(nT)=T\cdot A\cdot nT\cdot\mathrm{e}^{s_0 nT}u(nT)$$

数字滤波器的系统函数

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=AT^2\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot e^{s_0Tn}z^{-n}$$

$$=AT^2\left[-z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{s_0Tn}z^{-n}\right)\right]$$

$$=-AT^2z\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-e^{s_0T}z^{-1}}\right)$$

$$=-AT^2z\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-e^{s_0T}}\right)$$

$$=-AT^2z\frac{(z-e^{s_0T})-z}{(z-e^{s_0T})^2}$$

$$=\frac{AT^2e^{s_0T}z}{(z-e^{s_0T})^2}$$

上面的推导过程中,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(e^{s_0T}z^{-1})^n$ 的收敛需要满足条件

$$|e^{s_0T}z^{-1}|<1$$

即

$$|z|>|e^{s_0T}|$$

这也就是 $H(z)$ 的收敛域。

6.7　设抽样频率 $f_s=2\pi$ kHz,用冲激响应不变法设计一个 3 阶 Butterworth 数字低通滤波器,其 3 dB 带宽 $f_c=1$ kHz。

解

对于冲激响应不变法,数字滤波器的模拟频率也即模拟滤波器的频率,故有

$$\Omega_c=2\pi f_c=2\,000\pi\ \text{rad/s}$$

3 阶 Butterworth 模拟低通滤波器的系统函数

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^3}{(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)}$$

而

$$s_0=j\Omega_ce^{j\pi/6}=\Omega_c e^{j2\pi/3}=(-1/2+j\sqrt{3}/2)\Omega_c$$
$$s_1=j\Omega_c e^{j\pi/2}=\Omega_c e^{j\pi}=-\Omega_c$$
$$s_2=j\Omega_c e^{j5\pi/6}=\Omega_c e^{j4\pi/3}=(-1/2-j\sqrt{3}/2)\Omega_c$$

令

$$\frac{1}{(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{A}{s-s_0}+\frac{B}{s-s_1}+\frac{C}{s-s_2}$$

则可以得到

$$\begin{cases} A = \dfrac{-\mathrm{j}\sqrt{3}/2 - 3/2}{3\Omega_c^2} \\ B = \dfrac{1}{\Omega_c^2} \\ C = \dfrac{\mathrm{j}\sqrt{3}/2 - 3/2}{3\Omega_c^2} \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{A\Omega_c^3}{s - s_0} + \frac{B\Omega_c^3}{s - s_1} + \frac{C\Omega_c^3}{s - s_2} \\ &= \frac{[-1/2 - \mathrm{j}/(2\sqrt{3})]\Omega_c}{s - s_0} + \frac{\Omega_c}{s - s_1} + \frac{[-1/2 + \mathrm{j}/(2\sqrt{3})]\Omega_c}{s - s_2} \end{aligned}$$

因此，所要求的数字低通滤波器的系统函数为

$$H(z) = T_s\Omega_c\left[\frac{-1/2 - \mathrm{j}/(2\sqrt{3})}{1 - \mathrm{e}^{s_0 T_s}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{s_1 T_s}z^{-1}} + \frac{-1/2 + \mathrm{j}/(2\sqrt{3})}{1 - \mathrm{e}^{s_2 T_s}z^{-1}}\right]$$

由于

$$T_s\Omega_c = \Omega_c/f_s = 2\,000\pi/2\,000\pi = 1$$

所以有

$$H(z) = \frac{-[1/2 + \mathrm{j}/(2\sqrt{3})]z}{z - \mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{3}/2}} + \frac{z}{z - \mathrm{e}^{-1}} + \frac{-[1/2 - \mathrm{j}/(2\sqrt{3})]z}{z - \mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{3}/2}}$$

6.8 用双线性变换法设计一个 3 阶 Butterworth 数字低通滤波器，3 dB 带宽（截止频率）$f_c = 400$ Hz，抽样频率 $f_s = 1.2$ kHz。

解

数字低通的截止频率

$$\omega_c = \Omega_c T_s = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{2\pi \times 400}{1\,200} = \frac{2\pi}{3}$$

用双线性变换法，模拟低通的截止频率

$$\Omega'_c = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\omega_c}{2} = 2f_s\tan\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\,f_s$$

3 阶 B 型模拟低通滤波器的系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega'^3_c}{s^3 + 2\Omega'_c s^2 + 2\Omega'^2_c s + \Omega'^3_c}$$

所要求的数字低通滤波器的系统函数

$$
\begin{aligned}
H(z) &= H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2f_s\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\
&= \Omega_c'^3(1+z^{-1})^3\cdot\left[(2f_s)^3(1-z^{-1})^3+2\Omega_c'(2f_s)^2(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})\right. \\
&\quad \left.+2\Omega_c'^2(2f_s)(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2+\Omega_c'^3(1+z^{-1})^3\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

将 $\Omega_c'=2\sqrt{3}f_s$ 代入,并且化简后得到

$$
H(z)=\frac{3\sqrt{3}(1+z^{-1})^3}{(1-z^{-1})^3+2\sqrt{3}(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})+6(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2+3\sqrt{3}(1+z^{-1})^3}
$$

6.9　一个数字低通滤波器的通带边界频率为 $f_1=2\,500$ Hz,通带幅度的最小值为 0.9 阻带边界频率为 $f_2=3\,524$ Hz,阻带幅度的最大值为 0.1 抽样频率为 10 kHz。采用双线性变换法、Butterworth 逼近来设计。

(a) 求相应的模拟低通滤波器的参数 N 和 Ω_c,这里 Ω_c 是标称化截止频率,基准频率是该模拟滤波器的通带边界频率。

(b) 用 (a) 题求出的 N,但是令 $\Omega_c=1$, 查表 6.1,写出系统函数 $H_a(s)$。

(c) 求出模拟滤波器实际的截止频率 Ω_{c1},写出模拟滤波器实际的系统函数 $H_{a1}(s)$。

(d) 求数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

(e) 求出数字滤波器在 $f=0$、$f=f_1$ 和 $f=f_2$ 这些关键频率处的幅频响应,检验是否满足设计要求。

解

(a) 将数字低通的各边界频率转换为数字角频率:

$$\omega_1=2\pi f_1T_s=2\pi\times 2\,500\times 10^{-4}=\pi/2$$

$$\omega_2=2\pi f_2T_s=2\pi\times 3\,524\times 10^{-4}=2.214\,2$$

所对应的模拟滤波器的角频率:

$$\Omega_1'=\frac{2}{T_s}\tan\frac{\omega_1}{2}=2f_s\tan\frac{\pi}{4}=2f_s=20\,000\ \text{rad/s}$$

$$\Omega_2'=\frac{2}{T_s}\tan\frac{\omega_2}{2}=2f_s\tan\frac{2.214\,2}{2}=39\,995\ \text{rad/s}$$

以通带边界频率 Ω_1' 为基准频率,将模拟滤波器的频率标称化,即令 $\Omega_1=1$,而 $\Omega_2=39\,995/20\,000\approx 2$。

对 B 型滤波器有

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}=\frac{1}{1+(1/\Omega_c)^{2N}\Omega^{2N}}$$

于是有

$$|H_a(j\Omega_1)|^2=\frac{1}{1+(1/\Omega_c)^{2N}\Omega_1^{2N}}=\frac{1}{1+(1/\Omega_c)^{2N}}=0.9^2$$

令

$$(1/\Omega_c)^{2N}=B^2$$

则

$$B^2=1/0.9^2-1=0.234\ 6$$

而

$$|H_a(j\Omega_2)|^2=\frac{1}{1+B^2\Omega_2^{2N}}=0.1^2$$

于是可以得到

$$\Omega_2^{2N}=\frac{1/0.1^2-1}{B^2}=421.995$$

即 $4^N=421.995$，故

$$N=\lg 421.995/\lg 4=4.36$$

于是取 $N=5$。

又由

$$(1/\Omega_c)^{2N}=(1/\Omega_c)^{10}=B^2=0.234\ 6$$

可以得到

$$\Omega_c=0.234\ 6^{-1/10}=1.156$$

(b) 现在，令模拟滤波器截止频率 $\Omega_c=1$，于是查表 6.1，得到模拟滤波器的系统函数：

$$H_a(s)=\frac{1}{s^5+3.236\ 07s^4+5.236\ 07s^3+5.236\ 07s^2+3.236\ 07s+1}$$

(c) 上面得到的 $\Omega_c=1.156$ 是模拟滤波器截止频率的标称值，实际值为

$$\Omega_{c1}=1.156\times 20\ 000=23\ 120\ \text{rad/s}$$

因此模拟滤波器实际的系统函数为

$$H_{a1}(s)=\frac{\Omega_{c1}^5}{s^5+3.236\ 07\Omega_{c1}s^4+5.236\ 07\Omega_{c1}^2s^3+5.236\ 07\Omega_{c1}^3s^2+3.236\ 07\Omega_{c1}^4s+\Omega_{c1}^5}$$

(d) 为了书写方便，现在令 $a=3.236\ 07$，$b=5.236\ 07$；$g=2/T_s=2f_s=20\ 000$，可以得到所要求的数字滤波器的系统函数

$$H(z) = H_{a1}(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=g\frac{z-1}{z+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \Omega_{c1}^5 (z+1)^5 \cdot [g^5 (z-1)^5 + a\Omega_{c1} g^4 (z-1)^4 (z+1) \\
&\quad + b\Omega_{c1}^2 g^3 (z-1)^3 (z+1)^2 + b\Omega_{c1}^3 g^2 (z-1)^2 (z+1)^3 \\
&\quad + a\Omega_{c1}^4 g (z-1)(z+1)^4 + \Omega_{c1}^5 (z+1)^5]^{-1} \\
&= (z+1)^5 \cdot [d^5 (z-1)^5 + ad^4 (z-1)^4 (z+1) + bd^3 (z-1)^3 (z+1)^2 \\
&\quad + bd^2 (z-1)^2 (z+1)^3 + ad(z-1)(z+1)^4 + (z+1)^5]^{-1}
\end{aligned}$$

上式中

$$d = g/\Omega_{c1} = 20\,000/23\,120 \approx 0.865$$

(e) 数字滤波器的频率

$$\omega = 2\pi f T_s = 2\pi f / f_s$$

数字滤波器的幅频响应

$$|H(e^{j\omega})| = |H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

当 $f=0$ 时，$\omega=0$

$$|H(e^{j0})| = |H(z)|_{z=e^{j0}=1} = |H(1)| = \left|\frac{2^5}{(1+1)^5}\right| = 1$$

是理想的幅频响应。

当 $f=f_1$ 时，$\omega=\omega_1=\pi/2$

$$H(e^{j\omega_1}) = H(z)|_{z=e^{j\pi/2}=j} = H(j)$$

故有

$$H(e^{j\omega_1}) = \frac{(j+1)^5}{d^5(j-1)^5 + ad^4(j-1)^4(j+1) + bd^3(j-1)^3(j+1)^2 + bd^2(j-1)^2(j+1)^3 + ad(j-1)(j+1)^4 + (j+1)^5}$$

$$= \frac{-1-j}{(d^5 - ad^4 - bd^3 + bd^2 + ad - 1) + j(-d^5 - ad^4 + bd^3 + bd^2 - ad - 1)}$$

于是

$$|H(e^{j\omega_1})|^2 = \frac{(-1)^2 + (-1)^2}{(d^5 - ad^4 - bd^3 + bd^2 + ad - 1)^2 + (-d^5 - ad^4 + bd^3 + bd^2 - ad - 1)^2} \approx 0.809\,9$$

所以

$$|H(e^{j\omega_1})| = 0.809\,9^{1/2} \approx 0.9$$

满足通带幅度要求的指标。

同理可以算得在阻带边界 $f_2 = 3\,524$ Hz 或者 $\omega_2 = 2.214\,2$ 之处

$$|H(e^{j\omega_2})| \approx 0.064\,4 < 0.1$$

也满足设计要求。

6.10　一个数字低通滤波器的通带边界频率为 $f_1=2\,500$ Hz，通带幅度的最小值为 0.9 阻带边界频率为 $f_2=3\,524$ Hz，阻带幅度的最大值为 0.1 抽样频率为 10 kHz。采用双线性变换法、Chebyshev 逼近来设计。求相应的模拟低通滤波器的参数 ε 和 N。

解

将数字低通的各边界频率转换为数字角频率：

$$\omega_1=2\pi f_1 T_s=2\pi\times 2\,500\times 10^{-4}=\pi/2$$

$$\omega_2=2\pi f_2 T_s=2\pi\times 3\,524\times 10^{-4}=2.214\,2$$

所对应的模拟滤波器的角频率：

$$\begin{cases}\Omega'_1=\dfrac{2}{T_s}\tan\dfrac{\omega_1}{2}=2f_s\tan\dfrac{\pi}{4}=2f_s=20\,000\ \text{rad/s}\\[2ex]\Omega'_2=\dfrac{2}{T_s}\tan\dfrac{\omega_2}{2}=2f_s\tan\dfrac{2.214\,2}{2}=39\,995\ \text{rad/s}\end{cases}$$

以通带边界频率 Ω_1' 为基准频率，将模拟滤波器的频率标称化，即令 $\Omega_1=1$，而 $\Omega_2=39\,995/20\,000\approx 2$。

下面求相应的 C 型模拟低通滤波器的参数 ε 和 N。

由

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2}=0.9^2=0.81$$

得到

$$\varepsilon^2=\frac{1}{0.81}-1=0.234\,57$$

故 $\varepsilon=0.484\,32$。

由阻带要求有

$$|H_a(j\Omega_2)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\Omega_2)}\leqslant 0.1^2=0.01$$

故有

$$C_N^2(\Omega_2)=C_N^2(2)\geqslant\frac{1/0.01-1}{\varepsilon^2}=422.05$$

于是有

$$C_N(2)\geqslant 20.544$$

递推公式：

$$C_{N+1}(2)=4C_N(2)-C_{N-1}(2)$$

由 $C_0(2)=1$，$C_1(2)=2$，可以得到

$$C_2(2)=4\times 2-1=7$$

$$C_3(2)=4\times 7-2=26>20.544$$

因此 $N=3$。

6.11　用双线性变换法设计一个 3 阶 Butterworth 数字高通滤波器，抽样频率 $f_s=$ 8 kHz，截止频率 $f_c=$ 2 kHz。

解

实际上，对于原型低通模拟滤波器和数字低通滤波器的截止频率，可以任意设定它们中的一个，另一个则按照双线性变换的频率关系式来确定。当然，应该按照使计算尽量简单的原则来设定原型低通滤波器的截止频率。因此，这样的问题可以有两种解法。

解法 1　先设定原型低通模拟滤波器的截止频率，当然，最简单的情况就是设 $\Omega_c'=1$。按照要求 $N=3$，用 Butterworth 逼近，因此可以得到模拟低通的系统函数

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c'^3}{s^3+2\Omega_c's^2+2\Omega_c'^2s+\Omega_c'^3}=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

用双线性变换式就得到原型低通数字滤波器的系统函数

$$H_1(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2f_s\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{(1+z^{-1})^3}{8f_s^3(1-z^{-1})^3+8f_s^2(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})+4f_s(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2+(1+z^{-1})^3}$$

而这个低通数字滤波器的截止频率

$$\theta_p=2\arctan\frac{T_s\Omega_c'}{2}=2\arctan\frac{1}{2f_s}$$

故有

$$\tan\frac{\theta_p}{2}=\frac{1}{2f_s}$$

题中所要求的数字高通滤波器的截止频率

$$\omega_p=\Omega_cT_s=2\pi f_c/f_s=2\pi\times 2\,000/8\,000=\pi/2$$

下面应该进行数字低通到数字高通的频率变换。

$$\alpha=-\frac{\cos\frac{\theta_p+\omega_p}{2}}{\cos\frac{\theta_p-\omega_p}{2}}=-\frac{\cos\frac{\theta_p}{2}\cos\frac{\omega_p}{2}-\sin\frac{\theta_p}{2}\sin\frac{\omega_p}{2}}{\cos\frac{\theta_p}{2}\cos\frac{\omega_p}{2}+\sin\frac{\theta_p}{2}\sin\frac{\omega_p}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta_p}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta_p}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta_p}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta_p}{2}}=\frac{\tan\frac{\theta_p}{2}-1}{\tan\frac{\theta_p}{2}+1}=\frac{1-2f_s}{1+2f_s}$$

所要求的数字高通滤波器：

$$\begin{aligned}H_d(Z) &= H_l(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}}\\
&= (1+\alpha Z^{-1}-Z^{-1}-\alpha)^3\cdot[8f_s^3(1+\alpha Z^{-1}+Z^{-1}+\alpha)^3\\
&\quad+8f_s^2(1+\alpha Z^{-1}+Z^{-1}+\alpha)^2(1+\alpha Z^{-1}-Z^{-1}-\alpha)\\
&\quad+4f_s(1+\alpha Z^{-1}+Z^{-1}+\alpha)(1+\alpha Z^{-1}-Z^{-1}-\alpha)^2\\
&\quad+(1+\alpha Z^{-1}-Z^{-1}-\alpha)^3]^{-1}\\
&= (1-\alpha)^3(1-Z^{-1})^3\cdot[8f_s^3(1+\alpha)^3(1+Z^{-1})^3\\
&\quad+8f_s^2(1+\alpha)^2(1+Z^{-1})^2(1-\alpha)(1-Z^{-1})\\
&\quad+4f_s(1+\alpha)(1+Z^{-1})(1-\alpha)^2(1-Z^{-1})^2\\
&\quad+(1-\alpha)^3(1-Z^{-1})^3]^{-1}\end{aligned}$$

而

$$1-\alpha=1-\frac{1-2f_s}{1+2f_s}=\frac{4f_s}{1+2f_s}$$

$$1+\alpha=1+\frac{1-2f_s}{1+2f_s}=\frac{2}{1+2f_s}$$

将 $1-\alpha$ 和 $1+\alpha$ 代入 $H_d(Z)$，最后得到

$$H_d(Z)=\frac{(1-Z^{-1})^3}{(1+Z^{-1})^3+2(1+Z^{-1})^2(1-Z^{-1})+2(1+Z^{-1})(1-Z^{-1})^2+(1-Z^{-1})^3}$$

