$\mathcal{W}$- 无穷型李代数的表示和 Hamilton 型李双代数

摘要

我们知道 $\mathcal{W}$- 无穷李代数 $\mathcal{W}_{1+\infty}, \mathcal{W}_{\infty}$ 由于在共形场论、量子场论等物理方面的广泛应用变得非常重要. 广义 $\mathcal{W}$- 无穷型 (广义 Weyl- 型) 李代数, 由于它是无限维李代数, 所以研究它的表示变得困难了许多. 我们知道近年来出现了不少对 Cartan 型单 Lie 代数进行推广的文章, 而其中非常重要的 Witt 代数可以看成是 $\mathcal{W}$- 无穷型李代数的子代数. 所以 $\mathcal{W}$- 无穷型李代数的重要性不言而喻.

与顶点代数相连的李代数或由共形代数生成的李代数一般是 (非有限的) Γ- 阶化 (即阶化空间是无限维的) 非线性的李代数, 这里 Γ 是一个加法群. 我们知道, 顶点算子代数是数学物理中共形场论和统计力学中至关重要的代数结构, 决定这些代数的李代数结构一般是 Γ- 阶化的. 由共形代数生成的李代数一般也是 Γ- 阶化的. 从代数的角度看, 量子场论就是由共形代数生成的李代数的表示. 无限维非阶化李代数也很自然的出现在 Hamilton 算子理论中, 并且在数学物理中起着重要的作用. 因此, 研究它们的拟有限表示自然是一件重要的工作.

在非有限阶化 Lie 代数的研究方面, N. Kawamoto, J.M. Osborn, D.Z. Dokovic, Passman, D.A. Jordan, 苏育才、赵开明、徐晓平等做了大量的工作. 特别值得一提的是, 徐晓平利用导子单结合代数及局部有限导子构造了广义 Cartan 型的四族代数 (参见 [9]). 关于这方面的研究, 正受到越来越多的人的关注.

李超代数是上个世纪由物理学家首先提出来的概念. V.G.Kac 在上个世纪 70 年代中发表的一系列文章中, 给出了典型李超代数的分类的同时, 提出了一系列重要问题, 它们是李超代数基本而又最重要的问题. 如典型李超代数的有限维不可约模的分类, 有限维模的完全可约性, 不可约模的特征标公式, 不可约模的分类等问题, 但这些问题至今尚未得到完全彻底解决 (除某些特殊的李超代数外). 而无限维李超代数的表示是一个更困难的问题. 苏育才教授在这方面做了一些有益的尝试, 如文献 [1]. 典型李超代数的上同调是 Bott-Borel-Weil 理论及李超代数的 Kazhdan-

Lusztig 理论的重要内容.

本论文共分四部分，第一部分讨论了广义 $\mathcal{W}$- 无穷代数的 Verma 模. 第二部分，研究了拟有限 $\mathcal{W}_\infty$- 模的分类. 第三部分，我们计算了矩阵李超代数的 2- 上同调群. 第四部分确定了广义 Hamilton 型李双代数的结构.

关键词. 广义 $\mathcal{W}$- 无穷型 Lie 代数，广义 Weyl 型 Lie 代数，广义 Witt 型 Lie 代数，导子代数， 2- 上同调群， Lie 双代数， Yang-Baxter 方程

REPRESENTATIONS OF LIE ALGEBRAS OF $\mathcal{W}$-INFINITY TYPE AND LIE BIALGEBRAS OF HAMILTON TYPE

ABSTRACT

It is well-known that the Lie algebras of $\mathcal{W}$-infinity type (or Weyl type) such as $\mathcal{W}_{1+\infty}$, $\mathcal{W}_{\infty}$, become more and more important because of their applications to various physical theories such as conformal field theory, the theory of the quantum Hall effect, etc. The study of the representation theory of Lie algebras of this kind is important and difficult since its dimension is infinite. In recent years, there appeared many papers on the simple Lie algebras of generalized Cartan type. As we can see, the Lie algebra of Witt type can be considered a subalgebra of the Lie algebra of $\mathcal{W}$-infinity type, so the Lie algebra of $\mathcal{W}$-infinity type is very important.

The algebras which associated with vertex algebras and comformal algebras are in general (not finitely) Γ-graded (i.e., the grading subspaces are infinite dimensional) and nonlinear. The vertex algebras are important Lie algebraic structures in comformal field theory and statistic mechanics in mathematics and physics. These algebraic structures are usually determined by Γ-graded Lie algebras. The Lie algebras generated by comformal algebras are also in general Γ-graded. The quantum field theories are representations of Lie algebras generated by comformal algebras from the algebraic point of view. The infinite dimentional Γ-graded Lie algebras also play important roles in Hamiltonian operator theory. Therefore it is an important task to study the classification of quasifinite modules.

Many progresses have been obtained by D.Z. Dokovic, N. Kawamoto, D.A. Jordan, J.M. Osborn, Passman, Yucai Su, Kaiming Zhao and Xiaoping Xu and others in the field of Γ-graded Lie algebras. It is worth mentioning that using derivation-simple algebras and locally finite derivations, Xu was able to construct four families of Lie algebras of generalized Cartan type [9].

