1.1.1 证明完备度量空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一度量空间的完备子空间必是闭子集.

(1) 设 X 是完备度量空间，$M \subset X$ 是闭的. 要证 M 是一个完备的子空间.

证 $\forall\, x_m, x_n \in M$, $\|x_m - x_n\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ $\forall\, x_m, x_n \in X$, $\|x_m - x_n\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$,

$\because$ X 是完备度量空间,

$\therefore$ $\exists\, x \in X$, 使得 $x_n \to x$.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in M,\ x_n \to x \\ M \subset X \text{ 是闭的} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in M.$$

$\forall\, x_m, x_n \in M, \|x_m - x_n\| \to 0, (m, n \to \infty)$

$\exists\, x \in M$, 使得 $x_n \to x$

$\Rightarrow$ M 是一个完备的子空间.

(2) 设 X 是一度量空间，M 是 X 的一个完备子空间.

要证 M 是闭子集. 即，若 $x_n \in M$, $x_n \to x$. 要证 $x \in M$.

证 因为收敛列是基本列，所以

$x_n \in M$, $\|x_m - x_n\| \to 0$, $(m, n \to \infty)$, 又 M 是完备度量空间,

所以 $\exists\, x' \in M$, 使得 $x_n \to x'$.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ x_n \to x' \end{array}\right\} \Rightarrow x = x' \in M.$$

1.1.2 (Newton法) f 是定义在 $[a, b]$ 上的二次连续可微的实

值函数，$\hat{x} \in (a,b)$，使得 $f(\hat{x}) = 0$，$f'(\hat{x}) \neq 0$. 求证存在 $\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$，使得 $\forall x_0 \in U(\hat{x})$ 迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

是收敛的，并且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$

证明

$$Tx \triangleq x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

$$\frac{d}{dx}(Tx) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2},$$

$\because \quad f(\hat{x}) = 0, \quad f'(\hat{x}) \neq 0, \quad f''(x)$ 在点 $\hat{x}$ 处连续，

$$\therefore \lim_{x\to\hat{x}} \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = 0,$$

$\exists\ \hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$，使得

$$\left|\frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \leq \alpha < 1, \quad f'(x) \neq 0 \quad (\forall\ x \in U(\hat{x})).$$

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{f(\xi) f''(\xi)}{(f'(\xi))^2}\right| |x - y| \leq \alpha |x - y| \quad (\forall\ x, y \in U(\hat{x})).$$

于是，对 $\forall\ x_0 \in U(\hat{x})$，$x_{n+1} = Tx_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是收敛的. 设 $x_n \to x \in U(\hat{x})$.

$Tx = x \Rightarrow f(x) = 0.$ 联合

$$\left\{\begin{array}{l} f(\hat{x}) = 0 \ (\hat{x} \in U(\hat{x})) \\ f(x) = 0 \ (x \in U(\hat{x})) \\ f'(x) \neq 0 \ (\forall\ x \in U(\hat{x})) \end{array}\right. \Rightarrow x = \hat{x},$$

故有 $x_n \to \hat{x}$.

1.1.3．设 (X,ρ) 是度量空间，映射 $T: X \to X$ 满足 $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$ $(\forall x \neq y)$ 并已知 T 有不动点．求证此不动点是惟一的．

证明 用反证法．如果 T 有两个不动点 $x_1 \neq x_2$，即有，

$$\left.\begin{array}{l}\text{一方面}\left.\begin{array}{l}Tx_1 = x_1\\ Tx_2 = x_2\end{array}\right\} \Rightarrow \rho(Tx_1, Tx_2) = \rho(x_1, x_2);\\ \quad\text{另一方面，由假设}\ \rho(Tx_1, Tx_2) < \rho(x_1, x_2)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \rho(x_1, x_2) < \rho(x_1, x_2)\ \text{矛盾．}$$

1.1.4 设 T 是度量空间上的压缩映射，求证 T 是连续的．

证明 只要证 $x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$．由假设，$\exists \alpha \in (0, 1)$ 使得 $\rho(Tx, Ty) \le \alpha\rho(x, y)$，故有

$$\left.\begin{array}{l}x_n \to x_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) \to 0\\ \quad \rho(Tx_n, Tx_0) \le \alpha\rho(x_n, x_0)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \rho(Tx_n, Tx_0) \to 0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0.$$

1.1.5 设 T 是压缩映射，求证 T^n 也是压缩映射，并说明逆命题不一定成立．

(1) 因为 T 是压缩映射，所以 $\exists \alpha \in (0, 1)$，使得 $\rho(Tx, Ty) \le \alpha\rho(x, y)$，从而

$$\rho(T^2x, T^2y) \le \alpha\rho(Tx, Ty) \le \alpha^2\rho(x, y).$$

假定 $\rho(T^n x, T^n y) \le \alpha^n\rho(x, y)$ 成立，则有

$$\rho(T^{n+1}x, T^{n+1}y) \le \alpha\rho(T^n x, T^n y) \le \alpha \cdot \alpha^n\rho(x, y) = \alpha^{n+1}\rho(x, y).$$

于是根据数学归纳法原理，$\rho(T^n x, T^n y) \leq \alpha^n \rho(x, y)$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 成立.

又 $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < \alpha^n \leq \alpha < 1$. 故有

$\rho(T^n x, T^n y) \leq \alpha\rho(x, y)$. 即 T^n 是压缩映射.

(2) 逆命题不一定成立. 例如

$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} : [0, 1] \to [0, 1]$.

$f^2(x) = \frac{x}{2} : [0, 1] \to [0, 1]$ 是压缩映射. 但是

$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} : [0, 1] \to [0, 1]$ 不是压缩映射. 事实上, 如果 $f(x) : [0, 1] \to [0, 1]$ 是压缩映射, 即

$\exists \alpha : 0 < \alpha < 1$, 使得

$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \alpha|x_2 - x_1|$

$\Rightarrow \frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|} \leq \alpha \quad (\forall x_1, x_2 \in [0, 1])$.

即差商 $\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}$ 是有界的. 但是如果 取

$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = 2x_1 = \frac{2}{n} (n \geq 2)$,

$\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|} = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \infty \quad (n \to \infty)$.

即知差商 $\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}$ 是无界的, 矛盾.

(3) 如果存在正整数 n, 使得 T^n 是压缩映射, 那么 T 有唯一不动点. 事实上, 根据不动点定理, $\exists x_0$ 使得 $T^n x_0 = x_0$. 则有

$$\begin{array}{ccc} T^n(Tx_0) & = & Tx_0 \\ \| & & \| \\ T^{n+1}x_0 & = & T(T^n x_0) \end{array}$$

即 Tx_0 也是 T^n 的不动点. 又 T^n 是压缩映射, 那么 T^n 有唯一不动点, 即得 $Tx_0 = x_0$. 这就证明了 T 有不动点.

下面再证 T 的不动点唯一. 用反证法. 如果 x_1, x_2 是 T 的两个不动点 $x_1 \neq x_2$. 即有 $\begin{cases} Tx_1 = x_1 \\ Tx_2 = x_2 \end{cases}$, 那么

$$\begin{cases} T^n x_1 = T^{n-1}(Tx_1) \overset{Tx_1=x_1}{=} T^{n-1}(x_1) = \cdots = Tx_1 = x_1 \\ T^n x_2 = T^{n-1}(Tx_2) \overset{Tx_2=x_2}{=} T^{n-1}(x_2) = \cdots = Tx_2 = x_2 \end{cases}$$

即 x_1, x_2 是 T^n 的两个不动点, 因为 T^n 是压缩映射, 所以 T^n 有唯一不动点, 从而 $x_1 = x_2$, 矛盾.

1.1.6 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 映射 $T: M \to M$ 满足

$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)\ (\forall x, y \in M, x \neq y)$.

求证 T 在 M 中存在唯一的不动点.

证 $\because$ $\rho(Tx, Tx_0) < \rho(x, x_0)$,

$\therefore$ $\rho(x, x_0) \to 0 \Rightarrow \rho(Tx, Tx_0) \to 0$. 再由三角形不等式, 得到

$|\rho(x, Tx) - \rho(x_0, Tx_0)| \leq \rho(x, x_0) + \rho(Tx, Tx_0)$. 由此可见, $f(x) \overset{\text{def}}{=} \rho(x, Tx)$ 在 M 上连续. 因为 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 所以 $\exists x_0 \in M$ 使得

$$\rho(x_0, Tx_0) = f(x_0) = \min_{x \in M} f(x) = \min_{x \in M} \rho(x, Tx).$$

如果 $\rho(x_0, Tx_0) = 0$, 那么 x_0 就是不动点. 今假设 $\rho(x_0, Tx_0) > 0$. 根据假设, 我们有

$\rho(Tx_0, T^2 x_0) < \rho(x_0, Tx_0) = \min\limits_{x \in M} \rho(x, Tx)$.

但是 Tx_0, $T^2 x_0 \in M$, 这与 $\rho(x_0, Tx_0)$ 是最小值矛盾. 故 $\rho(x_0, Tx_0) = 0$, 即存在不动点 x_0.

不动点的唯一性是显然的．事实上，如果存在两个不动点 x_1，x_2，则从

$\rho(x_1, x_2) = \rho(Tx_1, Tx_2) < \rho(x_1, x_2)$ 即得矛盾．

注　假如把条件 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集 去掉，只假定

$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$ $(\forall x, y \in M, x \neq y)$，

结论一般不对．例如，$X = \mathbb{R}^1$, $Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$

$$\rho(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}|x - y| < |x - y| = \rho(x, y).$$

由此可见，映射 T 满足假定：

$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$ $(\forall x, y \in M, x \neq y)$，

但是 $Tx = x \Rightarrow \arctan x = \frac{\pi}{2}$，这是不可能的，因此映射 T 没有不动点．

1.1.7 对于积分方程 $x(t) - \lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds = y(t)$ 为一给定函数，λ 为常数，$|\lambda| < 1$，求证存在惟一解 $x(t) \in [0, 1]$.

证明　$x(t) - \lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds = y(t)$

$$\Rightarrow e^{-t}x(t) - \lambda\int_0^1 e^{-s}x(s)ds = e^{-t}y(t)$$

$z(t) \overset{\text{def}}{=} e^{-t}x(t)$, $\zeta(t) = e^{-t}y(t)$，则有

$z(t) = \zeta(t) + \lambda\int_0^1 z(s)ds$，令

$$T: z(t) \mapsto \zeta(t) + \lambda\int_0^1 z(s)ds.$$

$$\rho(Tu, Tv) = \max_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_0^1 u(s)ds - \lambda\int_0^1 v(s)ds\right|$$

$$\leq |\lambda|\max_{t\in[0,1]}\int_0^1|u(s) - v(s)|ds = |\lambda|\max_{t\in[0,1]}|u(t) - v(t)| = |\lambda|\rho(u, v).$$

1.2.1 设 S 为一切复数列

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \cdots)$$

组成的集合，在 S 中定义距离为

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|},$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$，$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$．求证：$S$ 为一个完备的距离空间．

证 $\rho(x, y)$ 满足距离的正定性、对称性两个条件是显然的．为了验证 $\rho(x, y)$ 满足三角形不等式，注意到

$$f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \uparrow \Rightarrow f(|a+b|) \le f(|a| + |b|)$$

即

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

设 $z = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k, \cdots)$，则有

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|(\xi_k-\zeta_k)+(\zeta_k-\eta_k)|}{1+|(\xi_k-\zeta_k)+(\zeta_k-\eta_k)|} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}$$

$$= \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

这就验证了 $\rho(x,y)$ 满足三角形不等式. 从而 S 是距离空间.

下面证明 S 的完备性. 设 $\{x^{(m)}\}$ 是 S 中的基本列.

其中 $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_k^{(m)}, \cdots\right)$. 则

$$\rho(x^{(m+p)}, x^{(m)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left|x_i^{(m+p)}-x_i^{(m)}\right|}{1+\left|x_i^{(m+p)}-x_i^{(m)}\right|} \to 0 \quad (m \to \infty, \ \forall p \in \mathbb{N})$$

由此可以推出 $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left|x_k^{(m+p)} - x_k^{(m)}\right| \to 0 \quad (m \to \infty, \ \forall p \in \mathbb{N}).$$

事实上，对每一个固定的 $k \in \mathbb{N}$，对

$\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1, \exists N_k$，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left|x_i^{(m+p)} - x_i^{(m)}\right|}{1 + \left|x_i^{(m+p)} - x_i^{(m)}\right|} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad (m > N_k, \ \forall p \in \mathbb{N}).$$

取级数中的第 k 项，它当然不会超过所有项的和，即得

$$\frac{\left|x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)}\right|}{1+\left|x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)}\right|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left|x_k^{(m+p)} - x_k^{(m)}\right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \overset{\because \varepsilon<1}{<} \varepsilon$$

由此可见，$\forall k \in \mathbb{N}$

$\left|x_k^{(m+p)} - x_k^{(m)}\right| \to 0 \ (m \to \infty, \ \forall p \in \mathbb{N})$.