解法 2 这个方法是适当选择数字低通的截止频率 θ_p，以使得数字低通到数字高通的变换简单。由相应的变换公式

$$z^{-1}=-\frac{Z^{-1}+\alpha}{1+\alpha Z^{-1}}$$

可知，如果 $\alpha=0$，便有 $z^{-1}=-Z^{-1}$，变换就会很容易。而又由相应的设计公式

$$\alpha=-\frac{\cos\dfrac{\theta_p+\omega_p}{2}}{\cos\dfrac{\theta_p-\omega_p}{2}}$$

可知，如果
$$\frac{\theta_p+\omega_p}{2}=\frac{\pi}{2}$$

则 α 的分子将为 0，故 α 为 0。在解法 1 中已经求得，数字高通的截止频率 $\omega_p=\pi/2$，因此只需要设定数字低通的截止频率 $\theta_p=\pi/2$。

现在由数字低通的截止频率求得模拟低通的截止频率

$$\Omega'_c=\frac{2}{T_s}\tan\frac{\theta_p}{2}=2f_s\tan\frac{\pi}{4}=2f_s$$

3 阶 B 型滤波器的系统函数

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c'^3}{s^3+2\Omega_c's^2+2\Omega_c'^2s+\Omega_c'^3}=\frac{8f_s^3}{s^3+4f_ss^2+8f_s^2s+8f_s^3}$$

数字低通滤波器的系统函数

$$H_1(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2f_s\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{(1+z^{-1})^3}{(1-z^{-1})^3+2(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})+2(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2+(1+z^{-1})^3}$$

最后得到数字高通滤波器的系统函数

$$H_d(Z)=H_1(z)\Big|_{z^{-1}=-Z^{-1}}$$

$$=\frac{(1-Z^{-1})^3}{(1+Z^{-1})^3+2(1+Z^{-1})^2(1-Z^{-1})+2(1+Z^{-1})(1-Z^{-1})^2+(1-Z^{-1})^3}$$

两种解法最后的结果完全相同。

6.12 用双线性变换法设计一个 3 阶 Butterworth 数字带通滤波器，抽样频率 $f_s=720$ Hz，上下边带截止频率分别为 $f_1=60$ Hz，$f_2=300$ Hz。

解

该数字带通滤波器的上下边带截止频率：

$$\omega_1=2\pi f_1/f_s=2\pi\times60/720=\pi/6$$

$$\omega_2=2\pi f_2/f_s=2\pi\times300/720=5\pi/6$$

数字低通原型滤波器的截止频率 θ_p 可以自选，为了使下面参数 k 的表示比较简单，这里选 $\theta_p=\pi/3$。则相应的模拟低通滤波器的截止频率

$$\Omega_c'=\frac{2}{T_s}\tan\frac{\theta_p}{2}=2f_s\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}f_s$$

于是可以得到 3 阶模拟低通滤波器的系统函数

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c'^3}{s^3+2\Omega_c's^2+2\Omega_c'^2s+\Omega_c'^3}=\frac{\frac{8}{3\sqrt{3}}f_s^3}{s^3+\frac{4}{\sqrt{3}}f_ss^2+\frac{8}{3}f_s^2s+\frac{8}{3\sqrt{3}}f_s^3}$$

而数字低通原型滤波器的系统函数

$$H_1(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2f_s\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}(1+z^{-1})^3}{(1-z^{-1})^3+\frac{2}{\sqrt{3}}(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})+\frac{2}{3}(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2+\frac{1}{3\sqrt{3}}(1+z^{-1})^3}$$

下面将数字低通变换为数字带通。

$$\alpha = \cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)\Big/\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\Big/\cos\frac{\pi}{3} = 0$$

$$k = \operatorname{ctan}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)\tan\frac{\theta_p}{2} = \operatorname{ctan}\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

于是得到变换公式：

$$z^{-1} = -\frac{Z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}Z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1}+1} = -\frac{Z^{-2}-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}Z^{-2}+1} = \frac{2Z^{-2}-1}{Z^{-2}-2}$$

最后可以得到所要求的数字带通滤波器的系统函数

$$H_d(Z) = H_1(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{2Z^{-2}-1}{Z^{-2}-2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}(3Z^{-2}-3)^3}{-(Z^{-2}+1)^3+\frac{2}{\sqrt{3}}(Z^{-2}+1)^2(3Z^{-2}-3)-\frac{2}{3}(Z^{-2}+1)(3Z^{-2}-3)^2+\frac{1}{3\sqrt{3}}(3Z^{-2}-3)^3}$$

6.13 一个数字高通滤波器的通带边界频率为 $f_1 = 3\,524$ Hz，通带幅度的最小值为 0.9 阻带边界频率为 $f_2 = 2\,500$ Hz，阻带幅度的最大值为 0.1 抽样频率为 10 kHz。采用双线性变换法、Butterworth 逼近来设计。求这个数字高通滤波器的系统函数 $H(z)$。

解

将数字高通的各边界频率转换为数字角频率：

$$\omega_1 = 2\pi f_1 T_s = 2\pi\times 3\,524\times 10^{-4} = 2.214\,2$$

$$\omega_2 = 2\pi f_2 T_s = 2\pi\times 2\,500\times 10^{-4} = \pi/2$$

所对应的模拟高通滤波器的角频率

$$\begin{cases} \Omega'_1 = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\omega_1}{2} = 2f_s\tan\frac{2.214\,2}{2} = 39\,995\ \text{rad/s} \\ \Omega'_2 = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\omega_2}{2} = 2f_s\tan\frac{\pi}{4} = 2f_s = 20\,000\ \text{rad/s} \end{cases}$$

以通带边界频率 Ω'_1 为基准频率，将模拟高通的频率标称化，即令 $\beta_1 = 1$，而 $\beta_2 = 20\,000/39\,995 \approx 0.5$。

现在将模拟高通的标称化频率 β 转换为模拟低通的标称化频率 Ω：

$$\begin{cases} \Omega_1 = 1/\beta_1 = 1 \\ \Omega_2 = 1/\beta_2 = 1/0.5 = 2 \end{cases}$$

对 B 型滤波器有

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}=\frac{1}{1+(1/\Omega_c)^{2N}\Omega^{2N}}$$

于是有

$$|H_a(j\Omega_1)|^2=\frac{1}{1+(1/\Omega_c)^{2N}\Omega_1^{2N}}=\frac{1}{1+(1/\Omega_c)^{2N}}=0.9^2$$

令

$$(1/\Omega_c)^{2N}=B^2$$

则

$$B^2=1/0.9^2-1=0.234\ 6$$

而

$$|H_a(j\Omega_2)|^2=\frac{1}{1+B^2\Omega_2^{2N}}=0.1^2$$

于是可以得到

$$\Omega_2^{2N}=\frac{1/0.1^2-1}{B^2}=421.995$$

即 $4^N=421.995$，故

$$N=\lg 421.995/\lg 4=4.36$$

于是取 $N=5$。

又由

$$(1/\Omega_c)^{2N}=(1/\Omega_c)^{10}=B^2=0.234\ 6$$

可以得到

$$\Omega_c=0.234\ 6^{-1/10}=1.156$$

于是模拟高通滤波器的标称化截止频率为

$$\beta_c=1/\Omega_c=1/1.156=0.865$$

而模拟高通滤波器实际的截止频率为

$$\Omega_c'=\beta_c\Omega_1'=0.865\times 39\ 995=34\ 596\ \text{rad/s}$$

现在令模拟低通的截止频率为 1，查表 6.1，可以得到 5 阶 B 型滤波器的系统函数

$$\begin{aligned}H_a(s)&=\frac{1}{s^5+3.236\ 07s^4+5.236\ 07s^3+5.236\ 07s^2+3.236\ 07s+1}\\&=\frac{1}{s^5+as^4+bs^3+bs^2+as+1}\end{aligned}$$

这里为了书写方便，已经令 $a=3.236\ 07$，$b=5.236\ 07$。

将变换式 $s=1/p$ 代入,就得到模拟高通滤波器的系统函数

$$F_{a}(p)=H_{a}(s)\big|_{s=1/p}=\frac{1}{(1/p)^{5}+a(1/p)^{4}+b(1/p)^{3}+b(1/p)^{2}+a/p+1}$$

$$=\frac{p^{5}}{1+ap+bp^{2}+bp^{3}+ap^{4}+p^{5}}$$

这是模拟高通的截止频率为 1 时的系统函数,但是实际的截止频率为 $\Omega_{c}'=34\ 596\ \mathrm{rad/s}$,于是模拟高通滤波器实际的系统函数为

$$F_{aH}(p)=\frac{p^{5}}{\Omega_{c}'^{5}+a\Omega_{c}'^{4}p+b\Omega_{c}'^{3}p^{2}+b\Omega_{c}'^{2}p^{3}+a\Omega_{c}'p^{4}+p^{5}}$$

由于双线性变换法是可以用于高通滤波器的模数变换的,故所要求的数字高通滤波器的系统函数为

$$H(z)=F_{aH}(p)\Big|_{p=\frac{2}{T_{s}}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2f_{s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned}=&(2f_{s})^{5}(1-z^{-1})^{5}\cdot[\Omega_{c}'^{5}(1+z^{-1})^{5}+a\Omega_{c}'^{4}2f_{s}(1-z^{-1})(1+z^{-1})^{4}\\&+b\Omega_{c}'^{3}(2f_{s})^{2}(1-z^{-1})^{2}(1+z^{-1})^{3}+b\Omega_{c}'^{2}(2f_{s})^{3}(1-z^{-1})^{3}(1+z^{-1})^{2}\\&+a\Omega_{c}'(2f_{s})^{4}(1-z^{-1})^{4}(1+z^{-1})+(2f_{s})^{5}(1-z^{-1})^{5}]^{-1}\end{aligned}$$

6.14 假设某时域连续滤波器 $H_{a}(s)$ 是一个低通滤波器,又知 $H(z)=H_{a}\left(\frac{Z+1}{Z-1}\right)$,于是数字滤波器 $H(z)$ 的通带中心位于

(1) $\omega=0$ (低通)

(2) $\omega=\pi$ (高通)

(3) 除 0 和 π 以外的某一频率 (带通)

请从中选择正确答案。

解

因为

$$H(z)=H_{a}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

即有

$$s=\frac{z+1}{z-1}$$

或者

$$z=\frac{s+1}{s-1}$$

将

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$$

$$s=\sigma+\mathrm{j}\Omega$$

代入

$$z=\frac{s+1}{s-1}$$

有

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}=\frac{\sigma+1+\mathrm{j}\Omega}{\sigma-1+\mathrm{j}\Omega}$$

于是有

$$r=\left|\frac{\sigma+1+\mathrm{j}\Omega}{\sigma-1+\mathrm{j}\Omega}\right|=\left[\frac{(\sigma+1)^2+\Omega^2}{(\sigma-1)^2+\Omega^2}\right]^{1/2}$$

由这个式子可知，当 $\sigma=0$（即 $s=\sigma+\mathrm{j}\Omega=\mathrm{j}\Omega$）时，$r=1$（即 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$），于是，将 $s=\mathrm{j}\Omega$ 和 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 代入 $s=\frac{z+1}{z-1}$，有

$$\mathrm{j}\Omega=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-1}$$

当 $\omega=\pi$

$$\mathrm{j}\Omega=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}-1}=\frac{0}{-2}=0$$

这就是说，模拟滤波器的频率 $\Omega=0$ 映射为数字滤波器的频率 $\omega=\pi$；又知道模拟滤波器是低通滤波器，这意味着 $\Omega=0$ 是通带中心，于是 $\omega=\pi$ 是数字滤波器的通带中心，即该数字滤波器是高通滤波器。所以答案（2）正确。

第 7 章

FIR 数字滤波器的原理及设计

7.1　令 $h(n)$ **为一** FIR **滤波器的单位抽样响应，使** $n<0$、$n>N-1$ **时** $h(n)=0$，**又设** $h(n)$ **为实序列。该滤波器的频率响应可表示为** $H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$，**这里** $H(\omega)$ **是** ω **的实函数。又设** $H(k)$ **为** $h(n)$ **的** N **点** DFT。

(a) **若** $h(n)$ **满足** $h(n)=h(N-1-n)$，**写出** $\theta(\omega)$，**并且证明当** N **为偶数时，** $H(N/2)=0$。

(b) **若** $h(n)$ **满足** $h(n)=-h(N-1-n)$，**写出** $\theta(\omega)$，**并且证明** $H(0)=0$。

解

$$H(k)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)W_N^{nk}\quad(k=0.1,\cdots,N-1)$$

(a) **若**

$$h(n)=h(N-1-n)$$

说明 $h(n)$ **偶对称，故**

$$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$$

又，当 N **为偶数时：**

$$\begin{aligned}H\left(\frac{N}{2}\right)&=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)W_N^{n\frac{N}{2}}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)(-1)^n\\&=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)(-1)^n+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(N-1-n)(-1)^{N-1-n}\\&=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)(-1)^n+(-1)^{N-1}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)(-1)^{-n}\end{aligned}$$

由于 $(-1)^{-n}=(-1)^{n}$，并且当 N 为偶数时，$N-1$ 为奇数，$(-1)^{N-1}=-1$，故有

$$H\left(\frac{N}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)(-1)^{n}-\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)(-1)^{n}=0$$

(b) 若

$$h(n)=-h(N-1-n)$$

说明 $h(n)$ 奇对称，故

$$\theta(\omega)=\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega$$

又，

$$H(0)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)$$

N 为偶数：

$$\begin{aligned}H(0)&=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(N-1-n)\\&=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[h(n)+h(N-1-n)]\\&=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[h(n)-h(n)]=0\end{aligned}$$

N 为奇数：

$$\begin{aligned}H(0)&=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(N-1-n)+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\\&=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}[h(n)+h(N-1-n)]\\&=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}[h(n)-h(n)]\\&=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+0\\&=h\left(\frac{N-1}{2}\right)\end{aligned}$$

而 $h(n)$ 中间的一项应当满足：

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right)=-h\left(N-1-\frac{N-1}{2}\right)=-h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

因此必然有

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$$

这就是说，当 N 为奇数时，也有 $H(0)=0$。

7.2　如果一个线性相位带通滤波器的频响为 $H_B(e^{j\omega})=H_B(\omega)e^{j\phi(\omega)}$

(a) 说明 $H_r(e^{j\omega})=[1-H_B(\omega)]e^{j\phi(\omega)}$ 是一个线性相位带阻滤波器的频响。

(b) 试用 $h_B(n)$ 表示 $h_r(n)$。

解

(a) 对于一个线性相位 FIR 数字滤波器，其频率响应的一般形式为

$$H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

其中 $H(\omega)$ 表示幅度，它是 ω 的实函数；$\phi(\omega)$ 表示相位，它是 ω 的线性函数。因此，如果已知一个线性相位带通 FIR 数字滤波器的频响为

$$H_B(e^{j\omega})=H_B(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

并设 $H_B(\omega)$ 已归一化，即 $0\leqslant H_B(\omega)\leqslant 1$，其理想特性如图 T7.2 上图所示，那么，设

$$H_r(\omega)=1-H_B(\omega)$$

则 $H_r(\omega)$ 的特性就如图 T7.2 下图所示，这显然是一个带阻滤波器的幅频特性。又因为 $\phi(\omega)$ 是 ω 的线性函数，因此

$$H_r(e^{j\omega})=H_r(\omega)e^{j\phi(\omega)}=[1-H_B(\omega)]e^{j\phi(\omega)}$$

是一个线性相位带阻滤波器的频响。

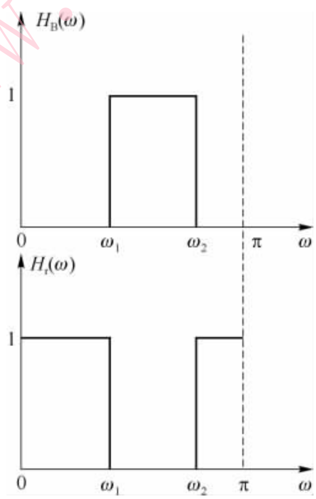


图 T7.2

(b) 线性相位 FIR 数字滤波器频响的一般形式中 $H(\omega)$ 表示幅度，它是三角函数的线性组合，其具体表达式可分为 4 种情况：

情况 1：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos(\omega n)$$

情况 2：

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

显然，当 $\omega=\pi$ 时，$H(\omega)=0$。

情况 3：

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}c(n)\sin(n\omega)$$

显然，当 $\omega=0$、$\omega=\pi$ 时，$H(\omega)=0$。

情况 4：

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}d(n)\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

显然，当 $\omega=0$ 时，$H(\omega)=0$。

对于图 T7.2 下图所示的带阻滤波器，显然 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 都应该在通带内，因此无论 $\omega=0$ 还是 $\omega=\pi$，其幅度 $H(\omega)$ 都不应该为 0，所以，这种带阻滤波器的幅频特性不可能是情况 2、3、4 这 3 种形式，只能够是情况 1，即有

$$H_{\mathrm{r}}(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a_{\mathrm{r}}(n)\cos(n\omega)$$

其中

$$a_{\mathrm{r}}(n)=\begin{cases}h_{\mathrm{r}}\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & n=0\\ 2h_{\mathrm{r}}\left(\dfrac{N-1}{2}-n\right) & n\neq0\end{cases}\tag{7.1}$$

情况 1 对于带通滤波器也适合，即有

$$H_{\mathrm{B}}(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a_{\mathrm{B}}(n)\cos(n\omega)\tag{7.2}$$

其中

$$a_B(n)=\begin{cases} h_B\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & n=0 \\ 2h_B\left(\dfrac{N-1}{2}-n\right) & n\neq 0 \end{cases} \tag{7.3}$$

而

$$H_B(\omega) = 1 - H_r(\omega) = 1 - \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_r(n)\cos(n\omega)$$

$$= 1 - a_r(0) - \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} a_r(n)\cos(n\omega) \tag{7.4}$$

将(7.2)式和(7.4)式的 $H_B(\omega)$ 的表达式进行比较,显然有

$$a_B(0) = 1 - a_r(0)$$

$$a_B(n) = -a_r(n) \quad \left(n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}\right)$$

再由(7.1)式和(7.3)式中 $a_r(n)$ 和 $a_B(n)$ 的表达式,即可得到

$$h_r\left(\frac{N-1}{2}\right) = 1 - h_B\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

$$h_r\left(\frac{N-1}{2}-n\right) = -h_B\left(\frac{N-1}{2}-n\right) \quad \left(n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}\right)$$