It is well known that the notion of Lie superalgebra was first defined by physicist in the last century. The classical Lie superalgebras was classified by V.G. Kac in 70's of the last century. He also raised many open problems in his papers. And these problems are very fundamental and important for Lie superalgebras, such as the character formulas for irreducible modules, the classification of irredcible modules, the completely reducibility of finite dimentional modules, etc. These problems are not completely solved yet (except some special Lie superalgebras). The representations of infinite dimentional Lie superalgebras are more difficult problems. Yucai Su gave some contribution in this field, for example the paper [1]. The cohomology of classical Lie superalgebras is the central problem in the theory of Bott-Borel-Weil and Kazhdan-Lusztig.

The present paper includes four parts. In the first part we discuss the Verma modules over generalized $\mathcal{W}$-infinity algebras. In the second part we study the classification of quasifinite $\mathcal{W}_\infty$-modules. In the third part we calculate 2-Cocycles on Lie superalgebras of matrices. In the fourth part, the Lie bialgebra structures on the Lie algebras of generalized Hamiltonian type was determined.

KEY WORDS Lie algebra of generalized $\mathcal{W}$-infinity type, Lie algebra of generalized Weyl type, Lie algebra of generalized Witt type, Derivation algebra, 2-cocycle group, Lie bialgebra, Yang-Baxter-Equation

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果．除论文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或者集体已经发表或撰写过的作品成果．对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明．本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担．

学位论文作者签名：辛斌

日期： 2006 年 5 月 7 日

上海交通大学
学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印和电子版，允许论文被查阅和借阅．本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印、或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文．

保密 □，在 __ 年解密后适用本授权书．

本学位论文属于

不保密 ☑．

(请在以上方框内打"√")

学位论文作者签名：辛斌　　　　指导教师签名：苏育才

日期：2006 年 5 月 7 日　　　　日期：2006 年 5 月 7 日

第零章 绪论

§0.1 背景及相关结果介绍

近些年来由于无限维非阶化李代数的广泛应用，越来越多的受到李代数界的关注. 设 $\mathbb{F}$ 是一个代数闭域， $A_n^{\pm} = \mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}]$ 是 n 个变元的 Laurent 多项式环. 设 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, 1 \leq i \leq n$, 则秩 n 的 Weyl- 型代数是结合代数 $A_n = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}, \partial_1, \cdots, \partial_n]$, 有时也称为复数域上的微分算子代数. 广义 Weyl- 型代数是 Weyl- 型代数的推广. 令 Γ 为 $\mathbb{F}^n$ 的加法子群，设 $\mathbb{F}[\Gamma] = \mathrm{span}\{t^\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ 是一个群代数，有关系式 $t^\alpha \cdot t^\beta = t^{\alpha+\beta}$. 定义齐次导子 $D_i : t^\alpha \mapsto \alpha_i t^\alpha$, 广义 Weyl- 型代数是张量空间

$$A(\Gamma, n) = \mathbb{F}[\Gamma] \otimes \mathbb{F}[D_1, ..., D_n] = \mathrm{span}\{t^\alpha D^\mu \mid \alpha \in \Gamma,\, \mu \in \mathbb{Z}_+^n\},$$

具有运算:

$$(t^\alpha D^\mu) \cdot (t^\beta D^\nu) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^n} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \beta^\lambda t^{\alpha+\beta} D^{\mu+\nu-\lambda},$$

考虑它的换位运算:

$$[t^\alpha D^\mu, t^\beta D^\nu] = (t^\alpha D^\mu) \cdot (t^\beta D^\nu) - (t^\beta D^\nu) \cdot (t^\alpha D^\mu),$$

则有广义 Wely- 型李代数 $\mathcal{W}(\Gamma, n)$. 在文献 [19] 中苏育才证明了 $\mathcal{W}(\Gamma, n)$ 有非平凡的中心扩张当且仅当 $n = 1$.

显然 $\mathcal{W}(\Gamma, n)$ 是一个 Γ- 阶化李代数，可写成

$$\mathcal{W}(\Gamma, n)_\alpha = \mathrm{span}\{t^\alpha D^\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}_+^n \backslash \{0\}\} \quad \text{for} \quad \alpha \in \Gamma.$$

$\mathcal{W}(\Gamma, n)$ 的阶化表示是指表示空间 V 具有和 $\mathcal{W}(\Gamma, n)$ 相同的阶化，且满足关系式 $\mathcal{W}(\Gamma, n)_\alpha \cdot V_\beta \subseteq V_{\alpha+\beta}$.

我们知道， $\mathcal{W}(\Gamma, n)$ 有非平凡的泛中心扩张的充要条件是 $n = 1$. 而 $\mathcal{W}(\Gamma, 1)$ 的泛中心扩张 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma, 1)$ 就是著名的 $\mathcal{W}$- 无穷代数 (特别地， $\mathcal{W}_{1+\infty} = \widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z}, 1)$). 正象 V.G. Kac 指出的那样，考虑 $\mathcal{W}(\Gamma, n)$, $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma, 1)$ 的拟有限表示不是一个平凡问题.