这意味着 $\forall k \in \mathbb{N}$，$x^{(m)}$ 的每一个坐标序列 $x_k^{(m)}$ 都是复数集合中的基本列．由复数集合的完备性，每一个坐标序列 $x_k^{(m)}$ 都收敛，并存在

$\exists x_k$ 使得 $\left|x_k^{(m)} - x_k\right| \to 0(m \to \infty)$. 现在令 $x = \{x_k\}$.

下证 $x^{(m)} \to x \ (m \to \infty)$.

事实上，就是要证

$$\rho(x^{(m)}, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\left|x_n^{(m)}-x_n\right|}{1+\left|x_n^{(m)}-x_n\right|} \to 0 \ (m \to \infty).$$

也就是要证，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}{1+\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|} < \varepsilon \ (\forall m > N).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}{1+\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|} = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^k} \frac{\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}{1+\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}}_{\text{有限项}} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}{1+\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}}_{\text{无穷多项}}$$

为了其中的无穷多项部分 $< \frac{\varepsilon}{2}$，只要 $n_0 > 1 - \log_2 \varepsilon$，事实上，

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}{1+\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|} < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

到对每一个 $n \le n_0$，$\exists N_n$ 使得

$$\left|x_n^{(m)} - x_n^*\right| < \frac{\varepsilon}{2} (n = 1, 2, \cdots, n_0).$$

取 $N = \max\{N_1, N_2, \cdots N_{n_0}\}$，使有

$$\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^k}\frac{\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}{1+\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}<\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^k}\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|$$

$$<\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}{1+\left|x_n^{(m)}-x_n^*\right|}<\varepsilon\ (\forall m>N)$ 成立。因此 $\{x^{(m)}\}$ 按距离 ϱ 收敛于 x，故 (S,ρ) 是完备的度量空间。

1.2.2 在一个度量空间 (X,ρ) 上，求证：基本列是收敛列，当且仅当其中存在一串收敛子列。

证明 基本列是收敛列 $\Rightarrow$ 存在一串收敛子列 是显然的，因为整个基本列就是一串收敛子列。

存在一串收敛子列 $\Rightarrow$ 基本列是收敛列，设 $\{x_n\}$ 是基本列，且存在一串收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，要证 $\{x_n\}$ 是收敛列。

首先肯定 $\{x_n\}$ 的收敛点是什么？ $\{x_n\}$ 的收敛点当然是 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛点。既然 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，设

$x_{n_k}\to x.$

下面证明 $x_n\to x$. 因为 $\{x_n\}$ 是基本列，所以对一切 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

$$\rho(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall\ n,m>N)$$

$\because\ n_k\to\infty,\quad\therefore\ \exists\ K,$ 使得

$n_k>N\ (\forall\ k>K)$，故有

$$\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall\ n > N,\ \forall\ k > K)$$

对上式令 $k \to \infty$ 取极限，即得

$\rho(x_n, x) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (\forall\ n > N)$，即证得

$x_n \to x.$

1.2.3 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体。在 F 上引进距离，求证 (F, ρ) 不完备，并指出它的完备化空间。

$$x^{(n)} = \Big(\underbrace{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \cdots\Big) \in F,$$

$$x^{(m)} = \Big(\underbrace{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{m}}_{m}, 0, 0, \cdots\Big) \in F$$

$$m > n, \quad x^{(n)} - x^{(m)} = \Big(\underbrace{\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots, \frac{1}{m}}_{m}, 0, 0, \cdots\Big)$$

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sup_{k\ge1}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$$x = \Big(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\Big)$$

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sup_{k\ge1}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x, \quad x \notin F.$$

其完备化空间应是以 0 为极限的实数列全体。即

$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots), \lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0.$

它是完备的。

$$\begin{array}{lll}
x^{(1)} = \left(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \cdots, \xi_k^{(1)}, \cdots\right) \to 0 & (k \to \infty) \\
x^{(2)} = \left(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \cdots, \xi_k^{(2)}, \cdots\right) \to 0 & (k \to \infty) \\
x^{(3)} = \left(\xi_1^{(3)}, \xi_2^{(3)}, \cdots, \xi_k^{(3)}, \cdots\right) \to 0 & (k \to \infty) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\
x^{(n)} = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots\right) \to 0 & (k \to \infty) \\
\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow & \\
x \quad = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) &
\end{array}$$

$x^{(n)} \to x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq 1}\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right| = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,$

$\sup\limits_{k\geq 1}\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \geq N)$

$\left|\xi_k^{(N)} - \xi_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k = 1, 2, \cdots),$

$\left\{\xi_k^{(N)}\right\} \qquad \left|\xi_k^{(N)} - \xi_j^{(N)}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k, j \geq N_1)$

$\lim\limits_{j\to\infty}\left|\xi_j^{(N)}\right| = 0 \Rightarrow \left|\xi_j^{(N)}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (j \geq N_2 \geq N_1)$

$|\xi_k| \leq \left|\xi_k - \xi_k^{(N)}\right| + \left|\xi_k^{(N)} - \xi_j^{(N)}\right| + \left|\xi_j^{(N)}\right|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

F 在其中稠密.

$x^{(n)} = (\underbrace{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n}_{n}, 0, 0, \cdots) \in F,$

$\rho(x^{(n)}, x) = \sup\limits_{k\geq n+1}|\xi_k| \to 0 \quad (n \to \infty).$

1.2.4 求证: $[0, 1]$ 上的多项式全体按距离

$\rho(p, q) = \int_0^1 |p(x) - q(x)|dx$

是不完备的，并指出它的完备化空间.

证明 $P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$， $P_{m+p}(x)=\sum_{k=0}^{m+p}\frac{x^k}{k!}$

$$\rho(P_m(x),P_{m+p}(x))=\int_0^1\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{x^k}{k!}dx=\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{1}{(k+1)!}$$

$$\le\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{m+1}\to 0\quad(m\to\infty,\quad\forall p\in N).$$

$$\rho(P_m(x),e^x)=\int_0^1\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}dx=\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}$$

$$\le\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{m+1}\to 0\quad(m\to\infty).$$

但是 e^x 不是多项式.

1.2.5 在完备的度量空间 (X,ρ) 中给定点列 $\{x_n\}$，如果 $\forall\varepsilon>0$ 存在基本列 $\{y_n\}$，使得 $\rho(x_n,y_n)<\varepsilon\ (\forall n\in\mathbb{N})$. 求证：$\{x_n\}$ 收敛.

证明 依题意，对 $\frac{\varepsilon}{3}>0$，$\exists\{y_n\}$，使得

$$\rho(x_n,y_n)<\frac{\varepsilon}{3},\quad\rho(x_m,y_m)<\frac{\varepsilon}{3},$$

又 $\{y_n\}$ 是基本列，对 $\frac{\varepsilon}{3}>0$，$\exists N$，使得 $\forall n>N$，有

$$\rho(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{3}.$$ 于是

$$\rho(x_n,x_m)<\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_m)+\rho(x_m,y_m)$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

$$\begin{tikzcd}
x_n \arrow[r, dash, "<\varepsilon"] \arrow[d, dash, "<\frac{\varepsilon}{3}"'] & x_m \arrow[d, dash, "<\frac{\varepsilon}{3}"] \\
y_n \arrow[r, dash, "<\frac{\varepsilon}{3}"'] & y_m
\end{tikzcd}$$

1.3.1 在度量空间中求证：为了子集 A 是列紧的，其充分且必要条件是对

$\forall\varepsilon > 0$ 存在 A 的列紧的 ε 网.

证明 必要性显然，只证充分性. $\forall\varepsilon > 0$, 设 N 是 A 的列紧的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网；

N_0 是 N 的有限 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网，则有

$$\forall x \in A, \quad \exists\xi \in N, \quad \rho(x,\xi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\xi \in N, \quad \exists x_\varepsilon \in N_0, \quad \rho(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \rho(x, x_\varepsilon) &\le \rho(x,\xi) + \rho(\xi, x_\varepsilon) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

N_0 是 A 的有限 ε 网.

1.3.2 给定距离空间 (X,ρ)，设 $M \subset X$ 是紧集，求证 M 上连续函数必有界，亦达到它的上，下确界.

证明 $f(x_0) \leftarrow f(x_{n_k}) \to +\infty$,

$$\beta = \sup_{x\in M} f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \le \beta$$

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in M, \quad f(x_\varepsilon) > \beta - \varepsilon$$

$$\{x_n\}, \quad \beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \le \beta$$

$$f(x_0) \leftarrow f(x_{n_k}) \to \beta \Rightarrow f(x_0) = \beta.$$

注 紧集条件不可少. 例 $(0,1]$ 上考虑

$$\{x_n(t)\}, \quad x_n(t) = t^n, \quad f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$$

$$f(t^n) = \int_0^1 t^{2n}dt = \frac{1}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \inf_{n\ge1} f(t^n) = 0,$$

$$0 \notin (0,1].$$

1.3.3 在度量空间中求证：完全有界的集合是有界的，并且通过考虑

ℓ^2 的子集

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty},\quad e_k=\{\underbrace{0,0,\cdots,1}_{k},0,\cdots\}$$

来说明一个集合可以是有界但不完全有界.

证 设 M 是完全有界集，那么 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ M 的有限的 ε 网. 特别对 $\varepsilon=1$，设 $N=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则有 $M\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,1)$. 于是 $\forall x\in M$，设 a 为空间 X 的一个固定元. 我们有

$$\rho(x,a)\le\rho(x,x_k)+\rho(x_k,a)\le 1+\max_{1\le k\le n}\rho(x_k,a),$$

即 M 是有界的.

下面说明 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有界但不完全有界. 首先，对 $\forall k$，$\rho_{l^2}(e_k,\theta)=1$，其中

$$\theta=\{0,0,\cdots,0,\cdots\}.$$

由此可见 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有界. 再注意到

$$e_i-e_j=\{\underbrace{0,0,\cdots,1}_{i},0,\cdots\}-\{\underbrace{0,0,\cdots,1}_{j},0,\cdots\}$$

$$=\{\overbrace{\underbrace{0,0,\cdots,1}_{i},0,\cdots,-1}^{j},\cdots\}\quad(j>i).$$

$$\rho(e_i,e_j)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|e_i^{(k)}-e_j^{(k)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\quad(j\ne i).$$

由此可见，$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 与其任意子列都不收敛，从而 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 不是列紧的，根据Hausdorff定理，也就不完全有界.

1.3.4 设 (X,ρ) 是度量空间，F_1，F_2 是它的两个紧子

集，求证

$\exists x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$，使得 $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_1, x_2)$，

其中

$$\rho(F_1, F_2) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in F_1, y \in F_2} \rho(x, y).$$

证明 记 $d = \rho(F_1, F_2)$，$\forall x \in F_1$，$y \in F_2$.

$\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists x_n \in F_1$，$y_n \in F_2$，

$$d \le \rho(x_n, y_n) < d + \frac{1}{n}$$

设 $x_{n_k} \to x_1 \in F_1$，相应的 $y_{n_k} \in F_2$，序列 $\{y_{n_k}\}$ 未必收敛，

但因为 F_2 紧，存在它们的子序列 $\{y_{n_{k_j}}\}$ 收敛，设 $y_{n_{k_j}} \to x_2 \in F_2$，即有

$$d \le \rho\left(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}\right) < d + \frac{1}{n_{k_j}} \overset{j \to \infty}{\Rightarrow} d = \rho(x_1, x_2).$$

1.3.5 设 M 是 $C[a, b]$ 中的有界集，求证集合

$$\widetilde{M} = \left\{F(x) = \int_a^x f(t)dt \mid f \in M\right\}$$

是列紧集.

证：设 $E = \left\{F(x) = \int_a^x f(t)dt \mid f \in M\right\}$，

$\forall f \in M$，$|f(t)| \le M_0 \quad (\forall t \in [a, b])$

$$|F(x)| = \left|\int_a^x f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt \le M_0(b - a)$$

$(\forall F \in E)$. 即 E 一致有界.

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \le \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\right| \le M_0|x_2 - x_1|$$

$\forall \varepsilon > 0$，$\delta = \frac{\varepsilon}{M_0}$，

$|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon \quad (\forall F \in E)$.

即 E 等度连续.

1.3.5 设 M 是 $C[a,b]$ 中的有界集，求证集合

$$\widetilde{M} = \left\{F(x) = \int_a^x f(t)dt \,|\, f \in M\right\}$$

是列紧集.

证：设 $E = \left\{F(x) = \int_a^x f(t)dt \mid f \in M\right\}$,

$\forall f \in M, \quad |f(t)| \le M_0 \quad (\forall t \in [a,b])$

$|F(x)| = \left|\int_a^x f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt \le M_0(b-a)$

$(\forall F \in E)$. 即 E 一致有界.