或者

$$h_r(n) = -h_B(n) \quad \left(n=\frac{N-1}{2}-1,\frac{N-1}{2}-2,\cdots,1,0\right)$$

由于情况1是 $h(n)$ 偶对称、N 为奇数,所以当 $n=\dfrac{N-1}{2}+1,\dfrac{N-1}{2}+2,\cdots,N-1$ 时也有

$$h_r(n) = -h_B(n)$$

7.3 设 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是两个长度相同 $(0\leqslant n\leqslant 7)$ 的序列,并且都是偶对称序列,两者之间还是循环移位的关系,即 $h_1(n)=h_2((3-n))_8 R_8(n)$。若以这两个序列分别作为两个线性相位FIR滤波器的单位抽样响应,试证明这两个滤波器的幅频响应的抽样值相同,也即

$$\left|H_1(e^{j\omega})\right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \left|H_2(e^{j\omega})\right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (k=0,1,\cdots,N-1,\ N=8)$$

证

对于 $h(n)$ 偶对称、长度 N 为偶数的情形,有

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

其中

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2}-n\right)$$

式中的求和部分表示频响的幅度,即有

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

而

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H(\omega)\right|$$

即为幅频响应。这里 $N=8$**,故对于** $h_1(n)$ **有**

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= b_1(1)\cos\frac{\omega}{2} + b_1(2)\cos\frac{3\omega}{2} + b_1(3)\cos\frac{5\omega}{2} + b_1(4)\cos\frac{7\omega}{2} \\ &= 2\left[h_1(3)\cos\frac{\omega}{2} + h_1(2)\cos\frac{3\omega}{2} + h_1(1)\cos\frac{5\omega}{2} + h_1(0)\cos\frac{7\omega}{2}\right] \end{aligned}$$

同理对于 $h_2(n)$ **有**

$$H_2(\omega) = 2\left[h_2(3)\cos\frac{\omega}{2} + h_2(2)\cos\frac{3\omega}{2} + h_2(1)\cos\frac{5\omega}{2} + h_2(0)\cos\frac{7\omega}{2}\right]$$

现在用序号 n **来代表** $h_2(n)$**,以表示序列** $h_2(n)$ **的几种情况:**

n						…	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…					
$h_2((n))_8$	…	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$h_2((-n))_8$	…	0	7	6	5	4	3	2	1	0	7	6	5	4	3	2	1	0	7	6	5	4	3	2	1	…
$h_2((3-n))_8$	…	3	2	1	0	7	6	5	4	3	2	1	0	7	6	5	4	3	2	1	0	7	6	5	4	…

由于

$$h_1(n) = h_2((3-n))_8 R_8(n)$$

故从上面的排列可知:

$$h_1(0)=h_2(3),\ h_1(1)=h_2(2),\ h_1(2)=h_2(1),\ h_1(3)=h_2(0),$$

$$h_1(4)=h_2(7),\ h_1(5)=h_2(6),\ h_1(6)=h_2(5),\ h_1(7)=h_2(4)$$

$$\begin{aligned} \left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k} &= \left|H_1(\omega)\right|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k} \\ &= 2\left|h_2(0)\cos\frac{k\pi}{8} + h_2(1)\cos\frac{3k\pi}{8} + h_2(2)\cos\frac{5k\pi}{8} + h_2(3)\cos\frac{7k\pi}{8}\right| \end{aligned}$$

$$(k=0,1,\cdots,7)$$

而

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}k\right)=\cos\left[\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)k\right]$$

$$=\cos(k\pi)\cos\frac{3k\pi}{8}+\sin(k\pi)\sin\frac{3k\pi}{8}$$

$$=(-1)^k\cos\frac{3k\pi}{8}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}k\right)=\cos\left[\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)k\right]$$

$$=\cos(k\pi)\cos\frac{k\pi}{8}+\sin(k\pi)\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)$$

$$=(-1)^k\cos\frac{k\pi}{8}$$

所以

$$|H_1(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}=2\left|\cos\frac{k\pi}{8}[h_2(0)+(-1)^k h_2(3)]+\cos\frac{3k\pi}{8}[h_2(1)+(-1)^k h_2(2)]\right|$$

$$|H_2(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}=|H_2(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$$

$$=2\left|h_2(3)\cos\frac{k\pi}{8}+h_2(2)\cos\frac{3k\pi}{8}+h_2(1)\cos\frac{5k\pi}{8}+h_2(0)\cos\frac{7k\pi}{8}\right|$$

$$=2\left|\cos\frac{k\pi}{8}[h_2(3)+(-1)^k h_2(0)]+\cos\frac{3k\pi}{8}[h_2(2)+(-1)^k h_2(1)]\right|$$

当 k 为偶数 $(k=0,2,4,6)$：

$$|H_1(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}=2\left|\cos\frac{k\pi}{8}[h_2(0)+h_2(3)]+\cos\frac{3k\pi}{8}[h_2(1)+h_2(2)]\right|$$

$$=2\left|\cos\frac{k\pi}{8}[h_2(3)+h_2(0)]+\cos\frac{3k\pi}{8}[h_2(2)+h_2(1)]\right|$$

$$=|H_2(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$$

当 k 为奇数 $(k=1,3,5,7)$：

$$|H_1(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}=2\left|\cos\frac{k\pi}{8}[h_2(0)-h_2(3)]+\cos\frac{3k\pi}{8}[h_2(1)-h_2(2)]\right|$$

$$=2\left|-\cos\frac{k\pi}{8}[h_2(3)-h_2(0)]-\cos\frac{3k\pi}{8}[h_2(2)-h_2(1)]\right|$$

$$=2\left|\cos\frac{k\pi}{8}[h_2(3)-h_2(0)]+\cos\frac{3k\pi}{8}[h_2(2)-h_2(1)]\right|$$

$$=|H_2(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$$

7.4 线性相位 FIR 滤波器的频率响应可以表示为 $H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$，其中$H(\omega)$是 ω 的实函数，而 $\theta(\omega)=[\pi-(N-1)\omega]/2$。已知 $h(0)=1$，$h(1)=2$，$h(2)=3$，$h(3)=4$。

(a) 如果冲激响应 $h(n)$ 之长度 $N=8$，请写出 $h(n)$ 的其余各点的值，问 $h(n)$ 的对称中心 $\tau=$？

(b) 如果冲激响应 $h(n)$ 之长度 $N=9$，请写出 $h(n)$ 的其余各点的值，问 $h(n)$ 的对称中心 $\tau=$？

解

根据 $\theta(\omega)$ 的表达式可知这个线性相位 FIR 滤波器的冲激响应 $h(n)$ 是奇对称的。

(a) $h(4)=-h(3)=-4$，$h(5)=-h(2)=-3$，$h(6)=-h(1)=-2$，$h(7)=-h(0)=-1$；$\tau=(N-1)/2=3.5$。

(b) $h(4)=0$，$h(5)=-h(3)=-4$，$h(6)=-h(2)=-3$，$h(7)=-h(1)=-2$，$h(8)=-h(0)=-1$；$\tau=(N-1)/2=4$。

7.5 设 $h_1(n)$ 是一个定义在区间 $0\leqslant n\leqslant 7$ 的偶对称序列，而

$$h_2(n)=h_1((n-4)_8)R_8(n)$$

令 $H_1(k)=\mathrm{DFT}[h_1(n)]$，$H_2(k)=\mathrm{DFT}[h_2(n)]$。

(a) 试用 $H_1(k)$ 来表示 $H_2(k)$。

(b) 这两个序列是否都能够作为线性相位 FIR 滤波器的冲激响应？如果 $h_1(n)$ 构成一个低通滤波器，那么 $h_2(n)$ 将构成什么类型的频选滤波器？

解

(a) $h_2(n)$ 实际上是 $h_1(n)$ 的循环移位，根据循环移位后的 DFT 的表达式，有

$$H_2(k)=W_8^{4k}H_1(k)=(-1)^kH_1(k)$$

(b) 由于 $h_1(n)$ 是偶对称的有限长序列，故可以作为线性相位 FIR 滤波器的冲激响应。

将 $h_2(n)$ 与 $h_1(n)$ 的循环移位关系用序号来表示，有：

0	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	0	1	2	3

即有

$$h_2(0)=h_1(4),\ h_2(1)=h_1(5),\ h_2(2)=h_1(6),\ h_2(3)=h_1(7),$$
$$h_2(4)=h_1(0),\ h_2(5)=h_1(1),\ h_2(6)=h_1(2),\ h_2(7)=h_1(3)$$

已知 $h_1(n)$ 是偶对称的，即有

$$h_1(0)=h_1(7),\ h_1(1)=h_1(6),\ h_1(2)=h_1(5),\ h_1(3)=h_1(4)$$

由 $h_2(n)$ 与 $h_1(n)$ 的关系，可知 $h_2(n)$ 也是偶对称的有限长序列，因此 $h_2(n)$ 也可以作为线性相位 FIR 滤波器的冲激响应。

由于 DFT 是频谱的抽样值，所以 $H_1(k)$ 和 $H_2(k)$ 分别是滤波器 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 的频率响应的抽样，因为

$$H_2(k)=(-1)^k H_1(k)$$

故有

$$|H_2(k)|=|(-1)^k H_1(k)|=|H_1(k)|$$

这就是说，两个滤波器有相同的抽样幅频响应，因此，如果 $h_1(n)$ 构成一个低通滤波器，那么 $h_2(n)$ 当然也构成一个低通滤波器。

7.6 已知一个线性相位 FIR 系统有零点 $z=1$，$z=e^{j2\pi/3}$，$z=0.5e^{-j3\pi/4}$，$z=-1/4$。

(a) 还会有其他的零点吗？如果有，请写出。

(b) 这个系统的极点在 z 平面的什么地方？它是稳定系统吗？

(c) 这个系统的冲激响应 $h(n)$ 的长度最少是多少？

解

(a) 由已知的零点，可以知道与之成组的其他零点：

$$z=e^{j2\pi/3}\rightarrow e^{-j2\pi/3}$$

$$z=0.5e^{-j3\pi/4}\rightarrow 0.5e^{j3\pi/4},\ 2e^{j3\pi/4},\ 2e^{-j3\pi/4}$$

$$z=-1/4\rightarrow -4$$

(b) 因为是 FIR 系统，故其极点都集中在 $z=0$，当然在单位圆内，当然是稳定系统。

(c) 如果 $h(n)$ 的长度为 N，那么该系统共有 $N-1$ 个零点，反之亦然。现在已经知道的该系统的零点连同导出的共有 9 个，因此 $h(n)$ 的长度最少为 10。

7.7 用窗口法设计一个线性相位因果 FIR 高通滤波器，已知阻带边界频率为 0.3π，通带边界频率为 0.5π，阻带允许的最小衰减为 20 dB。

解

根据阻带最小衰减的要求，查表 7.1，可知选矩形窗就可以了。

过渡带宽度

$$\Delta\omega = 0.5\pi - 0.3\pi = 0.2\pi$$

而矩形窗的过渡带宽度为 $4\pi/N$，因此有

$$(4\pi/N) \leqslant 0.2\pi$$

故

$$N \geqslant 4\pi/0.2\pi = 20$$

取 $N=20$。

而截止频率

$$\omega_c = 0.3\pi + \Delta\omega/2 = 0.4\pi$$

下面用傅里叶反变换求该滤波器的冲激响应：

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{jn\omega}d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{jn\omega}d\omega\right) \\ &= \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{jn\omega}\Big|_{-\pi}^{-\omega_c} + e^{jn\omega}\Big|_{\omega_c}^{\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{-jn\omega_c} - e^{jn\omega_c} + e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}\right) \\ &= \frac{1}{n\pi}[\sin(n\pi) - \sin(n\omega_c)] \qquad (-\infty < n < \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(n) &= h_d\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \\ &= \frac{\sin[(n-9.5)\pi] - \sin[(n-9.5)\omega_c]}{(n-9.5)\pi} \qquad (-\infty < n < \infty) \end{aligned}$$

加矩形窗就得到所要求的滤波器的冲激响应

$$h(n) = h'(n)w(n)$$

而

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant n \leqslant 19 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

于是

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{\sin[(n-9.5)\pi] - \sin[(n-9.5)0.4\pi]}{(n-9.5)\pi} & 0 \leqslant n \leqslant 19 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

7.8 用矩形窗设计一个线性相位高通滤波器,已知

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j(\omega-\pi)\alpha} & \pi-\omega_c\leqslant\omega\leqslant\pi \\ 0 & 0\leqslant\omega<\pi-\omega_c \end{cases}$$

(a) 求 $h(n)$ 的表达式,确定 α 和 N 的关系。

(b) 若改用升余弦窗设计,求出 $h(n)$ 的表达式。

解

(a) 先不考虑延时因子 $e^{-j\omega\alpha}$,求出以 0 为对称中心的无限长序列:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi+\omega_c} e^{j\alpha\pi}e^{jn\omega}d\omega+\int_{\pi-\omega_c}^{\pi} e^{j\alpha\pi}e^{jn\omega}d\omega\right) \\ &= \frac{e^{j\alpha\pi}}{2\pi jn}\left(e^{jn\omega}\Big|_{-\pi}^{-\pi+\omega_c}+e^{jn\omega}\Big|_{\pi-\omega_c}^{\pi}\right) \\ &= \frac{e^{j\alpha\pi}}{2jn\pi}\left(e^{-jn\pi}e^{jn\omega_c}-e^{-jn\pi}+e^{jn\pi}-e^{jn\pi}e^{-jn\omega_c}\right) \\ &= \frac{e^{j\alpha\pi}}{n\pi}\{\sin(n\pi)+\sin[n(\omega_c-\pi)]\} \quad (-\infty<n<\infty) \end{aligned}$$

参数 α 表示延时,设 $h(n)$ 的长度为 N,那么

$$\alpha=(N-1)/2$$

令 $h'(n)$ 为对称中心在 α 的无限长序列,则有

$$\begin{aligned} h'(n) &= h_d(n-\alpha) \\ &= \frac{e^{j\alpha\pi}}{(n-\alpha)\pi}\{\sin[(n-\alpha)\pi]+\sin[(n-\alpha)(\omega_c-\pi)]\} \quad (-\infty<n<\infty) \end{aligned}$$

现在对 $h'(n)$ 加长度为 N 的因果矩形窗

$$w(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则所要求的滤波器的冲激响应

$$h(n)=h'(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{e^{j\alpha\pi}\{\sin[(n-\alpha)\pi]+\sin[(n-\alpha)(\omega_c-\pi)]\}}{(n-\alpha)\pi} & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(b) 如果加升余弦窗(汉宁窗),仍有

$$h(n)=h'(n)w(n)$$

只是

$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\dfrac{2n\pi}{N-1}\right)\right] & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

于是

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{e^{j\alpha\pi}\{\sin[(n-\alpha)\pi]+\sin[(n-\alpha)(\omega_c-\pi)]\}}{2(n-\alpha)\pi}\left[1-\cos\left(\dfrac{2n\pi}{N-1}\right)\right] & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

7.9 用矩形窗设计一个线性相位因果带通滤波器，已知

$$H_d(\omega)=\begin{cases}1 & -\omega_c\leqslant\omega-\omega_0\leqslant\omega_c\\ 0 & 0\leqslant\omega<\omega_0-\omega_c,\omega_0+\omega_c<\omega\leqslant\pi\end{cases}$$

(a) 求 $h(n)$ 的表达式。

(b) 若用改进的升余弦窗设计，写出 $h(n)$ 的表达式。

解

(a) 先求以 0 为对称中心的无限长序列：

$$\begin{aligned}h_d(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\omega)e^{jn\omega}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-(\omega_0+\omega_c)}^{-(\omega_0-\omega_c)}e^{jn\omega}d\omega+\int_{\omega_0-\omega_c}^{\omega_0+\omega_c}e^{jn\omega}d\omega\right]\\&=\frac{1}{2jn\pi}\left[e^{jn\omega}\Big|_{-(\omega_0+\omega_c)}^{-(\omega_0-\omega_c)}+e^{jn\omega}\Big|_{\omega_0-\omega_c}^{\omega_0+\omega_c}\right]\\&=\frac{1}{2jn\pi}\left[e^{-jn(\omega_0-\omega_c)}-e^{jn(\omega_0-\omega_c)}+e^{jn(\omega_0+\omega_c)}-e^{-jn(\omega_0+\omega_c)}\right]\\&=\frac{1}{n\pi}\{\sin[n(\omega_0+\omega_c)]-\sin[n(\omega_0-\omega_c)]\}\qquad(-\infty<n<\infty)\end{aligned}$$

设 $h(n)$ 的长度为 N，将对称中心移到 $(N-1)/2$ 得到 $h'(n)$：

$$h'(n)=h_d\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\qquad(-\infty<n<\infty)$$

加矩形窗 $w(n)$ 得到所设计的滤波器的冲激响应

$$w(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因此有

$$h(n)=h'(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\left(n-\frac{N-1}{2}\right)(\omega_0+\omega_c)\right]-\sin\left[\left(n-\frac{N-1}{2}\right)(\omega_0-\omega_c)\right]}{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\pi} & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(b) 如果用改进的升余弦窗即哈明窗设计，仍有 $h(n)=h'(n)w(n)$，只是 $w(n)$ 为哈明窗，即有

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left[\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)(\omega_0+\omega_c)\right]-\sin\left[\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)(\omega_0-\omega_c)\right]}{\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)\pi}\left(0.54-0.46\cos\dfrac{2n\pi}{N-1}\right) & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

7.10 用哈明窗设计一个线性相位正交变换网络，已知

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}je^{-j\omega\alpha} & -\pi\leqslant\omega<0\\ -je^{-j\omega\alpha} & 0\leqslant\omega\leqslant\pi\end{cases}$$

(a) 求 $h(n)$ 的表达式，写出 α 与 N 之间的关系式。

(b) N 为奇数或是偶数对于 $h(n)$ 的影响的主要差别是什么？那么应该选择 N 是偶数还是奇数？

(c) 若用 Kaiser 窗设计，写出 $h(n)$ 的表达式。

解

(a) 先不考虑延时，即对于

$$H'_d(e^{j\omega})=\begin{cases}j & -\pi\leqslant\omega<0\\ -j & 0\leqslant\omega\leqslant\pi\end{cases}$$

