

第一章 习题解答与问题

一、习题解答

1 设 $x > 0$, x 的相对误差限为 δ , 求 $\ln x$ 的误差。

解: 设 x 的准确值为 x^* , 则有

$$(|x - x^*| / |x^*|) \leq \delta$$

所以

$$e(\ln x) = |\ln x - \ln x^*| = |x - x^*| \times |(\ln x)'|_{x=\xi} \approx (|x - x^*| / |x^*|) \leq \delta$$

另解:

$$\begin{aligned} e(\ln x) &= |\ln x - \ln x^*| = |\ln(x / x^*)| = |\ln((x - x^* + x^*) / x^*)| \\ &= |\ln((x - x^*) / x^* + 1)| \leq (|x - x^*| / |x^*|) \leq \delta \end{aligned}$$

2 设 $x = -2.18$ 和 $y = 2.1200$ 都是由准确值经四舍五入而得到的近似值。求绝对误差限 $\varepsilon(x)$ 和 $\varepsilon(y)$ 。

解: $|e(x)| = |e(-2.18)| \leq 0.005$, $|e(y)| = |e(2.1200)| \leq 0.00005$, 所以

$$\varepsilon(x) = 0.005, \quad \varepsilon(y) = 0.00005.$$

3 下近似值的绝对误差限都是 0.005, 问各近似值有几位有效数字

$$x_1 = 1.38, \quad x_2 = -0.0312, \quad x_3 = 0.00086$$

解: 根据有效数字定义, 绝对误差限不超过末位数半个单位。由题设知, x_1, x_2, x_3 有效数末位数均为小数点后第二位。故 x_1 具有三位有效数字, x_2 具有一位有效数字, x_3 具有零位有效数字。

4 已知近似数 x 有两位有效数字, 试求其相对误差限。

解: $|e_r(x)| \leq 5 \times 10^{-2}$ 。

5 设 $y_0 = 28$, 按递推公式 $y_n = y_{n-1} - \sqrt{783} / 100$ ($n = 1, 2, \dots$) 计算到 y_{100} 。若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$ (五位有效数字), 试问, 计算 y_{100} 将有多大的误差?

解: 由于初值 $y_0 = 28$ 没有误差, 误差是由 $\sqrt{783} \approx 27.982$ 所引起。记 $x = 27.982$, $\delta = x - \sqrt{783}$ 。则利用理论准确成立的递推式

$$y_n = y_{n-1} - \sqrt{783} / 100$$

和实际计算中递推式

$$Y_n = Y_{n-1} - x / 100 \quad (Y_0 = y_0)$$

两式相减, 得

$$e(Y_n) = Y_n - y_n = Y_{n-1} - y_{n-1} - (x - \sqrt{783}) / 100$$

所以, 有

$$e(Y_n) = e(Y_{n-1}) - \delta / 100$$

利用上式求和

$$\sum_{n=1}^{100} e(Y_n) = \sum_{n=1}^{100} e(Y_{n-1}) - \delta$$

化简, 得

$$e(Y_{100}) = e(Y_0) - \delta = \delta$$

所以, 计算 y_{100} 的误差界为

$$\varepsilon(Y_{100}) \leq \delta = 0.5 \times 0.001 = 5 \times 10^{-4}$$

6 求方程 $x^2 - 56x + 1 = 0$ 的两个根, 问要使它们具有四位有效数字, $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ 至少

要取几位有效数字？如果利用韦达定理，D又应该取几位有效数字？

解：在方程中， $a = 1$ ， $b = -56$ ， $c = 1$ ，故 $D = \sqrt{56^2 - 4} \approx 55.96427$ ，取七位有效数字。
由求根公式

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-56 + 55.96427}{2} = \frac{-0.03573}{2}$$

具有四位有效数字，而

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-56 - 55.96427}{2} = \frac{-111.96427}{2}$$

则具有八位有效数字。

如果利用韦达定理，首先计算出 x_2 ，利用

$$x_1 = \frac{1}{x_2} = \frac{2}{56 + \sqrt{56^2 - 4}}$$

计算，只需取 $D = \sqrt{56^2 - 4} \approx 55.96$ 四位有效数字即可保证方程的两个根均具有四位有效数字。此时有， $x_1 = 0.01786$ ， $x_2 = 55.98$ 。

7 设 $s = \frac{1}{2}gt^2$ ，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 s 的绝对误差增加，而相对误差减小。

证明 由于 $e(s) = gte(t)$ ， $e_t(s) = 2e(t)/t$ 。而 $|e(t)| \leq 0.1$ ，所以，对这一问题，当 t 增加时 s 的绝对误差增加，而相对误差减小。

8 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系 $y_n = 10y_{n-1} - 1$ ($n = 1, 2, \dots$)。若取 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$ (三位有效数字)，按上述递推公式，从 y_0 计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解 取 $x_0 = 1.41$ ，记 $e(x_0) = 1.41 - \sqrt{2}$ 。根据

$$x_n = 10x_{n-1} - 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

得

$$e(x_n) = 10e(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots, 10)$$

所以

$$e(x_{10}) = 10^{10}e(x_0)$$

从 y_0 计算到 y_{10} 时误差估计为： $|e(x_{10})| = 10^{10}|e(x_0)| \leq 0.5 \times 10^8$ 。

这是一个数值不稳定的算法。

9 $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ ，求 $f(30)$ 的值，若开平方用六位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

计算，求对数时误差有多大？

解 令 $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ ，则当 $x = 30$ 时， $y = 30 - 29.9833 = 0.0167$ 有三位有效数字，其相对误差为 10^{-3} 。由第一题结论，求对数时误差为 10^{-3} 。

若改用等价公式，令 $z = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ，则当 $x = 30$ 时， $y = 30 + 29.9833 = 59.9833$ 有六位有效数字，其相对误差为 10^{-6} 。由第一题结论，求对数时误差为 10^{-6} 。

10 已知有求和式 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_i b_j$

(1) 试统计需要用多少次乘法和加法才能计算出该和式的值；

(2) 为了减少计算工作量, 将和式作等价变换, 变换后需要多少次乘法和加法。

解 (1) 所用乘法次数: $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$,

加法次数: $[0+1+2+\cdots+(n-1)]+(n-1) = (n+2)(n-1)/2$;

(2) 将和式等价变形为: $\sum_{i=1}^n [a_i \sum_{j=1}^i b_j]$

所用乘法为 n 次, 加法次数不变, 仍为 $(n+2)(n-1)/2$ 。

11 试构造一个算法, 对输入的数据 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, 以及 x (均为实数), 算法输出为 $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ 的计算结果。

解 算法如下:

第一步: 输入 $x; x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, M \leftarrow (x-x_0); k \leftarrow 0$;

第二步: $M \leftarrow M \times (x-x_k); k \leftarrow k+1$;

第三步: 判断, 若 $k \leq n$, 则转第二步; 否则输出 M , 结束。

12 利用级数公式 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ 可计算出无理数 π 的近似值。由于交错级数的部分和数列 S_n 在其极限值上下摆动, 故截断误差将小于第一个被舍去的项的绝对值 $|a_{n+1}|$ 。试分析, 为了得到级数的三位有效数字近似值, 应取多少项求和。

解 由部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}$$

知, 截断误差满足

$$|S_n - \frac{\pi}{4}| \leq \frac{1}{2n+1}$$

显然, 为了得到三位有效数字的近似值, 绝对误差限应该为 $0.0005 = 5 \times 10^{-4}$ 。只需令

$$\frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$$

所以, 当 $n \geq 1000$ 时, 部分和至少有一位有效数字。

二、例题

1. 设 $x_1 = 1.21, x_2 = 3.65, x_3 = 9.81$ 都具有三位有效位数, 试估计数据: $x_1 \times (x_2 + x_3)$ 的误差限。

解: 由于, $|e(x_1)| \leq 0.5 \times 10^{-2}, |e(x_2)| \leq 0.5 \times 10^{-2}, |e(x_3)| \leq 0.5 \times 10^{-2}$, 所以 $|e(x_2 + x_3)| \leq 10^{-2}$,

$$|x_1 \times (x_2 + x_3)| \leq |x_1| \times 10^{-2} + 0.5 \times 10^{-2} \times |x_2 + x_3| = (1.21 + 0.5 \times 13.46) \times 10^{-2} = 7.94 \times 10^{-2}。$$

2. 设计算球体 V 允许其相对误差限为 $\varepsilon_r(V) = 1\%$ (或 $|e_r(V)| \leq 1\%$), 问测量球半径 R 的相对误差限 $\varepsilon_r(R)$ 最大为多少?

解: 由球体计算公式 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ 两端取全微分, 得 $dV = 4 \pi R^2 dR$ 。故有

$$e(V) \approx 4 \pi R^2 e(R), e_r(V) \approx 3 e_r(R)$$

当 $\varepsilon_r(V) = 1\%$ 时, 测量球半径 R 的相对误差限 $\varepsilon_r(R)$ 最大为 0.33% 。

3. 采用迭代法计算 $\sqrt{7}$, 取 $x_0 = 2$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{7}{x_n} \right), (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

若 x_n 是 $\sqrt{7}$ 的具有 n 位有效数字的近似值, 求证 x_{n+1} 是 $\sqrt{7}$ 的具有 $2n$ 位有效数字的近似值。
证: 由于

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 7/x_n) = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - \sqrt{7}/\sqrt{x_n})^2 + \sqrt{7} \geq \sqrt{7}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

所以

$$|x_{n+1} - \sqrt{7}| = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{7})^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{7}}|x_n - \sqrt{7}|^2, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

而 x_n 具有 n 位有效数, 故

$$|x_n - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-n}$$

所以

$$|x_{n+1} - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2\sqrt{7}}|x_n - \sqrt{7}|^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{7}} \times \frac{1}{4} \times 10^{2-2n}$$

由此得 x_{n+1} 的误差限

$$|x_{n+1} - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-2n}$$

故, x_{n+1} 是 $\sqrt{7}$ 的具有 $2n$ 位有效数字的近似值。

三、问题

1. 假定 a_0, b_0 是非负实数且 $a_0 \neq b_0$, 按如下递推公式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

产生的数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 称为高斯算术-几何平均数列。该数列可用于计算椭圆积分, 试证明该数列的收敛性。

2. 数学常数 e 是一个在数值计算中的重要常数, 利用 $S_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ 可以计算 e 的近似值

- (1) 设计一个算法, 用尽可能少的乘除法次数计算 S_n ;
- (2) 分析算法的计算复杂度 (运算次数和存储单元数);

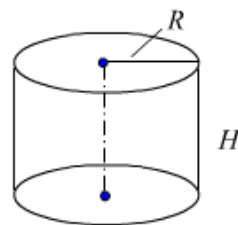
(3) 试估计用 S_n 计算 e 的近似值的截断误差误差界。

3. 定积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ 可以计算出无理数 π 的值。将定积分表示为积分和近似用以计算 π 的近似值。

4. 一圆柱形容器的内底半径为 R , 高为 H ,

(1) 由测量误差 $e(R)$ 和 $e(H)$, 估计经计算所得的容器容积 V 的误差 $e(V)$;

(2) 试分析以怎样的精度 (相对误差限) 测量圆柱形容器的底圆半径 R 和高 H , 才能使容器容积的计算值精确到 1%



5. 建立积分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{5+x} dx \quad (n = 1, 2, \dots, 20)$ 的递推

关系，并研究递推算法的数值稳定性。

6. 计算两个多项式 $P_n(x)$ 和 $Q_m(x)$ 的乘积多项式 $T_{n+m}(x)$ 的方法称为向量的卷积方法。设

$$P_n(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1}$$
$$Q_m(x) = b_1x^m + b_2x^{m-1} + \cdots + b_mx + b_{m+1}$$

再设

$$T_{n+m}(x) = d_1x^{n+m} + d_2x^{n+m-1} + \cdots + d_{n+m}x + d_{n+m+1}$$

分析由多项式 $P_m(x)$ 的系数计算出多项式 $P_m(x)$ 的系数的规律，设计算法，由输入数据

$$a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}$$
$$b_1, b_2, \cdots, b_n, b_{n+1}$$

计算并输出数据

$$c_1, c_2, \cdots, c_{m+n}, b_{m+n+1}$$

7. 在计算机上对调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 自左至右求和计算

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

当 n 很大时， S_n 将不随 n 的增加而增加。试利用相对误差限和有效数字关系说明这一现象产生的原因。

8. Fibonacci数列最初两项为 $F_0=1, F_1=1$ ，其递推公式为：

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, (n \geq 0)$$

(1) 利用数学归纳法证明 Fibonacci 数列的通项可以表示成

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right];$$

(2) 利用Fibonacci数列定义数列 $\{x_n\}$ ，其通项为： $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ ，试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1+\sqrt{5})/2$$

9. 多项式剩余定理可叙述为： n 次多项式 $P(x)$ 被 $(x-c)$ 除所得余数 R 恰好等于多项式在 $x=c$ 处的值 $P(c)$ ，即

$$P(x) = (x-c)Q(x) + R$$

其中， $Q(x)$ 是 $n-1$ 次多项式。求证 $P'(c) = Q(c)$ 。并利用多项式剩余定理计算

$$P(x) = x^7 - 2x^6 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1$$

在 $x=2$ 处的值 $P(2)$ 。

10. 在多项式剩余定理中，令 $b_n=R$ ，再令

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

(1) 求证递推关系：

$$b_0 = a_0$$

$$b_k = c \times b_{k-1} + a_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

(2) 根据上面递推关系，设计算法计算 $P(c)$ 和 $P'(c)$ 。

第二章 习题解答与问题

一、习题解答

1 用二分法求解下列方程, 要求误差不超过 10^{-5}

(1) $x - \ln x = 2$ 在区间 $[2, 4]$ 内的根;

(2) $x e^x - 1 = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 内的根;

(3) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在区间 $[1, 2]$ 内的根。

解: (1) $x_{18} = 3.14618$ 。

二分法程序 2-1

```
a=2;b=4;k=0;
f=inline('x-log(x)-2');
ya=f(a);
while (b-a)>0.00001
    x0=.5*(a+b);y0=f(x0);
    if ya*y0<0
        b=x0;
    else
        a=x0;ya=y0;
    end
    k=k+1;
end
format long
disp([x0,k])
```

(2) $x_{17} = 0.567146$ 。(利用上面程序修改前两行)

(3) $x_{17} = 1.365226$ 。

2 证明方程 $1 - x - \sin x = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上有一根。使用二分法求误差不大于 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ 的根需二分多少次?