令 $A_n^{\pm}=A_1$ 是 n 个变元的 Laurent 多项式代数， $D_1=\langle\partial_{t_i}|i=1,\cdots,n\rangle$ 为 n 个偏导子张成的有限维的导子空间. 则二元组 (A_1,D_1) 是构成四类 Cartan 型李代数的基本组成部分，称 ∂_{t_i} 为降阶化导子. 上个世纪 80 年代 Kawamoto 在文献 [2] 中，从二元组 (A_2,D_2) 出发，构造了广义 Witt- 型的李代数，其中， $A_2=\mathbb{F}[\Gamma]=\langle x^\alpha|\alpha\in\Gamma\rangle$ 为 Γ 的群代数， Γ 为 $\mathbb{F}^n$ 的加法子群， $D_2=\langle\partial_i^*|i=1,\cdots,n\rangle,\partial_i^*$ 为 A_2 的导子，满足 $\partial_i^*(x^\alpha)=\alpha_i x^\alpha,\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\Gamma$, 称 ∂_i^* 为阶化导子.

Osborn 在 1996 年发表的文章 [5] 中，利用二元对 $(A_1\otimes A_2,D_1\otimes D_2)$ 构造了新的广义 Cartan 型单李代数. Dokovick 和赵开明通过确定特定的子代数，在文献 [4] 中推广了上述结果. Jordan(1996,2000 年 [11, 12]) 以及 Passman (1998 年 [32]) 证明了：若 A 是一个具有单位元的交换结合代数， D 为 A 的交换导子组成的空间，则广义 Witt- 型李代数 $AD=A\otimes D$ 是单的充分必要条件是： A 是 D 单的，并且 AD 在 A 上的作用是忠实的.

徐晓平在 [9](2000 年) 中，构造了新的广义 Cartan 型单李代数，构成它的二元组 (A,D) 中， $A=A_1\otimes A_2$ 是一个半群代数，而它的导子空间扩充为由三种类型的导子组成，分别是阶化导子、降阶化导子和混合导子.

苏育才和赵开明构造了广义 Weyl- 型单李代数，苏育才和周建华在 [42] 中，苏育才在 [72] 中，分别构造了不同的新的广义 Cartan- 型单李代数. 苏育才、徐晓平、张贺春对 (A,D) 进行了分类，给出了广义 Witt- 型 Lie 代数的同构空间，这样广义 Witt- 型单 Lie 代数的种类就完全清楚了. 苏育才和赵开明还给出了广义 Weyl- 型李代数的同构空间. 苏育才对广义 Witt- 型李代数和广义 Weyl- 型李代数进行了进一步研究，给出了它们的导子代数， 2- 上同调群等，并推广了他们的一些结果. 另外，苏育才还在无限维 Lie 代数表示方面做了一些有益的尝试，如关于 $sl(2/1)$ 的无限维不可分解模的一些结果 (参看文献 [1]).

§0.2 本文的主要工作

李代数的表示是李代数理论中的最重要问题之一. 对于无穷维李代数的来说，研究它的表示则是非常困难但却又非常有趣的一件事情. 众所周知无穷维广义 W-无穷型李代数在物理中有重要应用，因此，研究它的表示是有意义的. 对于无穷维李代数的表示来说，它的 Verma- 模和拟有限表示是近几年大家都很关心的事情. 研究系数在超结合代数中的矩阵李代数结构，也是最近大家都很关注的问题，我们知道研究李代数的 2- 上循环群是研究李代数结构的重要内容，对于系数在李代数中的矩阵李代数也是一样. 本文作者在对无穷维广义 W- 无穷型李代数深入研究后得到下面结果：

定理 1.1.1 *令 $\Lambda \in \widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z})_0^*$. 对于 $\mathcal{W}$- 无穷代数 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 来说，下面的陈述是等价的：*

(1) *Verma $\mathcal{W}_{1+\infty}$- 模 $M(\Lambda)$ 是可约的 (参见 (1.2.5)).*
(2) *由 (1.3.2) 定义的抛物子代数 $\mathcal{P}$ 的 -1 次阶化子空间是非零的，即 $\mathcal{P}_{-1} \neq 0$ (参见 (1.3.4)).*
(3) *由 (1.3.6) 定义的生成序列 $F(x)$ 是拟多项式.*
(4) *不可约最高权 $\mathcal{W}_{1+\infty}$- 模 $L(\Lambda)$ 是拟有限的.*

定理 1.1.2

(1) *令 $\Lambda \in \widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)_0^*$. 假设 Γ 的序 (order) $\prec$ 是稠密的 (dense) (参见 (1.2.9)). 那么 Verma 模 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$- 模 $M(\Lambda, \prec)$ 是不可约的当且仅当 $\Lambda \neq 0$. 进一步，如果 $\Lambda = 0$, 则子空间*

$$M'(0,\prec) := \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k \in \Gamma_+,\, k>0} L_{-\alpha_1,i_1} L_{-\alpha_2,i_2} \cdots L_{-\alpha_k,i_k} v_0,$$

是 $M(0,\prec)$ 的一个不可约子模当且仅当对所有的 $\alpha, \beta \in \Gamma_+$ 一定存在一个正整数 n 使得 $\alpha \prec n\beta$.