$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \le \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\right| \le M_0|x_2 - x_1|$

$\forall \varepsilon > 0, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{M_0}$,

$|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon \quad (\forall F \in E)$.

即 E 等度连续.

1.3.6 求证 $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C[0,\pi]$ 中不是列紧的.

证：只要证 $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ 非等度连续.

对 $\varepsilon_0 = 1$, $\forall \delta > 0$, 取 $k \in \mathbb{N}$, 使得

$\frac{1}{k} < \delta$, $\quad n_k = 2k$,

$t_k = \frac{\pi}{4k} \in [0,\pi]$, $\quad t_0 = 0$,

$|t_k - 0| = \frac{\pi}{4k} < \frac{1}{k} < \delta$,

$|\sin n_k \cdot t_k - \sin n_k \cdot 0| = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = \varepsilon_0$.

由此可见，$\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ 非等度连续.

1.3.7 空间S中集合 A 的列紧性条件. A 在S中是列紧的，当且仅当，对于任何 $n \in \mathbb{N}, \exists C_n > 0$, 使得对 $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in A$, 的点的第 n 个坐标的

数集是有界的，即 $|\xi_n| \le C_n \ (n = 1, 2, \cdots)$.
证 必要性. 因为 A 在 S 中是列紧的，任意一个无穷点列 $\{\xi^{(m)}\} \subset A$ 可以取出收敛子序列 $\{\xi^{(m_k)}\}$. 因为 S 中的收敛与按坐标收敛等价，所以点列 $\{\xi^{(m)}\}$ 中的每一个点（固定 m）的坐标序列 $\{\xi_n^{(m)}\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 也可以从其任意无穷子集中取出收敛子序列，而坐标序列构成数集，要从其任意无穷子集中取出收敛子序列显然应该要求它们有界.
为了证明充分性，根据习题 1.3.1，只要构造 A 的列紧的 ε 网，$\forall \varepsilon > 0$，取定一个 n 充分大，使得 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$，考虑形如 $h_n = (\underbrace{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n}_{n}, 0, 0, \cdots)$ 的点的集合 H，其中 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1}, \cdots) \in A$. 因为

$$\rho(x, h_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

所以 H 是 A 的 ε 网.
再证 H 是在 S 中列紧的. 事实上，可以将 H 看做是元素为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的 n 维空间中的子集，由假设 $|\xi_k| \le C_k \ (k = 1, 2, \cdots n)$，即每个坐标都是有界的，所以 H 可看做是 n 维空间中的有界集. 从而是列紧的.
1.3.8 设 (X, ρ) 是距离空间，M 是 X 中的列紧集，若映射 $T: X \to M$ 满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) \qquad (\forall\, x, y \in X,\ x \ne y),$$

求证 T 在 X 上存在唯一的不动点. 证记
$d = \inf\{\rho(x, f(x)) \mid x \in \overline{M}\}$,

证明 先证 存在 $x_0 \in \overline{M}$, 使得 $\rho(x_0, f(x_0)) = d$. 这从下确界的定义出发, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\ x_n \in M$, 使得 $d \le \rho(x_n, f(x_n)) < d + \frac{1}{n}$, 又因为 M 列紧, 故存在 $x_{n_k} \to x_0$, 将上面不等式中的 n 改为 n_k, 即

$d \le \rho(x_{n_k}, f(x_{n_k})) < d + \frac{1}{n_k}$, 并令 $k \to \infty$.

再证 $d = 0$. 用反证法. 如果 $d > 0$,

则有 $d \le \rho(f(x_0), f(f(x_0))) < \rho(x_0, f(x_0)) = d$, 矛盾.

1.3.9 设 (M, ρ) 是一个紧距离空间, 又 $E \subset C(M)$, E 中函数一致有界并满足下列:

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le c\rho(t_1, t_2)^{\alpha}$$

$\forall x \in E, t_1, t_2 \in M$, 其中 $0 < \alpha \le 1$, $c > 0$, 求证 E 在 $C(M)$ 中是列紧集. 证 $\forall\ \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, 当 $\rho(t_1, t_2) < \delta$ 时,

$|x(t_1) - x(t_2)| \le C\rho(t_1, t_2)^{\alpha} \overset{\text{注}}{<} \varepsilon$. 所以 E 是等度连续的.

注 $C\rho(t_1, t_2)^{\alpha} < \varepsilon \Leftrightarrow \rho(t_1, t_2)^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{C}$

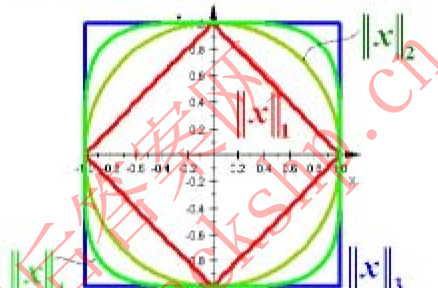
$\Leftrightarrow \rho(t_1, t_2) < \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \delta$

1.4.1 在 $\mathbf{R}^2$ 中， $\forall z = (a, b)$ ，令

$$\|z\|_1 = |a|+|b| \ ; \|z\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \ ;$$

$$\|z\|_3 = \max(|a|, |b|) \ ; \|z\|_4 = (a^4 + b^4)^{\frac{1}{2}} .$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 上范数；(2) 画出 $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_i) i = 1, 2, 3, 4$ 各空间中的单位球面图形；(3) 取 $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ ，试在上述四种不同范数下求出 ΔOAB 三边的长度.



$|AB|_1 = |1 - 0| + |0 - 1| = 2.$

$|AB|_2 = \sqrt{2}$. $|AB|_3 = \max(|1 - 0|, |0 - 1|) = 1.$

$|AB|_4 = 2^{\frac{1}{4}}$.

1.4.2 $C(0, 1]$ 表示 $(0, 1]$ 上连续且有界的函数 $x(t)$ 全体. 对 $\forall x \in C(0, 1]$ ，令 $\|x\| = \sup\limits_{0<t\le 1}|x(t)|.$ 求证：

(1) $\|\cdot\|$ 是 $C(0, 1]$ 空间上的范数；

(2) l^∞ 与 $C(0, 1]$ 的一个子空间是等距同构的.

解 $\forall x \in C(0, 1]$,

$$\alpha_x = \left\{x(1), x\left(\frac{1}{2}\right), \cdots, x\left(\frac{1}{n}\right), \cdots\right\} \in l^\infty$$

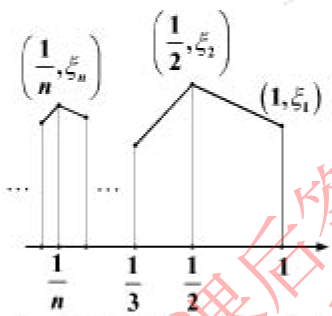
$$\|\alpha_x\|_\infty = \sup_{n\geq 1}\left|x\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \|x\|.$$

反之，$\forall\alpha = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^\infty$，

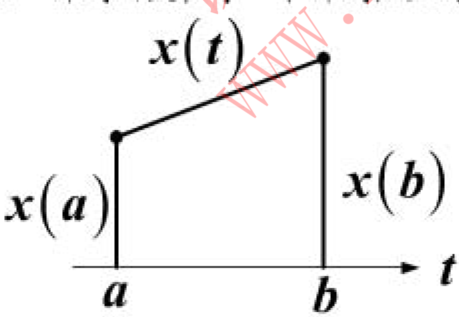
将点列 $(1, \xi_1), \left(\frac{1}{2}, \xi_2\right), \cdots, \left(\frac{1}{n}, \xi_n\right), \cdots$ 用折线连接起来，得到一个函数

$$x_\alpha(t) \in C(0, 1].\ \|x_\alpha\| \leq \sup_{n\geq 1}|\xi_n| = \|\alpha\|_\infty.$$

$$\left.\begin{aligned} \|\alpha_x\|_\infty &\leq \|x\| \\ \|x_\alpha\| &\leq \|\alpha\|_\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|\alpha\|_\infty = \|x\|.$$



注 折线函数在每一个折线段上的最大值由端点值决定.



$$x(t) = x(a)\,\frac{b-x}{b-a} + x(b)\,\frac{x-a}{b-a} \Rightarrow$$

$$|x(t)| \leq |x(a)|\,\frac{b-x}{b-a} + |x(b)|\,\frac{x-a}{b-a} \leq \max\{|x(a)|, |x(b)|\}.$$

1.4.3 在 $C^1[a,b]$ 中令

$$\|x\|_1 = \left(\int_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\ x \in C^1[a,b]$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数; (2) 问 $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$ 是否完备?

考虑 $C^1[0,1]$ 中的函数列:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad (-1 \le x \le 1)$$

可以验证 $\{f_n(x)\}_1^\infty$ 按范数 $\|\cdot\|_1$ 是基本列.

但是 $f_n(x) \to |x| \notin C^1[0,1]$.

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}, \quad m > n$$

$$\|f_m(x) - f_n(x)\|^2$$

$$= 2\int_0^1 [(\sqrt{x^2 + \frac{1}{m^2}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}})^2 + x^2(\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}})^2]dx$$

$$= I_1 + I_2$$

$$I_1 = 2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)^2 \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}} + \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}})^2 dx$$

$$\le \frac{2}{n^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$$I_2 = 2\int_0^1 x^2(\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}})^2 dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2 \frac{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2+\frac{1}{m^2}}\right)^2}{\left(x^2+\frac{1}{m^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)} dx$$

$$\leq \frac{2}{n^4}\int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x\right)}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x\right)}dx = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^1$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x\right)}dx \leq n^3$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+x\right)}dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{\frac{2}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{n}}$$

$$\leq (1-\frac{1}{n})n^3 \leq n^3$$

$$I_2 \leq \frac{2}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

但是 $f_n(x) \to |x| \notin C^1[0,1]$.

1.4.4 在 $C[0,1]$ 中，对每个 $x \in C[0,1]$ 令

$$\|x\|_1 = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}};\ \|x\|_2 = \left(\int_0^1 (1+t)|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

求证 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中两个等价范数.

证明 显然 $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$.

$$\|x\|_2^2 = \int_0^1 (1+t)|x(t)|^2 dt$$

$$= \int_0^1 |x(t)|^2 dt + \int_0^1 t\cdot|x(t)|^2 dt \leq 2\int_0^1 |x(t)|^2 dt = 2\|x\|_1^2$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_1.$$

1.4.5 设 $BC[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 上连续且有界的函数 $f(x)$ 全体，对于每个 $f \in BC[0,\infty)$ 及 $a > 0$, 定义

$$\|f\|_a = \left(\int_0^\infty e^{-ax}|f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_a$ 是 $BC[0,\infty)$ 上的范数.

(2) 若 $a, b > 0, a \neq b$

求证 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ 作为 $BC[0,\infty)$ 上的范数是不等价的.

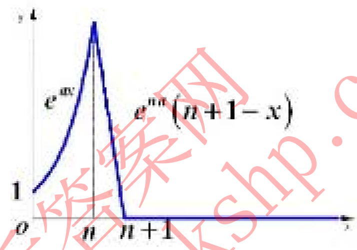
证明 不妨假设 $b > a > 0$，显然有 $\|f\|_b \le \|f\|_a$，由此可见，为了证明

不等价性，只要证不存在 $c > 0$，使得

$\|f\|_a \le c\|f\|_b(\forall f \in BC[0,\infty))$. 只需证

$\exists f_n \in BC[0,\infty)$，使得

$$\frac{\|f_n\|_a^2}{\|f_n\|_b^2} \to \infty.$$



$$g_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{ax}, 0 \le x \le n \\ e^{ax}(n+1-x), n \le x \le n+1 \\ 0, x \ge n+1 \end{cases}$$

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g_n(x)}$$

$$\|f\|_a^2 \ge \int_0^n e^{-ax} \cdot e^{ax}dx = n,$$

$$\|f\|_b^2 \le \int_0^\infty e^{-bx} \cdot e^{ax}dx = \int_0^\infty e^{-(b-a)x}dx = \frac{1}{b-a}$$

$$\frac{\|f_n\|_a^2}{\|f_n\|_b^2} \ge \frac{n}{b-a} \to +\infty.$$

1.4.6 设 X_1, X_2 是两个线性赋范空间，定义 $X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ 称为 X_1 与 X_2 的 Decard笛卡尔空间. 规定线性运算如下:

$$\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

$\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，$x_1,y_1\in X_1$，$x_2,y_2\in X_2$，并赋以范数

$$\|(x_1,x_2)\|=\max(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2)$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别是 X_1 和 X_2 的范数，求证：如果 X_1,X_2 是B空间，那末 X 也是B空间.