证明 令 $f(x) = 1 - x - \sin x$, 则 $f(0) = 1$, $f(1) = -\sin 1$ 。于是 $f(0)f(1) < 0$, 故所给方程在区间 $[0, 1]$ 上必有根。又因为

$$f'(x) = -1 - \cos x$$

所以, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 内单调。故, 方程在区间 $[0, 1]$ 内只有一个根。

利用二分法收敛定理, 由

$$\frac{1-0}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

得 $2^n \geq 10^4$, 所以二分法求根至少需 14 次二分计算能满足误差要求。

3 比较以下两种方法求 $e^x + 10x - 2 = 0$ 的根到三位小数所需要的计算量。

(1) 在区间 $[0, 1]$ 内用二分法;

(2) 用迭代法 $x_{n+1} = \frac{1}{10}(2 - e^{x_n})$, 取初值 $x_0 = 0$ 。

解: (1) 二分法迭代 11 次, $x_{11} = 0.090$ 。(利用第 1 题程序修改前两行)

(2) 不动点迭代 5 次, $x_5 = 0.0905$ 。

不动点迭代程序

```
x0=0;k=0;er=1;
fi=inline('(2-exp(x))/10');
while er>0.0001
```

```

x1=fi(x0);
er=abs(x1-x0);
x0=x1;k=k+1;
end
disp([x0,k])

```

4 给出求 $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ 的迭代格式，并证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ 。

解 取初值： $x_1 = \sqrt{2}$ ，迭代格式： $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ ($n=1, 2, \cdots$)。

首先证明数列有上界。显然， $x_1 < 2$ 。设对 k ，有 $x_k < 2$ 成立，则对于 $(k+1)$ 有

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

由数学归纳法知，对任意 n 有 $x_n < 2$ 。故数列有上界。

现证明数列单增。由

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{2 + x_n}}{x_n} > \frac{\sqrt{x_n + x_n}}{x_n} = \sqrt{\frac{2}{x_n}} > 1$$

知，数列单调增加。由极限定理，该数列必有极限，设为 x^* ，由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + x_n}$$

得

$$x^* = \sqrt{2 + x^*}$$

化为二次方程，求出两个根分别为： -1 和 2 ，舍去负根，得 $x^* = 2$ 。

5 取 $x_0 = 0.5$ ，求方程 $x = e^{-x}$ 的根。分别用简单迭代法和 Aitken 加速方法求解，要求误差 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$ 。

解：用简单迭代法，迭代公式为

$$x_0 = 0.5, x_{k+1} = e^{-x_k} \quad (k = 0, 1, \cdots)$$

计算结果如下表

0.60653065	0.54523921	0.57970309	0.56006462	0.57117214	0.56486294
0.56843804	0.56640945	0.56755963	0.56690721	0.56727719	0.56706735
0.56718636	0.56711886	0.56715714	0.56713543	0.56714774	0.56714076

当 $k=17$ 时， $|x_{18} - x_{17}| = |0.56714076 - 0.56714774| \leq 10^{-5}$ 。故取

$$x^* \approx 0.56714076$$

MATLAB 程序如下

```

x0=0.5;er=1;k=0;
x=exp(-x0);
er=abs(x-x0);
x0=x;k=k+1;
end

```

用 Aitken 加速方法，迭代公式为

$$\begin{cases} y_n = \exp(-x_n), z_n = \exp(-y_n) \\ x_{n+1} = z_n - \frac{(z_n - y_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n} \end{cases} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

仍取 $x_0 = 0.5$ ，计算数据如下

k	1	2	3
x_k	0.56762387	0.56714331	0.56714329

当 $k=2$ 时, $|x_3 - x_2| = |0.56714329 - 0.56714331| \leq 10^{-5}$ 。故取

$$x^* \approx 0.56714329$$

MATLAB 程序如下

```
x=0.5;er=1;k=0;
while er>0.00001
    y=exp(-x);z=exp(-y);
    x0=z-(y-z)^2/(z-2*y+x);
    er=abs(x-x0);
    x=x0;k=k+1;
    u(k)=x;
end
```

6 应用牛顿迭代法于方程 $x^3 - a = 0$, 导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式, 并讨论其收敛阶。
 解: 令 $f(x) = x^3 - a$, 则牛顿迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{a}{3x_n^2}$$

故迭代函数为

$$\varphi(x) = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3x^2}$$

而

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{a}{x^3}, \quad \varphi''(x) = 2 \frac{a}{x^4}$$

将 $x^* = \sqrt[3]{a}$ 代入, 得 $\varphi'(x^*) = 0$, $\varphi''(x^*) = 2/\sqrt[3]{a}$

故用牛顿迭代法求解方程 $x^3 - a = 0$, 导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代是二阶收敛。

7 用牛顿迭代法求解Leonardo方程 $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$, 要求 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$ 。

解: 令 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, 则牛顿迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}$$

容易验证 $f(1)f(2) < 0$, 故方程在 $[1, 2]$ 区间内至少有一根。取初值 $x_0=1$, 计算结果如下

$$1.4117647 \quad 1.3693364 \quad 1.3688081 \quad 1.3688081$$

取初值 $x_0=2$, 计算结果如下

$$1.4666666 \quad 1.3715120 \quad 1.3688102 \quad 1.3688081$$

取初值 $x_0=1.5$, 计算结果如下

$$1.3736263 \quad 1.3688148 \quad 1.3688081$$

由此可知, 方程在区间 $[1, 2]$ 内有一根, 其近似值为

$$x^* \approx 1.3688081$$

注: 用 MATLAB 求多项式零点命令 `roots([1 2 10 -20])` 可得该方程的三个根近似值

$$x_1 = -1.6844 + 3.4313i, \quad x_2 = -1.6844 - 3.4313i, \quad x_3 = 1.3688$$

8 已知方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近有根, 试判断下列迭代格式的收敛性。

(1) $x_{n+1} = 1 + 1/x_n^2$; (2) $x_{n+1} = 1/\sqrt{x_n - 1}$; (3) $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n^2}$ 。

解: (1) $\varphi(x) = 1 + 1/x^2$, $\varphi'(x) = -2/x^3$, 在 $x_0 = 1.5$ 附近有 $|\varphi'(x)| < 1$ 成立, 故迭代格式收敛;

(2) $\varphi(x) = 1/\sqrt{x-1}$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(x-1)^3}}$, 在 $x_0 = 1.5$ 附近有 $|\varphi'(x)| \geq 1$ 成立, 故

迭代格式不收敛;

(3) $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$, $\varphi'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$, 在 $x_0 = 1.5$ 附近有 $|\varphi'(x)| < 1$ 成立, 故

迭代格式收敛。

9 应用牛顿迭代法于方程 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = 0$, 导出求平方根 $\sqrt{a}$ 的迭代公式, 并用此公式计算 $\sqrt{115}$ 。

解: 因为 $f'(x) = \frac{2a}{x^3}$, 所以牛顿迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - a/x_n^2}{2a/x_n^3} = \frac{3}{2}x_n - \frac{x_n^3}{2a}$$

取初值 $x_0 = 11$, 迭代计算 4 次后得

10.71304347826087 10.72378910023906 10.72380529472693 10.72380529476361

取

$$\sqrt{115} \approx 10.7238052947$$

已经得到 12 位有效数字。

10 证明由迭代格式 $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ ($n = 0, 1, \dots$) 产生的迭代序列 $\{x_n\}$, 对任意的 $x_0 > 0$, 均收敛于 $\sqrt{2}$ 。

证明: 对迭代格式, 得 $x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 2)$, 等式两端同减 $\sqrt{2}$, 并进行配方, 得

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{2})^2$$

同理可得

$$x_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n}(x_n + \sqrt{2})^2$$

将上面两式相除, 得

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{(x_n + \sqrt{2})^2}$$

反复递推, 得

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{2}}{x_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{(x_n + \sqrt{2})^2} = \left[\frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{x_{n-1} + \sqrt{2}} \right]^2 = \dots = \left[\frac{x_0 - \sqrt{2}}{x_0 + \sqrt{2}} \right]^{2^{n+1}}$$

令

$$q = \frac{x_0 - \sqrt{2}}{x_0 + \sqrt{2}}$$

则有

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = q^{2^n}$$

化简, 得

$$x_n = \sqrt{2} \frac{1+q^{2^n}}{1-q^{2^n}}$$

对任意的 $x_0 > 0$ ，由于 $|q| < 1$ ，故迭代序列收敛于 $\sqrt{2}$ 。

11 解方程 $12 - 3x + 2\cos x = 0$ 的迭代格式为 $x_{n+1} = 4 + \frac{2}{3}\cos x_n$

(1) 证明：对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ (为方程的根)；

(2) 取 $x_0 = 4$ ，用此迭代法求方程根的近似值，误差不超过 10^{-3} ；

(3) 此迭代法的收敛阶是多少？

解：(1) 令 $\varphi(x) = 4 + \frac{2}{3}\cos x$ ，则 $\varphi'(x) = -\frac{2}{3}\sin x$ 。故对任意 $x \in \mathbb{R}$ ，均有 $|\varphi'(x)| < 1$ ，

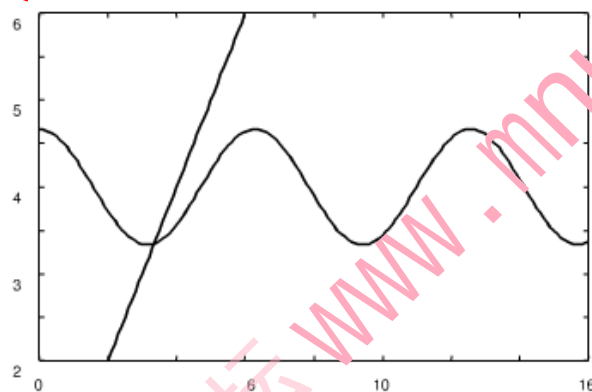
所以迭代过程收敛。即对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ 。

(3) 取 $x_0 = 4$ ，用迭代法计算得

3.5642 3.3920 3.3541 3.3483 3.3475

当 $k=5$ 时，有不等式 $|x_5 - x_4| \leq 10^{-3}$ 成立，取方程根的近似值

$$x^* \approx 3.3475$$



利用 MATLAB 绘图命令，将 $y = x$ 和 $y = 4 + \frac{2}{3}\cos x$ 绘制曲线。观察可知方程只有一个根。

(4) 由于 $\varphi'(x) = -\frac{2}{3}\sin x$ 在 $x^* \approx 3.3475$ 附近不为零，故迭代法是一阶收敛。

二、例题

1. 求证：二分法得到的数列 $\{x_n\}$ 线性收敛。

证 由二分法误差估计定理，得

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$$

而

$$x_{n+1} - x^* = (x_n - x^*) + (x_{n+1} - x_n)$$

所以

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x^*}$$

容易证明, $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n+2}}(b-a)$, 故

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x^*|} \geq \left(\frac{b-a}{2^{n+2}}\right) / \left(\frac{b-a}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}$$

显然, 当 $x_n > x^*$ 时, $x_{n+1} < x_n$, 当 $x_n < x^*$ 时, $x_{n+1} > x_n$. 故

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x^*} = - \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x^*} \right|$$

所以

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \left| 1 + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x^*} \right| = \left| 1 - \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x^*} \right| \right| \leq \frac{1}{2}$$

故二分法是线性收敛。

2. 设 x^* 是非线性方程 $f(x) = 0$ 的单根, 证明在牛顿迭代法中, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

解: 由于 x^* 是 $f(x) = 0$ 的单根, 故当 $x_n \approx x^*$ 时, $f'(x_n) \neq 0$, 利用Tylor展开式

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$

其中, ξ_n 介于 x 和 x_n 之间。上式中取 $x = x^*$, 由牛顿迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

得

$$x_{n+1} - x^* = (x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = x^*$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

3. 设 a 为正实数, 试建立求 $\frac{1}{a}$ 的牛顿迭代公式, 要求在迭代公式中不含有除法运算, 并考虑迭代公式产生的数列 $\{x_n\}$ 的收敛性。

解 构造函数 $f(x) = \frac{1}{x} - a$, 由于 $\frac{1}{a}$ 是该函数的零点, 且 $f'(x) = -1/x^2$, 对方程 $f(x) = 0$ 应用牛顿迭代公式, 得

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

该迭代函数不含有除法运算。由迭代公式, 得

$$1 - ax_{n+1} = 1 - ax_n(2 - ax_n) = (1 - ax_n)^2, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

递推, 得

$$1 - ax_n = (1 - ax_0)^{2^n}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

解得

$$x_n = \frac{1}{a} [1 - (1 - ax_0)^{2^n}]$$

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件为: $|1 - ax_0| < 1$ 。即
 $0 < x_0 < 2/a$

三、问题

1 分析下列方程, 确定方程的全部隔根区间

(1) $x \sin x = 1$; (2) $\sin x - e^{-x} = 0$; (3) $x = \tan x$; (4) $x^2 - e^{-x} = 0$ 。

2. 假定二分法开始的区间为 $[50, 63]$, 问需要进行多少次二分, 才能使所求根的相对误差精度达到 10^{-12} 。

3. 设二分法开始的区间为 $[a, b]$, 二分法计算过程中产生的区间序列为:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

记 $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, 试证明: $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n+2}}(b - a)$ 。

4. 应用牛顿迭代公式分别导出求方程

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n - a = 0 \\ f(x) &= 1 - a/x^n \end{aligned}$$

的解 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代格式, 并求极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \sqrt[n]{a}}{(x_k - \sqrt[n]{a})^2}$$

5. 对于复变量 $z = x + iy$ 的复值函数 $f(z)$ 应用牛顿迭代公式

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

时为避免复数运算分出实部和虚部。令

$$z_n = x_n + iy_n, \quad f(z_n) = A_n + iB_n, \quad f'(z_n) = C_n + iD_n$$

证明

$$x_{n+1} = x_n - \frac{A_n C_n + B_n D_n}{C_n^2 + D_n^2}, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{A_n D_n - B_n C_n}{C_n^2 + D_n^2}$$

6. 证明: 对于 $C > 0$, 迭代格式

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3C)}{3x_n^2 + C} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

是计算 $x^* = \sqrt[3]{C}$ 的三阶方法。

7. 设数列 $\{x_n\}$ 具有一阶收敛速度, 其极限值为 x^* , 试利用近似关系

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \approx \frac{x_{n+2} - x^*}{x_{n+1} - x^*}$$

推导使数列收敛加速的计算公式

$$(1) \quad x^* \approx x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}; \quad (2) \quad x^* \approx x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

8. 证明割线法迭代公式可写为如下形式

$$x_{n+2} = \frac{x_n f(x_{n+1}) - x_{n+1} f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

9. 设 x^* 是 $f(x)=0$ 的二重根, 证明

(1) 牛顿迭代法只是线性收敛;

(2) 修改的牛顿迭代公式 $x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 具有二阶收敛性。

10. 对于二元方程 $G(x, y)=0$, 已知 (x_0, y_0) 满足方程。如果 $G_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则根据隐函数存在定理, 在点 x_0 附近有函数 $y=y(x)$, 对于接近于 x_0 的自变量 x , 试构造牛顿迭代法计算隐函数值的迭代格式。