(2) *如果 Γ 的序 $\prec$ 是离散的 (discrete)(见 (1.2.10)), 则 Verma $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$- 模 $M(\Lambda, \prec)$ 是不可约的当且仅当 $\widehat{\mathcal{W}}(a\mathbb{Z})$- 模 $M_a(\Lambda, \prec)$ (参见. (1.2.11), (1.2.12)) 是不可约的.*

定理 2.1.1. (i) *$\mathcal{W}(\mathbb{Z},1)^{(1)}$ 或者 $\mathcal{W}_\infty = \widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z},1)^{(1)}$ 的不可约拟有限模是最高 (低) 权模或者是中间序列模.*

(ii) 如果 Γ 与 $\mathbb{Z}$ 不同构，则一个不可约拟有限 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 或者 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,1)^{(1)}$- 模是中间序列模.

因为在文献 [128] 中已经有了拟有限最高权模的完整详尽的描述，而最低权模是最高权模的对偶情形，所以定理 2.1.1 加上上述结果实际上给出了拟有限模的完全分类，而且定理 2.1.1 还给出了结合代数 $\mathcal{A}(\Gamma,n)^{(1)}$ 的拟有限模的分类.

定理 2.1.2. (i) 一致有界不可分解权 $\mathcal{W}(\mathbb{Z},1)^{(1)}$- 模或者 $\mathcal{W}_\infty$- 模是中间序列模.

(ii) 如果 Γ 和 $\mathbb{Z}$ 不同构，则一致有界不可分解的拟有限权 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模，或者 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模是中间序列模.

定理 3.1.2. 令 $\mathcal{A}$ 是有单位元的结合超代数使得 $[\mathcal{A},\mathcal{A}]=\mathcal{A}$ 或者 $\mathcal{A}=\mathbb{F}$, $gl_{m|n}$ 是 $m|n$ 型线性超代数，其中 $m,n\geq 0$ 且 $m+n>1$. 记 $gl_{m|n}(\mathcal{A})=\mathcal{A}\otimes gl_{m|n}$. 考虑 $gl_{m|n}(\mathcal{A})$ 在超换位运算 (*super-commutator*) 的意义下作为超代数，我们有

$$H^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})\cong HC^1(\mathcal{A},\mathbb{F}).$$

更确切的说，线性映射 $\widehat{\ }: CC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})\to C^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})$ 映 $\psi\mapsto\widehat{\psi}$ 诱导了一个向量空间同构

$$\widehat{\ }: HC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})\to H^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F}) \text{ 映 } [\psi]\mapsto[\widehat{\psi}],$$

这里对 $\psi\in CC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})$, $\widehat{\psi}$ 由下式定义

$$\widehat{\psi}(a\otimes A,b\otimes B)=(-1)^{\overline{A}\,\overline{b}}\mathrm{str}(AB)\psi(a,b) \quad for\ \ a,b\in\mathcal{A},\ A,B\in gl_{m|n}.$$

文中我们总用 "$\ \bar{}\ $" 代表元素的阶， $\mathrm{str}(\cdot)$ 是 $gl_{m|n}$ 上的由 (3.2.3) 定义的超迹.

我们知道李双代数都可以量子化，所有研究李双代数的分类可以间接研究量子群的分类. 对于广义 Hamilton 型李双代数我们有：

定理 4.4.1.

(1) $\mathcal{P}$ 的每一个李双代数结构都是三角的上边缘李双代数.

(2) 一个元素 $r\in\mathcal{P}$ 满足 *CYBE* (4.2.2) 当且仅当满足下列 *Modified Yang-Baxter* 方程 (*MYBE*)：

$$x\cdot c(r)=0 \quad for\ all\ \ x\in\mathcal{P}.$$

(3) 考虑向量空间 $V=\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$, 在对角作用下把 v 看作 $\mathcal{P}$- 模 (4.2.1), 我们有 $H^1(\mathcal{P},V)=\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)/\mathrm{Inn}(\mathcal{P},V)=0$.

第一章　广义 $\mathcal{W}$- 无穷代数的 Verma 模

§1.1　引言

令 $\mathbb{F}$ 是一个特征零的域，Γ 是 $\mathbb{F}$ 的加法子群. 用 $\mathbb{F}[\Gamma]$ 来表示与 Γ 有关的群代数，它有一组基 $\{t^\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$, 乘法定义为 $t^\alpha\cdot t^\beta=t^{\alpha+\beta}$, 其中 $\alpha,\beta\in\Gamma$. 定义 $\mathbb{F}[\Gamma]$ 的齐次算子 D, 对于 $\alpha\in\Gamma$, 有 $D: t^\alpha\mapsto \alpha t^\alpha$. 则秩 1 的广义 Weyl 型李代数是由 $\{t^\alpha D^\mu \mid \alpha\in\Gamma,\mu\in\mathbb{Z}_+\}$ 张成的向量空间 $\mathcal{W}(\Gamma)=\mathbb{F}[\Gamma]\otimes\mathbb{F}[D]$, 此处 $\mathbb{F}[D]$ 是多项式代数，具有括积运算:

$$[t^\alpha D^\mu, t^\beta D^\nu]=(t^\alpha D^\mu)\cdot(t^\beta D^\nu)-(t^\beta D^\nu)\cdot(t^\alpha D^\mu), \tag{1.1.1}$$

其中

$$(t^\alpha D^\mu)\cdot(t^\beta D^\nu)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+}\binom{\mu}{\lambda}\beta^\lambda t^{\alpha+\beta}D^{\mu+\nu-\lambda}, \tag{1.1.2}$$

这里对于 $\mu\in\mathbb{Z}$, $\lambda\in\mathbb{Z}_+$ 符号 $\binom{\mu}{\lambda}$ 是二项式系数 $\mu(\mu-1)\cdots(\mu-\lambda+1)/\lambda!$.