证明 设 $\{x^{(n)}\}$ 是 X 中的基本列. 则

$$\|x^{(n)}-x^{(m)}\|\to 0\ (n,m\to\infty)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left\|x_1^{(n)}-x_1^{(m)}\right\|_1\to 0\ (n,m\to\infty)\\ \left\|x_2^{(n)}-x_2^{(m)}\right\|_2\to 0\ (n,m\to\infty)\end{cases}$$

因为 X_1 是 B 空间，所以 $\exists x_1\in X_1$，使得 $x_1^{(n)}\to x_1$；又因为 X_2 是 B 空间所以 $\exists x_2\in X_2$ 使得 $x_2^{(n)}\to x_2$.

$x\overset{\text{def}}{=}(x_1,x_2)$. 下证 $x^{(n)}\overset{\|\cdot\|}{\to}x$. 事实上，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$ 使得 $\|x^{(n)}-x^{(m)}\|<\frac{\varepsilon}{2}\ (\forall n,m>N)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left\|x_1^{(n)}-x_1^{(m)}\right\|_1<\frac{\varepsilon}{2}\ (\forall n,m>N)\\ \left\|x_2^{(n)}-x_2^{(m)}\right\|_2<\frac{\varepsilon}{2}\ ((\forall n,m>N))\end{cases}$$

$$\overset{m\to\infty}{\Rightarrow}\begin{cases}\left\|x_1^{(n)}-x_1\right\|_1\le\frac{\varepsilon}{2}\ (\forall n>N)\\ \left\|x_2^{(n)}-x_2\right\|_2\le\frac{\varepsilon}{2}\ ((\forall n>N))\end{cases}$$

$$\|x^{(n)}-x\|=\max(\left\|x_1^{(n)}-x_1\right\|_1,\left\|x_2^{(n)}-x_2\right\|_2)$$
$$\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\ (\forall n>N).$$

1.4.7 设 X 是 B^* 空间，求证：X 是 B 空间，必须且仅须对

$\forall\{x_n\}\subset X,\ \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

证 $(\Rightarrow)$ 由 $\left\|\sum_{m}^{m+p}x_n\right\|\le\sum_{m}^{m+p}\|x_n\|$ 显然.

$(\Leftarrow)$ 设 $\{x_n\}$ 是基本列，由1.2.2 只要 $\{x_n\}$ 存在一串收敛子列.

事实上，对 $\forall k\in\mathbb{N}$，取 $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$，因为 $\{x_n\}$ 是基本列，

所以 $\exists N_k$，使得 $\forall\ n,m>N_k$，有 $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^k}$，于是

$\exists n_k,\ n_{k+1}>n_k>N_k$，使得 $\|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}\|<\frac{1}{2^k}$，取 $y_k=x_{n_k}\ (k=1,2,\cdots)$.

改写

$y_k=y_1+\sum_{i=1}^{k}(y_{i+1}-y_i)$，因为

$\sum_{i=1}^{\infty}\|y_{i+1}-y_i\|<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$，

由 $(\Leftarrow)$ 假设，$\sum_{i=1}^{\infty}(y_{i+1}-y_i)$ 收敛. 即 $\{y_k\}$ 收敛，也就是 $\{x_{n_k}\}$ 收敛.

即 $\{x_n\}$ 存在一串收敛子列.

1.4.9 在 $\mathbb{R}^2$ 中，对 $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$，定义范数 $\|x\|=\max(|x_1|,|x_2|)$，并设

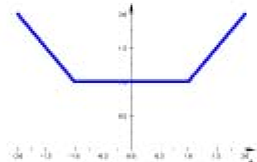
$x_0=(0,1),\quad e_1=(1,0)$.

求 $a\in\mathbb{R}^1$ 适合 $\|x_0-ae_1\|=\min_{\lambda\in\mathbb{R}^1}\|x_0-\lambda e_1\|$，

并问这样的 a 是否唯一？请对结果作出几何解释.

解 $\|x_0 - ae_1\| = \|(-a, 1)\|$

$$= \max\{|a|, 1\} = \begin{cases} |a| & (|a| > 1) \\ 1 & (|a| \le 1) \end{cases}$$

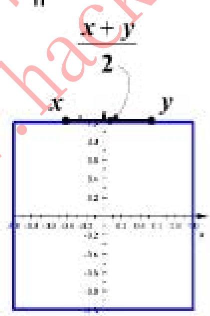


$$\min_{a\in\mathbb{R}^1}\|x_0 - ae_1\| = 1,$$

最佳逼近元 $\{ae_1\}_{|a|\le1}$，不唯一.

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ 非严格凸，如图所示，

$$\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1.$$



1.4.11 设 X 是线性赋范空间，函数 $\varphi : x \mapsto \mathbb{R}^1$ 称为凸的，如果不等式

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)x) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(x)$$

成立. 求证凸函数的局部极小值必然是全空间最小值.

证明 用反证法. 设 x_0 是局部极小点，则

$$x_1 \in U(x_0) \Rightarrow \varphi(x_1) \ge \varphi(x_0).$$

如果 $\exists\ x_2 \in X$

使得 $\varphi(x_2) < \varphi(x_0)$，那么

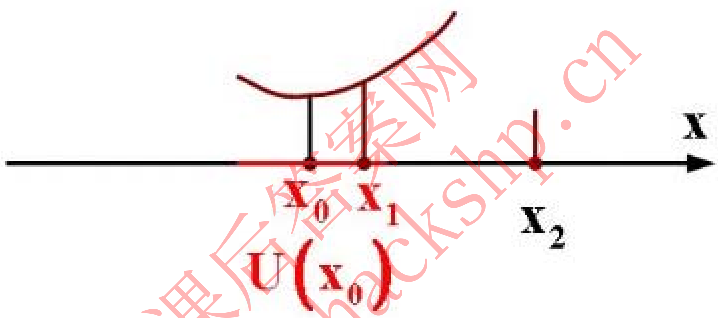
$$\varphi(x_1) \le \lambda\varphi(x_0) + (1-\lambda)\varphi(x_2)$$

$$< \lambda\varphi(x_0) + (1-\lambda)\varphi(x_0) = \varphi(x_0),$$

$$\varphi(x_1) \ge \varphi(x_0)$$

$$\updownarrow$$

$$\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$$



1.4.12 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一线性赋范空间，M 是 X 的有限维子空间 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 M 的一组基. 给定 $g \in X$，引进函数 $F: \mathbf{k}^n \to \mathbb{R}^1$，规定

$$F(c) = F(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k - g\right\|.$$

(1) 求证 F 是一个凸函数；

(2) 若 $F(c)$ 的最小值点是 $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，

$f \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ 给出 g 在 M 中的最佳逼近元.

证明

$$F(\lambda c+(1-\lambda)c')=\left\|\sum_{k=1}^{n}(\lambda c_k+(1-\lambda)c'_k)e_k-(\lambda+(1-\lambda))g\right\|$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{n}\left[\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}c_ke_k-g\right)+(1-\lambda)\left(\sum_{k=1}^{n}c'_ke_k-g\right)\right]\right\|$$

$$\le\lambda\left\|\sum_{k=1}^{n}c_ke_k-g\right\|+(1-\lambda)\left\|\sum_{k=1}^{n}c'_ke_k-g\right\|$$

$$=\lambda F(c)+(1-\lambda)F(c').$$

$\forall\ \hat{x}\in M\leftrightarrow\hat{c}=(\hat{c}_1,\hat{c}_2,\cdots,\hat{c}_n)$,

$$\|\hat{x}-g\|=\min_{x\in M}\|x-g\|=\min_{(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in k^n}F(c)=F(\hat{c})$$

1.4.13 设 X 是 B^* 空间， X_0 是 X 的线性子空间，假定 $\exists c\in(0,1)$，使得

$\inf\limits_{x\in X_0}\|y-x\|\le c\|y\|$ 求证： X_0 在 X 中稠密.

证

$$\rho(y,X_0)=\inf_{x\in X_0}\|y-x\|\le c\|y\|\overset{\|y\|=1}{=}c,\quad c\in(0,1)$$

$$\rho(y,\overline{X_0})=\inf_{x\in\overline{X_0}}\|y-x\|\overset{X_0\subset\overline{X_0}}{\le}\inf_{x\in X_0}\|y-x\|\Rightarrow\rho(y,\overline{X_0})\le c.$$

用反证法. $\overline{X_0}\subsetneq X$, 由 Riesz 引理，对 $\forall\varepsilon>0$,

$\exists y\in\overline{X_0}$, $\|y\|=1$, 使得 $\rho(y,\overline{X_0})>1-\varepsilon.$

于是取 $\varepsilon=\frac{1-c}{2}>0$, 使有

$\rho(y,\overline{X_0})>\frac{1+c}{2}>\frac{c+c}{2}=c.$ 矛盾.

1.4.14 设 C_0 表示以 0 为极限的函数全体，并在 C_0 中赋以范数

$\|x\| = \max\limits_{n\geq 1}|\xi_n|$. 又设

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x = \{\xi_n\}\big|_{n=1}^{\infty} \in C_0 \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n} = 0 \right\}$$

(1) 求证：M 是 C_0 的闭线性子空间.

(2) 设 $x_0 = (2, 0, \cdots, 0, \cdots)$，求证：$\inf\limits_{z\in M}\|x_0 - z\| = 1$，

但是 $\forall y \in M$,

$\|x_0 - y\| > 1$.

证 (1) $x^{(n)} = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots\right) \in M$,

$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)$.

$$x^{(n)} \to x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq 1}\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,$$

$$\sup_{k\geq 1}\left|\xi_k^{(n)} - \xi_k\right| < \varepsilon \quad (n \geq N).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \xi_k^{(N)}}{2^k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^{(N)}}{2^k}}_{\substack{\| \\ 0}}$$

$$\Rightarrow \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \xi_k^{(N)}}{2^k}\right\| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k} = 0$$

故 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in M$.

(2) $x_0 = (2, 0, \cdots, 0, \cdots), \forall m \in \mathbb{N},$

$$x^{(m)} \overset{\text{def}}{=} (\underbrace{1 - \tfrac{1}{2^{m-1}}, -1, \cdots, -1}_{m}, 0, 0, \cdots) \in M,$$

$$\rho(x_0, x^{(m)}) = 1 + \frac{1}{2^{m-1}} \overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \rho(x_0, M) \leq 1$$

$\forall y \in M$, 要证 $\|x_0 - y\| > 1$, 用反证法.

设 $\exists y = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in M$, 使得

$\|x_0 - y\| \leq 1.$

$$x_0 - y = (2 - \xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_k, \cdots),$$

$$\|x_0 - y\| \leq 1 \Rightarrow \begin{array}{l} |\xi_k| \leq 1 \quad (k \geq 2) \\ 2 - \xi_1 \leq 1 \end{array}.$$

$$|\xi_k| \leq 1 \quad (k \geq 2) \Rightarrow \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\xi_k|}{2^k} \overset{\text{注}}{<} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

注: $\{|\xi_k|\}_{k=2}^{\infty}$ 因为 $|\xi_k| \to 0$, 所以当 k 足够大,

$|\xi_k| < 1.$

又由 M 的定义,

$$\frac{\xi_1}{2} = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k} \Rightarrow \left|\frac{\xi_1}{2}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}\right| < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow |\xi_1| < 1.$ 这与 $2 - \xi_1 \leq 1$, 矛盾. 所以

$\forall y \in M$, $\|x_0 - y\| > 1$, 两边取下确界, 得到

$$\rho(x_0, M) \geq 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho(x_0, M) \leq 1 \\ \rho(x_0, M) \geq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \rho(x_0, M) = 1$$

注 本题提供一个例子说明：对于无穷维闭线性子空间 M 来说，给定其外一点 x_0，未必能在其上找到一点 y 适合 $\|x_0 - y\| = \rho(x_0, M)$. 换句话说，给定 M 外一点 x_0，未必能在 M 上找到最佳逼近元.

1.4.15 设 $\mathbf{X}$ 是 B^* 空间，M 是 $\mathbf{X}$ 的有限维真子空间，求证：

$\exists y \in X, \|y\| = 1,$ 使得 $\|y - x\| \geq 1.$

证 $\forall\ y_0 \in \mathbf{X} \setminus M,$ $d \triangleq \inf\limits_{x \in M} \|y_0 - x\| > 0,$

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \exists\ x_n \in M,$ s. t.
$d \leq \|y_0 - x_n\| < d + \frac{1}{n}$

$\|x_n\| \leq \|y_0 - x_n\| + \|y_0\| \leq \|y_0\| + d + 1$，即 $\{x_n\}$ 有界. 又 M 是有穷维的，所以 $\{x_n\}$ 有收敛子列，不妨就是整个序列. 设 $x_n \to x_0 \in M,$

$$d \leq \|y_0 - x_n\| < d + \frac{1}{n} \Rightarrow \|y_0 - x_0\| = d,$$

$y \triangleq \frac{y_0-x_0}{d}$，则 $\|y\| = 1$，对 $\forall x \in M$，

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0-x_0}{d} - x \right\| = \frac{1}{d}\left\| y_0 - \overbrace{(x_0 + dx)}^{\in M} \right\| \geq \frac{d}{d} = 1$$

$(\forall x \in M)$.