设割线法迭代数列 $\{x_n\}$ 收敛到非线性方程 $f(x)=0$ 的单根 x^* 。用牛顿插值公式

$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1})f''(\xi_n)$ 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} - x^*)}{(x_n - x^*)(x_{n-1} - x^*)}$$

第三章 习题解答与问题

一、习题解答

1. 用高斯消元法解下列方程组

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}; (2) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3 \\ -4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 12x_3 - 5x_4 = -2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 12x_4 = -4 \end{cases}$$

解: (1) 约化增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1/2 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 1/2 & 5/2 & 5/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1/2 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ -1 & -2 & \end{bmatrix}$$

得上三角方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \\ -0.5x_2 - 0.5x_3 = -1.5 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$

回代求解得,

$$x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = 2$$

(2) 约化增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 & 3 \\ -4 & 10 & 2 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 12 & -5 & -2 \\ 4 & 5 & -5 & 12 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & -3 & 1 \\ 6 & 10 & -1 & -5 \\ 13 & -9 & 20 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -8 \\ -48 & 79/2 & -33/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & -8 \\ -17/2 & 63/2 \end{bmatrix}$$

得上三角方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 1 \\ -8x_3 + 8x_4 = -8 \\ -8.5x_4 = -31.5 \end{cases}$$

回代求解得

$$x_1 = 99/34, x_2 = 52/17, x_3 = -46/17, x_4 = -63/17$$

2. 设 A 对称且 $a_{11} \neq 0$, 经过高斯消元法一步后, A 约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

13

证明 A_2 是对称矩阵。

证 设 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, 经过高斯消元第一步后, 得 $(n-1)$ 阶矩阵 $A_2=(b_{ij})_{(n-1) \times (n-1)}$, 其中

$$b_{ij} = a_{i+1,j+1} - \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} a_{1,j+1}$$

因为 A 是对称矩阵, 所以 $a_{i+1,j+1} = a_{j+1,i+1}$, $a_{i+1,1} = a_{1,i+1}$, $a_{1,j+1} = a_{j+1,1}$, 从而

$$b_{ji} = a_{j+1,i+1} - \frac{a_{j+1,1}}{a_{11}} a_{1,i+1} = a_{i+1,j+1} - \frac{a_{1,i+1}}{a_{11}} a_{j+1,1} = b_{ij}$$

所以矩阵 A_2 是对称矩阵。

另证: 由于高斯消元法一步后不改变矩阵 A 的第一行元素, 所以可将原对称矩阵 A 写为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ \alpha & A_1 \end{bmatrix}$$

形式。其中, A_1 是对称矩阵。利用Frobenius矩阵

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ -m_1 & I_{n-1} \end{bmatrix}, \quad m_1 = \frac{1}{a_{11}} \alpha$$

$$A \rightarrow F_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ O & A_1 - m_1 \alpha_1^T \end{bmatrix}$$

所以

$$A_2 = A_1 - m_1 \alpha_1^T = A_1 - \frac{1}{a_{11}} \alpha \alpha_1^T$$

是对称矩阵。

$$3. \text{ 设方程组 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ 3x_1 - 0.1x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(1) 试用 Gauss 全主元法求解; (2) 用 Gauss 列主元法求解。

解: (1) 用 $P=[1, 2, 3]$ 记录未知元次序。由增广矩阵

$$[A \quad b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 10 & 0 \\ 3 & -0.1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

在系数矩阵A中选取绝对值最大元 $a_{23} = 10$ 。交换第一行第二行，并交换第一列和第三列。

$$[A \ b] \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -0.1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -0.1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

修改P，将P的第一元素和第三元素换位，置 $P \leftarrow [3, 2, 1]$ 。然后进行第一轮消元，得

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -0.1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 4 & 5 & 0 \\ & 4/5 & -1/2 & 1 \\ & -1/2 & 5/2 & 2 \end{bmatrix}$$

在系数矩阵的右下子矩阵中选取绝对值最大元 $a_{33} = 5/2$ 。交换第二行第三行，并交换第二列和第三列。

14

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & 5 & 0 \\ & 4/5 & -1/2 & 1 \\ & -1/2 & 5/2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 4 & 5 & 0 \\ & -1/2 & 5/2 & 2 \\ & 4/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 & 0 \\ & 5/2 & -1/2 & 2 \\ & -1/2 & 4/5 & 1 \end{bmatrix}$$

修改P，将P的第二元素和第三元素换位，置 $P \leftarrow [3, 1, 2]$ 。然后进行第二轮消元，得

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 & 0 \\ & 5/2 & -1/2 & 2 \\ & -1/2 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 & 0 \\ & 5/2 & -1/2 & 2 \\ & & 7/10 & 7/5 \end{bmatrix}$$

得三角形方程组

$$\begin{cases} 10x_3 + 5x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2.5x_1 - 0.5x_2 = 2 \\ 0.7x_2 = 1.4 \end{cases}$$

回代求解，得

$$x_3 = -7/5, x_1 = 6/5, x_2 = 2$$

利用乱序后的未知元次序记录数组 $P=[3, 1, 2]$ ，得 $p_1=3, p_2=1, p_3=2$ 。由 $y_{p1} \leftarrow -7/5$, $y_{p2} \leftarrow 6/5, y_{p3} \leftarrow 2$ 。整序后输出

$$y = [6/5, 2, -7/5]$$

即得方程组未知元按原次序 x_1, x_2, x_3 的数据结果。

(2) 由增广矩阵第一列选主元，并首轮消元得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 10 & 0 \\ 3 & -0.1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -0.1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ & 6/5 & 1 & 1 \\ & -5/2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

第二列后两个元素选主元，并消元得

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ & 6/5 & 1 & 1 \\ & -5/2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ & -5/2 & -5 & 2 \\ & 6/5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ & -5/2 & -5 & 2 \\ & & -7/5 & 49/25 \end{bmatrix}$$

得三角方程

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ -\frac{5}{2}x_2 - 5x_3 = 2 \\ -\frac{7}{5}x_3 = \frac{49}{25} \end{cases}$$

回代求解，得

$$x_1 = 6/5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -7/5$$

4. 利用矩阵 A 的 LU 分解法求解方程组 $Ax=b$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解：用高斯消元法分解矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

由此得矩阵 A 的 LU 分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -2 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 3 & -3 \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

第一步，顺代过程求解下三角方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -2 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得： $y_1 = 4, y_2 = -1, y_3 = 9, y_4 = -3$ 。

第二步，回代过程求解上三角方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 3 & -3 \\ & & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

得： $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -1$ 。

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, 试求解以下问题

(1) 解 $Ax=b$, 其中 $b = [30, 40, 43, 57]^T$;

(2) 利用三角分解求 A^{-1} 。

解: (1) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ 。

(2) 用 E 表示四阶单位矩阵, 记 E 的四个列向量分别为 e_1, e_2, e_3, e_4 , 设 A^{-1} 的四个列向量分别为 X_1, X_2, X_3, X_4 , 则有 $A[X_1, X_2, X_3, X_4] = E$ 。故求 A^{-1} 等价于求解四个同系数矩阵的方程组

$$AX_1 = e_1, AX_2 = e_2, AX_3 = e_3, AX_4 = e_4$$

高斯消元法分解矩阵 A

16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由此得矩阵 A 的 LU 分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & -1 & -2 & -3 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = LU$$

现分别求解四个下三角方程组

$$LY_1 = e_1, LY_2 = e_2, LY_3 = e_3, LY_4 = e_4$$

得

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, Y_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

分别求解四个上三角方程组

$$UX_1 = Y_1, UX_2 = Y_2, UX_3 = Y_3, UX_4 = Y_4$$

得

$$X_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 用追赶法求解下列方程组

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & 1 & -4 & 1 \\ & & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：首先对系数矩阵进行三角分解（Crout 分解）

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & 1 & -4 & 1 \\ & & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -1/4 & & \\ 1 & -15/4 & -4/15 & \\ & 1 & -56/15 & -5/56 \\ & & 1 & -209/56 \end{bmatrix}$$

所以

$$A = \begin{bmatrix} -4 & & & \\ 1 & -15/4 & & \\ & 1 & -56/15 & \\ & & 1 & -209/56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & & \\ & 1 & -4/15 & \\ & & 1 & -15/56 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

解下三角方程组

$$\begin{bmatrix} -4 & & & \\ 1 & -15/4 & & \\ & 1 & -56/15 & \\ & & 1 & -209/56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

得

$$[y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T = [-1/4 \ -1/3 \ -5/14 \ -4/11]^T$$

解上三角方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & & \\ & 1 & -4/15 & \\ & & 1 & -15/56 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/3 \\ -5/14 \\ -4/11 \end{bmatrix}$$

得

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [-4/11 \ -5/11 \ -5/11 \ -4/11]^T$$

7. (1) 设 $P \in R^{n \times n}$ 非奇异, $\|x\|$ 是 R^n 上的一种向量范数, 定义 $\|x\|_p = \|Px\|$. 试证明 $\|x\|_p$ 也是 R^n 上的一种向量范数;

(2) 设 $A \in R^{n \times n}$ 为对称正定矩阵, 定义 $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, 证明 $\|x\|_A$ 是 R^n 上的一种向量范数.

证: (1) 由于 P 是非奇异矩阵, 故当 x 为非零向量时, Px 也是非零向量 (否则, 由 $Px=0$ 得 $x=0$ 与 x 是非零向量矛盾). 故 $\|x\|_p = \|Px\| > 0$, 且 $\|x\|_p = 0$ 的充分必要条件是 $x=0$;

$$\|\lambda x\|_p = \|P(\lambda x)\| = \|\lambda Px\| = |\lambda| \|Px\| = |\lambda| \|x\|_p$$

$$\|x+y\|_p = \|P(x+y)\| = \|Px + Py\| \leq \|Px\| + \|Py\| = \|x\|_p + \|y\|_p$$

由上可知, $\|\cdot\|_p$ 满足范数三条公理, 故, $\|x\|_p$ 是 R^n 上的一种向量范数。

(2) 由于矩阵 A 对称正定, 故存在下三角矩阵 L , 使得 $A = LL^T$, 且 L 是非奇异矩阵。所以,

$$\|x\|_A^2 = (Ax, x) = x^T Ax = x^T L L^T x = \|L^T x\|_2^2$$

故, $\|x\|_A = \|L^T x\|_2$ 。由 (1) 的结论知, $\|x\|_A$ 是 R^n 上的一种向量范数。

18

8. 设 $A \in R^{n \times n}$, 如果 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 成立, 则称 A 为对角占优矩阵。

若 A 为对角占优矩阵, 经过 Gauss 消元法一步后, A 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

证明: A_2 是对角占优矩阵。

证 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 经过高斯消元第一步后, 得 $(n-1)$ 阶矩阵 $A_2 = (b_{ij})_{(n-1) \times (n-1)}$, 其中

$$b_{ij} = a_{i+1,j+1} - \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} a_{1,j+1}$$

于是

$$|b_{ii}| = |a_{i+1,i+1} - \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} a_{1,i+1}| \geq |a_{i+1,i+1}| - \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} |a_{1,i+1}|$$

其中

$$|a_{i+1,i+1}| \geq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} |a_{i+1,j+1}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |a_{i+1,j+1}| + |a_{i+1,1}|$$

而

$$\begin{aligned} |a_{i+1,1}| - \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} |a_{1,i+1}| &= |a_{i+1,1}| \frac{a_{11}}{a_{11}} - \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} |a_{1,i+1}| \\ &\geq \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^n |a_{1,j}| - |a_{1,i+1}| \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} |a_{1,j+1}| \end{aligned}$$

所以

$$|b_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |a_{i+1,j+1}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} |a_{1,j+1}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (|a_{i+1,j+1}| + \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} |a_{1,j+1}|)$$

故

$$|b_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |a_{i+1,j+1} - \frac{a_{i+1,1}}{a_{11}} a_{1,j+1}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} |b_{ij}|$$

9. 设 $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$, 计算 A 的行和范数, 列和范数, 2-范数及 F-范数。

解: $\|A\|_\infty = 1.1$, $\|A\|_1 = 0.8$, $\|A\|_2 = 0.6853$, $\|A\|_F = 0.8426$

10. 设 X 是 n 维向量, A 是 $n \times n$ 阶矩阵。求证:

$$(1) \|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n \|X\|_\infty; (2) \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F.$$

证: (1) 设 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 则 $\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ 。
因为

$$\|X\|_1 \leq n \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = n \|X\|_\infty \quad \text{及} \quad \|X\|_1 \geq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \|X\|_\infty$$

所以, $\|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n \|X\|_\infty$ 。

(2) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 $A^T A = (\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj})_{n \times n}$, 该矩阵的迹 (主对角元之和) 为

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kj} a_{kj} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kj}^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = \|A\|_F^2$$

根据矩阵特征值理论, n 阶方阵 $A^T A$ 的特征值之和等于 $A^T A$ 的迹, 即

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(A^T A) = \text{tr}(A^T A) = \|A\|_F^2$$

所以

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k(A^T A) = \|A\|_F^2$$

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k(A^T A) = \frac{1}{n} \|A\|_F^2$$

由上两式得

$$\frac{1}{n} \|A\|_F^2 \leq \|A\|_2^2 \leq \|A\|_F^2 \quad \text{或} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

11. 设 $X \in R^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 求证 $\lim_{p \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} = \|X\|_\infty$ 。

证明: 因为

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n |x_i|^p \geq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p$$

故

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

或

$$\|X\|_\infty \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n} \|X\|_\infty$$

由于 $\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{n} = 1$, 所以对上式取极限, 得

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} = \|X\|_{\infty}$$

12. 设 $B \in R^{n \times n}$, I 是 n 阶单位矩阵, 如果 $\|B\| < 1$, 证明, $\|I - (I - B)^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}$

证 首先证明不等式: $\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$

由 $(I - B)(I - B)^{-1} = I$, 得

$$(I - B)^{-1} - B(I - B)^{-1} = I$$

移项, 得

$$(I - B)^{-1} = I + B(I - B)^{-1}$$

两边取范数, 得

20

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \|I\| + \|B\| \|(I - B)^{-1}\|$$

由于 $\|I\| = 1$, 整理上面不等式, 得

$$\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \quad (*)$$

仍由 $(I - B)(I - B)^{-1} = I$, 得

$$(I - B)^{-1} - B(I - B)^{-1} = I$$

移项, 得

$$I - (I - B)^{-1} = -B(I - B)^{-1}$$

两边取范数, 得

$$\|I - (I - B)^{-1}\| \leq \|B\| \|(I - B)^{-1}\|$$

由不等式 (*) 得

$$\|I - (I - B)^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}$$

13. 设 $A = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}$, 计算 A 的条件数 $\text{Cond}(A)_v$ ($v = 1, \infty$)