为了方便起见，对任意文字 x 和任意 $\mu\in\mathbb{Z}_+$, 我们采用下列符号

$$[x]_\mu=x(x-1)\cdots(x-\mu+1). \tag{1.1.3}$$

$\mathcal{W}(\Gamma)$ 的非平凡的中心扩张 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$ 可以被定义如下 (参见. [18]): 李积运算 (1.1.1) 变为

$$\begin{aligned}[t^\alpha[D]_\mu, t^\beta[D]_\nu] &= (t^\alpha[D]_\mu)\cdot(t^\beta[D]_\nu)-(t^\beta[D]_\nu)\cdot(t^\alpha[D]_\mu)\\ &\quad+\delta_{\alpha,-\beta}(-1)^\mu\mu!\nu!\binom{\alpha+\mu}{\mu+\nu+1}c,\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

其中 $\alpha,\beta\in\Gamma\subset\mathbb{F}$, $\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+$, 式子中 c 是 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$ 的中心元素. 显然 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$ 是一个 Γ- 阶化李代数，$\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)=\oplus_{\alpha\in\Gamma}\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)_\alpha$ 其阶化空间定义为

$$\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)_\alpha=\mathrm{span}\{t^\alpha D^\mu \mid \mu\in\mathbb{Z}_+\}\oplus\delta_{\alpha,0}\mathbb{F}c \ \text{ for } \ \alpha\in\Gamma. \tag{1.1.5}$$

特别的当 $\Gamma=\mathbb{Z}$ 时，李代数 $\mathcal{W}_{1+\infty}=\widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z})$ 是著名的 $\mathcal{W}$- 无穷代数. 这样我们就称 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$ 是*广义的 $\mathcal{W}$- 无穷代数*.

一个 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$- 模 V 被称作是拟有限的 (*quasifinite*) 如果 V 是有限 Γ- 阶化，也就是说，

$$V=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} V_\alpha,\ \ \widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)_\alpha V_\beta\subset V_{\alpha+\beta},\ \ \dim V_\alpha<\infty\ \text{ for }\ \alpha,\beta\in\Gamma. \tag{1.1.6}$$

许多著名数学家对拟有限模非常感兴趣，他们进行过深入研究，并得到许多深刻结果. 可参看文献 [20,128,125,150]. 因为在 (1.1.5) 式中，每一个阶化空间 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)_\alpha$ 都是无限维的，所以就象文献 [128,150] 中指出的那样对于拟有限模的分类不是一个平凡的问题. 由于许多物理理论，例如共型场理论，量子 Hall effect 理论的需要，对 $\mathcal{W}$- 无穷代数的拟有限表示的研究自然的受到了强烈关注 (参见 [128, 150, 125, 20, 20]).

本节的主要结果是下面的两个定理.

定理 1.1.1 令 $\Lambda\in\widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z})_0^*$. 对于 $\mathcal{W}$- 无穷代数 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 来说，下面的陈述是等价的：

(1) *Verma* $\mathcal{W}_{1+\infty}$- 模 $M(\Lambda)$ 是可约的 (参见 (1.2.5)).

(2) 由 (1.3.2) 所定义的抛物子代数 $\mathcal{P}$ 的 -1 次阶化子空间是非零的，即 $\mathcal{P}_{-1}\neq 0$ (参见 (1.3.4)).

(3) 由 (1.3.6) 所定义的生成序列 $F(x)$ 是一个拟多项式.

(4) 不可约最高权 $\mathcal{W}_{1+\infty}$- 模 $L(\Lambda)$ 是拟有限的.

定理中 (3) 和 (4) 的等价性在文献 [124] 中用详细的证明. 在此我们将进一步建立 $L(\Lambda)$ 的拟有限性和 $M(\Lambda)$ 的可约性之间的联系，这正是我们非常感兴趣的地方.

定理 1.1.2 令 $\Lambda\in\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)_0^*$.

(1) 假设 Γ 的序 (*order*) $\prec$ 是稠密的 (*dense*)(参见 (1.2.9)). 那么 *Verma* 模 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$- 模 $M(\Lambda,\prec)$ 是不可约的当且仅当 $\Lambda\neq 0$. 进一步，如果 $\Lambda=0$, 则子空间

$$M'(0,\prec):=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\Gamma_+,\,k>0} L_{-\alpha_1,i_1}L_{-\alpha_2,i_2}\cdots L_{-\alpha_k,i_k}v_0,$$

是 $M(0,\prec)$ 的一个不可约子模当且仅当对所有的 $\alpha,\beta\in\Gamma_+$ 一定存在一个正整数 n 使得 $\alpha\prec n\beta$.

(2) 如果 Γ 的序 $\prec$ 是离散的 (*disciete*)(见 (1.2.10)), 则 *Verma* $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$- 模 $M(\Lambda,\prec)$ 是不可约的当且仅当 $\widehat{\mathcal{W}}(a\mathbb{Z})$- 模 $M_a(\Lambda,\prec)$ (参见 (1.2.11), (1.2.12)) 是不可约的.