进行傅里叶反变换：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H'_d(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}je^{jn\omega}d\omega-\int_{0}^{\pi}je^{jn\omega}d\omega\right)$$

$$=\frac{j}{2\pi}\left(\frac{1}{jn}e^{jn\omega}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{jn}e^{jn\omega}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{2n\pi}(1-e^{-jn\pi}-e^{jn\pi}+1)$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\qquad(-\infty<n<\infty)$$

现在考虑延时：$\alpha=\dfrac{N-1}{2}$，N 为 $h(n)$ 之长度，得到以 α 为对称中心的无限长序列 $h'(n)$：

$$h'(n)=h_d(n-\alpha)=\frac{1-(-1)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)\pi}=\frac{1-(-1)^n(-1)^\alpha}{(n-\alpha)\pi}\qquad(-\infty<n<\infty)$$

对 $h'(n)$ 加哈明窗就得到所要求的 $h(n)$：

$$h(n)=h'(n)w(n)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-(-1)^n(-1)^\alpha}{(n-\alpha)\pi}\left(0.54-0.46\cos\dfrac{2n\pi}{N-1}\right) & 0\leqslant n\leqslant N-1,\alpha=\dfrac{N-1}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(b) 如果 N 为奇数,则 $\alpha=(N-1)/2$ 为整数,于是 $(-1)^\alpha$ 也是整数,从上面 $h(n)$ 的表达式可知,此时 $h(n)$ 是实数序列 如果 N 为偶数,则 $\alpha=(N-1)/2$ 是分数,于是计算 $(-1)^\alpha$ 将对 -1 开方,其结果为复数,故 $h(n)$ 会成为复数序列。$h(n)$ 为复数的滤波器实现时当然不如实数 $h(n)$ 方便,因此应该选择 N 为奇数。

(c) 若用凯塞窗设计,冲激响应为

$$h(n)=h'(n)w(n)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-(-1)^n(-1)^\alpha\cdot I_0\left(\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2}\right)}{(n-\alpha)\pi\cdot I_0(\beta)} & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

7.11 用矩形窗设计一个线性相位数字微分器:

$$H_d(e^{j\omega})=j\omega e^{-j\omega\alpha}\qquad(|\omega|\leqslant\pi)$$

求出 $h(n)$ $(0\leqslant n\leqslant N-1)$ 的表达式,并确定 α 与 N 的关系。

解

先不考虑延时,即对于

$$H'_d(e^{j\omega})=j\omega$$

进行傅里叶反变换:

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H'_d(e^{j\omega})\,e^{jn\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}j\omega e^{jn\omega}d\omega$$

$$=\frac{j}{2\pi}\frac{e^{jn\omega}}{(jn)^2}(jn\omega-1)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{-j}{2n^2\pi}\left[e^{jn\pi}(jn\pi-1)-e^{-jn\pi}(-jn\pi-1)\right]$$

$$=\frac{-j}{2n^2\pi}\left[jn\pi(e^{jn\pi}+e^{-jn\pi})-(e^{jn\pi}-e^{-jn\pi})\right]$$

$$=\frac{\cos(n\pi)}{n}-\frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi}\qquad(-\infty<n<\infty)$$

现在考虑延时：$\alpha=\frac{N-1}{2}$，N 为 $h(n)$ 之长度，得到以 α 为对称中心的无限长序列 $h'(n)$：

$$h'(n)=h_d(n-\alpha)=\frac{\cos[(n-\alpha)\pi]}{n-\alpha}-\frac{\sin[(n-\alpha)\pi]}{(n-\alpha)^2\pi}\qquad(-\infty<n<\infty)$$

对 $h'(n)$ 加矩形窗就得到所要求的 $h(n)$：

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{\cos[(n-\alpha)\pi]}{n-\alpha}-\dfrac{\sin[(n-\alpha)\pi]}{(n-\alpha)^2\pi} & 0\leqslant n\leqslant N-1,\alpha=\dfrac{N-1}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

7.12 一个线性相位 FIR 低通滤波器的幅频响应为

$$H_d(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

已知 $f_c=500$ Hz，设抽样率为 2 kHz，单位抽样响应长度为 30 ms，用矩形窗设计该数字滤波器。

(a) 求出 $h(n)$ 之长度 N，以及延时 τ。

(b) 求出 $h(n)$ $(0\leqslant n\leqslant N-1)$。

(c) 设其频率响应可以表示为 $H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$，这里 $H(\omega)$ 是 ω 的实函数。请写出 $H(\omega)$ 和 $\theta(\omega)$ 的表示式。

解

(a) 已知每秒有 2 000 个抽样点，故单位抽样响应 $h(n)$ 之长度

$$N=2\,000\times30\times10^{-3}=60$$

而延时

$$\tau=\frac{N-1}{2}=29.5$$

截止频率

$$\omega_c=2\pi f_c/f_s=\frac{2\pi\times500}{2\,000}=\frac{\pi}{2}$$

(b)
$$\begin{aligned}h_d(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\omega)e^{jn\omega}d\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{jn\omega}d\omega=\frac{1}{2jn\pi}e^{jn\omega}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}\\ &=\frac{1}{2jn\pi}(e^{jn\omega_c}-e^{-jn\omega_c})=\frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}\qquad(-\infty<n<\infty)\end{aligned}$$

而

$$h'(n)=h_d(n-\tau)\qquad(-\infty<n<\infty)$$

因此

$$h(n)=h'(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{\sin[(n-\tau)\omega_c]}{(n-\tau)\pi} & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(c) 显然,$h_d(n)$关于0偶对称,所以$h(n)$关于对称中心τ偶对称,并且$h(n)$之长度$N=60$为偶数,因此属于线性相位FIR滤波器频率响应的情况2的情形,故有:

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{30}b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

而

$$b(n)=2h(30-n)$$

$$\theta(\omega)=-\tau\omega=-29.5\omega$$

7.13 用频率抽样法设计一线性相位因果低通滤波器,$N=15$,幅频响应的抽样值为

$$H_k=\begin{cases}1 & k=0\\ 0.5 & k=1,14\\ 0 & k=2,3,\cdots,13\end{cases}$$

(a) 求相频响应的抽样值$\phi(k)$。

(b) 求$h(n)$及$H(e^{j\omega})$的表达式。

解

(a) 令$h(n)$的DFT

$$H(k)=H_k e^{j\phi(k)}\quad(k=0,1,\cdots,N-1,N=15)$$

又有

$$H(k)=H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\quad(k=0,1,\cdots,N-1)$$

比较$H(k)$的两个表达式,可以得到

$$H_k=H\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\phi(k)=\theta\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

现在来考察这个滤波器的频率响应属于4种情况中的哪一种。首先,N为奇数;另外,如果$h(n)$奇对称,应该有

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}c(n)\sin(n\omega)$$

将 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$ 代入，显然，当 $k=0$ 时 $H\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=0$，但是根据已知条件，当 $k=0$ 时 $H_k=1$，这就说明 $h(n)$ 应该是偶对称的，于是应该属于情况 1。

已经知道，对于情况 1，应该满足

$$H_k=H_{N-k}=H_{15-k}\qquad(k=0,1,\cdots,14)$$

显然，题中所给的 H_k 是满足这样的对称关系的。另外，对于相频响应有

$$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega=-7\omega$$

于是，相频响应的抽样值

$$\phi(k)=\theta\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=-7\times\frac{2\pi}{15}k=-\frac{14}{15}\pi k$$

(b) $$h(n)=\mathrm{IDFT}[H(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)W_N^{-kn}\qquad(0\leqslant n\leqslant N-1)$$

由于当 $k=2,3,\cdots,13$ 时 $H_k=0$，故也有 $H(k)=0$，因此

$$h(n)=\frac{1}{15}\left[H(0)+H(1)W_{15}^{-n}+H(14)W_{15}^{-14n}\right]\qquad(0\leqslant n\leqslant 14)$$

$$H(0)=H_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}=H_0=1$$

$$H(1)=H_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}14\pi/15}=0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/15}=-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/15}$$

$$\begin{aligned}H(14)&=H_{14}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}14\pi(14/15)}=0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}14\pi(1/15-1)}\\&=0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}14\pi/15}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}14\pi}=0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(1-1/15)}=-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/15}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}h(n)&=\frac{1}{15}\left(1-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{15}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{15}}-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{15}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi 14n}{15}}\right)\\&=\frac{1}{15}\left[1-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{15}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{15}}-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{15}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\left(1-\frac{1}{15}\right)}\right]\\&=\frac{1}{15}\left[1-0.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{15}(2n+1)}-0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{15}(2n+1)}\right]\\&=\frac{1}{15}\left[1-\cos\frac{(2n+1)\pi}{15}\right]\qquad(0\leqslant n\leqslant 14)\end{aligned}$$

注：上面的推导用到了 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n}=1$。

而

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}7\omega}\sum_{n=0}^{7}a(n)\cos(n\omega)$$

其中

$$a(n)=\begin{cases}h(7) & n=0\\ 2h(7-n) & n=1,2,\cdots,7\end{cases}$$

7.14　在 $h(n)$ 偶对称，长度 $N=8$ 的情况下，已知其频率响应的幅度可以表示为

$$\hat{H}(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

证明该幅度还可以表示为

$$\hat{H}(e^{j\omega})=\cos\frac{\omega}{2}\sum_{n=0}^{3}\hat{b}(n)\cos(n\omega)$$

并且写出 $\hat{b}(n)$ $(n=0,1,2,3)$ 的表示式（注意：请详细写出推导过程）。

解

下面的推导要利用三角公式：

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=1}^{4}b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]\\
&= b(4)\cos(3.5\omega)+b(3)\cos(2.5\omega)+b(2)\cos(1.5\omega)+b(1)\cos(0.5\omega)\\
&\quad+b(4)\cos(2.5\omega)-b(4)\cos(2.5\omega)\\
&= 2b(4)\cos(3\omega)\cos(0.5\omega)+[b(3)-b(4)]\cos(2.5\omega)+b(2)\cos(1.5\omega)\\
&\quad+b(1)\cos(0.5\omega)+[b(3)-b(4)]\cos(1.5\omega)-[b(3)-b(4)]\cos(1.5\omega)\\
&= 2b(4)\cos(3\omega)\cos(0.5\omega)+[2b(3)-2b(4)]\cos(2\omega)\cos(0.5\omega)\\
&\quad+\{b(2)-[b(3)-b(4)]\}\cos(1.5\omega)+b(1)\cos(0.5\omega)\\
&\quad+\{b(2)-[b(3)-b(4)]\}\cos(0.5\omega)-\{b(2)-[b(3)-b(4)]\}\cos(0.5\omega)\\
&= 2b(4)\cos(3\omega)\cos(0.5\omega)+[2b(3)-2b(4)]\cos(2\omega)\cos(0.5\omega)\\
&\quad+\{2b(2)-[2b(3)-2b(4)]\}\cos(\omega)\cos(0.5\omega)\\
&\quad+\{b(1)-b(2)+[b(3)-b(4)]\}\cos(0.5\omega)\\
&= \hat{b}(3)\cos\frac{\omega}{2}\cos(3\omega)+\hat{b}(2)\cos\frac{\omega}{2}\cos(2\omega)+\hat{b}(1)\cos\frac{\omega}{2}\cos(\omega)+\hat{b}(0)\cos\frac{\omega}{2}\\
&= \cos\frac{\omega}{2}\sum_{n=0}^{3}\hat{b}(n)\cos(n\omega)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\hat{b}(3)=2b(4)\\ \hat{b}(k-1)=2b(k)-\hat{b}(k) \quad (k=3,2)\\ \hat{b}(0)=b(1)-\hat{b}(1)/2\end{cases}$$

7.15 在 $h(n)$ 奇对称,长度 $N=9$ 的情况下,已知其频率响应的幅度可以表示为

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{4} c(n)\sin(n\omega)$$

证明该幅度还可以表示为

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \sin\omega \sum_{n=0}^{3} \hat{c}(n)\cos(n\omega)$$

并且写出 $\hat{c}(n)$ $(n=0,1,2,3)$ 的表示式(注意:请详细写出推导过程)。

解

下面的推导要利用三角公式:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=1}^{4} c(n)\sin(n\omega)\\ &= c(4)\sin(4\omega) + c(3)\sin(3\omega) + c(2)\sin(2\omega) + c(1)\sin\omega - c(4)\sin(2\omega)\\ &\quad + c(4)\sin(2\omega)\\ &= 2c(4)\sin\omega\cos(3\omega) + c(3)\sin(3\omega) + [c(4)+c(2)]\sin(2\omega) + c(1)\sin\omega\\ &\quad - c(3)\sin\omega + c(3)\sin\omega\\ &= 2c(4)\sin\omega\cos(3\omega) + 2c(3)\sin\omega\cos(2\omega) + [c(4)+c(2)]\sin(2\omega)\\ &\quad + [c(3)+c(1)]\sin\omega\\ &= \sin\omega\{2c(4)\cos(3\omega) + 2c(3)\cos(2\omega) + 2[c(4)+c(2)]\cos\omega\\ &\quad + [c(3)+c(1)]\}\\ &= \sin\omega\sum_{n=0}^{3}\hat{c}(n)\cos(n\omega)\end{aligned}$$

注:上面的推导还用到了三角公式 $\sin(2\omega)=2\sin\omega\cos\omega$。

其中

$$\begin{cases}\hat{c}(3)=2c(4)\\ \hat{c}(2)=2c(3)\\ \hat{c}(k-1)=2c(k)+\hat{c}(k+1) \qquad (k=2)\\ \hat{c}(0)=c(1)+\hat{c}(2)/2\end{cases}$$

7.16　试证明在用等波纹逼近法设计线性相位 FIR 滤波器时，如果冲激响应 $h(n)$ 奇对称，并且其长度 N 为偶数，那么幅度函数 $\hat{H}(e^{j\omega})$ 的极值数 N_e 的约束条件为 $N_e \leqslant \frac{N}{2}$。

证

对于这种情况（情况 4），有

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$= \sin\frac{\omega}{2}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\hat{d}(n)\cos(n\omega)$$

由三角公式

$$\cos(n\omega) = \sum_{m=0}^{n} d_{mn}\cos^m\omega$$

得到

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \sin\frac{\omega}{2}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\hat{d}(n)\left(\sum_{m=0}^{n} d_{mn}\cos^m\omega\right)$$

$$= \sin\frac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\overline{d}(k)\cos^k\omega$$

其中系数 $\overline{d}(k)$ 是通过合并 $\cos^k\omega$ 的同幂次项而得到的。现在通过求导来考察极值点。

$$\frac{d}{d\omega}\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\cos\frac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\overline{d}(k)\cos^k\omega + \sin\frac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}k\overline{d}(k)\cos^{k-1}\omega(-\sin\omega)$$

令 $\frac{d}{d\omega}\hat{H}(e^{j\omega})=0$，则有

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\overline{d}(k)\cos^k\omega = \sin\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}k\overline{d}(k)\cos^k\omega$$

两边同除以 $\cos\frac{\omega}{2}$，并利用三角公式

$$\tan\frac{\omega}{2}=\frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}$$

则上式变为

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\bar{d}(k)\cos^k\omega=\frac{1-\cos\omega}{\cos\omega}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}k\bar{d}(k)\cos^k\omega$$

令 $x=\cos\omega$，则上式变为

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\bar{d}(k)x^{k+1}=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}k\bar{d}(k)x^k-\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}k\bar{d}(k)x^{k+1}$$

将 x 的同次幂的系数合并，则上式可以写为

$$\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}g(k)x^{k+1}=0$$

显然，上式左边是一个 x 的 $N/2$ 次多项式，它有 $N/2$ 个根，这也就是说，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 有 $N/2$个零点，或者说 $\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 至多有 $N/2$ 个极值。设 N_{e} 为 $\hat{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的极值数，因此对于情况 4，N_{e} 的约束条件为

$$N_{\mathrm{e}}\leqslant\frac{N}{2}$$

第 8 章
数字滤波器的结构

8.1　分别用代数方程组求解法和 Mason 公式来求图 P8.1 所示流图的系统函数，并且写出差分方程。

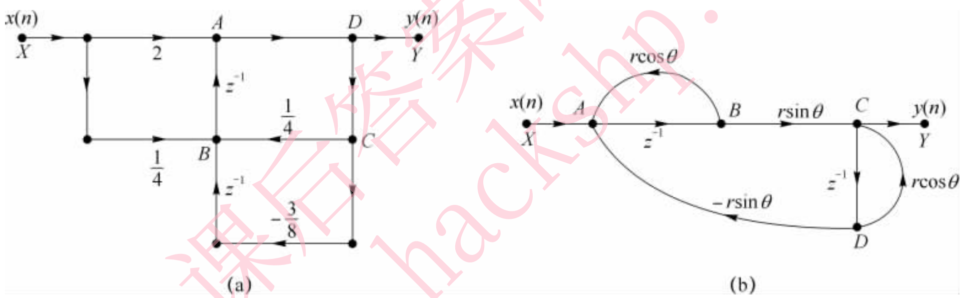


图 P8.1

解

① **代数方程组求解法**

(a) **节点** A、B、C、D **如图 P8.1 (a) 中所示，要求的系统函数** $H = Y / X$，**但是实际上** $Y = D$。**下面列出 4 个节点变量之值：**

$$\begin{cases} A = 2X + z^{-1}B \\ B = \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}C - \frac{3}{8}z^{-1}C = \frac{1}{4}X + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}z^{-1}\right)C \\ C = D \\ D = A \end{cases}$$

实际上，这 4 个方程可以合并为两个：

$$\begin{cases} A = 2X + z^{-1}B & (8.1) \\ B = \frac{1}{4}X + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}z^{-1}\right)A & (8.2) \end{cases}$$

将(8.1)式代入(8.2)式：

$$B=\frac{1}{4}X+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}z^{-1}\right)\left(2X+z^{-1}B\right)$$

由这个式子可以解出：

$$B=\frac{(3/4)\left(1-z^{-1}\right)X}{1-z^{-1}/4+(3/8)z^{-2}}$$

将 B 代入(8.1)式，得到

$$\begin{aligned}A&=2X+\frac{z^{-1}(3/4)\left(1-z^{-1}\right)X}{1-z^{-1}/4+(3/8)z^{-2}}\\&=\frac{2+(1/4)z^{-1}}{1-z^{-1}/4+(3/8)z^{-2}}X\end{aligned}$$

因此，系统函数为

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{D}{X}=\frac{A}{X}=\frac{2+(1/4)z^{-1}}{1-(1/4)z^{-1}+(3/8)z^{-2}}$$