1.4.17（商空间）设 X 是线性赋范空间，X_0 是 X 的闭线性子空间，对于 $x, y \in X_0$，若 $x - y \in X_0$，称 x 与 y 等价．将 X 中向量按等价分类，把每一个等价类看作一个新的向量，这种向量的全体组成的集合用 X/X_0 表示，并称为商空间．(1) 设 $[x] \in X/X_0$，求证 $x \in [x]$ 的充分必要条件是 $[x] = x + X_0$．(2) 在 X/X_0 中引入加法与数乘如下：

$$[x] + [y] \triangleq x + y + X_0 \quad [x],\ [y] \in X/X_0;$$

$$\alpha[x] \triangleq \alpha x + X_0 \quad [x] \in X/X_0,\ \alpha \in \mathbf{K},$$

其中 x 和 y 表示等价类 $[x]$，$[y]$ 的任一元素．又规定范数

$$\|[x]\| = \inf\{\|x\| \mid x \in [x]\} \quad \forall x \in X/X_0,$$

求证 $(X/X_0, \|\cdot\|)$ 是一个线性赋范空间．(3) $\forall x \in [x]$

$$\inf\{\|x - X_0\| \mid X_0 \in X_0\} = \|[x]\|.$$

(4) 定义映射 $\phi : X \to X/X_0$ 为

$$\phi(x) = [x]$$

求证 ϕ 是线性连续映射．(5) $\forall\ [x] \in X/X_0$，求证 $\exists\ x \in X$ 使得 $\phi(x) = [x]$，且 $\|x\| \le 2\ \|[x]\|$．(6) 设 X 是Banach空间，求证 X/X_0 也是Banach空间．(7) 设 $X = C[0, 1]$，$X_0 = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$，求证：$X/X_0$ 与 $\mathbf{K}$ 等距同构．

解 (1) $X_0 \subset X$，

$[x] = \{z \in X \mid z - x \in X_0\} = x + X_0$

$[x] = [y] \Leftrightarrow x - y \in X_0$

$$\begin{array}{ccc} z \in [x] & & z = x + X_0 \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ [z] = [x] & \Rightarrow & z - x \in X_0 \end{array}$$

(2)

$\|[x]\|_0 = \inf\limits_{z\in[x]} \|z\|$，$\|[x]\|_0 \le \|x\|$，

$\|[x]\|_0 \ge 0$，$\|[x]\|_0 = 0 \Rightarrow \inf\limits_{z\in[x]} \|z\| = 0$

$\inf\limits_{z\in[x]} \|z\| = 0 \Leftrightarrow \exists z_n \in [x]$，$\|z_n\| \to 0 \Rightarrow z_n \to \theta \in [x]$

$[x] = [\theta] = X_0$. $\forall \tilde{x} \in [x]$，$\tilde{y} \in [y]$

$$\|[x] + [y]\|_0 = \inf_{\substack{x \in [x] \\ y \in [y]}} \|x + y\| \le \|\tilde{x} + \tilde{y}\| \le \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|$$

先对后式 $\tilde{x} \in [x]$ 取下确界，再对 $\tilde{y} \in [y]$ 取下确界，上式保持不变，即得

$\|[x]+[y]\|_0 \le \inf\limits_{\tilde{x}\in[x]}\|\tilde{x}\| + \inf\limits_{\tilde{y}\in[y]}\|\tilde{y}\| = \|[x]\|_0 + \|[y]\|_0.$

$\|\alpha[x]\|_0 = \|[\alpha x]\|_0 = \inf\limits_{y\in[\alpha x]}\|y\| = \inf\limits_{\frac{y}{\alpha}\in[x]}|\alpha|\|\frac{y}{\alpha}\| = |\alpha|\inf\limits_{\tilde{x}\in[x]}\|\tilde{x}\| =$

(3) $\|[x]\|_0 = \rho([x], X_0).$

$x \in [x]$, $\|x\| =$

$\|x-\theta\| \ge \rho([x], X_0) \Rightarrow \|[x]\|_0 \ge \rho([x], X_0);$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in [x]$, $z_\varepsilon \in X_0$,

$\|x_\varepsilon - z_\varepsilon\| < \rho([x], X_0) + \varepsilon.$

$\because$ $x_\varepsilon - (x_\varepsilon - z_\varepsilon) = z_\varepsilon \in X_0$, $\therefore$ $x_\varepsilon - z_\varepsilon \in [x_\varepsilon] = [x].$

$\therefore$ $\|[x]\|_0 \le \|x_\varepsilon - z_\varepsilon\| < \rho([x], X_0) + \varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \|[x]\|_0 \le \rho([x], X_0).$

(4) $\varphi(x) = [x]$: $X \to X/X_0.$

$\because$ $\|\varphi(x)\| = \|[x]\|_0 \le \|x\|$ $\therefore$ φ 连续.

(5)

$\forall [x] \in X/X_0$, $[x] \ne [\theta]$, $\because$ $\inf\limits_{z\in[x]}\|z\| = \|[x]\|_0$,

根据定义，下确界是最大下界，所以 $2\|[x]\|_0$ 非下界. 于是存在 $z \in [x]$, 使 $\|z\| \le 2\|[x]\|_0$

(6) 设 $\{[x_n]\}$ 是 X/X_0 的基本列，不妨设

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|[x_{n+1}] - [x_n]\|_0$ 收敛. 由 (5),

$\exists y_n \in [x_{n+1} - x_n]$, $\|[x_{n+1}] - [x_n]\|_0 \geq \frac{1}{2}\|y_n\|$,

补充 $[x_0] = [\theta]$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\|y_n\|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 收敛，令 $x = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

则

$$[x] \qquad \lim_{n\to\infty}[x_n]$$

$$\| \qquad \|$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi(y_n) = \sum_{n=0}^{\infty}[x_{n+1} - x_n]$$

(7) $\forall [f] \in X/X_0$, $\forall f \in [f]$, $f(0) = f_0 \in K$.

$T: X/X_0 \to K$, $T[f] = f_0$. 下证：$|T[f]| = \|[f]\|_0$. 事实上，

$$\|[f]\|_0 = \inf_{f\in[f]}\|f\| \overset{f(x)=f_0\in[f]}{\leq} |f_0|;$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_1 \in [f]$, 使得

$$\|[f]\|_0 + \varepsilon > \|f_1\| = \max_{t\in[0,1]}|f_1(t)| \geq |f_1(0)| = |f_0|$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \|[f]\|_0 \geq |f_0|.$$

于是 $\|[f]\|_0 = |f_0|$.，即 $|T[f]| = |f_0|$.

1.5.1 设 X 是一个 B^* 空间，C 是以 θ 为内点的真凸子集，$p(x)$ 是由 C 产生的Minkowski泛函，那末

(1) $x\in \mathring{C} \Leftrightarrow p(x)<1$.

(2) $\overline{\mathring{C}}=\overline{C}$.

证明 (1)

$x\in \mathring{C}\Rightarrow \exists\varepsilon$，使得 $x+\varepsilon x\in C$
$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{1+\varepsilon}}\in C\Rightarrow p(x)\le \frac{1}{1+\varepsilon}<1$.

反之，$p(x)<1$，一方面，取 $\varepsilon=1-p(x)$，
$x=\frac{x}{1}=\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\in C$;

另一方面，由 $p(x)$ 连续性，
$\exists\delta>0$，使得
$p(x')<1\quad(\forall x'\in B(x,\delta))\Rightarrow x'\in C$

故有 $x\in \mathring{C}$.

(2) $\overline{\mathring{C}}=\overline{C}$. 一方面，$\mathring{C}\subset C\Rightarrow$
$\overline{\mathring{C}}\subset\overline{C}$；另一方面，由
$\mathring{C}=\{x\mid p(x)<1\}$
$\Rightarrow \overline{\mathring{C}}=\overline{\{x\mid p(x)<1\}}=\{x\mid p(x)\le 1\}\supset\overline{C}$.

1.5.2 A 列紧 $\Rightarrow co(A)$ 列紧.

证 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ A 的有穷 ε 网 N_ε. $co(N_\varepsilon)$ 是不是 $co(A)$ 的列紧 ε 网？

先证 $co(N_\varepsilon)$ 是列紧的. 可以证明，只要 F 是有限集，$co(F)$ 都列紧. 事实上，设 $F=\{z_1,z_2,\cdots,z_m\}$,

$co(F)=\left\{\sum_1^m\lambda_i z_i \;\middle|\; \sum_1^m\lambda_i=1,\ \lambda_i\ge 0\right\}$,

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists[0,1]\subset R^1$ 的有穷 $\frac{\varepsilon}{\sum_1^m\|z_i\|}$ 网 E（只要对 $[0,1]$ 作足够多等分就能得到）.

这样 $\forall y\in F$，$y=\sum_1^m\lambda_i z_i$，$\forall$
$\lambda_i\in[0,1]$，$\exists\lambda_i^{(\varepsilon)}\in E$，$\left|\lambda_i-\lambda_i^{(\varepsilon)}\right|<\frac{\varepsilon}{\sum_1^m\|z_i\|}$.

$y_{(\varepsilon)}=\sum_1^m\lambda_i^{(\varepsilon)}z_i$，$\left\|y_{(\varepsilon)}-y\right\|\le\sum_1^m\left|\lambda_i-\lambda_i^{(\varepsilon)}\right|\|z_i\|<\varepsilon$.

再证 $co(N_\varepsilon)$ 是 $co(A)$ 的 ε 网，$co(A)\subset\bigcup_{x\in co(N_\varepsilon)}B(x,\varepsilon)$,

事实上，
$\forall x\in co(A)\Rightarrow x=\sum_1^m\lambda_i x_i$，$\sum_1^m\lambda_i=1$,
$\lambda_i\ge 0$，$x_i\in A$.

对 x_i $\exists$ $y_i\in N_\varepsilon$，使得
$\|x_i-y_i\|<\varepsilon\quad(i=1,2,\cdots,m)$.

$y=\sum_1^m\lambda_i y_i\in co(A)\Rightarrow\|x-y\|\le\sum_1^m\lambda_i\|x_i-y_i\|<\varepsilon$

1.5.3 设 C 是 B^* 空间 X 中的一个紧凸集，映射 $T:C\to C$ 连续. 求证 T 在 C 上有一个不动点.

动点定理）

条件：设 C 是 B^* 空间 X 中的一个闭凸子集；$T: C \to C$ 连续；$T(C)$ 列紧. 结论：T 在 C 上有一个不动点.

本题只要证 $T(C)$ 列紧.

证明 因为 $T: C \to C$ 连续，C 是紧集，所以一致连续，即

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得当 $\|x - x'\| < \delta$ 时，

$\|Tx - Tx'\| < \varepsilon (\forall x \in C)$. 事实上，用反证法. 如果不然，$\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall n \in N$，$\exists x_n, x_n' \in C$ 使得

$\|x_n - x_n'\| < \frac{1}{n}$，但是 $\|Tx_n - Tx_n'\| \ge \varepsilon_0$.

因为 C 是紧集，所以存在 $\{n_k\}$ 使得 $x_{n_k} \to x_0 \in C$.

因为 $\|x_{n_k} - x_{n_k}'\| < \frac{1}{n_k} \le \frac{1}{k} \to 0$，故有 $x_{n_k}' \to x_0$. 又 Tx 连续，从而

$Tx_{n_k} \to Tx_0, Tx_{n_k}' \to Tx_0$

于是 $\|Tx_{n_k} - Tx_{n_k}'\| \to 0$，这与

$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_k}'\| \ge \varepsilon_0$ 矛盾.

如今 设 C 的有限 δ 网为 $\{x_1, \cdots, x_n\}$.

下证：$\{Tx_1, \cdots, Tx_n\}$ 为 $T(C)$ 的有限 ε 网. 事实上，

$\forall y \in T(C), \exists x \in C$ 使得 $y = Tx$.

设 $\|x_i - x\| < \delta (1 \le i \le n)$，则

$\|Tx_i - Tx\| < \varepsilon$.

1.5.4 设 C 是 B 空间 X 中的一个有界闭凸集，映射

$T_i: C \to X (i = 1, 2)$ 适合

(1) $\forall x, y \in C \Rightarrow T_1x + T_2y \in C$

(2) T_1 是一个压缩映射，T_2 是一个紧映射.

求证：$T_1 + T_2$ 在 C 上至少有一个不动点.

分析：为了 $\exists x \; x = (T_1 + T_2)x$

只要 $\exists x (I - T_1)x = T_2x$

只要 $\exists x x = (I - T_1)^{-1} T_2 x$

只要 $T = (I - T_1)^{-1} T_2 : C \to C$，是紧映射.