对于广义 Virasoro 代数，类似与定理 1.1.2 的结果在文献 [123] 中已得到.

§1.2 代数 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma)$ 上的 Verma 模

为方便记，我们令

$$\mathcal{W}=\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma) \quad \text{并且令} \quad L_{\alpha,i}=t^{\alpha}[D]_i \quad \text{对于} \ \alpha\in\Gamma, i\in\mathbb{Z}_+. \tag{1.2.1}$$

则 (1.1.4) 式等价于

$$\begin{aligned}[L_{\alpha,j},L_{\beta,k}]=&\sum_s\Big(\binom{j}{s}[\beta+k]_s-\binom{k}{s}[\alpha+j]_s\Big)L_{\alpha+\beta,j+k-s}\\ &+\delta_{\alpha,-\beta}(-1)^j j!k!\binom{\alpha+j}{j+k+1}c.\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

定义 $\mathcal{W}$ 的一个自然滤过

$$\{0\}=\mathcal{W}^{(-3)}\subset\mathcal{W}^{(-2)}\subset\cdots\subset\mathcal{W},$$

此处

$$\mathcal{W}^{(n)}=\ \text{span}\ \{L_{\alpha,i},c\,|\,\alpha\in\Gamma,\ i\leq n+1\},\ \ \forall n\geq -2.$$

则我们有

$$[L_{\alpha,j},L_{\beta,k}]\equiv(j\beta-k\alpha)L_{\alpha+\beta,j+k-1}\ \ (\bmod\ \mathcal{W}^{(j+k-2)}). \tag{1.2.3}$$

我们固定一个与群 Γ 的结构相容的全序 $\prec$. 令

$$\Gamma_+:=\{x\in\Gamma\,|\,0\prec x\},\qquad \Gamma_-:=\{x\in\Gamma\,|\,x\prec 0\}.$$

则 $\Gamma=\Gamma_+\cup\{0\}\cup\Gamma_-$. 令 $\mathcal{W}_\pm=\oplus_{0\prec\pm\alpha}\mathcal{W}_\alpha$, 我们有三角分解

$$\mathcal{W}=\mathcal{W}_-\oplus\mathcal{W}_0\oplus\mathcal{W}_+\ .$$

显然， $\mathcal{W}_0=\text{span}\{L_{0,j}\,|\,j\in\mathbb{Z}_+\}\oplus\mathbb{F}c$ 是 $\mathcal{W}$ 的一个交换子代数.

令 $G=\Gamma\times\mathbb{Z}_+$. 则 G 中的任意元素可以被写成 (α,j), 这里 $\alpha\in\Gamma$, $j\in\mathbb{Z}_+$. 定义 G 的一个全序

$$(\beta,i)\prec(\alpha,j)\iff \beta\prec\alpha\ \text{或者}\ \beta=\alpha,\ i<j\quad \text{对于}\ (\alpha,i),(\beta,j)\in G. \tag{1.2.4}$$

方便记，我们令 $G'_\pm=\Gamma_\pm\times\mathbb{Z}_+=G_\pm\backslash(\Gamma_0\times\mathbb{N})$, 此处 $G_\pm=\{(\alpha,i)\in G\,|\,(\pm\alpha,i)\succ 0\}$.

令 $U(\mathcal{W})$ 是 $\mathcal{W}$ 的泛包络代数. 对任意的 $\Lambda \in \mathcal{W}_0^*$($\mathcal{W}_0$ 的对偶空间), 令 $I(\Lambda, \prec)$ 是 U 的左理想, 是由以下元素生成

$$\{L_{\alpha,i} \mid 0 \prec \alpha,\, i \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{h - \Lambda(h) \cdot 1 \mid h \in \mathcal{W}_0\}.$$

则与序 $\prec$ 有关的 *Verma* $\mathcal{W}$- 模定义为

$$M(\Lambda, \prec) := U(\mathcal{W})/I(\Lambda, \prec). \tag{1.2.5}$$

根据 PBW 定理 $M(\Lambda, \prec)$ 有一组具有下列形式的向量构成的基

$$L_{-\alpha_1,i_1} L_{-\alpha_2,i_2} \cdots L_{-\alpha_k,i_k} v_\Lambda, \text{ 其中 } 0 \prec (\alpha_1, i_1) \preceq (\alpha_2, i_2) \preceq \cdots \preceq (\alpha_k, i_k), \tag{1.2.6}$$

这里 v_Λ 是 1 在 $M(\Lambda, \prec)$ 中的余集 (coset), $(\alpha_j, i_j) \in G$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

由于 $[L_{0,1}, L_{\alpha,j}] = \alpha L_{\alpha,j}$, 定义

$$M_\alpha := \{v \in M(\Lambda, \prec) \mid L_{0,1} v = (\alpha + \Lambda(L_{0,1}))v\} \text{ 其中 } \alpha \prec 0, \text{ 且 } M_0 = \mathbb{F} v_\Lambda. \tag{1.2.7}$$

则 M_α 由具有形式 (1.2.6) 的向量张成, 并且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = -\alpha$. 所以 $M(\Lambda, \prec)$ 在 $M(\Lambda, \prec) = \oplus_{\alpha \preceq 0} M_\alpha$ 和 $\mathcal{W}_\beta M_\alpha \subset M_{\alpha+\beta}$ 的意义下, 是一个最高权 $\mathcal{W}$- 模. 非常明显的, $M(\Lambda, \prec)$ 是一个 Γ- 阶化 $\mathcal{W}$- 模, 并且有 $\dim M_{-\alpha} = \infty$ 其中 $\alpha \in \Gamma_+$. 我们称一个非零向量 $u \in M_\alpha$ 是具有 level α 的权向量.