解: 先求 A 的逆矩阵, 因为 $\det(A) = -1$, 所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{bmatrix}$$

故

$$\text{Cond}(A)_1 = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 199 \times 199$$

$$\text{Cond}(A)_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = 199 \times 199$$

14. 求下面两个方程的解, 并利用矩阵的条件数估计 $\frac{\|\delta X\|}{\|X\|}$

$$(1) \begin{bmatrix} 240 & -319 \\ -179 & 240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ 即 } Ax = b;$$

$$(2) \begin{bmatrix} 240 & -319.5 \\ -179.5 & 240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ 即 } (A + \delta A)(X + \delta X) = b$$

解: (1) $x_1 = 4, x_2 = 3$;

(2) $x_1 = 8, x_2 = 6$; 取 1-范数, 则 $\|\delta X\|_1 = |8 - 4| + |6 - 3| = 7, \|X\|_1 = 4 + 3 = 7$,

故 $\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} = 1$ 。记

$$A = \begin{bmatrix} 240 & -319 \\ -179 & 240 \end{bmatrix}$$

则由 $\|A\| = 499$ ，得

$$A^{-1} = \frac{1}{499} \begin{bmatrix} 240 & 319 \\ 179 & 240 \end{bmatrix}$$

所以 1-范数意义下的条件数为

$$\text{Cond}(A)_1 = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 559 \times (559/499) = 626.2144$$

而

$$\|\delta A\|_1 = 0.5, \|A\|_1 = 559$$

所以

$$\text{Cond}(A)_1 \frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1} = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 \frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1} = 559 \times (559/499) \times 0.5/559 = 0.5601$$

根据系数矩阵扰动对解的误差估计式，得

$$\frac{\|\delta X\|_1}{\|X\|_1} \leq \frac{\text{Cond}(A)_1}{1 - \text{Cond}(A)_1 \|\delta A\|_1 / \|A\|_1} \frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1} = \frac{0.5601}{1 - 0.5601} = 1.2734$$

二、例题

1. 设 $m \times n$ 阶矩阵 A 的各列线性无关，则有 $A = QR$ ，其中 R 为单位上三角方阵， $Q^T Q = D$ 为对角阵。

证：因 A 的各列线性无关，可知 $A^T A$ 为对称正定矩阵，则必有 LDL^T 分解，即 $A^T A = LDL^T$ 。

记 $Q = A(L^T)^{-1}$ ，从而 $A = QL^T$ ，容易验证

$$Q^T Q = L^{-1} A^T A (L^T)^{-1} = L^{-1} LDL^T (L^T)^{-1} = D$$

令 $R = L^T$ ，则是 R 单位上三角矩阵，则有 $A = QR$ 成立。

2. 若矩阵 A 是 n 阶对称矩阵，则 $\rho(A) = \|A\|_2$ 。

证明：设 λ 是 A 的任一特征值，由于 A 对称，故 λ^2 是矩阵 $A^T A$ 的特征值，即

$$\lambda(A^T A) = \lambda(A^2) = [\lambda(A)]^2$$

由 2-范数计算公式

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq n} [\lambda_j(A)]^2} = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j(A)| = \rho(A)$$

3. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为可逆上三角矩阵，证明 A^{-1} 仍为上三角矩阵，并构造求 A^{-1} 的算法。

解：由求逆公式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ ，其中

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

这里, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。因为 A 为上三角矩阵, 故当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$, 从而 $i < j$ 时, $A_{ij} = 0$, 所以 A^{-1} 是上三角矩阵。

设 A 的逆矩阵为 X , 则有 $AX = I$, 即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

分析右端矩阵的第 k 列向量中前 k 个元素, 得等式 ($k = 1, 2, \dots, n$)

22

$$a_{kk}x_{kk} = 1, \quad \sum_{s=i}^k a_{is}x_{sk} = 0, \quad (i = k-1, \dots, 1)$$

由于 A 的主对角元不为零, 解得

$$x_{kk} = \frac{1}{a_{kk}}, \quad x_{ik} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{s=i+1}^k a_{is}x_{sk}, \quad (i = k-1, \dots, 1)$$

根据上面公式, 得 X 矩阵第 k 列由下向上顺序依次求出的算法

① $x_{11} = 1/a_{11}; k \leftarrow 1; i \leftarrow 1;$

② $k \leftarrow k+1; x_{kk} \leftarrow \frac{1}{a_{kk}};$

③ $i \leftarrow i-1, x_{ik} \leftarrow -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{s=i+1}^k a_{is}x_{sk};$

④ 判断, 若 $i > 1$, 则转③, 否则转⑤;

⑤ 判断, 若 $k < n$, 则转②, 否则转⑥;

⑥ 输出 $x_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = i, i+1, \dots, n)$, 结束。

三、问题

1. 给定矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 Q 的 2-范数; (2) Q 的 2-范数意义下的条件数;

2. 对 n 阶矩阵 A , 设 A 的顺序主子式都不为零, 试证明消元过程中出现的 Frobenius 矩阵有如下性质

(1) 对于 $k < j$, 有 $F_k^{-1}F_j^{-1} = I + m_k e_k^T + m_j e_j^T$;

(2) $F_1^{-1}F_2^{-1} \cdots F_{n-1}^{-1} = I + m_1 e_1^T + m_2 e_2^T + \cdots + m_{n-1} e_{n-1}^T$

3. 对任意 $x, y \in R^n$, 利用向量范数的三角形不等式证明:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

4. 证明矩阵 A 的谱半径与 A 的范数有如下关系

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

其中, $\|A\|$ 为 A 的任何一种算子范数。

5. 设已经给定一个 n 次多项式 $Q(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$, 如果某一 n 阶矩阵 A 的特征多项式恰好等于 $Q(x)$, 则称 A 为 Q 的友阵。试证明 Q 的友阵为

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为可逆下三角矩阵, 证明 A^{-1} 仍为下三角矩阵, 并构造求 A^{-1} 的算法。

7. 设 x 是 n 维向量, 求证向量范数的等价性

$$(1) \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty}; \quad (2) \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

8. 考虑 n 阶方阵和 n 维向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ \vdots \\ 1/2^{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) 计算 Ax , $\|Ax\|_2$ 和 $\|x\|_2$;

(2) 计算 $\|A^{-1}\|_{\infty}$;

(3) 计算 $\text{Cond}_{\infty}(A)$ 。

解: (1) $Ax = [1, 1, \dots, 1]^T / 2^{n-1}$

$$\|Ax\|_2 = \frac{1}{2^{n-1}} \sqrt{n}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} 1/2^{2k}} = \sqrt{(1 - 1/4^n)/(1 - 1/4)} = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}} \sqrt{4^n - 1}$$

第四章 习题解答与问题

一、习题解答

1. 设方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

(1) 考察用 Jacobi 迭代法、G-S 迭代法解此方程组的收敛性.

(2) 用 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法解此方程组, 要求当 $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-4}$ 时迭代终止.

解 (1) 方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

是对角占优矩阵, 故其 Jacobi 迭代和 G-S 迭代均收敛.

(2) 此方程组的 Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} - \frac{3}{10}x_2^{(k)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

取初值 $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ 进行迭代计算, 得近似解为

$$X^{(18)} = (-3.9999964, 2.9999739, 1.9999999)^T$$

$$\|X^{(18)} - X^{(17)}\|_{\infty} \approx 0.414468 \times 10^{-4}$$

此方程组的 G-S 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k+1)} - \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

取初值 $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ 进行迭代计算, 迭代 8 次达到精度要求, 得近似解为

$$X^{(8)} = (-4.000036, 2.999985, 2.000003)^T$$

$$\|X^{(8)} - X^{(7)}\|_{\infty} \approx 0.9155273 \times 10^{-4}$$

2. 设有方程组

$$(1) \begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 = 1, \\ 0.4x_1 + x_2 + 0.8x_3 = 2, \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

试考察求解上述方程组的 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法的收敛性。

解：(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, B_J = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}, B_{G-S} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{bmatrix}$$

$\rho(B_J) = 1.0928$, $\rho(B_{G-S}) = 0.6283$ 。所以，Jacobi 迭代法不收敛，而 G-S 迭代法收敛。

$$(2) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B_J = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, B_{G-S} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\rho(B_J) = 1.2604e-005$, $\rho(B_{G-S}) = 2$ 。所以，Jacobi 迭代法收敛，而 G-S 迭代法不收敛。

3. 设 $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ ，为二阶矩阵，且 $a_{11} a_{22} \neq 0$ ，试证明求解方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代及 Gauss-Seidel 迭代法同时收敛或发散。

证明：设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ，则

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}, B_{G-S} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - B_J| = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \rightarrow \lambda^2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$$

$$\text{所以 } \rho(B_J) < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| < 1$$

$$|\lambda I - B_{G-S}| = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \lambda - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{vmatrix} = \lambda \left(\lambda - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right) \rightarrow \lambda = 0 \text{ 或 } \lambda = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$$

所以 $\rho(B_J) < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| < 1$ 。由此可得 $\rho(B_J) < 1 \Leftrightarrow \rho(B_{G-S}) < 1$ ，即两种迭代法同时收敛或同时发散。

4. 设线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix}$$

试求能使 Jacobi 迭代的 a 的取值范围。

解：当 $a \neq 0$ 时 Jacobi 迭代矩阵为

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{3}{a} \\ -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a} \\ \frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda I - B_J| = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{a} & \frac{3}{a} \\ \frac{1}{a} & \lambda & \frac{2}{a} \\ -\frac{3}{a} & \frac{2}{a} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \frac{2i}{a}$$

当 $a < -2$ 或 $a > 2$ 时 Jacobi 迭代法收敛。

5. 设有方程组 $Ax = b$, 其系数矩阵主对角元 $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

(1) 证明解方程组的 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

的根满足 $|\lambda| < 1$ 。

(2) 证明解方程组的 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \cdots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

的根满足 $|\lambda| < 1$ 。

(1) 证明: 将系数矩阵分解, 使得 $A = D - L - U$ 其中, $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 是 A 的主对角元组成的对角矩阵, $L = (l_{ij})_{n \times n}$, 和 $U = (u_{ij})_{n \times n}$ 分别是下三角矩阵和上三角矩阵于是 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$B_J = D^{-1}(L + U)$$

该矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - B_J| = |\lambda I - D^{-1}(L + U)| = |D^{-1}(\lambda D - (L + U))|$$

所以, 特征值满足

$$|\lambda D - (L + U)| = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

所以迭代法收敛的充要条件是上面高次方程的根模 $|\lambda| < 1$ 。

(2) 证明: 将系数矩阵分解, 使得 $A = D - L - U$, 于是 G-S 迭代法的迭代矩阵为

$$B_{G-S} = (D - L)^{-1}U$$

该矩阵的特征多项式为

$$|\lambda I - B_{G-S}| = |\lambda I - (D - L)^{-1}U| = |(D - L)^{-1}(\lambda(D - L) - U)|$$

所以, 特征值满足

$$|\lambda(D-L)-U|=0$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \cdots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

所以迭代法收敛的充要条件是上面高次方程的根模 $|\lambda| < 1$ 。

6. 用 SOR 方法解方程组(分别取松弛因子 $\omega = 1.03, \omega = 1, \omega = 1.1$)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - 4x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

精确解 $X^* = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})^T$, 要求当 $\|X^* - X^{(k)}\|_\infty < 5 \times 10^{-6}$ 时迭代终止, 并且对每一个 ω 值确定迭代次数。

解: 将所给方程变形为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3, \\ x_2 = 1 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3, \\ x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2 \end{cases}$$

其 SOR 迭代法为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(1-x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega(1-\frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{4}x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2^{(k+1)}) \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

取 $\omega = 1.03$, 初值 $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, 迭代 5 次达到精度要求,

$$X^{(5)} = (0.5000043, 0.1000001, -0.499999)^T$$

取 $\omega = 1$, 初值 $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, 迭代 6 次达到精度要求,

$$X^{(6)} = (0.5000038, 0.1000002, -0.499995)^T$$

取 $\omega = 1.1$, 初值 $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, 迭代 6 次达到精度要求,

$$X^{(6)} = (0.500035, 0.0999989, -0.5000003)^T。$$

7. SOR 方法解方程组(取 $\omega = 0.9$)

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

要求当 $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-4}$ 时迭代终止.

解 解次方程的 SOR 迭代法为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(-\frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega(5 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega(\frac{3}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)}) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

当 $\omega = 0.9$ 时, 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.9(-\frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.9(5 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = 0.1x_3^{(k)} + 0.9(\frac{3}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

取初值 $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, 代入进行计算得

$$X^{(8)} = (-4.000027, 0.2999987, 0.2000003)^T.$$

8. 有方程组 $Ax = b$, 其中 A 为对称正定阵, 且有迭代公式

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega(b - AX^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

讨论使迭代序列收敛的 ω 的取值范围.

解: 因为

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega(b - AX^{(k)}) \quad (*)$$

$$\text{即} \quad X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega b - \omega AX^{(k)} = (I - \omega A)X^{(k)} + \omega b$$

迭代矩阵为 $B = I - \omega A$, 设 A 的特征值为 λ , 因 A 对称正定, 故 $\lambda > 0$, 则 B 矩阵的特征多项式为

$$|\mu I - B| = |(\mu - 1)I + \omega A|$$

显然, B 矩阵的特征值为 $\mu = 1 - \omega\lambda$, 由 $|\mu| < 1$ 解得: $0 < \omega < 2/\lambda$.