(b) 节点 A、B、C、D 如图 P8.1(b)中所示，要求的系统函数为 $H=Y/X$，但是实际上 $Y=C$。下面写出节点变量之值：

$$\begin{cases}A=X+r\cos\theta B-r\sin\theta D\\B=z^{-1}A\\C=r\sin\theta B+r\cos\theta D\\D=z^{-1}C\end{cases}$$

将含有 4 个未知数的这 4 个方程组成的方程组用矩阵形式表示出：

$$\begin{pmatrix}1&-r\cos\theta&0&r\sin\theta\\z^{-1}&-1&0&0\\0&r\sin\theta&-1&r\cos\theta\\0&0&z^{-1}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

只需要求出未知数 C：

$$C=\Delta_3/\Delta$$

$$\begin{aligned}\Delta&=\begin{vmatrix}1&-r\cos\theta&0&r\sin\theta\\z^{-1}&-1&0&0\\0&r\sin\theta&-1&r\cos\theta\\0&0&z^{-1}&-1\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}-1&0&0\\r\sin\theta&-1&r\cos\theta\\0&z^{-1}&-1\end{vmatrix}-z^{-1}\begin{vmatrix}-r\cos\theta&0&r\sin\theta\\r\sin\theta&-1&r\cos\theta\\0&z^{-1}&-1\end{vmatrix}\\&=\left(-1+r\cos\theta z^{-1}\right)-z^{-1}\left(-r\cos\theta+r^2\sin^2\theta z^{-1}+r^2\cos^2\theta z^{-1}\right)\\&=-1+2r\cos\theta z^{-1}-r^2z^{-2}\end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -r\cos\theta & X & r\sin\theta \\ z^{-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & r\sin\theta & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= X\begin{vmatrix} z^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & r\sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = Xz^{-1}\begin{vmatrix} r\sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -r\sin\theta\, z^{-1}X$$

因此,系统函数为

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{C}{X} = \frac{\Delta_3/\Delta}{X} = \frac{r\sin\theta\, z^{-1}}{1-2r\cos\theta\, z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

② 用 Mason 公式求解

系统函数

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{\sum g_i\Delta_i}{\Delta}$$

(a) 这个流图有两个环路,并且这两个环路相互接触,故

$$\Delta = 1 - z^{-1}/4 + (3/8)z^{-2}$$

从源点 X 到汇点 Y 有两条通路,并且这两条通路都与每个环路接触,所以 Mason 公式的分子中 Δ_i 均为 1,只需要将两个通路传输相加,即分子为

$$2 + z^{-1}/4$$

于是可以得到系统函数

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{2+(1/4)z^{-1}}{1-(1/4)z^{-1}+(3/8)z^{-2}}$$

由这个式子有

$$Y(z)[1-(1/4)z^{-1}+(3/8)z^{-2}] = X(z)[2+(1/4)z^{-1}]$$

于是可以得到差分方程

$$y(n) = 2x(n) + (1/4)x(n-1) + (1/4)y(n-1) - (3/8)y(n-2)$$

(b) 这个流图有 3 个环路,环路传输分别为:

(1) $r\cos\theta z^{-1}$

(2) $r\cos\theta z^{-1}$

(3) $-r^2\sin^2\theta z^{-2}$

其中,环路 (1) 和环路 (2) 互不接触,因此,Mason 公式的分母为:

$$\Delta = 1 - r\cos\theta z^{-1} - r\cos\theta z^{-1} + r^2\sin^2\theta z^{-2} + r^2\cos^2\theta z^{-2}$$
$$= 1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2z^{-2}$$

从源点 X 到汇点 Y 只有一条通路，并且这条通路与所有的环路都接触，于是 Mason 公式的分子为

$$r\sin\theta z^{-1}$$

于是得到系统函数

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{r\sin\theta z^{-1}}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

由此式得到

$$Y(z)\left[1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}\right]=X(z)r\sin\theta z^{-1}$$

故差分方程为

$$y(n)=r\sin\theta x(n-1)+2r\cos\theta y(n-1)-r^2y(n-2)$$

8.2 一个系统的信号流图如图 P8.2 所示，X 为源点，Y 为汇点，设系统函数为 H。分别用代数方程组求解法和 Mason 公式求其系统函数 $H=Y/X$，并且写出差分方程。

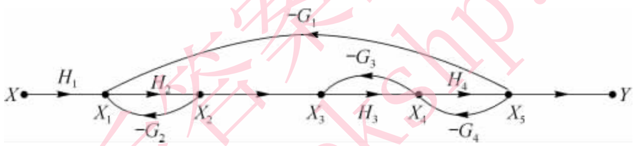


图 P8.2

解

① 代数方程组求解法

由流图得到各节点变量之值

$$X_1=H_1X-G_2X_2-G_1X_5$$
$$X_2=H_2X_1$$
$$X_3=X_2-G_3X_4$$
$$X_4=H_3X_3-G_4X_5$$
$$X_5=H_4X_4$$

这 5 个等式组成一个含有 5 个未知数的代数方程组，下面将这个方程组用矩阵表示出来：

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{H_1} & \frac{G_2}{H_1} & 0 & 0 & \frac{G_1}{H_1}\\ H_2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -G_3 & 0\\ 0 & 0 & H_3 & -1 & -G_4\\ 0 & 0 & 0 & H_4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

要求系统函数 $H=Y/X$，由于 $Y=X_5$，所以只需从方程组中解出未知数 X_5。

由克莱姆法则

$$X_5=\Delta_5/\Delta$$

Δ 为线性方程组系数矩阵的行列式。

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{H_1} & \frac{G_2}{H_1} & 0 & 0 & \frac{G_1}{H_1}\\ H_2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -G_3 & 0\\ 0 & 0 & H_3 & -1 & -G_4\\ 0 & 0 & 0 & H_4 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{H_1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -G_3 & 0\\ 0 & H_3 & -1 & -G_4\\ 0 & 0 & H_4 & -1\end{vmatrix}-H_2\begin{vmatrix}\frac{G_2}{H_1} & 0 & 0 & \frac{G_1}{H_1}\\ 1 & -1 & -G_3 & 0\\ 0 & H_3 & -1 & -G_4\\ 0 & 0 & H_4 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-1}{H_1}\begin{vmatrix}-1 & -G_3 & 0\\ H_3 & -1 & -G_4\\ 0 & H_4 & -1\end{vmatrix}-H_2\left(\frac{G_2}{H_1}\begin{vmatrix}-1 & -G_3 & 0\\ H_3 & -1 & -G_4\\ 0 & H_4 & -1\end{vmatrix}-\frac{G_1}{H_1}\begin{vmatrix}1 & -1 & -G_3\\ 0 & H_3 & -1\\ 0 & 0 & H_4\end{vmatrix}\right)$$

$$=(-1-G_3H_3-G_4H_4)[-(1/H_1)(1+G_2H_2)]+(G_1H_2/H_1)(H_3H_4)$$

$$=(1/H_1)(1+G_2H_2+G_3H_3+G_3H_3G_2H_2+G_4H_4+G_4H_4G_2H_2+G_1H_2H_3H_4)$$

而

$$\Delta_5=\begin{vmatrix}\frac{1}{H_1} & \frac{G_2}{H_1} & 0 & 0 & X\\ H_2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -G_3 & 0\\ 0 & 0 & H_3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & H_4 & 0\end{vmatrix}=X\cdot\Delta'_5$$

$$\Delta'_5=\begin{vmatrix}H_2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -G_3\\ 0 & 0 & H_3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & H_4\end{vmatrix}=H_2H_3H_4$$

因此,系统函数

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{X_5}{X}=\frac{\Delta_5}{\Delta\cdot X}=\frac{\Delta_5'}{\Delta}$$

$$=\frac{H_1H_2H_3H_4}{1+G_2H_2+G_3H_3+G_4H_4+G_1H_2H_3H_4+G_2H_2G_3H_3+G_2H_2G_4H_4}$$

② 用 Mason 公式求解

共有 4 个环路,环路传输分别为

(1) $-G_2H_2$

(2) $-G_3H_3$

(3) $-G_4H_4$

(4) $-G_1H_2H_3H_4$

其中两两互不接触的环路是 (1) 和 (2),(1) 和 (3)。因此 Mason 公式的分母为:

$$\Delta=1+G_2H_2+G_3H_3+G_4H_4+G_1H_2H_3H_4+G_2H_2G_3H_3+G_2H_2G_4H_4$$

从输入 X 到输出 Y 只有一条通路,通路传输 $=H_1H_2H_3H_4$,并且它与所有的环路都接触。于是根据 Mason 公式即可写出系统函数

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{H_1H_2H_3H_4}{1+G_2H_2+G_3H_3+G_4H_4+G_1H_2H_3H_4+G_2H_2G_3H_3+G_2H_2G_4H_4}$$

差分方程为

$$y(n)=\frac{H_1H_2H_3H_4}{1+G_2H_2+G_3H_3+G_4H_4+G_1H_2H_3H_4+G_2H_2G_3H_3+G_2H_2G_4H_4}x(n)$$

8.3 图 P8.3 中有 4 个网络,分别画出它们的转置网络,并且用 Mason 公式说明为什么转置网络与原网络有相同的系统函数。

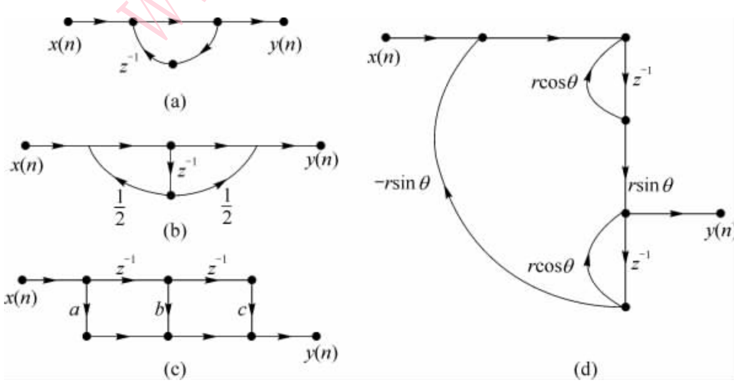


图 P8.3

解

(a) 转置网络如图 T8.3(a)所示,它与原网络都只有一个环路,环路传输均为 z^{-1};由 X 到 Y 又都只有一条通路,通路传输均为 1 并且都是通路与环路相接触。故根据 Mason 公式,这两个网络有相同的系统函数

$$H = Y/X = 1/(1 - z^{-1})$$

(b) 转置网络如图 T8.3(b)所示,它与原网络的环路情况以及由 X 到 Y 的通路情况完全相同,即:一个环路传输为 $z^{-1}/2$ 的环路,两条由 X 到 Y 的通路,通路传输分别为:1、$z^{-1}/2$,这两条通路都与环路接触。所以这两个网络的系统函数都是

$$H = Y/X = (1 + z^{-1}/2)/(1 - z^{-1}/2)$$

(c) 转置网络如图 T8.3(c)所示,它与原网络都是前馈网络,即没有环路;由 X 到 Y 的通路情况也相同。所以这两个网络的系统函数都是

$$H = Y/X = a + bz^{-1} + cz^{-2}$$

(d) 转置网络如图 T8.3(d)所示,它与原网络的环路情况以及由 X 到 Y 的通路情况完全相同,即有 3 个环路,环路传输分别为:

(1) $r\cos\theta z^{-1}$

(2) $r\cos\theta z^{-1}$

(3) $-r^2\sin^2\theta z^{-2}$

其中,环路(1)和环路(2)互不接触,因此,Mason 公式的分母为:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - r\cos\theta z^{-1} - r\cos\theta z^{-1} + r^2\sin^2\theta z^{-2} + r^2\cos^2\theta z^{-2}\\ &= 1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}\end{aligned}$$

从源点 X 到汇点 Y 只有一条通路,并且这条通路与所有的环路都接触,于是 Mason 公式的分子为

$$r\sin\theta z^{-1}$$

所以转置网络与原网络的系统函数均为

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{r\sin\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

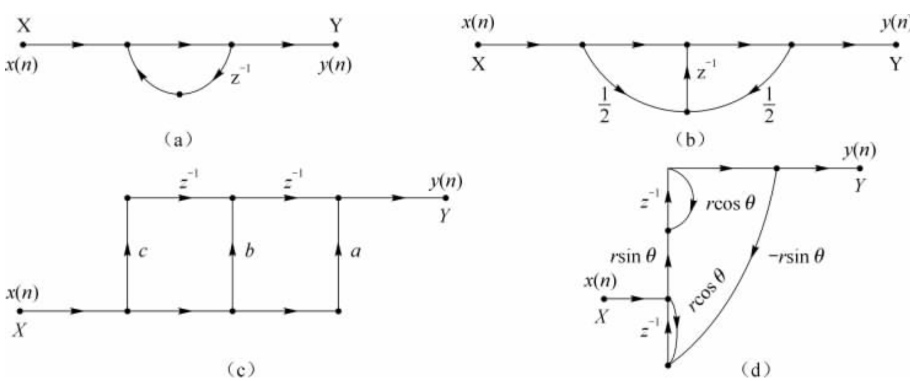


图 T8.3

8.4 用最方便的方法求出图 P8.4 的系统函数 $H(z)=Y(z)/X(z)$。

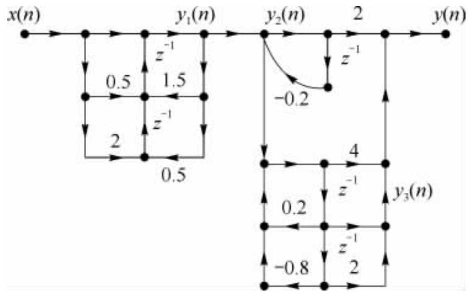


图 P8.4

解

整个网络由前后两个子网络级联而成,下面用 Mason 公式分别求这两个子网络的系统函数。

第一个子网络 输入为 $x(n)$,输出为 $y_1(n)$,从输入到输出有 3 条通路,整个子网络有相互接触的两个环路,并且每一条通路都与每一个环路相接触,因此可以写出其系统函数

$$H_1(z)=\frac{Y_1(z)}{X(z)}=\frac{1+0.5z^{-1}+2z^{-2}}{1-1.5z^{-1}-0.5z^{-2}}$$

第二个子网络 输入为 $y_1(n)$,输出为 $y(n)$。这个子网络共有 3 个环路,环路传输分别为:

(1) $-0.2z^{-1}$

(2) $0.2z^{-1}$

(3) $-0.8z^{-2}$

显然,(1) 和 (2) 不接触,(1) 和 (3) 也不接触,故有

$$\begin{aligned}\Delta&=1+0.2z^{-1}-0.2z^{-1}+0.8z^{-2}-0.04z^{-2}+0.16z^{-3}\\&=1+0.76z^{-2}+0.16z^{-3}\end{aligned}$$

由 $y_1(n)$ 到 $y(n)$ 有 4 条通路:

1) 通路传输 $g_1=2$,与环路 (2)、(3) 不接触,而环路 (2)、(3) 相互接触,故

$$\Delta_1=1-0.2z^{-1}+0.8z^{-2}$$

2) 通路传输 $g_2=4$,与所有的环路都接触,故

$$\Delta_2=1$$

3) 通路传输 $g_3=z^{-1}$,与所有的环路都接触,故

$$\Delta_3=1$$

4) 通路传输 $g_4=2z^{-2}$,与所有的环路都接触,故

$$\Delta_4=1$$

于是可以得到系统函数

$$H_2(z)=\frac{Y(z)}{Y_1(z)}$$

$$=\frac{2(1-0.2z^{-1}+0.8z^{-2})+4+z^{-1}+2z^{-2}}{1+0.76z^{-2}+0.16z^{-3}}$$

$$=\frac{6+0.6z^{-1}+3.6z^{-2}}{1+0.76z^{-2}+0.16z^{-3}}$$

因此整个网络的系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=H_1(z)H_2(z)$$

$$=\frac{(1+0.5z^{-1}+2z^{-2})(6+0.6z^{-1}+3.6z^{-2})}{(1-1.5z^{-1}-0.5z^{-2})(1+0.76z^{-2}+0.16z^{-3})}$$

8.5 用直接型以及正准型结构实现以下系统函数:

(a) $H(z)=0.8\dfrac{3z^3+2z^2+2z+6}{z^3+4z^2+3z+2}$

(b) $H(z)=\dfrac{-5+2z^{-1}-0.5z^{-2}}{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}$

(c) $H(z)=\dfrac{-z+2}{8z^2-2z-3}$

解

(a) $H(z)=0.8\dfrac{3+2z^{-1}+2z^{-2}+6z^{-3}}{1+4z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}}$

图 T8.5(a)之(1)图表示其直接型结构,(2)图是其正准型结构。

(b) 图 T8.5(b)之(1)图表示其直接型结构,(2)图是其正准型结构。

(c) $H(z)=\dfrac{-z^{-1}/8+z^{-2}/4}{1-z^{-1}/4-3z^{-2}/8}$

图 T8.5 (c) 之 (1) 图表示其直接型结构，(2) 图是其正准型结构。

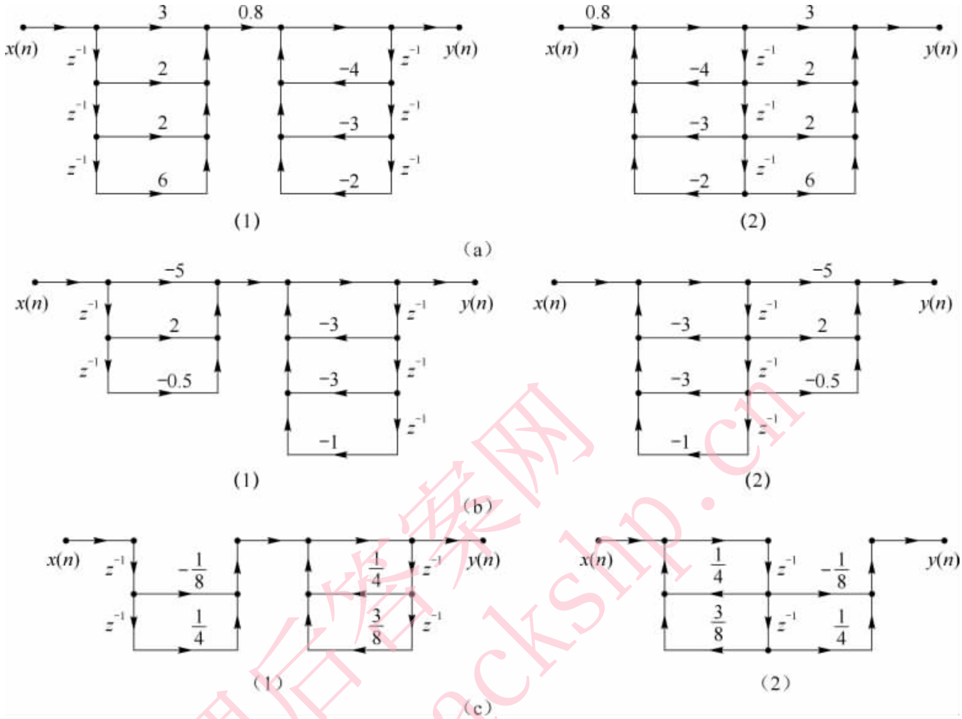


图 T8.5

8.6　用级联型结构实现系统函数，画出所有的各种级联型结构。

$$H(z)=\frac{5\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right)}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}+5z^{-2}\right)}$$