证：设

$\|T_1(y_2 - y_1)\| \le \alpha \|y_2 - y_1\| \quad (0 < \alpha < 1)$，

(1) $\forall z \in T_2(C)$，$T_1y + z : C \to C$，压缩映射，$\exists$ 唯一不动点 $y \in C$，使得 $T_1y + z = y$

(2) 再对

$\forall z_0 \in \overline{T_2(C)}$，$\exists z_n \in T_2(C)$，$z_n \to z_0$，$\forall$ 应用 (1) 的结果，$\exists y_n \in C$，使得 $T_1y_n + z_n = y_n$. 下面证明 $\{y_n\}$ 是基本列. 事实上，

$\|y_n - y_m\| \le \|T_1y_n - T_1y_m\| + \|z_n - z_m\|$

$\Rightarrow \|y_n - y_m\| \le \frac{1}{1-\alpha}\|z_n - z_m\|$. 又 C 是闭集，所以 $\exists y_0 \in C$，使得 $y_n \to y_0$. 于是由 T_1 的连续性，

$T_1y_n + z_n = y_n \xRightarrow{n \to \infty} T_1y_0 + z_0 = y_0$.

综合 (1)，(2) 两段结果，对 $\forall z \in \overline{T_2(C)}$，$\exists y \in C$，使得 $T_1y + z = y$ 即 $z = (I - T_1)y$

或 $y = (I - T_1)^{-1} z$ 在 $\overline{T_2(C)}$ 上有定义，

(3) 从

$\|z_2 - z_1\| = \|y_2 - y_1 - T_1(y_2 - y_1)\|$
$\geq \|y_2 - y_1\| - \|T_1(y_2 - y_1)\| \geq (1-\alpha)\|y_2 - y_1\|$
可见
$\|(I-T_1)^{-1}z_2 - (I-T_1)^{-1}z_1\| \leq \frac{1}{1-\alpha}\|z_2 - z_1\|$,
即 $(I-T_1)^{-1}$ 连续.
令 $T = \underbrace{(I-T_1)^{-1}}_{\text{连续}}\underbrace{T_2}_{\text{紧}}$, 则
$T: C \to C$, 紧, 又 C 是有界闭集. 由推论 1.5.17,
T 在 C 上必有不动点
$x \in C$. 则有 $x = Tx$, 即
$T_1x + T_2x = x$. 也就是 $T_1 + T_2$ 在
C 上必有不动点.
评注：(2) 一步的必要性：为了
$T = (I-T_1)^{-1}T_2$ 是紧的，按定义
1.5.16，要求连续性，当考虑
$x_n \to x$,
$Tx_n \overset{?}{\to} Tx = (I-T_1)^{-1}T_2x$, 其中
$T_2x \in T_2(C)$.

1.5.5 设 A 是 $n \times n$ 矩阵，其元素
$a_{ij} > 0$
$(1 \leq i, j \leq n)$
求证：存在 $\lambda > 0$ 及各分量非负但不全为零的向量 $x \in R^n$，使得
$Ax = \lambda x$.

证明 在 R^n 上考察子集
$C \overset{\text{def}}{=}$
$\left\{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 (1 \leq i \leq n)\right\}$
并作映射 $f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{Ax}{\sum_{j=1}^n (Ax)_j}$.

显然 C 是紧凸集，且
$f: C \to C$. 从而 $\exists x \in C$ 使得
$f(x) = x$,
即 $Ax = \lambda x$, 其中 $\lambda \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n (Ax)_j$.
显然 $\lambda \geq 0$. 而 $\lambda = 0 \Rightarrow$
$(Ax)_j = 0 (j = 1, 2, \cdots, n) \Rightarrow Ax = 0$
$\Rightarrow f(x) = 0$
与 $f(x) \in C$ 矛盾.

1.5.6 设 $k(x,y)$ 是 $[0,1] \times [0,1]$ 上的正值连续函数,

$(Tu)(x) = \int_0^1 k(x,y)u(y)dy \; (\forall u \in C[0,1])$
求证：存在 $\lambda > 0$ 及非负但不恒为零的连续函数 u 满足 $Tu = \lambda u$.

证明 设 $0 < m \leq k(x,y) \leq M$,
$C \overset{\text{def}}{=}$
$\left\{u \in C[0,1] \mid \int_0^1 u(x)dx = 1, u(x) \geq 0\right\}$
$(f(u))_x \overset{\text{def}}{=} \frac{\int_0^1 k(x,y)u(y)dy}{\int_0^1 dt \int_0^1 k(t,y)u(y)dy}$
显然 C 是闭凸集，且 $f: C \to C$,
连续.
$f(C)$ 一致有界. 事实上,
$\left|(f(u))_x\right| \leq \frac{M\int_0^1 u(y)dy}{m\int_0^1 u(y)dy} = \frac{M}{m}$.
再证 $f(C)$ 等度连续. 事实上,
$\int_0^1 dx \int_0^1 k(x,y)u(y)dy \geq \int_0^1 dx \int_0^1 m \cdot u(y)dy = m$
$\Rightarrow$
$\left|\frac{\int_0^1 k(x,y)u(y)dy}{\int_0^1 dt\int_0^1 k(t,y)u(y)dy} - \frac{\int_0^1 k(x',y)u(y)dy}{\int_0^1 dt\int_0^1 k(t,y)u(y)dy}\right|$
$\leq \frac{1}{m}\int_0^1 |k(x,y) - k(x',y)|u(y)dy < \varepsilon$.
* 因为 $k(x,y)$ 是 $[0,1] \times [0,1]$ 上的连续函数，所以在 $[0,1] \times [0,1]$

使得

$|\mathbf{k}(\mathbf{x},\mathbf{y})-\mathbf{k}(\mathbf{x}',\mathbf{y})|<\mathbf{m}\varepsilon,\quad |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|<\delta.$

于是 $\mathbf{f}(\mathbf{C})$ 列紧，从而 $\exists\mathbf{u}\in\mathbf{C}$

使得 $\mathbf{f}(\mathbf{u})=\mathbf{u}$，即 $\mathbf{Tu}=\lambda\mathbf{u}.$

$$\lambda=\int\mathbf{dx}\int\mathbf{k}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathbf{dy}$$

$$\geq\int\mathbf{dx}\int\mathbf{m}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathbf{dy}=\mathbf{m}>0.$$

1.6.1 极化恒等式. 设 a 是线性空间 X 上的共轭双线性函数, $q(x)=a(x,x)$ 是 a 诱导的二次型,
求证: (1) $\forall x,y\in X$ 有

$$a(x,y)=\tfrac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y)+iq(x+iy)-iq(x-iy));$$

(2) q 是实值函数 $\Leftrightarrow a(x,y)=\overline{a(y,x)},\ \forall x,y\in X.$

证明

$$\left.\begin{aligned} q(x+y)&=a(x+y,x+y)\\ &=q(x)+2\mathrm{Re}\,a(x,y)+q(y)\\ q(x-y)&=a(x-y,x-y)\\ &=q(x)-2\mathrm{Re}\,a(x,y)+q(y)\end{aligned}\right\}$$

两式相减得到

$$\mathrm{Re}\,a(x,y)=\tfrac{1}{4}\big[q(x+y)-q(x-y)\big],$$

当 $K=\mathbf{R}^1$,

$$a(x,y)=\mathrm{Re}\,a(x,y)=\tfrac{1}{4}\big[q(x+y)-q(x-y)\big],$$

当 $K=\mathbf{C}$,

$$\mathrm{Re}\,a(x,y)=\tfrac{1}{4}\big[q(x+y)-q(x-y)\big],$$

$$\mathrm{Im}\,a(x,y)=\mathrm{Re}\,\bar{i}a(x,y)=\mathrm{Re}\,a(x,iy)=\tfrac{1}{4}\big[q(x+iy)-q(x-iy)\big],$$

$$a(x,y)=\mathrm{Re}\,a(x,y)+i\,\mathrm{Im}\,a(x,y)=\tfrac{1}{4}\big[q(x+y)-q(x-y)\big]+\tfrac{i}{4}\big[q(x+iy)-q(x-iy)\big].$$

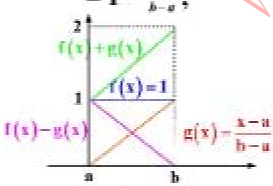
1.6.2 求证: 在 $C[a,b]$ 中不可能引进一种内积 $(\cdot,\cdot)$, 使其满足

$$(f,f)^{\frac{1}{2}}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\ \ (\forall f\in C[a,b]).$$

证明 取 $f(x)=1;\ g(x)=\frac{x-a}{b-a};$

$\|f\|=\|g\|=1,$

$$f(x)+g(x)=1+\tfrac{x-a}{b-a};\ f(x)-g(x)=1-\tfrac{x-a}{b-a};$$



$$\|f(x)+g(x)\|=2,\ \|f(x)-g(x)\|=1$$

$$\|f(x)+g(x)\|^2+\|f(x)-g(x)\|^2=5,$$

$$2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)=4.$$

故 $\|f(x)+g(x)\|^2+\|f(x)-g(x)\|^2\neq 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$

即平行四边形等式不成立.

1.6.3 在 $L^2[0,T]$ 中定义泛函

$$f(x)=\left|\int_0^T e^{-(T-t)}x(t)dt\right|,\ \forall x\in L^2[0,T].$$

证明 f 在 $L^2[0,T]$ 的单位球面上达到最大值, 并求出此最大值和达到最大值的元素 (用 Cauchy-Schwartz不等式)

证明

$$\left|\int_0^T e^{-(T-\tau)}x(\tau)d\tau\right|=e^{-T}\left|\int_0^T e^{\tau}x(\tau)d\tau\right|$$

$$=e^{-T}\left|\left(e^{\tau},x(\tau)\right)\right|\le e^{-T}\sqrt{\int_0^T e^{2\tau}d\tau}\cdot\sqrt{\int_0^T|x(\tau)|^2d\tau}$$

$$=e^{-T}\sqrt{\int_0^T e^{2\tau}d\tau}$$

$$=e^{-T}\sqrt{\tfrac{1}{2}e^{2T}-\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}e^{-2T}}.$$

设 $x(\tau)=\lambda e^{\tau}$, $\int_0^T|x(\tau)|^2d\tau=\int_0^T\lambda^2e^{2\tau}d\tau=1\Rightarrow$

$\lambda^2 = \frac{1}{\int_0^T e^{2t}dt} = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{2T}-\frac{1}{2}} = \frac{2}{e^{2T}-1} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{e^{2T}-1}}$

1.6.4 设 M，N 是内积空间中的两个子集，求证：

$M \subset N \Rightarrow N^\perp \subset M^\perp$.

证明

$$x \in N^\perp \Rightarrow x \perp N \overset{M\subset N}{\Rightarrow} x \perp M \Rightarrow x \in M^\perp$$

1.6.5 M 是Hilbert空间 X 的子集，求证： $(M^\perp)^\perp = \overline{\text{span}M}$.

证明

$$\because x \in M^\perp \Leftrightarrow x \perp M \Leftrightarrow x \perp \text{span}(M)$$

$$\Leftrightarrow x \perp \overline{\text{span}(M)} \Leftrightarrow x \in \left(\overline{\text{span}(M)}\right)^\perp$$

$$\therefore M^\perp = \left(\overline{\text{span}(M)}\right)^\perp$$

要证 $\left(M^\perp\right)^\perp = \overline{\text{span}(M)}$ 即证 $\left[\left(\overline{\text{span}(M)}\right)^\perp\right]^\perp = \overline{\text{span}(M)}$. 问题归结为证明 若 M 是闭的，则 $\left(M^\perp\right)^\perp = M$.

$$\forall x \in M \Rightarrow x \perp M^\perp$$

$$\Rightarrow x \in \left(M^\perp\right)^\perp \Rightarrow M \subset \left(M^\perp\right)^\perp.$$

下面证明 $\left(M^\perp\right)^\perp = M$. 用反证法.

如果不然， $M \underset{\neq}{\subset} \left(M^\perp\right)^\perp$. M 是 $\left(M^\perp\right)^\perp$ 的真闭子空间，对 $x \in \left(M^\perp\right)^\perp \perp M$，由正交分解，

$$x = y + z,\quad y \in M,\quad \overset{z \perp M}{\underset{z \in M^\perp}{\Downarrow}},$$

$z \neq 0$,

$$y \in M \subset \left(M^\perp\right)^\perp$$

$$\Downarrow$$

$$z = x - y \in \left(M^\perp\right)^\perp$$

于是

$$z \in M^\perp \cap \left(M^\perp\right)^\perp$$

$$\Updownarrow$$

$$z \neq 0$$

矛盾.