设 $\rho(A) = \lambda_1$, 则当 $0 < \omega < \frac{2}{\rho(A)}$ 时, $\rho(I - \omega A) < 1$, 当然, $0 < \omega < \frac{2}{\|A\|}$ 时, 也有

$$\rho(I - \omega A) < 1$$

此时迭代序列(*)式收敛。

二、例题

1. 求证, 若 A 是严格主对角占优矩阵, 则求解方程组 $AX=b$ 的高斯-赛德尔迭代法收敛。

证明: 高斯-赛德尔迭代矩阵为 $(D-L)^{-1}U$, 该矩阵的特征方程为

$$|\lambda I - (D - L)^{-1}U| = 0$$

由于 $|D - L|^{-1} \neq 0$ ，故特征方程可化为

$$|\lambda(D - L) - U| = 0$$

左端的行列式对应的矩阵为

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

当 $|\lambda| > 1$ 时，利用A矩阵的主对角占优性质，得

$$|\lambda a_{ii}| = |\lambda| \times |a_{ii}| > |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\lambda| \times |a_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$$

故 $C(\lambda)$ 也是严格主对角占优矩阵。由于严格主对角占优矩阵的行列式不为零，故 λ 不是特征方程

$$|\lambda(D - L) - U| = 0$$

的根。所以当A是严格主对角占优矩阵时， $(D - L)^{-1}U$ 的特征值必然满足： $|\lambda| < 1$ ，从而高斯-赛德尔迭代矩阵谱半径小于1，迭代法收敛。

2. 设A是一个可逆矩阵，矩阵序列满足

$$X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

证明当 $\rho(I - AX_0) < 1$ 时， $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A^{-1}$ 。

证明：由 $X_{k+1} = X_k(2I - AX_k)$ ，得

$$I - AX_{k+1} = I - AX_k(2I - AX_k) = (I - AX_k)^2$$

于是

$$\begin{aligned} I - AX_k &= (I - AX_{k-1})^2 \\ &= (I - AX_{k-2})^{2 \times 2} \\ &= \cdots \\ &= (I - AX_0)^{2^k} \end{aligned}$$

解得

$$X_k = A^{-1}[I - (I - AX_0)^{2^k}], \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

当 $\rho(I - AX_0) < 1$ 时

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (I - AX_0)^{2^k} = 0$$

因而， $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{-1}[I - (I - AX_0)^{2^k}] = A^{-1}$

3. 证明，当 $|\lambda| < 1$ 时，二阶约当块

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}$$

的方幂 J^m 极限值为零。

证明：由于

$$J^2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

假设

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & \lambda^k \end{bmatrix}$$

则有

$$J^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & \lambda^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ & \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

由数学归纳法知

$$J^m = \begin{bmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ & \lambda^m \end{bmatrix}$$

而 $|\lambda| < 1$, 故 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda^m = 0$ 。所以 $\lim_{m \rightarrow \infty} J^m = 0$ 。

三、问题

1. 设 A 是 n 阶可逆矩阵, 有 A 的一个近似逆 D , 令 $R = I - AD$, 如果 $\|R\| \leq q < 1$, 试证明

(1) $A^{-1} = D(I + R + R^2 + \dots)$;

(2) 任意给定 n 阶矩阵 X_0 , 由迭代格式 $X_{k+1} = X_k R + D$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 产生的矩阵序列 $\{X_k\}$ 收敛到矩阵 A^{-1} ;

(3) 对矩阵序列 $\{X_k\}$, 有误差估计式

$$\|X_k - A^{-1}\| \leq \frac{q}{1-q} \|X_k - X_{k-1}\|$$

2. 给定线性方程组 $AX=b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

用迭代公式: $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega(b - AX^{(k)})$ 求解方程组时, ω 取多大可使迭代收敛最快?

3. 设 n 阶方阵 A 有 n 个正的实特征值: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ 。Richardson 迭代公式为

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega(b - AX^{(k)})$$

试证明:

(1) 当 $0 < \omega < 2/\lambda_1$ 时, 迭代公式收敛;

(2) ω 最佳取值为 $2/(\lambda_1 + \lambda_n)$; 对应的最佳谱半径为 $\rho = (\lambda_1 - \lambda_n)/(\lambda_1 + \lambda_n)$

4. 证明, A 是严格对角占优矩阵, 则 A 的行列式不为零。

5. 证明, 当 $|\lambda| < 1$ 时, 三阶约当块

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix}$$

的方幂 J^m 极限值为零。

6. 将方程组 $Ax=b$ 中的系数矩阵 A 分裂为 $A = D - L - U$ 。证明: Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代格式可以写成如下形式

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= x^{(k)} + D^{-1}(b - Ax^{(k)}) \\x^{(k+1)} &= x^{(k)} + (D - L)^{-1}(b - Ax^{(k)})\end{aligned}$$

7. 设 A 是对称矩阵, 将 A 分裂为 $A = D - L - U$ 。Gauss-Seidel 迭代格式的向前和向后两种形式分别为

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= x^{(k)} + (D - L)^{-1}(b - Ax^{(k)}) \\x^{(k+1)} &= x^{(k)} + (D - U)^{-1}(b - Ax^{(k)})\end{aligned}$$

如果将向前和向后迭代格式交替进行, 则有

$$x^{(k+2)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)})$$

试证明: $M^{-1} = (D - U)^{-1}D(D - L)^{-1}$ 。

8. 设 $h = 1/(n+1)$, 证明 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2-h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2-h^2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2-h^2 & -1 \\ & & & & -1 & 2-h^2 \end{bmatrix}$$

是对称正定矩阵。

第五章 习题解答与问题

一、习题解答

1. 求经过 $A(0, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 3)$ 三个样点的插值多项式

解: 令 $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, 则有 $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 3$, 由Lagrange二次插值公式

$$\begin{aligned}L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) \\&\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \\&= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \times 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \times 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \times 3 = x+1\end{aligned}$$

2. 已知函数 $y = f(x)$ 的数据如下表

由于被插值函数 $f(x) = 3^x$, 故取 $x = 1/2$, 使得

$$\sqrt{3} \approx P_3(1/2) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ 2 + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left[2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right] \right\} = 2$$

3. 已知函数 $y = f(x)$ 的数据如下表

x	-1	0	1
y	-1	0	1
y'		0	

解: 由于 $x=0$ 是二重零点, 令 $H_3(x) = x^2(ax + b)$ 。又由 $H_3(-1) = -1$, $H_3(1) = 1$ 得方程组

$$\begin{cases} b-a=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \text{解之: } a=1, b=0$$

所以, $H_3(x) = x^3$ 。

4. 设被插值函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上具有 2 阶连续导数, 求证: 两点线性插值函数 $L(x)$ 的误差界满足不等式

$$|R(x)| \leq \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)| \frac{(x_1 - x_0)^2}{8}$$

证: 由拉格朗日插值误差定理, 得

$$R(x) = f(x) - L(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)(x - x_1)$$

令 $h(x) = (x - x_0)(x - x_1)$, 求导数并令其为零, 可得极值点 $x^* = 0.5 \times (x_0 + x_1)$ 。显然这是函数 $|h(x)|$ 在所讨论区间内的最大值点, 故

$$|R(x)| \leq \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)| \frac{(x_1 - x_0)^2}{8}$$

5. 若给出 $\sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的等距结点的数值表, 用线性插值计算表中没有的数据时, 希望截断误差小于 5×10^{-3} , 问函数表中自变量数据的步长应取多少为好?

解: 设应取的步长为 h , 利用第 4 题的结论, 只须

$$\frac{h^2}{8} \leq 5 \times 10^{-3}$$

所以, 应取 $h = 0.2$ 。

6. 常用对数表中, 只能查出 $\lg N$ 的值, 其中 N 是具有形式: $a_1 a_2 a_3 a_4$ 的实数。试研究线性插值计算近似值的误差界。

解: 由 N 的取值形式可知, 对数表中函数自变量取值的步长为 $h = 0.1$ 。而

$$(\lg x)'' = -\frac{1}{x^2 \ln 10}$$

由第 4 题结论, 线性插值计算近似值的误差界

$$|R(N)| \leq \frac{0.01}{8[N]^2 \ln 10}$$

7. 证明两点三次 Hermite 插值余项是

$$R_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2, \quad \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

并由此求出分段三次 Hermite 插值的误差限。

证明: 由插值条件知

$$R(x_k)=R'(x_k)=0, R(x_{k+1})=R'(x_{k+1})=0$$

取 x 异于 x_k 和 x_{k+1} , 设 $R(x)=f(x)-H(x)=C(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$ 构造辅助函数,

$$F(t)=f(t)-H(t)-C(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$$

显然, $F(t)$ 有三个零点 x_k, x, x_{k+1} , 由Roll定理知, 存在 $F'(t)$ 的两个零点 t_0, t_1 满足 $x_k < t_0 < t_1 < x_{k+1}$,

而 x_k 和 x_{k+1} 也是 $F'(x)$ 的零点, 故 $F'(x)$ 至少有四个相异零点. 反复应用Roll定理, 得 $F^{(4)}(t)$ 至少有一个零点设为 ξ . 由此得

$$F^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - C(x)4! = 0$$

$$\text{所以, } C(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi), \text{ 故 } R(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

对于等距离节点 (步长取为 h), 分段 Hermite 插值的误差余项为 _____

$$|R(x)| \leq \frac{1}{4!} \max |f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2|$$

8. 求一个次数不高于 4 次的多项式 $P(x)$, 使它满足: $P(0)=0, P'(0)=0, P(1)=1, P'(1)=1, P(2)=1$, 并写出其余项表达式.

解: 由题意 $P(x) = x^2(ax^2 + bx + c)$, 由插值条件得方程组

$$a + b + c = 1$$

$$4a + 3b + 2c = 1$$

$$4(4a + 2b + c) = 1$$

求解, 得 $a=1/4, b=-3/2, c=9/4$. 所以

$$P(x) = x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right)$$

$$\text{插值余项为 } R(x) = \frac{1}{5!} f^{(5)}(\xi)x^2(x-1)^2(x-2)$$

9. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 在 $-5 \leq x \leq 5$ 上取 $n=10$, 按等距结点求分段线性插值函数 $I_h(x)$,

计算各结点间中点处的 $I_h(x)$ 和 $f(x)$ 的值, 并估计误差.

解: 因为 $f(x_k) = 1/(1+k^2)$, ($k = -5, \dots, -1, 0, 1, \dots, 5$) 分段线性插值函数为

$$I_h(x) = \sum_{k=-5}^5 l_k(x) \frac{1}{1+k^2}$$

其中, 分段线性插值的基函数为

$$l_k(x) = \begin{cases} x - x_{k-1}, & x \in (x_{k-1}, x_k) \\ x_{k+1} - x, & x \in (x_k, x_{k+1}) \\ 0, & x \notin (x_{k-1}, x_{k+1}) \end{cases}$$

对于某一节点中点 $x_{k0} = (x_k + x_{k+1})/2 = k + 0.5$, 于是

$$f(x_{k0}) = \frac{1}{1 + (k + 0.5)^2}, \quad I_h(x_{k0}) = 0.5 \left(\frac{1}{1 + k^2} + \frac{1}{1 + (k + 1)^2} \right)$$

因为

$$R_1(x) = f(x) - I_h(x) = \frac{f''(\xi_k)}{2} (x - x_k)(x - x_{k+1})$$

所以

$$|R_1(x)| = |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{1}{2} \max |f''(x)| \frac{h}{2} \frac{h}{2} = \frac{h^2}{8} \max |f''(x)|$$

10. 已知二元函数 $u(x, y)$ 在四个点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_1)$, $P_3(x_2, y_2)$, $P_4(x_1, y_2)$ 处的函数值为 u_1, u_2, u_3, u_4 , 试推导双线性插值函数

$$u_h(x, y) = a + b x + c y + d xy$$

的表达式。

解: 令 $w = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, $v = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, 则利用基函数得

$$u_h(w, v) = (1 - w)(1 - v)u_1 + w(1 - v)u_2 + w v u_3 + (1 - w)v u_4$$

所以, 有

$$u_h(x, y) = \frac{(x_2 - x)(y_2 - y)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} u_1 + \frac{(x - x_1)(y_2 - y)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} u_2 \\ + \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} u_3 + \frac{(x_2 - x)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} u_4$$

二、例题

1. 在代数插值问题中, $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是 $(n+1)$ 个互异的插值结点, 由这 $(n+1)$ 个结点构造拉格朗日插值基函数

$$l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$$

试证明恒等式: $l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) = 1$ 。

证明: 记 $P(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) - 1$, 由于拉格朗日基函数在插值结点处满足

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

故对所有插值结点有

$$l_0(x_k) + l_1(x_k) + \dots + l_n(x_k) = 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

所以，有 $(n+1)$ 个等式

$$P(x_k) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

成立。而 $P(x)$ 是 n 次多项式，由上可知它有 $(n+1)$ 个不同的零点，故根据代数基本定理知，必有 $P(x) \equiv 0$ 成立。即

$$l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) = 1$$

2. 设 $f(x)$ 是 $(n+1)$ 次多项式且最高次项系数为1，取互异的插值结点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ ，构造插值多项式 $P_n(x)$ ，试证明： $f(x) = P_n(x) + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$ 。

证明：由拉格朗日插值公式，得

$$f(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + \dots + l_n(x)f(x_n) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中， $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$ 。由于 $f(x)$ 是 $(n+1)$ 次多项式且最高次项系数为1，故它的 $(n+1)$ 阶导数为 $(n+1)!$ ，拉格朗日插值余项为 $\omega_n(x)$ ，记插值多项式

$$P_n(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + \dots + l_n(x)f(x_n)$$

故有 $f(x) = P_n(x) + \omega_n(x)$ ，即

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

3. 利用牛顿插值公式推导3次幂和公式： $P(n) = \sum_{k=1}^n k^3$ 。

解：计算 $P(n)$ 的前七个初值如下

n	1	2	3	4	5	6	7
$P(n)$	1	9	36	100	225	441	784

构造差商表

n	$P(n)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	五阶差商
1	1					
2	9	8				
3	36	27	19/2			
4	100	64	37/2	3		
5	225	125	61/2	4	1/4	
6	441	216	91/2	5	1/4	0
7	784	343	127/2	6	1/4	0

由于五阶以上的差商全部为零，根据牛顿插值公式，得

$$P(n) = 1 + 8(n-1) + \frac{19}{2}(n-1)(n-2) + 3(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

整理，得

$$P(n) = 1 + (n-1)(8 + (n-2)(\frac{19}{2} + (n-3)(3 + (n-4)/4)))$$

$$= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 = [\frac{n}{2}(n+1)]^2$$

4. 设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是 $(n+1)$ 个互异的插值结点, $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, 而 $P(x)$ 为次数不超过 n 的多项式, 求证有理函数可分解为部分分式, 即

$$\frac{P(x)}{\omega(x)} = \sum_{j=0}^n \frac{A_j}{x-x_j}$$

其中, $A_0, A_1, \dots, A_n$ 都是常数。

证明: 以 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为插值结点, 构造 $P(x)$ 的插值函数。因为 $P(x)$ 是次数不超过 n 的多项式, 由插值余项定理知

$$P(x) = \sum_{j=0}^n l_j(x)P(x_j)$$

而

$$l_j(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}$$

所以

$$\frac{P(x)}{\omega(x)} = \frac{1}{\omega(x)} \sum_{j=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)} P(x_j) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{(x-x_j)} \frac{P(x_j)}{\omega'(x_j)}$$

记 $A_j = \frac{P(x_j)}{\omega'(x_j)}$ ($j = 0, 1, \dots, n$), 则 $A_0, A_1, \dots, A_n$ 都是常数, 且有

$$\frac{P(x)}{\omega(x)} = \sum_{j=0}^n \frac{A_j}{x-x_j}$$

5. 设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是 $(n+1)$ 个互异的插值结点, $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, 试证明 n 阶差商的函数值表达式