解

$H(z)$ 零极点的搭配有两种方式，每种方式下都得到两个不同的子网络。

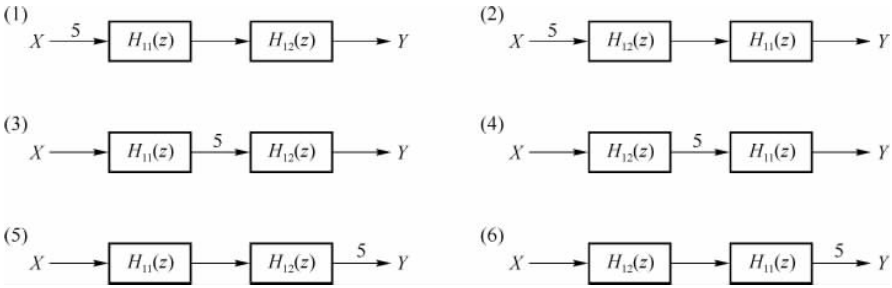
① 第一种方式

$$H_{11}(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

$$H_{12}(z)=\frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}}{1+2z^{-1}+5z^{-2}}$$

$H_{11}(z)$ 和 $H_{12}(z)$ 的网络结构分别如图 T8.6 (a)、(b) 所示。这种情况下可以得到 $3!=6$

种级联形式：

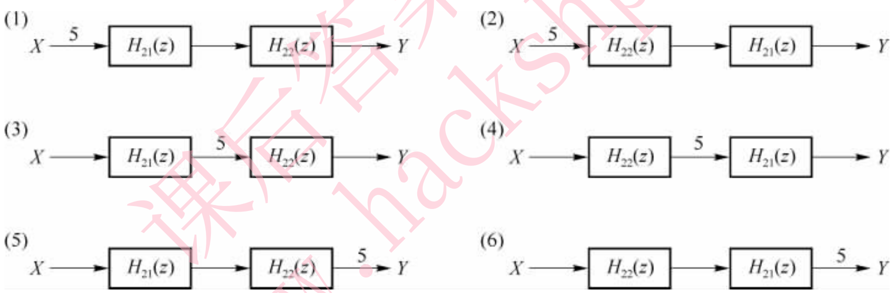


② **第二种方式**

$$H_{21}(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+2z^{-1}+5z^{-2}}$$

$$H_{22}(z)=\frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}}{1-0.5z^{-1}}$$

$H_{21}(z)$ 和 $H_{22}(z)$ 的网络结构分别如图 T8.6 (c)、(d) 所示。这种情况下也可以得到 $3!=6$ 种级联形式：



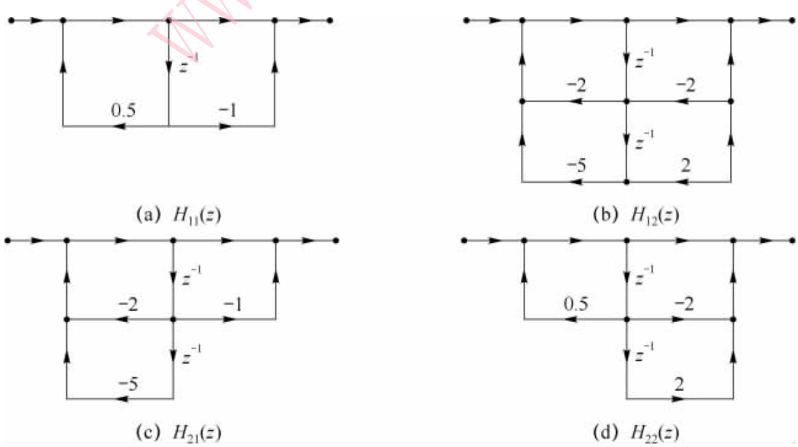


图 T8.6

因此，$H(z)$ 的级联型结构总共有 12 种不同的形式。

8.7　用级联型及并联型结构实现系统函数：

$$H(z)=\frac{2z^3+3z^2-2z}{(z^2-z+1)(z-1)}$$

解

① **用级联型结构实现**

$$H(z)=\frac{2z(z+2)(z-1/2)}{(z^2-z+1)(z-1)}=2\cdot\frac{1+2z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}\cdot\frac{1-z^{-1}/2}{1-z^{-1}}$$

信号流图如图 T8.7 (a) 所示。

② **用并联型结构实现**

$$H(z)=2+\frac{7z^2-6z+2}{(z^2-z+1)(z-1)}=2+\frac{4z+1}{z^2-z+1}+\frac{3}{z-1}$$
$$=2+\frac{4z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}}+\frac{3z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

信号流图如图 T8.7 (b) 所示。

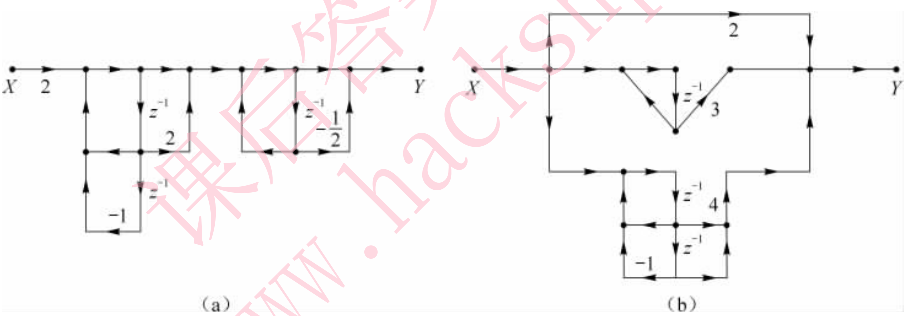


图 T8.7

8.8　设滤波器的差分方程为

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)+\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)$$

试用正准型及一阶网络的级联型、一阶网络的并联型结构实现。

解

对差分方程两边进行 z 变换：

$$Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)+\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)$$

于是得到系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}/3}{1-3z^{-1}/4+z^{-2}/8}$$

正准型结构如图 T8.8 (a) 所示。

又，

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}/3}{1-z^{-1}/4}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}/2}$$

级联型结构如图 T8.8 (b) 所示。

又，

$$H(z)=\frac{10/3}{1-z^{-1}/2}-\frac{7/3}{1-z^{-1}/4}$$

并联型结构如图 T8.8 (c) 所示。

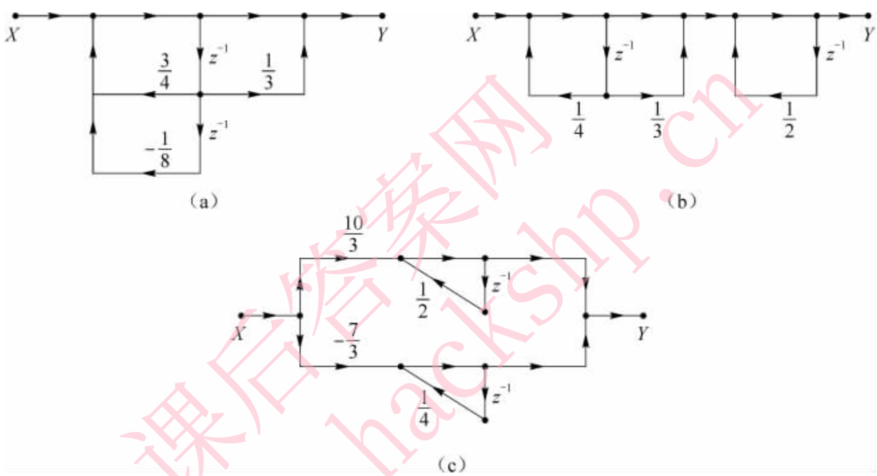


图 T8.8

8.9　试问用什么结构可以实现以下单位抽样响应：

$$h(n)=\delta(n)-3\delta(n-3)+5\delta(n-7)$$

解

对上式两边进行 z 变换：

$$H(z)=1-3z^{-3}+5z^{-7}$$

可用横截型结构直接实现，如图 T8.9 所示。

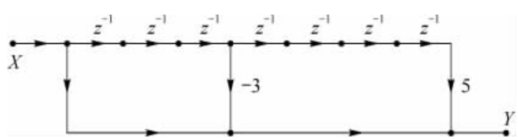


图 T8.9

8.10　已知滤波器单位抽样响应为

$$h(n)=\begin{cases}2^n & 0\leqslant n\leqslant 5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

画出横截型结构。

解

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{k=0}^{5}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{5}2^k x(n-k)$$

横截型结构如图 T8.10 **所示。**

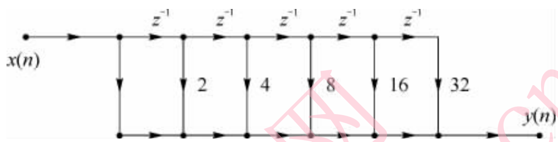


图 T8.10

8.11　用卷积型和级联型网络实现系统函数：

$$H(z)=(1-1.4z^{-1}+3z^{-2})(1+2z^{-1})$$

解

$$H(z)=(1-1.4z^{-1}+3z^{-2})(1+2z^{-1}) \tag{8.3}$$

$$=1+0.6z^{-1}+0.2z^{-2}+6z^{-3} \tag{8.4}$$

由(8.3)**式得到级联型结构如图** T8.11(a)**所示，由**(8.4)**式得到卷积型结构如图** T8.11(b)**所示。**

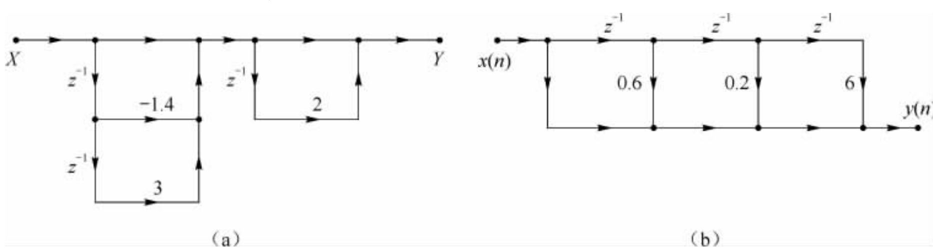


图 T8.11

8.12　长度 $N=6$ **的** FIR **数字滤波器的** $h(n)$ **是偶对称的，已知** $h(0)=1.5$，$h(1)=2$，$h(2)=3$。**试用尽量简单的结构来直接实现。**

解

系统函数为

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{5} h(n) z^{-n} \\
&= h(0) + h(1) z^{-1} + h(2) z^{-2} + h(2) z^{-3} + h(1) z^{-4} + h(0) z^{-5} \\
&= h(0)(1 + z^{-5}) + h(1)(z^{-1} + z^{-4}) + h(2)(z^{-2} + z^{-3})
\end{aligned}
$$

该结构的信号流图如图 T8.12 **所示。**

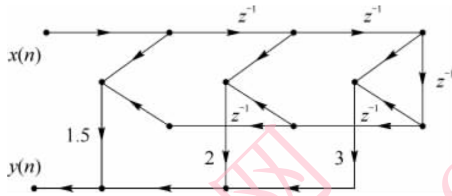


图 T8.12

8.13　长度 $N=7$ **的** FIR **数字滤波器的** $h(n)$ **是奇对称的，已知** $h(0)=3$，$h(1)=-2$，$h(2)=4$。**试用尽量简单的结构来直接实现。**

解

系统函数为：

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{6} h(n) z^{-n} \\
&= h(0) + h(1) z^{-1} + h(2) z^{-2} + h(3) z^{-3} - h(2) z^{-4} - h(1) z^{-5} - h(0) z^{-6} \\
&= h(0)(1 - z^{-6}) + h(1)(z^{-1} - z^{-5}) + h(2)(z^{-2} - z^{-4}) \qquad (h(3) = 0)
\end{aligned}
$$

该结构的信号流图如图 T8.13 **所示。**

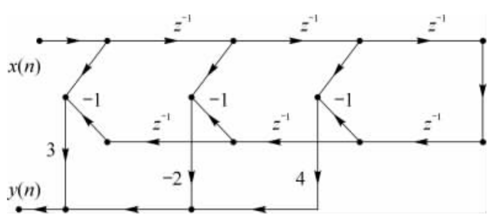


图 T8.13

8.14　用频率抽样型结构实现系统函数：

$$
H(z) = \frac{5 - 2z^{-3} - 3z^{-6}}{1 - z^{-1}}
$$

抽样点数 $N=6$，修正半径 $r=0.9$。

解

$$H(z)=\frac{5-2z^{-3}-3z^{-6}}{1-z^{-1}}=\frac{(3z^{-3}+5)(1-z^{-3})}{1-z^{-1}}$$
$$=(3z^{-3}+5)(1+z^{-1}+z^{-2})$$
$$=5+5z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+3z^{-4}+3z^{-5}$$

故有

$$h(0)=h(1)=h(2)=5$$
$$h(3)=h(4)=h(5)=3$$

频率抽样型结构

$$H(z)=\frac{1}{6}(1-r^6z^{-6})\left[\sum_{k=1}^{2}2|H(k)|\cdot H_k(z)+H_0(z)+H_{N/2}(z)\right] \tag{8.5}$$

其中

$$H_k(z)=\frac{\cos\theta(k)-r\cos\left[\theta(k)-\frac{\pi}{3}k\right]z^{-1}}{1-2rz^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)+r^2z^{-2}}\quad (k=1,2)$$

$$H_0(z)=\frac{H(0)}{1-rz^{-1}}$$

$$H_{N/2}(z)=\frac{H(N/2)}{1+rz^{-1}}$$

可以求得

$$\begin{cases} H(0)=\sum_{n=0}^{5}h(n)=24 \\ H\left(\frac{N}{2}\right)=H(3)=\sum_{n=0}^{5}(-1)^n h(n)=2 \end{cases}$$

由于

$$H(k)=\sum_{n=0}^{5}h(n)W_6^{nk}=\sum_{n=0}^{5}h(n)e^{-j\frac{\pi}{3}nk}\quad (k=0,1,2,3,4,5)$$

故对于 $H(k)$ 的模和幅角 $\theta(k)$，有

$$\begin{cases} |H(k)|=\left\{\left[\sum_{n=0}^{5}h(n)\cos\left(\frac{\pi}{3}nk\right)\right]^2+\left[\sum_{n=0}^{5}h(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}nk\right)\right]^2\right\}^{1/2} \\ \tan\theta(k)=-\dfrac{\sum_{n=0}^{5}h(n)\sin\left(\frac{\pi}{3}nk\right)}{\sum_{n=0}^{5}h(n)\cos\left(\frac{\pi}{3}nk\right)} \end{cases}$$

于是可以算得

$$\begin{cases} |H(1)| = 4 \\ |H(2)| = 0 \\ \tan\theta(1) = -\sqrt{3} \end{cases}$$

由 $\tan\theta(1)$ 可以得到

$$\begin{cases} \cos\theta(1) = \pm\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta(1) = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

于是可以得到

$$\cos\left[\theta(1) - \frac{\pi}{3}\right] = \cos\theta(1)\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta(1)\sin\frac{\pi}{3} = \mp\frac{1}{2}$$

将这些计算结果代入(8.5)式，得到

$$H(z) = \frac{1}{6}(1 - 0.9^6 z^{-6})\left[8\frac{\frac{1}{2} - 0.9\left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}}{1 - 1.8\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1} + 0.9^2 z^{-2}} + \frac{24}{1 - 0.9z^{-1}} + \frac{2}{1 + 0.9z^{-1}}\right]$$

$$= (1 - 0.9^6 z^{-6})\left(\frac{2/3 + 0.6z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} + \frac{4}{1 - 0.9z^{-1}} + \frac{1/3}{1 + 0.9z^{-1}}\right)$$

这个结构的信号流图如图 T8.14 所示。

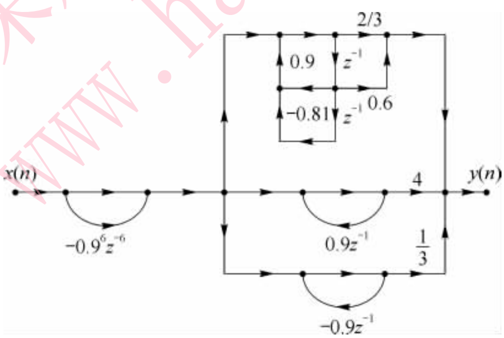


图 T8.14

8.15 FIR 数字滤波 $N=5$，$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)$，用频率抽样型结构实现，修正半径 $r = 0.9$。

解

显然有 $h(0)=1$，$h(1)=-1$，$h(2)=0$，$h(3)=0$，$h(4)=1$。

频率抽样型结构：

$$H(z)=\frac{1}{5}(1-r^5z^{-5})\left[\sum_{k=1}^{2}2|H(k)|\cdot H_k(z)+H_0(z)\right] \tag{8.6}$$

其中

$$H_k(z)=\frac{\cos\theta(k)-r\cos\left[\theta(k)-\frac{2\pi}{5}k\right]z^{-1}}{1-2rz^{-1}\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right)+r^2z^{-2}} \qquad (k=1,2)$$

而

$$H_0(z)=\frac{H(0)}{1-rz^{-1}}$$

可以求得

$$H(0)=\sum_{n=0}^{4}h(n)=1$$

由于

$$H(k)=\sum_{n=0}^{4}h(n)W_5^{nk}=\sum_{n=0}^{4}h(n)e^{-j\frac{2\pi}{5}nk} \qquad (k=0,1,2,3,4)$$