1.6.7 在 $L^2[a,b]$ 中 $S = (e^{2\pi inx})_{n=-\infty}^{\infty}$

(1) 若 $|b-a| \le 1$ 求证 $S^\perp = (0)$;

(2) 若 $|b-a| > 1$ 求证 $S^\perp \neq (0)$.

证明

$\forall n$, $\left\{e^{2\pi inx}\right\}$ 的周期是 1，

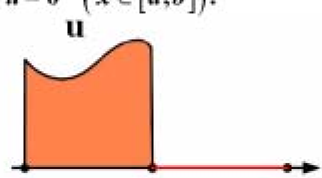
当 $b-a=1$, $S^\perp = \{0\}$.

$\int_a^b ue^{2\pi inx}dx = 0$, 令

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & (x \in [a,b]) \\ 0 & (x \in [b,a+1]) \end{cases}$$

则有 $\int_a^{a+1} \tilde{u}e^{2\pi inx}dx = 0 \Rightarrow \tilde{u} = 0$ $(x \in [a,a+1])$

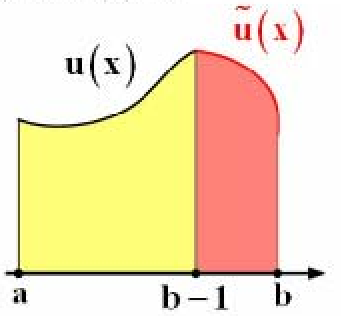
$$\Rightarrow u = 0 \quad (x \in [a,b]).$$



(2) 若 $b-a>1$, 这时，因为 $\left\{e^{2\pi inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 $L^2[b-1,b]$ 的一组正交基，所以 $L^2[b-1,b]$上的函数

这一点，任一 $L^2[a,b-1]$ 中的函数可单值延拓成所求的 $L^2[a,b]$ 直交补中的函数：

$v(x)\in S^{\perp}, v(x)\neq 0.$



事实上，令

$$v(x)=\begin{cases}u(x), x\in[a,b-1],\\ \tilde{u}(x), x\in(b-1,b]\end{cases}$$

其中 $(b-1,b]$ 上的函数 $\tilde{u}(x)$ 的 Fourier系数通过 $u(x)$ 在 $[a,b-1]$ 上的值来计算，即

$\forall u\in L^2[a,b-1]$，从

$$\tilde{u}_n=\int_{b-1}^{b}\tilde{u}e^{2\pi inx}dx\overset{def}{=}-\int_a^{b-1}ue^{2\pi inx}dx\cdots(1)$$

$$\Rightarrow \tilde{u}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{u}_n e^{2\pi inx}\in L^2[b-1,b].$$

令 $$v=\begin{cases}u(x), & x\in[a,b-1]\\ \tilde{u}(x), & x\in(b-1,b]\end{cases},$$

则有

$$\int_a^b ve^{2\pi inx}dx=\int_a^{b-1}ue^{2\pi inx}dx+\int_{b-1}^{b}\tilde{u}e^{2\pi inx}dx\overset{(1)}{=}0.$$

1.6.9 $(e_n),(f_n)$ 是Hilbert空间 X 中两个标准正交集，满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|<1.$$

求证：两者中一个完备蕴含另一个完备.

证 设 $\{e_n\}$ 完备，要证 $\{f_n\}$ 完备，用反证法．如果 $\{f_n\}$ 不完备，则存在 $u\in X$, $x\neq\theta$，使得 $(u,f_n)=0$ $(\forall n)$，这导致如下矛盾.

$$\|u\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(u,e_n-f_n)|^2$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|u\|^2\|e_n-f_n\|^2<\|u\|^2.$$

1.6.10 M 是 X 的闭线性子空间，$\{e_n\}$ 与 $\{f_n\}$ 分别是 M 与 $M^{\perp}$ 的标准正交基．求证 $\{e_n\}\cup\{f_n\}$ 构成 X 的标准正交基.

证 ……可以分解 $x=y+z$，其中 $y\in M, z\in M^{\perp}$．依题意，

$$\left.\begin{aligned}y&=\sum_{n=1}^{\infty}(y,e_n)e_n\\ z&=\sum_{m=1}^{\infty}(z,f_m)f_m\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(y,e_n)e_n+\sum_{m=1}^{\infty}(z,f_m)f_m.$$

由此可见，$\{e_n\}\cup\{f_n\}$ 构成 X 的标准正交基.

1.6.12 X 是Hilbert空间，(e_n) 是它的标准正交集，求证：

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right|\leq\|x\|\|y\|,\quad\forall x,y\in X.$$

证明 根据Cauchy-schwarz不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(y,e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.6.16（变分不等式）设 X 是一个Hilbert空间，$a(x,y)$ 是 X 上的共轭对称的双线性函数，$\exists M>0,\delta>0$，使得

$$\delta\|x\|^2 \le a(x,x) \le M\|x\|^2 \ (\forall x\in X).$$

又设 $u_0\in X, C$ 是 X 上的一个闭凸子集．求证：函数

$$x \mapsto a(x,x) - \mathrm{Re}(u_0,x)$$

在 C 上达到最小值，并且达到最小值的点 x_0 唯一还满足

$$\mathrm{Re}\,2a(x_0,x-x_0) - \mathrm{Re}(u_0,x-x_0) \ge 0 (\forall x \in C$$

证明

$$a(x+y,x+y)+a(x-y,x-y)$$

$$=2\big(a(x,x)+a(y,y)\big)$$

$$d=\inf_{x\in C}\{a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)\},$$

$$J(x)=a(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x)$$

$$x_n\in C,\quad d\le J(x_n)<d+\tfrac{1}{n}\quad (*)$$

$$\delta\|x_n-x_m\|^2 \le a(x_n-x_m,x_n-x_m)$$

$$=2a(x_n,x_n)+2a(x_m,x_m)-4a\left(\tfrac{x_n+x_m}{2},\tfrac{x_n+x_m}{2}\right)$$

$$=2J(x_n)+2J(x_m)-4J\left(\tfrac{x_n+x_m}{2}\right)$$

$$\le 2\left(d+\tfrac{1}{n}\right)+2\left(d+\tfrac{1}{m}\right)-4d$$

$$=2\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$x_n\to x_0,\quad (*)\Rightarrow J(x_0)=d=\inf_{x\in C}J(x).$$

$$x_0,\widehat{x_0},\quad J(x_0)=J(\widehat{x_0})=d,$$

$$\delta\left\|x_0-\widehat{x_0}\right\|^2 \le 2J(x_0)+2J(\widehat{x_0})-4J\left(\tfrac{x_0+\widehat{x_0}}{2}\right)$$

$$\le 4d-4d=0 \Rightarrow x_0=\widehat{x_0}.$$

$$\varphi_x(t)\overset{def}{=}J\big(x_0+t(x-x_0)\big),$$

$$t\in[0,1]$$

$$J(x_0)\le J(x)\quad \forall x\in C$$

$$\Leftrightarrow \varphi_x(t)\ge\varphi_x(0),\quad \forall x\in C,\quad \forall t\in[0,1]$$

$$\Leftrightarrow \varphi_x'(0)\ge 0.$$

$$\varphi_x(t)=a\big(x_0+t(x-x_0),x_0+t(x-x_0)\big)$$

$$-\mathrm{Re}\big(u_0,x_0+t(x-x_0)\big)=a(x_0,x_0)-\mathrm{Re}(u_0,.$$

$$+4t\left[\mathrm{Re}\,2a(x_0,x-x_0)-\mathrm{Re}(u_0,x-x_0)\right]$$

$$+t^2a(x-x_0,x-x_0).$$

$$\varphi_x'(0)\ge 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,2a(x_0,x-x_0)-\mathrm{Re}(u_0,x-x_0)\ge 0.$$

2.1.1 求证： $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 的充要条件是 T 为线性算子并将 X 中的有界集映为 Y 中的有界集．证明 必要性显然．下证充分性．

$\|x\|\le 1$ 是 X 中的有界集，依题意，

$\exists M>0$， 使得

$\|Tx\|\le M$ $(\forall x,\|x\|\le 1)$． 于是对 $\forall x\in X$，

$x\ne\theta$， 有 $\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\|\le M$， 即

$\|Tx\|\le M\|x\|$． 而对于 $x=\theta$，

$\|Tx\|\le M\|x\|$ 自然成立， 从而

$\|Tx\|\le M\|x\|$ $(\forall x\in X)$． 即知

$T\in\mathcal{L}(X,Y)$．

2.1.2. 设 $A\in\mathcal{L}(X,Y)$ ， 求证 (1) $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$; (2) $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|$．

证明 (1) 一方面，

$\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|\ge\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|=\|A\|$;

另一方面，

$\|A\|=\sup\limits_{x\ne\theta}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ge\sup\limits_{\substack{x\ne\theta\\ \|x\|\le 1}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\overset{*}{\ge}\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$

* 因为左边分母 $\|x\|\le 1$， 到右边放大为 1， 所以分式变小了．

(2) 一方面，由 (1)

$\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|\ge\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|$．

另一方面，

另一方面， $\|x\|=1,\forall\varepsilon>0$，

$\|Ax\|=(1+\varepsilon)\left\|A\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right\|$

$\le(1+\varepsilon)\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|$

$\Rightarrow\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|\le(1+\varepsilon)\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|$，

上式令 $\varepsilon\to 0$ 即得

$\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|\le\sup\limits_{\|x\|<1}\|Ax\|$．

证 (1)

$\sup\limits_{\|x\|=1}f(x)\le\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|\le\sup\limits_{\|x\|=1}\|f\|\|x\|=\|f\|$;

$|f(x)|=\underbrace{\operatorname{sgn}f(x)}_{\alpha}f(x)=f(\alpha x)\overset{\|\alpha x\|=\|x\|=1}{\le}\sup\limits_{\|y\|=1}f(y)=\sup\limits_{\|x\|=1}f(x)$

$\Rightarrow\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|\le\sup\limits_{\|x\|=1}f(x)$

(2) 先证明 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|<1}f(x)$．

一方面， $\forall\|x\|<1,x\ne\theta$，

$f(x)=\|x\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\le\|x\|\sup\limits_{\|y\|=1}f(y)\overset{(1)}{=}\|x\|\|f\|<\|f\|$

$x=\theta$， $f(\theta)=0<\|f\|$． $\therefore$

$\sup\limits_{\|x\|<1}f(x)\le\|f\|$．

另一方面， $\forall\|x\|=1,\forall\varepsilon>0$，

$f(x)=(1+\varepsilon)f\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\le(1+\varepsilon)\sup\limits_{\|x\|<1}f(x)$

$\therefore\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}f(x)\le(1+\varepsilon)\sup\limits_{\|x\|<1}f(x)\Rightarrow\|f\|\le\sup\limits_{\|x\|<1}f(x)$

故

$\|f\|=\sup\limits_{\|x\|<1}f(x)$．

令从

推出

$$\delta\|f\|=\sup_{\|x\|<1}f(\delta x)=\sup_{\|y\|<\delta}f(y).$$

评注

$$\sup_{y\in B(\theta,\delta)}f(y)=\delta\|f\|\Rightarrow$$

$$-\sup_{y\in B(\theta,\delta)}f(y)=-\delta\|f\|\Rightarrow\inf_{y\in B(\theta,\delta)}f(y)=-\delta\|.$$

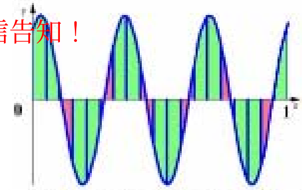
2.1.4 设 $y(t)\in C[0,1]$，定义 $C[0,1]$ 上的泛函

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y(t)dt\qquad(\forall x\in C[0,1]),$$

求‖f‖.

容易证明 $\|f\|\le\int_0^1|y(t)|dt$. 为了建立相反的不等式. 对 $\forall\ \varepsilon>0$, 根据 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上的一致连续性，$\exists\ n\in\mathbb{N}$,将$[0,1]$ n 等分，使得函数在每一等分区间上的振幅小于 ε. 我们把所有的等分区间分为两类：

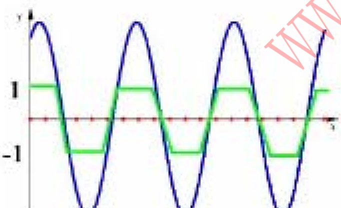
图 1



在第一类区间上不含有函数 $y(t)$ 的零点，这类区间记作 Δ,

在第二类区间上至少含有函数 $y(t)$ 的一个零点，这类区间记作 ∇. 因为函数 $y(t)$ 在区间 ∇ 上必有零点，所以在每个区间 ∇ 上有 $|y(t)|<\varepsilon$. 定义 $\tilde{x}(t)\in C[0,1]$,

图 2



$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}sgn\ \ y(t) & (t\in\Delta)\\ \text{线性函数} & (t\in\nabla)\end{cases}$$

同时，如果第二类区间∇ 的端点是 a 或 b，则令 $\tilde{x}(a)=0$ 或 $\tilde{x}(b)=0$.