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$$

证明: 拉格朗日插值基函数可写为: $l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$, 由

$$L_n(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + \dots + l_n(x)f(x_n)$$

知, $L_n(x)$ 中 x^n 的系数为: $\sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$, 而牛顿插值公式中 x^n 的系数为 $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$,

由插值函数的唯一性知, 拉格朗日插值函数与牛顿插值函数相等。对比 x^n 的系数, 便有

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$$

三、问题

1. 在代数插值问题中, $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是 $(n+1)$ 个互异的插值结点, 由这 $(n+1)$ 个插值结点构造拉格朗日插值基函数

$$l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$$

试证明恒等式:

$$x_0^k l_0(x) + x_1^k l_1(x) + \dots + x_n^k l_n(x) = x^k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

2. 设 $f(x)$ 是 n 次多项式, 取 $(n+1)$ 个互异的插值结点 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 构造插值多项式 $P_n(x)$, 试证明恒等式: $f(x) = P_n(x)$ 。

3. 利用 $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{121} = 11$, 构造线性插值函数计算 $\sqrt{115}$ 的近似值, 估计近似值的误差并指出有效数位数。

6. 证明一阶差商的对称性: $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$, 进一步证明二阶差商的对称性。

7. 证明 n 阶差商 $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ 具有对称性, 即对于 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的任意一种排列 $x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$, 都有

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_n}]$$

8. 设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 是互异的插值结点, 记 $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$,

$$F_{nk}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j), \quad l_k(x) \text{ 为第 } k \text{ 个拉格朗日插值基函数, 试证明:}$$

$$(1) \quad \omega'_n(x_k) = F_{nk}(x_k); \quad (2) \quad l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)}$$

第六章 习题解答与问题

一、习题解答

1. 用最小二乘法求解超定方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 11 \\ 3x - 5y = 3 \\ x + 2y = 6 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

解: 超定方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

将方程两端同乘以系数矩阵的转置矩阵, 可得正规方程组

$$l_0(x) = 1 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \dots + \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)}$$

进一步分析其它的拉格朗日插值基函数的牛顿插值表达式。

11. 利用牛顿插值公式求 2 次幂和: $P(n) = \sum_{k=1}^n k^2$.

12. 已知函数 $f(x) \in C[-1, 1]$, 构造线性插值函数时, 利用切比雪夫结点做插值结点会使插值余项绝对值更小, 试求出区间 $[-1, 1]$ 上的切比雪夫结点。

13. 考虑三个插值条件构造 2 次埃尔米特函数的存在唯一性问题, 给定插值条件: $f(x_0)=y_0$, $f'(x_1)=m_1$, $f(x_2)=y_2$, 插值结点应满足什么条件能使插值问题有唯一解。

14. 构造带导数条件的二次插值多项式公式

(1) $f(0)=y_0$, $f(1)=y_1$, $f'(0)=m_0$;

(2) $f(0)=y_0$, $f(1)=y_1$, $f'(1)=m_1$;

第六章 习题解答与问题

一、习题解答

1. 用最小二乘法求解超定方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 11 \\ 3x - 5y = 3 \\ x + 2y = 6 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

解: 超定方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

将方程两端同乘以系数矩阵的转置矩阵, 可得正规方程组

将方程两端同乘以系数矩阵的转置矩阵, 可得正规方程组

$$\begin{bmatrix} 30 & 3 \\ 3 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 \\ 69 \end{bmatrix}$$

解之, 得 $x = 2.9774$, $y = 1.2259$ 。

2. 观测一个作直线运动的物体, 测得以下数据:

时间 t	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 S	0	10	30	50	80	110

在表中, 时间单位为秒, 距离单位为米。假若加速度为常数, 求这物体的初速度和加速度。

解: 设物体运动的初速度和加速度分别为 v_0 和 a , 初始时刻距离为 0, 则距离函数为

$$S(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

用后 5 个点的数据作曲线拟合

t	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
S	10	30	50	80	110

可得, $v_0 = 10.6576$, $a = 4.6269$

3. 用最小二乘法求一个形如 $y = A e^{Bx}$ 的经验公式, 使与下列数据相拟合

x	1	2	3	4
y	60	30	20	15

解: 令 $z = \ln y$, 则 $z = \ln A + Bx$ 。数据变换如下

x	1	2	3	4
$z = \ln y$	4.0943	3.4012	2.9957	2.7081

由最小二乘法作线性拟合得, $\ln A = 4.4409$, $B = -0.4564$ 。所以 $A = 84.8528$ 。故, 所求经验公式为 $y = 84.25 e^{-0.4564x}$ 。

4 已知实验观测数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, m$)。令

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

取拟合函数为

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x)$$

试利用曲线拟合的最小二乘法确定组合系数 a_0, a_1 (推导出计算公式)。

解: 记

$$\vec{\varphi}_0 = [\varphi_0(x_1) \quad \varphi_0(x_2) \quad \cdots \quad \varphi_0(x_m)]^T$$

$$\vec{\varphi}_1 = [\varphi_1(x_1) \quad \varphi_1(x_2) \quad \cdots \quad \varphi_1(x_m)]^T$$

$$\vec{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]^T$$

显然, $\vec{\varphi}_0$ 是元素全为“1”的列向量。将所有实验数据的 X 坐标代入拟合函数, 并令其分别等于实验数据的 Y 坐标值, 得超定方程组

$$\begin{bmatrix} \vec{\varphi}_0 & \vec{\varphi}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \vec{y}$$

将方程组两端同乘以矩阵 $[\vec{\varphi}_0 \quad \vec{\varphi}_1]^T$, 得正规方程组

$$\begin{bmatrix} (\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_0) & (\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_1) \\ (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_0) & (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{\varphi}_0, \vec{y}) \\ (\vec{\varphi}_1, \vec{y}) \end{bmatrix}$$

记 $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$, 由于系数矩阵中两个非对角元素为

$$(\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_1) = (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_0) = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^m x_i - m\bar{x} = 0$$

所以

$$a_0 = \frac{(\vec{\varphi}_0, \vec{y})}{(\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_0)}, \quad a_1 = \frac{(\vec{\varphi}_1, \vec{y})}{(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_1)}$$

5. 对某个物体的长度测量 n 次后, 得 n 个近似值 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 通常取平均值作为所求长度的值。试用最小二乘法原理说明其理由。

解: 利用最小二乘原理, 设物体的长度为 x , 记

$$\delta_k = x - x_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

则残差平方和为

$$S(x) = \sum_{k=1}^m (x - x_k)^2$$

为了求上面函数极小值，由极值必要条件，令 $S'(x) = 0$ ，得

$$\sum_{k=1}^m (x - x_k) = 0$$

由此得

$$x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k$$

6. 求 $f(x) = e^x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的三次最佳逼近多项式。

解：利用勒让德多项式作基函数，即 $P(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x)$ ，其中

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \\ p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

利用正交性，得系数为

$$a_n = \frac{(p_n, f)}{(p_n, p_n)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 p_n(x) f(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

而

$$\int_{-1}^1 p_0(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1}$$

$$\int_{-1}^1 p_1(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 x e^x dx = 2e^{-1}$$

$$\int_{-1}^1 p_2(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) e^x dx = e - 7e^{-1}$$

$$\int_{-1}^1 p_3(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) e^x dx = 37e^{-1} - 5e$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \times (e - e^{-1}) \approx 1.1752, \quad a_1 = \frac{3}{2} \times 2e^{-1} \approx 1.1036,$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \times (e - 7e^{-1}) \approx 0.3578, \quad a_3 = \frac{7}{2} \times (37e^{-1} - 5e) \approx 0.0705$$

所以，

$$P(x) = 1.1752 + 1.1036x + 0.3578\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + 0.0705\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) \\ = 0.9963 + 0.9978x + 0.5367x^2 + 0.1762x^3$$

7. 在著名的高次插值的龙格反例中， $f(x) = \frac{1}{5+x^2}$ 在区间 $[-5, 5]$ 上的 10 次拉格朗日插值出现振荡现象。为了使插值余项极小化，可以利用切比雪夫多项式的极性。试推导 11 次切比雪夫多项式零点所对应 $[-5, 5]$ 上的插值结点。

解：由 11 次切比雪夫多项式零点，得

$$x_k = 5 \cos\left(\frac{2k+1}{11} \frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 10)$$

二、例题

1. 已知实验数据如下:

X	1	2	3	4
Y	10	30	50	80

求二次多项式拟合函数 $P(x) = a + bx^2$

2. 利用数据表

t	-2	-1	0	1	2
y	y_{k-2}	y_{k-1}	y_k	y_{k+1}	y_{k+2}

构造五点二次拟合函数 $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ 时, 需求超定方程组的最小二乘解, 试列出超定方程组并导出对应的正规方程组 (不用求解正规方程组)。

$$\text{解: } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{k-2} \\ y_{k-1} \\ y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

其中, $b_1 = y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + y_{k+2}$, $b_2 = -2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2}$

$b_3 = 4y_{k-2} + y_{k-1} + y_{k+1} + 4y_{k+2}$

3.

练习题

1. 设B点是线段AC上的一点, 记AB长为 x_1 , BC长为 x_2 , 经测量得数据如下:

AB=15.5, BC=6.1, AC=20.9

试用最小二乘原理计算出 x_1 , x_2 的长度。

2. 求 a, b 使 $\int_0^{\pi/2} [ax + b - \sin x]^2 dx$ 最小。

3. 已知插值条件: $H(x_0)=y_0$, $H(x_1)=y_1$, $H'(x_1)=m_0$, $H(x_2)=y_2$, 为了求三次插值函数, 根据拉格朗日插值的思想, 写出的四个基函数满足的插值表, 并分别求出四个三次基函数。

习题七 习题解答与问题

一、习题解答

1. 对给定的结点 x_0, x_1 , 插值型求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

试证明: 求积系数为

$$A_0 = \frac{b-a}{x_1-x_0} \left(x_1 - \frac{a+b}{2} \right), \quad A_1 = \frac{b-a}{x_1-x_0} \left(\frac{a+b}{2} - x_0 \right)$$

证明:

$$A_0 = \int_a^b \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} dx = \frac{1}{x_1 - x_0} \left[(b-a)x_1 - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right] = \frac{b-a}{x_1 - x_0} \left(x_1 - \frac{a+b}{2} \right)$$

$$A_1 = \int_a^b \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \frac{1}{x_1 - x_0} \left[\frac{1}{2}(b^2 - a^2) - (b-a)x_0 \right] = \frac{b-a}{x_1 - x_0} \left(\frac{a+b}{2} - x_0 \right)$$

2. 确定下列求积公式中的待定参数, 使其代数精度尽可能高, 并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

$$(1) \int_{-h}^h f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h);$$

$$(2) \int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h);$$

$$(3) \int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)];$$

$$(4) \int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + ah^2[f'(0) - f'(h)]$$

解：(1) 将 $f(x)=1, x, x^2$ ，分别代入求积分式，并令其左、右相等

$$A_{-1} + A_0 + A_1 = 2h$$

$$-h(A_{-1} - A_1) = 0$$

$$h^2(A_{-1} + A_1) = 2h^2/3$$

解得 $A_{-1} = A_1 = \frac{1}{3}h, A_0 = \frac{4}{3}h$ ，所得求积公式至少具有 2 阶代数精度。又因为

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{h}{3}(-h)^3 + \frac{h}{3}h^3, \quad \int_{-1}^1 x^4 dx \neq \frac{h}{3}(-h)^4 + \frac{h}{3}h^4$$

故求积公式

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(-h) + 4f(0) + f(h)]$$

具有 3 阶代数精度。

(2) 将 $f(x)=1, x, x^2$ ，分别代入求积分式，并令其左、右相等

$$A_{-1} + A_0 + A_1 = 4h$$

$$-h(A_{-1} - A_1) = 0$$

$$h^2(A_{-1} + A_1) = 16h^3/3$$

解得， $A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}h, A_0 = -\frac{4}{3}h$ ，故求积公式

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \frac{8}{3}h[f(-h) - 4f(0) + f(h)]$$

至少有 2 阶代数精度。又因为

$$\int_{-2h}^{2h} x^3 dx = \frac{8}{3}h[(-h)^3 + h^3], \quad \int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{2^6 h^5}{5} \neq \frac{16h^5}{3} = \frac{8}{3}h[(-h)^4 + h^4]$$

故，所得求积公式具有 3 阶代数精度。

(3) 将 $f(x)=1$ 代入可知，求积公式准确成立。故将 $f(x)=x, x^2$ 代入公式并令其左、右相等，得

$$-1 + 2x_1 + 3x_2 = 0$$

$$1/3 + 2x_1^2/3 + 3x_2^2/3 = 2/3$$

得方程组

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

$$2x_1^2 + 3x_2^2 = 1$$

求解，得

$$x_1 = \frac{1 \mp \sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{15}$$

分别取 $x_1 = 0.6899$, $x_2 = -0.1266$, 或 $x_1 = -0.2899$, $x_2 = 0.5266$ 。故有

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(-1) + 2f(0.6899) + 3f(-0.1266)]$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(-1) + 2f(-0.2899) + 3f(0.5266)]$$

(4) 显然 $f(x) = 1$, x 准确满足求积公式。将 $f(x) = x^2$ 代入, 并令左、右两端相等, 得

$$\frac{1}{3} h^3 = \frac{h}{2} [0 + h^2] + ah^2 [0 - 2h]$$

整理并求解得 $a = 1/12$, 所以有求积公式

$$\int_0^h f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(0) + f(h)] + ah^2 [f'(0) - f'(h)]$$

容易验证, $f(x) = x^3$ 准确满足求积公式, 而将 $f(x) = x^4$ 代入知, 求积公式不能准确成立。故这一求积公式具有 3 阶代数精度。

3. 分别运用梯形公式、Simpson 公式、Cotes 公式计算积分 $\int_0^1 e^x dx$, 并估计各种方法的误差 (要求小数点后至少保留 5 位)。

解: 梯形公式: $\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{2} [e^0 + e] = 1.85914$

误差: $|R[e^x]| \leq \frac{1}{12} e^{\xi} \leq \frac{1}{12} e = 0.22652$

Simpson 公式: $\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{6} [e^0 + 4e^{0.5} + e] = 1.71888$

误差: $|R[e^x]| \leq \frac{1}{90 \times 2^5} e^{\xi} \leq \frac{1}{90 \times 2^5} e = 0.00094385$

Cotes 公式 (略)

4. 推导下列三种矩形求积公式

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$$

解: 将定积分转化为积分上限 (或积分下限) 函数

(1) 令 $F_1(x) = \int_a^x f(t) dt$, 显然 $F_1(a) = 0$, $F_1(b) = \int_a^b f(t) dt$ 。

利用泰勒中值定理, 有

$$F_1(b) = F_1(a) + (b-a)F_1'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} F_1''(\xi)$$

由于, $F_1'(a) = f(a)$, $F_1''(\xi) = f'(\xi)$ 。所以

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

(2) 令 $F_2(x) = \int_x^b f(t)dt$, 则 $F_2(b) = 0$, $F_2(a) = \int_a^b f(t)dt$ 。

利用泰勒中值定理

$$F_2(a) = F_2(b) + (a-b)F_2'(b) + \frac{(a-b)^2}{2} F_2''(\eta)$$

由于 $F_2'(b) = -f(b)$, $F_2''(\eta) = -f'(\eta)$ 。所以

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) - \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$$

(3) 由泰勒中值定理

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)$$

积分, 得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)dx$$

由积分第二中值定理

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)dx = f''(\gamma)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}f''(\gamma)(b-a)^3$$

故

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\gamma)}{24}(b-a)^3$$

5. 给定积分 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

(1) 利用复合梯形公式计算上述积分值, 使其截断误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$, 至少应把区间多少等分;

(2) 取同样的求积结点, 改用复合 Simpson 公式计算时, 截断误差是多少?