故对于 $H(k)$ 的模和幅角 $\theta(k)$，有

$$\begin{cases}|H(k)|=\left\{\left[\sum_{n=0}^{4}h(n)\cos\left(\frac{2\pi}{5}nk\right)\right]^2+\left[\sum_{n=0}^{4}h(n)\sin\left(\frac{2\pi}{5}nk\right)\right]^2\right\}^{1/2} \\ \tan\theta(k)=-\frac{\sum_{n=0}^{4}h(n)\sin\left(\frac{2\pi}{5}nk\right)}{\sum_{n=0}^{4}h(n)\cos\left(\frac{2\pi}{5}nk\right)}\end{cases}$$

于是可以算得 $|H(1)|=2.147$，$|H(2)|=1.543$，$\tan[\theta(1)]=1.9$，$\tan[\theta(2)]=1.176$。

由 $\tan[\theta(1)]$ 可以得到

$$\begin{aligned}\cos\theta(1)&=\pm[1+\tan^2\theta(1)]^{-1/2}\\&=\pm(1+1.9^2)^{-1/2}\\&=\pm0.466\end{aligned}$$

如果取正号，那么由于 $\cos[\theta(1)]$ 和 $\tan[\theta(1)]$ 都为正，故 $\theta(1)$ 在第一象限，于是 $\sin[\theta(1)]$ 也为正，有

$$\sin\theta(1)=\sqrt{1-\cos^2\theta(1)}=\sqrt{1-0.2169}=0.885$$

而

$$\begin{aligned}\cos\left[\theta(1)-\frac{2\pi}{5}\right]&=\cos\theta(1)\cos\frac{2\pi}{5}+\sin\theta(1)\sin\frac{2\pi}{5}\\&=0.466\times0.309+0.885\times0.951\\&=0.986\end{aligned}$$

由 $\tan[\theta(2)]$ 可以得到

$$\begin{aligned}\cos\theta(2) &= \pm[1+\tan^2\theta(2)]^{-1/2}\\ &= \pm(1+1.176^2)^{-1/2}\\ &= \pm 0.648\end{aligned}$$

如果取正号，那么由于 $\cos[\theta(2)]$ 和 $\tan[\theta(2)]$ 都为正，故 $\theta(2)$ 在第一象限，于是 $\sin[\theta(2)]$ 也为正，有

$$\sin\theta(2) = \sqrt{1-\cos^2\theta(2)} = \sqrt{1-0.4196} = 0.762$$

而

$$\begin{aligned}\cos\left[\theta(2)-\frac{4\pi}{5}\right] &= \cos\theta(2)\cos\frac{4\pi}{5}+\sin\theta(2)\sin\frac{4\pi}{5}\\ &= 0.648\times(-0.809)+0.762\times 0.588\\ &= -0.076\end{aligned}$$

将这些计算结果代入(8.6)式，得到

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{1}{5}(1-0.9^5z^{-5})\left[4.294\frac{0.466-0.9\times 0.986z^{-1}}{1-1.8\times 0.309z^{-1}+0.9^2z^{-2}}\right.\\ &\quad \left.+3.086\frac{0.648+0.9\times 0.076z^{-1}}{1+1.8\times 0.809z^{-1}+0.9^2z^{-2}}+\frac{1}{1-0.9z^{-1}}\right]\\ &= (1-0.9^5z^{-5})\left(\frac{0.4002-0.762z^{-1}}{1-0.5562z^{-1}+0.81z^{-2}}+\frac{0.3999+0.0422z^{-1}}{1+1.4562z^{-1}+0.81z^{-2}}+\frac{0.2}{1-0.9z^{-1}}\right)\end{aligned}$$

这个结构的信号流图如图 T8.15 所示。

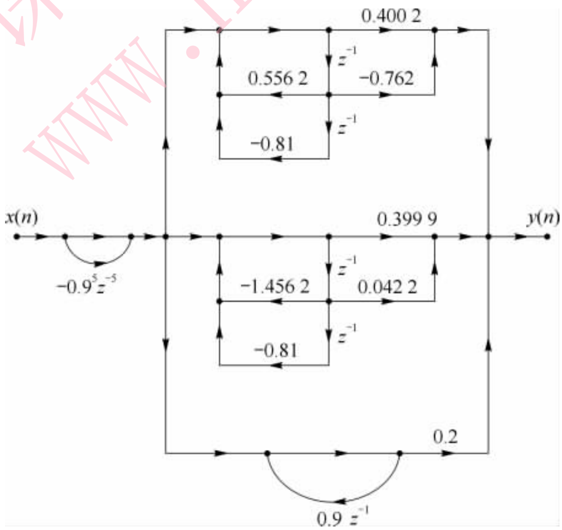


图 T8.15

第 9 章
数字信号处理中的有限字长效应

9.1　将下列十进制数分别用 8 位 (数据 7 位符号 1 位) 的原码、补码、反码定点表示出来,分别考虑截尾和舍入两种情况。

$x_1 = 0.4375$,　$x_2 = -0.4375$,　$x_3 = 0.9515625$,　$x_4 = -0.9515625$

解

十进制数	原码		反码		补码	
	截尾	舍入	截尾	舍入	截尾	舍入
$x_1=0.4375$	$0_{\triangle}0111000$	$0_{\triangle}0111000$	$0_{\triangle}0111000$	$0_{\triangle}0111000$	$0_{\triangle}0111000$	$0_{\triangle}0111000$
$x_2=-0.4375$	$1_{\triangle}0111000$	$1_{\triangle}0111000$	$1_{\triangle}1000111$	$1_{\triangle}1000111$	$1_{\triangle}1001000$	$1_{\triangle}1001000$
$x_3=0.9515625$	$0_{\triangle}1111001$	$0_{\triangle}1111010$	$0_{\triangle}1111001$	$0_{\triangle}1111010$	$0_{\triangle}1111001$	$0_{\triangle}1111010$
$x_4=-0.9515625$	$1_{\triangle}1111001$	$1_{\triangle}1111010$	$1_{\triangle}0000110$	$1_{\triangle}0000101$	$1_{\triangle}0000111$	$1_{\triangle}0000110$

9.2　当以下二进制数分别是原码、补码、反码时,分别写出所代表的十进制数。

$x_1 = 0_{\triangle}1001$,　$x_2 = 0_{\triangle}1101$,　$x_3 = 1_{\triangle}1000$,　$x_4 = 1_{\triangle}1011$

解

所代表的十进制数:

	若是原码	若是反码	若是补码
$x_1=0_{\triangle}1001$	0.5625	0.5625	0.5625
$x_2=0_{\triangle}1101$	0.8125	0.8125	0.8125
$x_3=1_{\triangle}1000$	−0.5	−0.4375	−0.5
$x_4=1_{\triangle}1011$	−0.6875	−0.25	−0.3125

9.3 将 9.1 题中的各个数用 4 位(包括符号位)定点补码表示出来,并且分别就截尾和舍入两种情况计算它们与相应的 8 位表示时的误差。

解

十进制数	4 位定点补码 $x_{(4)}$		8 位定点补码 $x_{(8)}$		$\Delta x = x_{(4)} - x_{(8)}$	
	截 尾	舍 入	截 尾	舍 入	截 尾	舍 入
$x_1 = 0.437\,5$	$0_{\Delta}011$	$0_{\Delta}100$	$0_{\Delta}0111000$	$0_{\Delta}0111000$	$-0.062\,5$	$0.062\,5$
$x_2 = -0.437\,5$	$1_{\Delta}100$	$1_{\Delta}101$	$1_{\Delta}1001000$	$1_{\Delta}1001000$	$-0.062\,5$	$0.062\,5$
$x_3 = 0.951\,562\,5$	$0_{\Delta}111$	$1 + 0_{\Delta}000$	$0_{\Delta}1111001$	$0_{\Delta}1111010$	$-0.070\,312\,5$	$0.046\,875$
$x_4 = -0.951\,562\,5$	$1_{\Delta}000$	$1_{\Delta}000$	$1_{\Delta}0000111$	$1_{\Delta}0000110$	$-0.054\,687\,5$	$-0.046\,875$

9.4 设输入序列 $x(n)$ 通过一量化器 $Q[\ ]$ 的输入输出关系如图 P9.4 所示,量化器输出 $\underline{\underline{x}}(n)$ 的形式为 $\underline{\underline{x}}(n) = x(n) + e(n)$。误差序列 $e(n)$ 是一个平稳随机过程,它在误差范围内有均匀分布的概率密度,它的各抽样值之间互不相关,并且 $e(n)$ 与 $x(n)$ 也不相关。假设 $x(n)$ 是均值为 0、方差为 σ_x^2 的平稳白噪声。

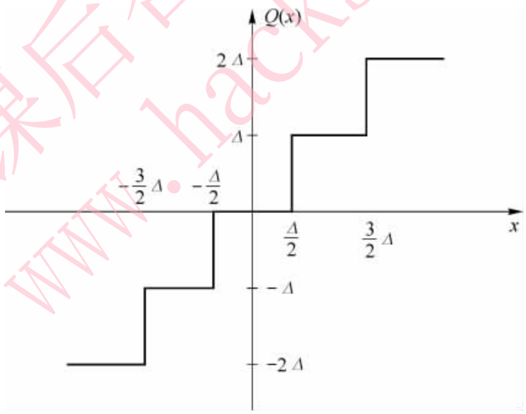


图 P9.4

(a) 写出 $e(n)$ 的误差范围,求 $e(n)$ 的均值和方差。

(b) 求信噪比 σ_x^2 / σ_e^2。

解

(a) 由量化器的输入输出关系(即图 P9.4)可知,量化误差的范围为

$$-\Delta/2 < e(n) \leqslant \Delta/2$$

由所假设的 $e(n)$ 的统计特性以及 $e(n)$ 的误差范围，可知 $e(n)$ 的均值为

$$m_e = 0$$

方差为

$$\sigma_e^2 = \Delta^2/12$$

假设量化器的字长为 $L+1$ 位，则

$$\Delta = 2^{-L}$$

为量化间距。

(b) 信噪比

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2}{\Delta^2/12} = \frac{12\sigma_x^2}{2^{-2L}} = 12\times 2^{2L}\sigma_x^2$$

用对数表示：

$$\mathrm{SNR} = 10\lg(\sigma_x^2/\sigma_e^2) = 6.02L + 10.79 + 10\lg\sigma_x^2$$

9.5 设一个数字系统的系统函数为：

$$H(z) = \frac{0.5 - 0.826\,543\,321z^{-1}}{1 - 1.657\,823\,44z^{-1} + 0.756\,622\,3z^{-2}}$$

而存储器的字长为 8 bit，请写出实际的系统函数 $\underline{\underline{H}}(z)$ 的表达式。

解

令

$$a = 0.826\,543\,321,\quad b_1 = 1.657\,823\,44,\quad b_2 = 0.756\,622\,3$$

将这些系数用 8 位二进制数表示出来，不考虑符号位，并且进行舍入处理，得到：

$$\underline{\underline{a}} = 0_{\Delta}1101010,\quad \underline{\underline{b_1}} = 1_{\Delta}1010100,\quad \underline{\underline{b_2}} = 0_{\Delta}1100001$$

再将每个 8 位二进制数转换为十进制数：

$$\underline{\underline{a}} = 0.828\,125,\quad \underline{\underline{b_1}} = 1.656\,25,\quad \underline{\underline{b_2}} = 0.757\,812\,5$$

因此，系数量化后实际的系统函数为

$$\underline{\underline{H}}(z) = \frac{0.5 - 0.828\,125z^{-1}}{1 - 1.656\,25z^{-1} + 0.757\,812\,5z^{-2}}$$

9.6 A/D 变换器的字长为 $L+1$ 位，它的输出信号通过一个单位抽样响应

$$h(n) = \frac{1}{2}[a^n + (-a)^n]u(n)$$

的离散系统，其中 $|a|<1$。试确定系统输出端上量化噪声的方差，以及输出端的信噪比。

解

离散系统的系统函数：

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-a)^{n}z^{-n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{1}{1-(-az^{-1})}\right]$$

上式中的两个幂级数收敛分别应该满足条件：$|az^{-1}|<1$ 和 $|-az^{-1}|<1$，综合起来则应该满足 $|z|>|a|$。

系统 $H(z)$ 的输入量化噪声

$$\sigma_{\mathrm{e}}^{2}=\frac{2^{-2L}}{12}$$

而输出量化噪声

$$\sigma_{\mathrm{f}}^{2}=\sigma_{\mathrm{e}}^{2}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{c}z^{-1}H(z)H(z^{-1})\mathrm{d}z\right]=\sigma_{\mathrm{e}}^{2}I$$

下面用留数定理求积分 I。令被积函数

$$z^{-1}H(z)H(z^{-1})=H_{1}(z)$$

由于 $H(z)$ 的收敛域为 $|z|>|a|$，而 $|a|<1$，所以单位圆在 $H(z)$ 的收敛域内；而 $H(z^{-1})$ 的收敛域应该为 $|z^{-1}|>|a|$，即 $|z|<(1/|a|)$，由于 $(1/|a|)>1$，所以单位圆也在 $H(z^{-1})$ 的收敛域内。因此单位圆在被积函数 $H_1(z)$ 的解析区域内，于是就选单位圆作为积分围线 c。

$$H_{1}(z)=z^{-1}H(z)H(z^{-1})$$

$$=z^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z+a}\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-az}+\frac{1}{1+az}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z+a}\right)\left(\frac{1}{1-az}+\frac{1}{1+az}\right)$$

在围线 c 内 $H_1(z)$ 有两个极点 $z=\pm a$，于是有

$$I=\mathrm{Res}[H_{1}(z),z=a]+\mathrm{Res}[H_{1}(z),z=-a]$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{z-a}{z+a}\right)\left(\frac{1}{1-az}+\frac{1}{1+az}\right)\bigg|_{z=a}+\frac{1}{4}\left(\frac{z+a}{z-a}+1\right)\left(\frac{1}{1-az}+\frac{1}{1+az}\right)\bigg|_{z=-a}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-a^{2}}+\frac{1}{1+a^{2}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+a^{2}}+\frac{1}{1-a^{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-a^{2}}+\frac{1}{1+a^{2}}\right)$$

因此，输出噪声功率即输出端量化噪声的方差

$$\sigma_{\mathrm{f}}^{2}=\sigma_{\mathrm{e}}^{2}I=\frac{2^{-2L}}{24}\left(\frac{1}{1-a^{2}}+\frac{1}{1+a^{2}}\right)$$

令输入信号未经 A/D 变换器量化时，系统输出信号的功率为 σ_y^2，则输出端的信噪比为：

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_f^2}=\sigma_y^2\Big/\left[\frac{2^{-2L}}{24}\left(\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1+a^2}\right)\right]=12\times2^{2L}(1-a^2)(1+a^2)\sigma_y^2$$

9.7 研究下面的系统函数：

$$H(z)=\frac{1-0.4z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.18z^{-2}}$$

(a) 计算 $H(z)$ 的零点和极点。

(b) 若系数舍入成 4 位(包括符号位)的定点补码表示，计算系统函数系数量化后的零点和极点。

解

(a)
$$H(z)=\frac{1-0.4z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.18z^{-2}}=\frac{1-0.4z^{-1}}{(1-0.3z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

因此 $H(z)$ 的零极点为：

零点：$z=0.4$；

极点：$z=0.3$，$z=0.6$。

(b)
$$H(z)=\frac{1+1_{\Delta}101z^{-1}}{1+1_{\Delta}001z^{-1}+0_{\Delta}001z^{-2}}=\frac{1-0.375z^{-1}}{1-0.875z^{-1}+0.125z^{-2}}=\frac{1-0.375z^{-1}}{(1-0.1798z^{-1})(1-0.6952z^{-1})}$$

零点：$z=0.375$；

极点：$z=0.1798$，$z=0.6952$。

9.8 一个二阶 IIR 网络的系统函数为

$$H(z)=\frac{0.4-0.34z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})(1-0.7z^{-1})}$$

用 6 位字长的定点算法来实现，尾数作舍入处理。

(a) 在正准型结构下，画出信号流图，并且标明乘积项有限字长效应所产生的误差的输入点。

(b) 计算由于乘积的有限字长效应所产生的输出噪声功率。

(c) 对于级联型结构，重复(a)、(b)。

(d) 对于并联型结构，重复(a)、(b)。

解

每次相乘所产生的噪声的功率

$$\sigma_e^2=\frac{2^{-2L}}{12}=\frac{1}{12\times 2^{10}}=\frac{1}{12\,288}$$

(a)

$$H(z)=\frac{0.4-0.34z^{-1}}{1-1.6z^{-1}+0.63z^{-2}}$$

正准型结构以及相乘误差的输入点如图 T9.8(a)所示。

(b) 图 T9.8(a)中，$e_1(n)$、$e_2(n)$、$e_3(n)$、$e_4(n)$分别表示与系数 0.4、−0.34、1.6、−0.63相乘后因有限字长所产生的误差，其中 $e_1(n)$ 和 $e_2(n)$ 直接输出，而 $e_3(n)$ 和 $e_4(n)$ 均通过网络 $H(z)$，因此输出噪声的功率为

$$\sigma_f^2=2\sigma_e^2+2\sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H(z)H(z^{-1})\,dz\right]=2\sigma_e^2(1+I)$$

积分 I 用留数定理计算，被积函数

$$A(z)=z^{-1}H(z)H(z^{-1})$$

$$A(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{0.4-0.34z^{-1}}{(1-0.9z^{-1})(1-0.7z^{-1})}\cdot\frac{0.4-0.34z}{(1-0.9z)(1-0.7z)}$$

$$=\frac{0.4z-0.34}{(z-0.9)(z-0.7)}\cdot\frac{0.4-0.34z}{(1-0.9z)(1-0.7z)}$$

选单位圆作为积分围线 c，则 $A(z)$在 c 内的极点为 $z=0.9$，$z=0.7$。于是

$$I=\frac{1}{2\pi j}\oint_c A(z)\,dz$$

$$=\operatorname{Res}[A(z),z=0.9]+\operatorname{Res}[A(z),z=0.7]$$

$$=\frac{0.4z-0.34}{z-0.7}\cdot\frac{0.4-0.34z}{(1-0.9z)(1-0.7z)}\Bigg|_{z=0.9}$$

$$+\frac{0.4z-0.34}{z-0.9}\cdot\frac{0.4-0.34z}{(1-0.9z)(1-0.7z)}\Bigg|_{z=0.7}$$

$$=\frac{(0.36-0.34)(0.4-0.306)}{0.2(1-0.81)(1-0.63)}+\frac{(0.28-0.34)(0.4-0.238)}{-0.2(1-0.63)(1-0.49)}$$

$$=\frac{0.001\,88}{0.014\,06}+\frac{-0.009\,72}{-0.037\,74}$$

$$=0.133\,7+0.257\,55$$

$$=0.391\,25$$

输出噪声的功率

$$\sigma_f^2 = 2\sigma_e^2 \times 1.391\ 25 = 2.782\ 5\sigma_e^2$$

(c)
$$H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}} \cdot \frac{0.4-0.34z^{-1}}{1-0.7z^{-1}}$$