则有

$$f(\tilde{x})=\int_0^1\tilde{x}(t)y(t)dt$$

$$=\sum_{\forall\Delta}\int_\Delta\tilde{x}(t)y(t)dt+\sum_{\forall\nabla}\int_\nabla\tilde{x}(t)y(t)dt$$

$$\ge\sum_{\forall\Delta}\int_\Delta|y(t)|dt-\sum_{\forall\nabla}\int_\nabla|y(t)|dt$$

$$=\int_0^1 y(t)|dt-2\sum_{\forall\nabla}\int_\nabla|y(t)|dt$$

$$>\int_0^1|y(t)|dt-2\varepsilon.$$ 又 $\because\|\tilde{x}\|\le 1$,

$$\therefore\|f\|\ge f(\tilde{x})>\int_0^1|y(t)|dt-2\varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon\to0}{\Rightarrow}\ f\|\ge\int_0^1 y(t)dt.$$

$$\int_0^1|y(t)|dt-2\sum_{\forall\nabla}\int_\Delta|y(t)|dt$$

$$>\int_0^1 y(t)dt-2\varepsilon$$

又 $\because\|\tilde{x}\|\le 1$,

$\therefore$

$$\|f\|\ge f(\tilde{x})>\int_0^1|y(t)|dt-2\varepsilon\overset{\varepsilon\to0}{\Rightarrow}\|f\|\ge\int_0^1|y(t)|dt.$$

2.1.5 $|f(x)|\le\|f\|\|x\|$ ... $\Rightarrow d\ge\frac{1}{\|f\|}$. $\forall\varepsilon>0$,

$\exists x_0\ne 0$, 使得

$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}\ge\|f\|-\varepsilon\Rightarrow\left\|\frac{x_0}{f(x_0)}\right\|\le\frac{1}{\|f\|-\varepsilon}$,

注意到 $f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right)=1$, 故有

$d\le\frac{1}{\|f\|-\varepsilon}$.

于是 $\begin{matrix} d\ge\frac{1}{\|f\|} \\ d\le\frac{1}{\|f\|-\varepsilon}\end{matrix}\Rightarrow d=\frac{1}{\|f\|}$, 即

$\|f\|=\frac{1}{d}$.

2.1.6 设 $f\in\mathscr{X}^*$，求证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in\mathscr{X}$，使得 $f(x_0)=\|f\|$，且 $\|x_0\|<1+\varepsilon$。

证明 $\forall\eta>0,\exists x_1$, 使得

$\frac{|f(x_1)|}{\|x_1\|}>\|f\|-\eta$

两边取倒数，并乘以 $\|f\|$

$\Rightarrow\left\|\frac{x_1}{f(x_1)}\right\|\|f\|<\frac{\|f\|}{\|f\|-\eta}$,

取 $\eta=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|f\|$

使有 $\left\|\frac{x_1}{f(x_1)}\right\|\|f\|<1+\varepsilon$. 再令

$x_0=\frac{x_1}{f(x_1)}\|f\|$.

2.1.7

证 (1) 显然. (2) 举一个反例.

$$X=\left\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\ \Big|\ \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|<+\infty\right\},$$

$\|x\|=\sup_{n\ge1}|\xi_n|$,

$a=(1,-1,0,\cdots)\in X$.

$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in X$, 定义 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$, 显然

$f(a)=0$.

$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in X$, 定义 $Tx=x-a\ f(x)$. 下面看

$N(T)=?$

$Tx=\theta\Rightarrow x=a\ f(x)\Rightarrow f(x)=f(a)\ f(x$

$\Rightarrow x=a\ f(x)=\theta$,

即 $N(T)=\{\theta\}$. 闭.

下面证明 T 无界. 先证

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ 不连续. 令

$e_k=\{\overbrace{0,0,\cdots0,1}^{k},0,\cdots\}$,

$x_n=\sum_{k=1}^{n}e_k\in X$, $\|x_n\|=1$,

$f(x_n)=n\Rightarrow\frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|}=n\to\infty$. 即 f

再证 T 无界. 事实上, 从

$Tx=x-a\ f(x)\Rightarrow a\ f(x)=x-Tx$.

用反证法. 如果 Tx 有界,

则 $x-Tx$ 有界, 从而

$|f(x)|\overset{\|a\|=1}{=}\|a\|\,|f(x)|=\|a\ f(x)\|=\|x-$

即 f

有界, 矛盾.

(3) $(\Rightarrow)$ 即 (1). $(\Leftarrow)$, 用反证法. $\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists x_n,\|x_n\|=1$,

$|f(x_n)|\ge n$.

$y_n=\frac{x_n}{f(x_n)}-\frac{x_1}{f(x_1)}\Rightarrow f(y_n)=0\Rightarrow y_n\in N(f)$,

但 $y_n\to-\frac{x_1}{f(x_1)}\notin N(f)$. 与

$N(f)$ 闭矛盾.

2.1.8 (1) 记 $N(f)$ H^0 这是

要证 $|f(x)|=\|f\|\rho(x,N(f))$，即 $\|f\|\rho(x,N(f))\le|f(x)|$.

$\forall\varepsilon>0,\exists y_\varepsilon\in N(f)$,

$\|x-y_\varepsilon\|<\rho(x,N(f))+\varepsilon$,

$|f(x)|=|f(x-y_\varepsilon)|\le\|f\|\|x-y_\varepsilon\|<\|f\|(\rho(x$

$\overset{\varepsilon\to0}{\Rightarrow}|f(x)|\le\|f\|\rho(x,N(f))$；另一方面，$\forall z\notin N(f)$，$\forall x\in\mathfrak{X}$，

令 $y=x-\frac{f(x)}{f(z)}z$，则 $y\in N(f)$，

且 $f(z)(x-y)=f(x)z$

$\frac{f(z)}{z}|x-y\|=f(x)|\Rightarrow\|x-y\sup_{z\ne\theta}\frac{|f(z)|}{|z|}\le f(x$

$\Rightarrow\inf_{y\in N(f)}x-y\sup_{z\ne\theta}\frac{|f(z)|}{|z|}\le|f(x)|$,

(1) $\forall x\in H_f^\lambda$，$\Rightarrow$

$f(x)=\lambda.\Rightarrow$

$\rho(x,H_f^0)\overset{(1)}{=}|f(x)|=|\lambda|$.

为了解释(1) 和 (2) 的几何意义：

设 $\mathfrak{X}=\mathbf{R}^2$，$\mathbf{K}=\mathbf{R}^1$，$\forall f\in\mathfrak{X}^*$，$\|f\|=1,\forall x=(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$，

令 $x_1=(1,0),x_2=(0,1)$，

$\alpha=f(x_1)$，$\beta=f(x_2)$ 则

$f(x)=\alpha\xi+\beta\eta$，

$\|f\|=1\Rightarrow\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1$. 根据平面解析几何知识，$|f(x)|=|\alpha\xi+\beta\eta|$ 表示点 $x=(\xi,\eta)$ 到通过原点的直线

$H_f^0=\{x=(\xi,\eta)\mid f(x)=\alpha\xi+\beta\eta=$

的距离，即

$|f(x)|=|\alpha\xi+\beta\eta|=\rho(x,H_f^0)$，

注意到 H_f^λ 和 H_f^0 是互相平行的直线，所以对 $\forall x\in H_f^\lambda$，

$\rho(x,H_f^0)=\rho(\theta,H_f^\lambda)=\left.\frac{|\alpha\xi+\beta\eta-\lambda|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right|_{(\xi,\eta)=(0,0)}=|\lambda|$.

2.1.9 先证明 2.1.3 的推广：

(1) $\sup_{x\in B(x_0,\delta)}f(x)=f(x_0)+\delta\|f\|$.

(2) $\inf_{x\in B(x_0,\delta)}f(x)=f(x_0)-\delta\|f\|$.

证 (1)

$\sup f(x)-f(x_0)=\sup f(x-x_0)=$

(2)

$\inf_{x\in B(x_0,\delta)}f(x)-f(x_0)=\inf_{x-x_0\in B(\theta,\delta)}f(x-x_0)$

$=\inf_{y\in B(\theta,\delta)}f(y)\overset{2.1.3}{=}-\delta\|f\|$.

用反证法. 若存在 $B(x_0,\delta)$ 使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $B(x_0,\delta)$ 中的极大值，则由(1)，

$f(x_0)=\sup_{x\in B(x_0,\delta)}f(x)=f(x_0)+\delta\|f\|\Rightarrow\delta\|f$

，与 f 非零矛盾.

若存在 $B(x_0,\delta)$ 使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $B(x_0,\delta)$ 中的极小值，则由(2)，

$$f(x_0)=\inf_{x\in B(x_0,\delta)} f(x)=f(x_0)-\delta\|f\|\Rightarrow\delta\|f$$

$$\Rightarrow\|f\|=0$$

与 f 非零矛盾.

2.2.1 根据Riesz表示定

$\exists\ y_k \in H, f_k(x) = (x, y_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$

$\forall\ x \in M = \bigcap_{k=1}^{n} N(f_k)$

$\Rightarrow (x, y_k) = 0 (k = 1,2,\cdots,n, \forall\ x \in M)$

这意味着，

y_k ? M ($k = 1,2,\cdots,n$).

不妨假定， $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ 的极大线性无关组就是本身. 用 Gram-Schmidt 过程，构造出一个正交规范集 $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ s. t. span $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ = span $\{y_k\}_{k=1}^{n}$. 则有

$z_k \perp M (k = 1,2,\cdots,n)$.

令 $z_0 = x_0 - y_0$， 则 $z_0 \perp M$.

对 $\forall\ x \in H$,

$$(x, z_0) = \left(x, \sum_{k=1}^{n} \overline{(z_k, z_0)} z_k\right)$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}(x, z_k) z_k + \underbrace{x - \sum_{k=1}^{n}(x, z_k) z_k}_{\in M}, z_0\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n}(x, z_k) z_k, z_0\Big)$$

即得

$$z_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{(z_k, z_0)} z_k \Rightarrow$$

$x_0 - y_0 = z_0 \in$ span $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ = span $\{y_k\}_{k=1}^{n}$.

2.2.2 根据Riesz表示定理，

$\exists\ u^* \in H$， s. t. $l(v) = (u^*, v)$,

$f(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - l(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - (u^*, v)$

$= \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 - 2(u^*, v) + \|u^*\|^2\right) - \frac{1}{2}\|u^*\|^2$

$= \frac{1}{2}\|v - u^*\|^2 - \frac{1}{2}\|u^*\|^2 \qquad (\forall\ v \in C)$.

设 $u_0 \in C$， s. t.

$\|u_0 - u^*\| = \inf_{v \in C}\|v - u^*\|$， $\forall\ v \in C$,

$f(v) \geq \frac{1}{2}\|u_0 - u^*\|^2 - \frac{1}{2}\|u^*\|^2 = f(u_0) \qquad (\forall\ v$

$\Rightarrow f(u_0) = \inf_{v \in C} f(v)$.

2.2.5 设 L, M 是 H 上的闭线性子空间，求证：

(1) $L \perp M \Leftrightarrow P_L P_M = 0$;

(2) $L = M^{\perp} \Leftrightarrow P_L + P_M = I$;

(3) $P_L P_M = P_{L \cap M} \Leftrightarrow P_L P_M = P_M P_L$

证明 (1)

$$\begin{array}{ccc} L \perp M & \Rightarrow & P_L P_M = 0 \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ P_M x \in M, \forall x \in H & \Rightarrow & P_L P_M x = 0, \forall x \in H \end{array}$$

$$\forall x, y \in H, \begin{cases} x = \underbrace{P_M x}_{\in M} + \underbrace{(I - P_M) x}_{\in M^{\perp}} \\ y = \underbrace{P_M y}_{\in M} + \underbrace{(I - P_M) y}_{\in M^{\perp}} \end{cases} \Rightarrow$$

$(P_M x, y) = (P_M x, P_M y) = (x, P_M y)$.

因此

$P_L P_M = 0 \Rightarrow 0 = (P_L P_M x, y) = (P_M x, P_L y), \forall x$

于是 $\forall x \in L, y \in M$， 有

$(x, y) = (P_M x, P_L y) = 0 \Rightarrow L \perp M$.

(2) $L = M^{\perp} \Leftrightarrow P_L + P_M = I$

$Ix = x = P_M x + P_{M^{\perp}} x \Rightarrow$

$P_{M^{\perp}} x = (I - P_M) x, \forall x \in H \Rightarrow$

$P_L = P_{M^{\perp}} = (I - P_M)$

(3) $P_L P_M = P_{L \cap M} \Leftrightarrow P_L P_M = P_M P_L$

$(\Rightarrow)$ $P_L P_M = P_{L \cap M} = P_M P_L$

$(\Leftarrow)$ 设 $P_L P_M = P_M P_L$ 设