(3) 要求截断误差不超过 10^{-6} , 如果用复合 Simpson 公式计算, 应取多少个函数值?

解: 由于 $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xt)dt$, 所以

$$f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} \cos(xt)dt = \int_0^1 t^k \cos\left(xt + \frac{k\pi}{2}\right)dt$$

故

$$|f^{(k)}(x)| \leq \int_0^1 t^k |\cos\left(xt + \frac{k\pi}{2}\right)| dt \leq \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$$

(1) 对复合梯形公式, 有

$$|R[f]| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} |f''(\eta)| \leq \frac{1}{12n^2} \frac{1}{3}$$

为了使截断误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$, 只须 $18n^2 \geq 1000$, 解得 $n \geq 8$ 。故用复合梯形公式计算时取 8 等分即可。

(2) 将区间 $[0, 1]$ 8 等分, 改用复合 Simpson 公式, 由于 $h = 1/8 = 0.125$, 所以

$$|R[f]| \leq \frac{b-a}{180} h^4 |f^{(4)}(\eta)| \leq \frac{1}{180} \left(\frac{1}{8}\right)^4 \frac{1}{5} = 1/3686400 \approx 2.7127 \times 10^{-7}$$

(3) 为了使截断误差不超过 10^{-6} , 只须 $900n^4 \geq 1000000$, 解得 $n \geq 6$. 故用复合梯形公式计算时, 取 6 等分即可, 故应取 7 个函数值。

7. 用下列方法计算积分 $\int_1^3 \frac{1}{y} dy$

- (1) Romberg 算法;
- (2) 三点及五点 Gauss-Legendre 求积公式;
- (3) 将积分区间分成四等分, 用复合两点 Gauss 公式。

解: (1) 略

(2) 区间变换: $x = t + 2$, 得 $x_0 = 1.2255$, $x_1 = 2.0000$, $x_2 = 2.7745$

三点 Gauss-Legendre 求积公式

$$\int_1^3 \frac{1}{y} dy \approx 0.5556/1.2255 + 0.8887/2 + 0.5556/2.7745 = 1.0980$$

区间变换: $x = t + 2$, 得 $x_0 = 1.0939$, $x_1 = 1.4616$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2.5384$, $x_4 = 2.9061$,

五点 Gauss-Legendre 求积公式

$$\int_1^3 \frac{1}{y} dy \approx 0.2369/1.0939 + 0.4786/1.4616 + 0.5688/2 + 0.4786/2.5384 + 0.2369/2.9061 = 1.0985$$

(3) 略

9. 证明求积公式

$$\int_1^3 f(x) dx \approx \frac{1}{9} [5f(2 - \sqrt{3/5}) + 8f(2) + 5f(2 + \sqrt{3/5})]$$

具有 5 次代数精度。

证: 令 $x = t + 2$, 则

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(t+2) dt = \int_{-1}^1 f(x+2) dx$$

三阶 Legendre 多项式 $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ 的零点为

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

故, 以三个零点为求积结点, 构造插值型求积公式的系数

$$A_0 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx, \quad A_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx$$

经计算, 得

$$A_0 = \frac{5}{9}, \quad A_1 = \frac{8}{9}, \quad A_2 = \frac{5}{9}$$

所以求积公式

$$\int_1^3 f(x) dx \approx \frac{1}{9} [5f(2 - \sqrt{3/5}) + 8f(2) + 5f(2 + \sqrt{3/5})]$$

必具有 5 阶代数精度。

10 设 $\{\varphi_n(x)\}$ 是区间 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式序列, $x_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 为 $\varphi_{n+1}(x)$ 的零点, $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 为 Gauss 型求积公式。 $l_j(x) (j = 0, 1, \dots, n)$ 是以 $\{x_j\}$ 为结点的 Lagrange 插值基函数, 证明:

$$(1) \text{ 当 } 0 \leq k, l \leq n, k \neq l \text{ 时, } \sum_{j=0}^n A_j \varphi_k(x_j) \varphi_l(x_j) = 0;$$

$$(2) \int_a^b \rho(x) l_k(x) l_m(x) dx = 0;$$

$$(3) \sum_{k=0}^n \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \int_a^b \rho(x) dx$$

证: (1) 因为 $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 是 Gauss 型求积公式, 故对于次数不超过 $2n+1$ 的多项式均准确成立。由于 $\varphi_k(x) \varphi_l(x)$ 是 $k+l$ 次的多项式, $k+l \leq 2n$, 故对于 $\varphi_k(x) \varphi_l(x)$ 求积公式准确成立, 即有

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j \varphi_k(x_j) \varphi_l(x_j)$$

又由于 $k \neq l$ 时, 有 $\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0$, 因此

$$\sum_{j=0}^n A_j \varphi_k(x_j) \varphi_l(x_j) = 0 \quad (0 \leq k, l \leq n, k \neq l)$$

(2) $l_k(x), l_m(x)$ 是 n 次 Lagrange 插值基函数, 满足 $l_k(x_j) = \delta_{kj}, l_m(x_j) = \delta_{mj}$, 且 $l_k(x) l_m(x)$ 是 $2n$ 次多项式, 故

$$\int_a^b \rho(x) l_k(x) l_m(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j l_k(x_j) l_m(x_j)$$

当 $k \neq m$ 时, $l_k(x_j) l_m(x_j) = 0 (j = 0, 1, \dots, n)$, 因此

$$\int_a^b \rho(x) l_k(x) l_m(x) dx = 0$$

(3) 因求积公式是 Gauss 型的, 故对 $2n$ 次多项式 $l_k^2(x) (k = 0, 1, 2, \dots, n)$, 求积公式是精确的, 即有

$$\int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j l_k^2(x_j)$$

又因为 $l_k(x_j) = \delta_{kj}$, 所以

$$\int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = A_k > 0 (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

而当 $f(x) = 1$ 时, 求积公式准确成立, 有

$$\int_a^b \rho(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j$$

所以

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \int_a^b \rho(x) dx$$

二、例题

1. 取 $h=(b-a)/2$, 令 $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h=b$. 求证:

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx = 0$$

证: 引入变换 $x=a+th$, 则

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx = h^4 \int_0^2 t(t-1)(t-2)dt$$

令 $t=u+1$, 由于奇函数在对称区间上积分值为零, 故有

$$\int_0^2 t(t-1)(t-2)dt = \int_{-1}^1 (u+1)u(u-1)du = 0$$

所以 $\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx = 0$.

2. 对任意三次多项式 $P_3(x)$, 试证明: 用 Simpson 公式计算 $P_3(x)$ 的数值积分, 其求积误差

$$R[P_3(x)] = \int_a^b P_3(x)dx - \frac{b-a}{6} [P_3(a) + 4P_3(\frac{a+b}{2}) + P_3(b)] = 0$$

证: 设三次多项式为: $P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, 则 $P_3^{(3)}(x) = 6a_0$. 取 $h=(b-a)/2$, 令 $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h=b$. 则三点拉格朗日插值误差为:

$$R_3(x) = \frac{P_3^{(3)}(x)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

所以, 数值积分的求积误差为

$$R[P_3(x)] = \int_a^b \frac{6a_0}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx$$

利用前一题的结论, 上面积分为零. 故求积误差为零.

3. 设 D 平面多边形区域, 边界曲线为 Γ , 由曲线积分格林公式可得区域 D 的面积

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -ydx + xdy$$

其中 Γ 的方向为逆时针方向, 试证明任意多边形的面积公式

$$S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_{j+1} & y_{j+1} \end{vmatrix}$$

其中, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 为多边形的顶点, 秩序按逆时针方向排列, 且 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$.

证: 任取多边形的一条边 Γ_j , 起点坐标为 (x_j, y_j) , 终点坐标为 (x_{j+1}, y_{j+1}) , 则 Γ_j 的参数方程为

$$x = x_j + t(x_{j+1} - x_j), \quad y = y_j + t(y_{j+1} - y_j) \quad t \in (0, 1)$$

由于

$$\int_{\Gamma_j} -ydx = -(x_{j+1} - x_j) \int_0^1 [y_j + (y_{j+1} - y_j)t]dt$$

$$= -(x_{j+1} - x_j) \left[y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j) \right]$$

$$\int_{\Gamma_j} xdy = (y_{j+1} - y_j) \int_0^1 [x_j + (x_{j+1} - x_j)t]dt$$

$$= (y_{j+1} - y_j) \left[x_j + \frac{1}{2}(x_{j+1} - x_j) \right]$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{r_j} -y dx + x dy &= -(x_{j+1} - x_j)y_j + (y_{j+1} - y_j)x_j \\ &= x_j y_{j+1} - y_j x_{j+1} = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_{j+1} & y_{j+1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

即得计算公式。

4. 推导数值求导公式

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

的截断误差。

解：由 Taylor 级数，得

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \sum_{k=0}^4 \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + O(h^5) \\ f(x_0 - h) &= \sum_{k=0}^4 (-1)^k \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + O(h^5) \end{aligned}$$

两式相减，得

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_0) + O(h^4)$$

取 $2h$ 代替 h ，得

$$\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)}{4h} = f'(x_0) + \frac{4 \times h^2}{6} f^{(3)}(x_0) + O(h^4)$$

将前一式乘 4 减去第二式，整理得

$$\frac{8}{4h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{1}{4h} [f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h)] = 3f'(x_0) + O(h^4)$$

所以

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + O(h^4)$$

即该数值求导公式的截断误差为： $O(h^4)$

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有五阶连续导函数。取 $h = (b - a)/n$ ，令 $x_0 = a$ ， $x_j = a + jh$ 。

求证，下面计算数值导数的差分格式具有 4 阶精度

$$\frac{1}{6} [f'(x_{j-1}) + 4f'(x_j) + f'(x_{j+1})] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2h}$$

证：由 Taylor 展开式，得

$$\frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2h} = f'(x_j) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_j) + O(h^4)$$

而利用三阶导数的二阶中心差商，有

$$\frac{f'(x_{j+1}) - 2f'(x_j) + f'(x_{j-1}))}{h^2} = f^{(3)}(x_j) + O(h^2)$$

代入前式, 得

$$\frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2h} = f'(x_j) + \frac{h^2}{6} \frac{f''(x_{j+1}) - 2f''(x_j) + f''(x_{j-1}))}{h^2} + O(h^4)$$

整理, 得

$$\frac{1}{6}[f''(x_{j+1}) + 4f''(x_j) + f''(x_{j-1}))] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1}))}{2h} + O(h^4)$$

故, 所给差分格式具有 4 阶精度。

三、问题

1. 复合梯形公式与复合 Simpson 公式之间有如下关系

$$S_{2m} = \frac{1}{3}[4T_{2m} - T_m]$$

2. 利用两点 Hermite 插值公式推导带导数的数值积分公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + R[f]$$

其中, 求积余项为 $R[f] = \frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}(\eta)$ 。

3. 取 $h=(b-a)/3$, 令 $x_0=a$, $x_j=a+jh$ ($j=0, 1, 2, 3$)。利用两点插值公式求下面开型数值求积公式的系数 A_1 、 A_2

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

4. 给定 h , 记 $x_j = x_0 + jh$ 。求如下数值求导公式的截断误差

$$(1) f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$

$$(2) f'(x_2) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)]$$

$$(3) f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_1) - 36f(x_2) + 16f(x_3) - 3f(x_4)]$$

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有五阶连续导函数。取 $h=(b-a)/n$, 令 $x_0=a$, $x_j=a+jh$ 。求证, 下面数值二阶导数的差分格式具有 4 阶精度

$$\frac{1}{12}[f''(x_{j-1}) + 10f''(x_j) + f''(x_{j+1}))] = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{h^2}$$

习题八 习题解答与问题

一、习题解答

1. 取步长 $h = 0.2$, 用欧拉方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y - xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 0.6)$$

解: 由 $f(x, y) = -y - xy^2$, 欧拉公式为

$$y_{n+1} = y_n + h[-y_n - x_n y_n^2]$$

即

$$y_{n+1} = (1 - h)y_n - h x_n y_n^2$$

由 $y_0 = 1$ 计算, 得

$$y_1 = 0.8, \quad y_2 = 0.6144, \quad y_3 = 0.4613$$

2. 用梯形公式解初值问题

$$\begin{cases} y' = 8 - 3y \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad (1 \leq x \leq 2)$$

取步长 $h = 0.2$, 小数点后至少保留 5 位.

解: 由 $f(x, y) = 8 - 3y$, 梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + 0.5h[(8 - 3y_n) + (8 - 3y_{n+1})]$$

将 $h = 0.2$ 代入并整理, 得

$$y_{n+1} = \frac{7}{13}y_n + \frac{16}{13}$$

由 $y_0 = 2$ 计算, 得

$$y_1 = 2.30769, \quad y_2 = 2.47337, \quad y_3 = 2.56258, \quad y_4 = 2.61062, \quad y_5 = 2.63649$$

3. 用改进的欧拉公式计算初值问题

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}y^2 \\ y(1) = 0.5 \end{cases} \quad (1 < x < 1.5)$$

取步长 $h = 0.1$, 并与精确解 $y(x) = \frac{x}{1+x}$ 比较.

解: 改进的 Euler 公式为

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h \frac{y_n(1 - y_n)}{x_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.5h \left[\frac{y_n(1 - y_n)}{x_n} + \frac{\tilde{y}_n(1 - \tilde{y}_n)}{x_{n+1}} \right]$$

由 $y_0 = 0.5$ 计算得

	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y_n	0.5000	0.5238	0.5455	0.5653	0.5834	0.6001
$y(x_n)$	0.5000	0.5238	0.5455	0.5652	0.5833	0.6000
$y_n - y(x_n)$	0	0.2570×10^{-4}	0.4503×10^{-4}	0.5962×10^{-4}	0.7066×10^{-4}	0.7902×10^{-4}

4. 写出用梯形公式求解初值问题

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的计算格式, 取步长 $h = 0.1$, 并求 $y(0.2)$ 的近似值, 要求迭代误差不超过 10^{-5} .