记

$$B(\alpha) = \{\beta \in \Gamma \mid 0 \prec \beta \prec \alpha\} \text{ for } \alpha \in \Gamma_+. \tag{1.2.8}$$

我们称序 $\prec$ 是稠密的 (dense), 如果

$$\# B(\alpha) = \infty \text{ 对所有的 } \alpha \in \Gamma_+; \tag{1.2.9}$$

称它为离散的 (discrete), 如果

$$\text{存在某个 } a \in \Gamma_+ \text{ 使得 } B(a) = \emptyset. \tag{1.2.10}$$

在 (1.2.10) 式中, 唯一的元素 a 被称为 Γ_+ 的最小元素. 记

$$\widehat{\mathcal{W}}(a\mathbb{Z}) = \mathrm{span}\{L_{na,k},\, c \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{1.2.11}$$

是 $\mathcal{W}$ 的子代数, 它与 $\mathcal{W}$- 无穷代数 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 同构. 另外我们还记

$$M_a(\Lambda, \prec) = \text{ 由 } v_\Lambda \text{ 生成的 } M(\Lambda, \prec) \text{ 的 } \widehat{\mathcal{W}}(a\mathbb{Z}) - \text{子模}. \tag{1.2.12}$$

定理 1.1.2 的证明. (1) 假设序 $\prec$ 是稠密的. 对于 $m,k\in\mathbb{Z}_+$, 记

$$V_m=\sum_{\substack{0\le p\le m\\(\alpha_1,i_1)\preceq\cdots\preceq(\alpha_p,i_p)}}\mathbb{F}L_{-\alpha_1,i_1}\cdots L_{-\alpha_p,i_p}v_\Lambda,\tag{1.2.13}$$

$$V^{(k-1)}=\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+,\,i_1+\cdots+i_q\le k\\(\alpha_1,r_1),\cdots,(\alpha_q,i_q)\in G'_+}}\mathbb{F}L_{-\alpha_1,i_1}\cdots L_{-\alpha_q,i_q}v_\Lambda.\tag{1.2.14}$$

显然我们有 $L_{\alpha,k}V_m\subseteq V_m$ 其中 $(\alpha,k)\in G'_+$, 并且 (1.2.14) 式定义了一个 V 的滤过:

$$\{0\}=V^{(-2)}\subset V^{(-1)}\subset\cdots\subset V^{(k)}\subset\cdots.\tag{1.2.15}$$

非常容易的可以看出 $L_{\alpha,i}V^{(k)}\subset V^{(k+i-1)}$, 这里 $(\alpha,i)\in G'_+$.

令 $u_0\neq 0$ 是 $M(\Lambda,\prec)$ 中任意给出的一个向量.

断言 1 . 一定存在某个权向量 $u\in U(\mathcal{W})u_0$ 使得对某个 $r\in\mathbb{Z}_+$

$$u\equiv\sum_{k_1,\cdots,k_r}b_{\underline{k}}L_{-\varepsilon_r,k_r}\cdots L_{-\varepsilon_1,k_1}v_\Lambda\pmod{V_{r-1}}\ \text{其中 } b_{\underline{k}}\in\mathbb{F},$$

这里 $(\varepsilon_j,k_j)\in G'_+$, $\varepsilon_r\prec\cdots\prec\varepsilon_1$, 其中 $J:=\{\underline{k}=(k_r,\cdots,k_1)\,|\,b_{\underline{k}}\neq 0\}\neq\emptyset$.

对某个 $r\in\mathbb{Z}_+$, 我们有 $u_0\in V_r\backslash V_{r-1}$. 如果 $r\le 1$, 我们的断言是显然成立的. 假设 $r>1$. 我们有

$$u_0\equiv\sum_{\substack{(\alpha_1,i_1),\cdots,(\alpha_r,i_r)\in G'_+\\(\alpha_1,i_1)\preceq\cdots\preceq(\alpha_r,i_r)}}a_{(\underline{\alpha},\underline{i})}L_{-\alpha_1,i_1}\cdots L_{-\alpha_r,i_r}v_\Lambda\pmod{V_{r-1}}\ \text{其中 } a_{(\underline{\alpha},\underline{i})}\in\mathbb{F},$$

此处 $(\underline{\alpha},\underline{i}):=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r\,;\,i_1,\cdots,i_r)$. 令 $I:=\{(\underline{\alpha},\underline{i})\,|\,a_{(\underline{\alpha},\underline{i})}\neq 0\}$. 根据我们的假设, $I\neq\phi$ 是一个有限集合. 对于任意 $(\underline{\alpha},\underline{i}),(\underline{\alpha}',\underline{i}')\in I$, 我们定义

$$(\underline{\alpha}',\underline{i}')\prec(\underline{\alpha},\underline{i})\iff\exists 1\le s\le r\ \text{使得}\ (\alpha'_s,i'_s)\prec(\alpha_s,i_s),\ (\alpha'_t,i'_t)=(\alpha_t,i_t),\forall t>s.\tag{1.2.16}$$