级联型结构以及相乘误差的输入点如图 T9.8(b)所示。

图 T9.8(b)中，$e_1(n)$、$e_2(n)$、$e_3(n)$、$e_4(n)$分别表示与系数 0.4、−0.34、0.9、0.7 相乘后因有限字长所产生的误差，其中 $e_1(n)$和 $e_2(n)$直接输出，$e_3(n)$通过网络 $H(z)$，而 $e_4(n)$通过网络

$$H_1(z) = \frac{0.4-0.34z^{-1}}{1-0.7z^{-1}}$$

因此输出噪声的功率为

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= 2\sigma_e^2 + \sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H(z)H(z^{-1})\,dz\right] + \sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H_1(z)H_1(z^{-1})\,dz\right] \\ &= \sigma_e^2(2+I+I_1)\end{aligned}$$

积分 I 上面已经算出：

$$I = 0.391\ 25$$

积分 I_1 也用留数定理计算，被积函数

$$B(z) = z^{-1}H_1(z)H_1(z^{-1})$$

$$\begin{aligned}B(z) &= \frac{1}{z}\cdot\frac{0.4-0.34z^{-1}}{1-0.7z^{-1}}\cdot\frac{0.4-0.34z}{1-0.7z} \\ &= \frac{0.4z-0.34}{z(z-0.7)}\cdot\frac{0.4-0.34z}{1-0.7z}\end{aligned}$$

选单位圆作为积分围线 c，则 $B(z)$在 c 内的极点为 $z=0$，$z=0.7$。于是

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2\pi j}\oint_c B(z)\,dz \\ &= \mathrm{Res}[B(z), z=0] + \mathrm{Res}[B(z), z=0.7] \\ &= \left.\frac{0.4z-0.34}{z-0.7}\cdot\frac{0.4-0.34z}{1-0.7z}\right|_{z=0} + \left.\frac{0.4z-0.34}{z}\cdot\frac{0.4-0.34z}{1-0.7z}\right|_{z=0.7} \\ &= \frac{-0.34\times0.4}{-0.7} + \frac{(0.28-0.34)(0.4-0.238)}{0.7(1-0.49)} \\ &= \frac{0.136}{0.7} + \frac{-0.009\ 72}{0.357} \\ &= 0.194\ 3 - 0.027\ 2 \\ &= 0.167\ 1\end{aligned}$$

输出噪声的功率

$$\sigma_f^2=\sigma_e^2\times(2+0.391\,25+0.167\,1)=2.558\,35\sigma_e^2$$

(d)
$$H(z)=\frac{0.1}{1-0.9z^{-1}}+\frac{0.3}{1-0.7z^{-1}}$$

并联型结构以及相乘误差的输入点如图 T9.8(c)所示。

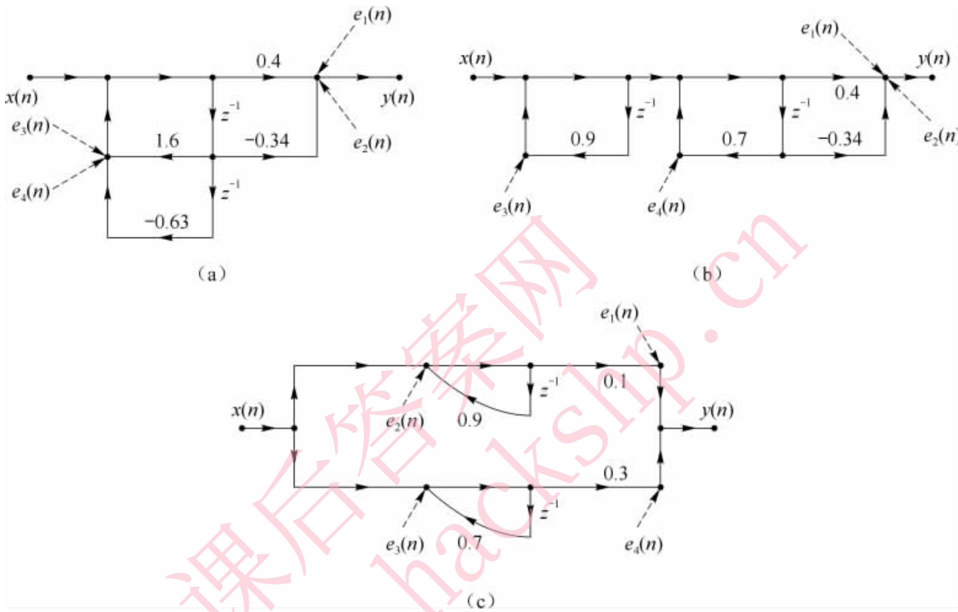


图 T9.8

图 T9.8(c)中，$e_1(n)$、$e_2(n)$、$e_3(n)$、$e_4(n)$分别表示与系数 0.1、0.9、0.7、0.3 相乘后因有限字长所产生的误差，其中 $e_2(n)$通过网络 $H_2(z)$，$e_3(n)$通过网络 $H_3(z)$，而 $e_1(n)$和 $e_4(n)$直接输出，这里

$$H_2(z)=\frac{0.1}{1-0.9z^{-1}}$$

$$H_3(z)=\frac{0.3}{1-0.7z^{-1}}$$

因此输出噪声的功率为

$$\sigma_f^2=2\sigma_e^2+\sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H_2(z)H_2(z^{-1})\,dz\right]+\sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H_3(z)H_3(z^{-1})\,dz\right]$$
$$=\sigma_e^2(2+I_2+I_3)$$

积分 I_2用留数定理计算，被积函数

$$C(z) = z^{-1}H_2(z)H_2(z^{-1})$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\frac{0.1}{1-0.9z^{-1}}\cdot\frac{0.1}{1-0.9z}$$

$$= \frac{0.1}{z-0.9}\cdot\frac{0.1}{1-0.9z}$$

选单位圆作为积分围线 c，则 $C(z)$ 在 c 内的极点为 $z=0.9$，于是

$$I_2 = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_c C(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[C(z), z=0.9]$$

$$= \left.\frac{0.01}{1-0.9z}\right|_{z=0.9} = \frac{0.01}{0.19} = 0.052\,6$$

积分 I_3 也用留数定理计算，被积函数

$$D(z) = z^{-1}H_3(z)H_3(z^{-1})$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\frac{0.3}{1-0.7z^{-1}}\cdot\frac{0.3}{1-0.7z}$$

$$= \frac{0.3}{z-0.7}\cdot\frac{0.3}{1-0.7z}$$

选单位圆作为积分围线 c，则 $D(z)$ 在 c 内的极点为 $z=0.7$，于是

$$I_3 = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_c D(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[D(z), z=0.7]$$

$$= \left.\frac{0.09}{1-0.7z}\right|_{z=0.7} = \frac{0.09}{0.51} = 0.176\,5$$

输出噪声的功率

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \times (2+0.052\,6+0.176\,5) = 2.229\,1\sigma_e^2$$

9.9 设有一数字均衡器的系统函数为

$$H(z) = \prod_{k=1}^{2}\frac{a_{0k}z^2 + a_{1k}z + 1}{(z-a_{0k})(z+a_{1k})} = \prod_{k=1}^{2}H_k(z)$$

其中 a_{0k}和a_{1k}如下表所示：

k	a_{0k}	a_{1k}
1	0.9	0.3
2	0.7	0.1

(a) 画出二阶子网络 $H_k(z)$ 的正准型信号流图，并且标出乘积的舍入误差的馈入点。

(b) 令 $H_a(z)=H_1(z)H_2(z)$，再令 $H_b(z)=H_2(z)H_1(z)$，比较在两种不同的级联次序下乘积的舍入误差所产生的输出噪声功率的大小。

注 写出每种情况下输出噪声功率的表达式，只需要用留数定理计算这两个表达式中不同的积分以进行比较，并不需要计算表达式中的每一个积分。

解

(a)
$$H_k(z)=\frac{a_{0k}+a_{1k}z^{-1}+z^{-2}}{1-a_{3k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}$$

其中

$$a_{3k}=a_{0k}-a_{1k}$$
$$a_{2k}=a_{0k}a_{1k}$$

正准型信号流图以及乘积的舍入误差的馈入点如图 T9.9 所示。

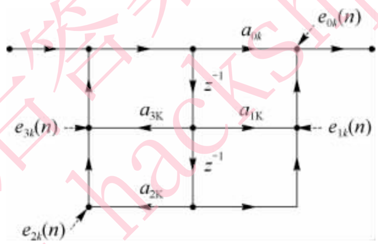


图 T9.9

(b) 对于 $H_a(z)=H_1(z)H_2(z)$ 的级联结构，误差 $e_{31}(n)$、$e_{21}(n)$ 通过网络 $H_1(z)H_2(z)$，误差 $e_{01}(n)$、$e_{11}(n)$ 和 $e_{32}(n)$、$e_{22}(n)$ 通过网络 $H_2(z)$，而误差 $e_{02}(n)$、$e_{12}(n)$ 直接输出。因此，输出噪声的功率为

$$\begin{aligned}\sigma_{fa}^2&=2\sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H_1(z)H_2(z)H_1(z^{-1})H_2(z^{-1})\,dz\right]\\&\quad+4\sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H_2(z)H_2(z^{-1})\,dz\right]+2\sigma_e^2\\&=2\sigma_e^2(I+2I_2+1)\end{aligned}$$

对于 $H_b(z)=H_2(z)H_1(z)$ 的级联结构，误差 $e_{32}(n)$、$e_{22}(n)$ 通过网络 $H_2(z)H_1(z)$，误差 $e_{02}(n)$、$e_{12}(n)$ 和 $e_{31}(n)$、$e_{21}(n)$ 通过网络 $H_1(z)$，而误差 $e_{01}(n)$、$e_{11}(n)$ 直接输出。因此，输出噪声的功率为

$$\sigma_{\mathrm{fb}}^2 = 2\sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H_2(z)H_1(z)H_2(z^{-1})H_1(z^{-1})\,dz\right]$$
$$+4\sigma_e^2\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}H_1(z)H_1(z^{-1})\,dz\right]+2\sigma_e^2$$
$$=2\sigma_e^2(I+2I_1+1)$$

因此,只需要计算出积分 I_1 和 I_2,就可以比较在不同的级联次序下的输出噪声的大小。

积分 I_1 的被积函数

$$A(z)=z^{-1}H_1(z)H_1(z^{-1})$$
$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{a_{01}+a_{11}z^{-1}+z^{-2}}{1-a_{31}z^{-1}-a_{21}z^{-2}}\cdot\frac{a_{01}+a_{11}z+z^2}{1-a_{31}z-a_{21}z^2}$$
$$=\frac{a_{01}z^2+a_{11}z+1}{z(z-a_{01})(z+a_{11})}\cdot\frac{a_{01}+a_{11}z+z^2}{(1-a_{01}z)(1+a_{11}z)}$$
$$=\frac{0.9z^2+0.3z+1}{z(z-0.9)(z+0.3)}\cdot\frac{0.9+0.3z+z^2}{(1-0.9z)(1+0.3z)}$$

选单位圆作为积分围线 c,$A(z)$ 在 c 内有 3 个极点:$z=0$,$z=0.9$,$z=-0.3$。于是有

$$I_1=\mathrm{Res}[A(z),z=0]+\mathrm{Res}[A(z),z=0.9]+\mathrm{Res}[A(z),z=-0.3]$$
$$=\frac{0.9z^2+0.3z+1}{(z-0.9)(z+0.3)}\cdot\frac{0.9+0.3z+z^2}{(1-0.9z)(1+0.3z)}\bigg|_{z=0}$$
$$+\frac{0.9z^2+0.3z+1}{z(z+0.3)}\cdot\frac{0.9+0.3z+z^2}{(1-0.9z)(1+0.3z)}\bigg|_{z=0.9}$$
$$+\frac{0.9z^2+0.3z+1}{z(z-0.9)}\cdot\frac{0.9+0.3z+z^2}{(1-0.9z)(1+0.3z)}\bigg|_{z=-0.3}$$
$$=\frac{1}{-0.27}\times\frac{0.9}{1}+\frac{1.999}{1.08}\times\frac{1.98}{0.2413}+\frac{0.991}{0.36}\times\frac{0.9}{1.1557}$$
$$=-3.333+15.188+2.144$$
$$=13.999$$

积分 I_2 的被积函数

$$B(z)=z^{-1}H_2(z)H_2(z^{-1})$$
$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{a_{02}+a_{12}z^{-1}+z^{-2}}{1-a_{32}z^{-1}-a_{22}z^{-2}}\cdot\frac{a_{02}+a_{12}z+z^2}{1-a_{32}z-a_{22}z^2}$$
$$=\frac{a_{02}z^2+a_{12}z+1}{z(z-a_{02})(z+a_{12})}\cdot\frac{a_{02}+a_{12}z+z^2}{(1-a_{02}z)(1+a_{12}z)}$$
$$=\frac{0.7z^2+0.1z+1}{z(z-0.7)(z+0.1)}\cdot\frac{0.7+0.1z+z^2}{(1-0.7z)(1+0.1z)}$$

选单位圆作为积分围线 c，$B(z)$ 在 c 内有 3 个极点：$z=0$，$z=0.7$，$z=-0.1$。于是有

$$I_2 = \mathrm{Res}[B(z), z=0] + \mathrm{Res}[B(z), z=0.7] + \mathrm{Res}[B(z), z=-0.1]$$

$$= \frac{0.7z^2+0.1z+1}{(z-0.7)(z+0.1)} \cdot \frac{0.7+0.1z+z^2}{(1-0.7z)(1+0.1z)} \bigg|_{z=0}$$

$$+ \frac{0.7z^2+0.1z+1}{z(z+0.1)} \cdot \frac{0.7+0.1z+z^2}{(1-0.7z)(1+0.1z)} \bigg|_{z=0.7}$$

$$+ \frac{0.7z^2+0.1z+1}{z(z-0.7)} \cdot \frac{0.7+0.1z+z^2}{(1-0.7z)(1+0.1z)} \bigg|_{z=-0.1}$$

$$= \frac{1}{-0.07} \times \frac{0.7}{1} + \frac{1.413}{0.56} \times \frac{1.26}{0.5457} + \frac{0.997}{0.08} \times \frac{0.7}{0.997}$$

$$= -10 + 5.826 + 8.75$$

$$= 4.576$$

由于 $I_1 > I_2$，所以 $\sigma_{fb}^2 > \sigma_{fa}^2$。

9.10 一个 FIR 滤波器为 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}$，用直接型结构实现，以 6 位（包括符号位）字长舍入方式进行量化处理。

(a) 计算由于乘积项的有限字长效应所产生的输出噪声功率 σ_f^2。

(b) 当 $N=512$ 时，若要求 $\sigma_f^2 \leqslant 10^{-8}$，则字长至少应该选取多少位？

解

(a)

$$\sigma_f^2 = N\sigma_e^2 = \frac{2^{-2L}}{12} N = \frac{2^{-10}}{12} N$$

(b) 要求

$$\frac{2^{-2L}}{12} \times 512 \leqslant 10^{-8}$$

故有

$$4^L \geqslant (10^{-8} \times 12/512)^{-1} = \frac{10^8 \times 128}{3}$$

于是有

$$L \geqslant \frac{8 + \lg 128 - \lg 3}{\lg 4} = \frac{8 + 2.107 - 0.477}{0.602} = 15.997$$

因此 $L \geqslant 16$，而字长 $(L+1) \geqslant 17$。

9.11 一阶 IIR 系统的差分方程为 $y(n)=ay(n-1)+x(n)$，已知在无限精度情况下，这个系统是稳定的。当在有限精度情况下实现时，对相乘的结果作截尾处理，因此实际的差分方程是

$$\underline{\underline{y}}(n)=Q[a\underline{\underline{y}}(n-1)]+x(n)$$

式中 $Q[\ ]$ 表示截尾量化后的结果。

(a) 如果信号和乘法器系数都是原码表示的，试问当有限精度实现时，是否存在形式为 $|\underline{\underline{y}}(n)|=|\underline{\underline{y}}(n-1)|$ 的零输入极限环？请说明理由。

(b) 上述结果对于补码截尾仍然成立吗？为什么？

解

由差分方程可以得到这个系统的系统函数

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

因此可知 $z=a$ 为其极点。由于在无限精度下系统是稳定的，故极点应该在单位圆内，所以有 $|a|<1$。

(a) 根据原码截尾的量化特性，即图 9.1 (b)，可知，不论 x 为正或负，都有

$$|Q[x]|\leqslant|x|$$

因此有

$$|Q[a\underline{\underline{y}}(n-1)]|\leqslant|a\underline{\underline{y}}(n-1)| \tag{9.1}$$

而实际输出满足差分方程

$$\underline{\underline{y}}(n)=Q[a\underline{\underline{y}}(n-1)]+x(n)$$

零输入时，$x(n)=0$，故有

$$|\underline{\underline{y}}(n)|=|Q[a\underline{\underline{y}}(n-1)]|$$

所以 (9.1) 式可以写为

$$|\underline{\underline{y}}(n)|\leqslant|a\underline{\underline{y}}(n-1)|=|a||\underline{\underline{y}}(n-1)|<|\underline{\underline{y}}(n-1)|$$

这就是说，当 $x(n)=0$ 时

$$|\underline{\underline{y}}(n)|<|\underline{\underline{y}}(n-1)|$$

因此不存在 $|\underline{\underline{y}}(n)|=|\underline{\underline{y}}(n-1)|$ 的零输入极限环。

(b) 对于补码截尾的情形，由图 9.1 (a) 可知，当 $x>0$ 时

$$|Q[x]|\leqslant|x|$$

而当 $x<0$ 时

$$|Q[x]|\geqslant|x|$$

因此上述结果不成立。