解: 由梯形公式为: $y_{n+1} = y_n - \frac{h}{2}[y_n + y_{n+1}]$, 故计算格式为

$$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h} y_n$$

故, $y_1 = 0.9048$, $y_2 = 0.8186$.

5. 试建立求解初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = a \end{cases}$$

的如下差分格式:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$$

解: 利用线性插值公式, 得

$$f(x, y) \approx \frac{1}{h}[(x_n - x)f_{n-1} + (x - x_{n-1})f_n]$$

积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx &\approx \frac{1}{h} \left[\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_n - x) dx f_{n-1} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-1}) dx f_n \right] \\ &= h \left[-\frac{1}{2} f_{n-1} + \frac{3}{2} f_n \right] \end{aligned}$$

所以, 有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$$

6. 对初值问题

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

证明用梯形公式所求得的近似解为

$$y(nh) \approx y_n = \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^n \quad (x = nh)$$

证明当 $h \rightarrow 0$ 时, 它收敛于精确解 e^{-x} .

证明: 由梯形公式, 得

$$y_{n+1} = y_n - \frac{h}{2}[y_n + y_{n+1}]$$

所以

$$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h} y_n$$

故

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^n y_0 = \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^n$$

由于

$$\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = \left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h} \cdot \frac{2}{2+h}} = \left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h} x_n \frac{2}{2+h}}$$

利用极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$$

得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{2h} x_n \frac{2}{2+h}} = e^{-x_n}$$

即, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 它收敛于精确解 e^{-x}

7. 写出用四阶经典龙格-库塔方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 8 - 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的计算公式, 取步长 $h = 0.2$, 并计算 $y(0.4)$ 的近似值, 小数点后至少保留 4 位.

8. 证明公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{9}(2K_1 + 3K_2 + 4K_3), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1), \\ K_3 = f(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hK_2). \end{cases}$$

至少是三阶方法.

证: 只须证明公式的局部截断误差为 $O(h^4)$ 即可.

容易验证

$$\begin{aligned} y''(x_n) &= f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)y'(x_n) \\ y'''(x_n) &= f_{xx}(x_n, y_n) + 2f_{xy}(x_n, y_n)y'(x_n) + f_{yy}(x_n, y_n)[y'(x_n)]^2 \\ &\quad + f_y(x_n, y_n)y''(x_n) \end{aligned}$$

于是

$$K_1 = f(x_n, y_n) = y'(x_n)$$

$$K_2 = y'(x_n) + \frac{h}{2}y''(x_n) + \frac{h^2}{8}y'''(x_n) - \frac{h^2}{8}y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^3)$$

$$\begin{aligned} K_3 &= y'(x_n) + \frac{3}{4}hy''(x_n) + \frac{3}{4}\frac{h^2}{2}y'''(x_n)f_y(x_n, y_n) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}h\right)^2y'''(x_n) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}h\right)^2y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^3) \end{aligned}$$

所以

$$\frac{h}{9}(2K_1 + 3K_2 + 4K_3) = hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) + \frac{1}{6}h^3y'''(x_n) + O(h^4)$$

故

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(x_n) + O(h^4)$$

而

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(x_n) + O(h^4)$$

比较两式，知公式的局部截断误差至少是四阶，因此该公式至少是三阶方法。

9. 证明

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(4y_n - y_{n-1}) + \frac{2}{3}hy'_{n+1}$$

是二阶公式。

证：由于 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - \frac{1}{3}(4y_n - y_{n-1}) - \frac{2}{3}hy'_{n+1}$ ，由 Taylor 展开式，得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

$$y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + O(h^2)$$

代入局部截断误差表达式，得

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{2}{3}hy'(x_n) + \frac{2}{3}h^2 y''(x_n) - \frac{2}{3}hy'_{n+1} + O(h^3)$$

即

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{2}{3}hy'(x_{n+1}) - \frac{2}{3}hy'_{n+1} + O(h^3)$$

10 就初值问题 $y' = ax + b$ ， $y(0)=0$ 导出改进欧拉方法的近似解的表达式，并与准确解

$y = \frac{1}{2}ax^2 + bx$ 相比较。

解：由改进欧拉方法

$$y_{n+1} = y_n + 0.5h [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

得

$$y_{n+1} = y_n + 0.5h [(ax_n + b) + (ax_{n+1} + b)]$$

将 $x_n = nh$ 代入，得

$$y_{n+1} = y_n + 0.5h [a(2n+1)h + 2b] = y_n + 0.5a(2n+1)h^2 + bh$$

对上式两端做求和运算

$$\sum_{n=0}^{N-1} y_{n+1} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n + 0.5ah^2 \sum_{n=0}^{N-1} (2n+1) + b(Nh)$$

化简，并注意 $y(0)=0$ ，得

$$y_N = 0.5ah^2[(N-1)N + N] + b(Nh)$$

所以

$$y_N = 0.5ah^2N^2 + b(Nh) = 0.5a(x_N)^2 + b(x_N)$$

即

$$y_n = \frac{1}{2}ax_n^2 + bx_n, \quad y(x_n) = \frac{1}{2}ax_n^2 + bx_n$$

所以，改进欧拉公式所得数值解与原问题的解析解相同。

11. 证明线性多步法

$$y_{n+1} + (b-1)y_n - by_{n-1} = \frac{1}{4}h[(b+3)f_{n+1} + (3b+1)f_{n-1}]$$

当 $b \neq 1$ 时方法为二阶的，当 $b = -1$ 时方法为三阶的。

证：由于

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - [(1-b)y_n + b y_{n-1} + 0.25 h(b+3)f_{n+1} + (3b+1)f_{n-1}]$$

将 Taylor 展式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_n) + O(h^4)$$

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) - \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_n) + O(h^4)$$

$$y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y'''(x_n) + O(h^3)$$

$$y'(x_{n-1}) = y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y'''(x_n) + O(h^3)$$

代入局部截断误差表达式，注意到 $y(x_n) = y_n$ 和 $y(x_{n-1}) = y_{n-1}$ ，得

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{1}{3}(b+1)h^3 y'''(x_n) + O(h^4)$$

故，当 $b \neq 1$ 时方法为二阶的，当 $b = -1$ 时方法为三阶的。

12. 用经典四阶龙格-库塔方法计算初值问题

$$\begin{cases} y' = -20y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

试分析当步长分别取 $h=0.1$ 及 $h=0.2$ 时，计算的稳定性。

解：由于 $f(x, y) = -20y$ ，所以

$$K_1 = -20y_n$$

$$K_2 = -20(y_n + 0.5 \times h K_1) = -20y_n + 200 h y_n$$

$$K_3 = -20(y_n + 0.5 \times h K_2) = -20y_n + 200 h y_n - 2000h^2 y_n$$

$$K_4 = -20(y_n + h K_3) = -20y_n + 400 h y_n - 4000h^2 y_n + 40000h^3 y_n$$

所以，四阶龙格-库塔方法为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 \\ &= (1 - 20h + 200h^2 - 4000h^3/3 + 20000h^4/3) y_n \end{aligned}$$

当步长分别取 $h=0.1$ 及 0.2 时，分别计算

$$(1 - 20h + 200h^2 - 4000h^3/3 + 20000h^4/3) = 0.3333$$

$$(1 - 20h + 200h^2 - 4000h^3/3 + 20000h^4/3) = 5$$

所以，步长取 $h=0.1$ 时稳定，而步长取 $h=0.2$ 时不稳定。

二、例题

1. 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的计算问题可化为初值问题： $y' = f(t)$, $y(a) = 0$ 。证明：欧拉公式

计算结果为复合左矩阵公式： $y(b) \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)h$ 。

证：取 $h=(b-a)/n$, $t_k = a + kh$, ($k=0, 1, \dots, n$)。由欧拉公式，得

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k) \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

求和，得

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k + h \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)$$

化简即得

$$y(b) \approx y_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)h$$

2. 1926 年荷兰数学家范德堡(van der Pol)构造了研究无线电热离子振荡器性态的模型

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

其中 μ 是正的物理常数，这是电路理论中用到的非线性微分方程。如果引入新变量

$$y_1 = y, \quad y_2 = y' + \mu\left(\frac{y^3}{3} - y\right)$$

可以将范德堡方程化为一阶常微分方程组的形式。试利用新变量推导一阶常微分方程组。

解：对引入的新变量求导数，得

$$y_1' = y', \quad y_2' = y'' + \mu(y^2 - 1)y'$$

代入原微分方程 $y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$ ，得

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - \mu(y_1^3 - 3y_1) \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

3. 道森(Dawson)积分是一个积分上限函数

$$f(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt$$

试找出 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系，将求该函数值的计算转化为一个常微分方程初值问题

解：令 $y = f(x)$ ，则将 $f(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt$ 两端对自变量求导数可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt + \exp(-x^2) \exp(x^2) \\ &= -2xf(x) + 1 \end{aligned}$$

由定积分性质，显然有 $f(0)=0$ 。所以，函数 $y = f(x)$ 满足常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = 1 - 2xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4. 常微分方程两点边值问题如下

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= e^x (\sin x - 2 \cos x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0) &= 0, \quad u(\pi) = 0 \end{aligned}$$

取正整数 n , 令 $h = \frac{\pi}{n+1}$, $x_j = jh$, ($j = 0, 1, \dots, n+1$). 记 $f(x) = e^x(\sin x - 2\cos x)$ 。

试利用二阶导数的四阶精度差分格式

$$\frac{1}{12}[u''(x_{j-1}) + 10u''(x_j) + u''(x_{j+1})] = \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1}))}{h^2}$$

推导出求常微分方程数值解的三点差分格式

$$\begin{aligned} -(12 - h^2)u_{j-1} + (24 + 10h^2)u_j - (12 + h^2)u_{j+1} &= h^2(f_{j-1} + 10f_j + f_{j+1}) \\ (j &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

解：将微分方程在三个点上取值，得

$$-u''(x_{j-1}) + u(x_{j-1}) = f(x_{j-1})$$

$$-u''(x_j) + u(x_j) = f(x_j)$$

$$-u''(x_{j+1}) + u(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$$

将第一式乘 1/12，第二式乘 10/12，第三式乘 1/12 相加，得

$$-\frac{1}{h^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{12}(u_{j-1} + 10u_j + u_{j+1}) = \frac{1}{12}(f_{j-1} + 10f_j + f_{j+1})$$

整理，即得

$$-(12 - h^2)u_{j-1} + (24 + 10h^2)u_j - (12 + h^2)u_{j+1} = h^2(f_{j-1} + 10f_j + f_{j+1})$$

5. Adams公式是求一阶常微分方程 $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的多步法中较简单格式，推导

下面两步显格式和隐格式

$$(1) \quad y_{n+2} = y_{n+1} + h[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)]/2;$$

$$(2) \quad y_{n+2} = y_{n+1} + h[5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)]/12$$

解：(1) 在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上对函数 $f(x, y)$ 做线性插值，得

$$f(x, y) \approx \frac{1}{h}[(x_{n+1} - x)f_n + (x - x_n)f_{n+1}]$$

积分，得

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x, y)dx \approx \frac{1}{h}f_n \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x_{n+1} - x)dx + \frac{1}{h}f_{n+1} \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x - x_n)dx$$

引入变换， $x = x_{n+1} + th$ ，得

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x_{n+1} - x)dx = -h^2 \int_0^1 t dt = -h^2 / 2$$

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x - x_n)dx = h^2 \int_0^1 (t + 1)dt = 3h^2 / 2$$

所以

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x, y) dx \approx -\frac{1}{2} h f_n + \frac{3}{2} h f_{n+1}$$

将微分方程 $y' = f(x, y)$ 积分

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} y'(x) dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x, y) dx$$

得

$$y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) \approx h(3f_{n+1} - f_n)/2$$

由此得

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)]/2$$

(2) 在区间 $[x_n, x_{n+2}]$ 上对函数 $f(x, y)$ 做二次插值, 得

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2h^2} [B_n(x)f_n - 2B_{n+1}(x)f_{n+1} + B_{n+2}(x)f_{n+2}]$$

其中,

$$B_n(x) = (x - x_{n+1})(x - x_{n+2})$$

$$B_{n+1}(x) = (x - x_n)(x - x_{n+2})$$

$$B_{n+2}(x) = (x - x_n)(x - x_{n+1})$$

引入变换, $x = x_{n+1} + th$, 积分得

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} B_n(x) dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x - x_{n+1})(x - x_{n+2}) dx = h^3 \int_0^1 t(t-1) dt = -h^3/6$$

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} B_{n+1}(x) dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x - x_n)(x - x_{n+2}) dx = h^3 \int_0^1 (t^2 - 1) t dt = -2h^3/3$$

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} B_{n+2}(x) dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x - x_n)(x - x_{n+1}) dx = h^3 \int_0^1 (t+1)t dt = 5h^3/6$$

所以

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} [B_n(x)f_n - 2B_{n+1}(x)f_{n+1} + B_{n+2}(x)f_{n+2}] dx \approx \frac{h^3}{6} [5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n]$$

将微分方程 $y' = f(x, y)$ 积分

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} y'(x) dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x, y) dx$$

得

$$y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) \approx h(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)/12$$

由此得

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h[5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)]/12$$

三、问题

1. 初值问题 $\begin{cases} y' = ax + b & x > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 有解 $y(x) = 0.5ax^2 + bx$ 。若取: $x_n = nh$, y_n 为欧拉方法得到的数值解。试证明

$$y(x_n) - y_n = 0.5 a h x_n$$

2. 对于函数 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, 试设计一个算法, 用四阶龙格—库塔公式计算出该函数在 $[0, 3]$ 区间上的 31 个等距点处的函数值。

3. 当用四阶龙格—库塔公式计算某些特殊类型的常微分方程初值问题时, 会有简单的计算公式出现, 试推导出计算下面两种类型的常微分方程初值问题特殊公式

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x) ; \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

4. 将线性常系数非齐次高阶常微分方程初值问题

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + a_{n-1} y^{(n-2)} + \cdots + a_0 y = f(x)$$

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y^{(k)} = \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

转化为一阶线性常微分方程组问题，并写出矩阵形式。

5. 写出用修改的欧拉法求问题

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x & 0 \leq x \leq 3 \\ y(0) = 0, y'(0) = -0.5 \end{cases}$$

的计算格式。

绵阳师范学院论坛 www.mnubbs.cn