令

$$(\underline{\beta},\underline{j})=(\beta_1,\cdots,\beta_r\,;\,j_1,\cdots,j_r),\quad\text{此处}\ (\beta_1,j_1)\preceq\cdots\preceq(\beta_r,j_r),$$

是 I 中的唯一最大元素, 并且令

$$\gamma_1=\min(\{\alpha_i,\alpha_i-\alpha_j\,|\,(\underline{\alpha},\underline{m})\in I,1\le i\neq j\le r\}\cap\Gamma_+).$$

则对所有 $\varepsilon_1 \in B(\gamma_1)$ 和所有 $(\underline{\alpha}, \underline{i}) \in I$, 如果 $\alpha_m \neq \beta_r$, $1 \leq m \leq r$ 我们有 $\alpha_m \prec \beta_r - \varepsilon_1$. 根据 (1.2.2) 式的交换关系，选择一个恰当的 $\varepsilon_1 \in B(\gamma_1)$, 我们可以得到：对于 $b_{(\varepsilon_1,k_1)} \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} u_1 &:= L_{\beta_r-\varepsilon_1,1}u_0 \\ &\equiv \sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z},k_1\geq 0\\ (\alpha_1,i_1)\preceq\cdots\preceq(\alpha_{r-1},i_{r-1})}} b_{(\varepsilon_1,k_1)}a^{(1)}_{(\underline{\alpha},\underline{i})}L_{-\varepsilon_1,k_1}L_{-\alpha_1,i_1}\cdots L_{-\alpha_{r-1},i_{r-1}}v_\Lambda \pmod{V_{r-1}}, \end{aligned}$$

这里

$$I^{(1)} := \{(\underline{\alpha}, \underline{i}) = (\varepsilon_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}\,;\, k_1, i_1, \cdots, i_{r-1}) \,|\, b_{(\varepsilon_1,k_1)}a^{(1)}_{(\underline{\alpha},\underline{i})} \neq 0\}.$$

我们要证明 $I^{(1)} \neq \emptyset$. 事实上，记

$$(\underline{\beta}, \underline{j}) = (\beta_1, \cdots, \beta_{s-1}, \beta_r, \cdots, \beta_r\,;\, j_1, \cdots, j_{s-1}, j_s, \cdots, j_r),$$

此处 $\beta_{s-1} \prec \beta_r$ 且 $s \leq r$, 令

$$(\underline{\beta}^{(1)}, \underline{j}^{(1)}) = (\varepsilon_1, \beta_1, \cdots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_r\,;\, j_s, j_1, \cdots, j_{s-1}, j_{s+1}, \cdots, j_r),$$

(当然不一定是 $I^{(1)}$ 中的最大元), 与 $(\underline{\beta}^{(1)}, \underline{j}^{(1)})$ 相对应的那一项出现在 u_1 的表达式中，根据 (1.2.2) 式，它的相应的系数是 $m(\beta_r - j_s(\beta_r - \varepsilon_1)) \neq 0$, 其中 m 是某个正整数，ε_1 是我们选择的某个恰当的元素. 这样 $I^{(1)} \neq \emptyset$ 且 $u_1 \not\equiv 0 \pmod{V_{r-1}}$. 所有我们可以重新选择 $(\underline{\beta}^{(1)}, \underline{j}^{(1)})$ 是 $I^{(1)}$ 中的最大元. 接着采取相同的步骤并且对 $s = 2, \cdots, r$ 重复这一过程，我们可以递规的定义并且利用归纳法证明：

(i) 令

$$\gamma_s = \min(\{z_i, z_i - z_j \,|\, (\underline{z}, \underline{n}) \in I^{(s-1)}, 1 \leq i \neq j \leq r\} \cap \Gamma_+).$$

选择 $\varepsilon_s \in B(\gamma_s)$ 使得 $z_i \prec \beta_{r-s+1} - \varepsilon_s$ 如果 $z_i \neq \beta_{r-s+1}$ 对于任意的 $(\underline{z}, \underline{n}) \in I^{(s-1)}$, 令 $u_s := L_{\beta_{r-s+1}-\varepsilon_s,1}u_{s-1}$. 则

$$\begin{aligned} u_s \equiv \sum_{\substack{k_q\in\mathbb{Z},k_q\geq 0,q=1,\cdots,s\\ (\alpha_1,i_1)\preceq\cdots\preceq(\alpha_{r-s},i_{r-s})}} & b_{(\varepsilon_s,k_s)}\cdots b_{(\varepsilon_1,k_1)}a^{(s)}_{(\underline{\alpha},\underline{i})}L_{-\varepsilon_s,k_s}\cdots L_{-\varepsilon_1,k_1} \\ & \times L_{-\alpha_1,i_1}\cdots L_{-\alpha_{r-s},i_{r-s}}v_\Lambda \pmod{V_{r-1}}, \end{aligned}$$

(ii) 令 $I^{(s)} :=$
$\{(\varepsilon_s, \cdots, \varepsilon_1, \alpha_1, \cdots \alpha_{r-s}\,;\, k_s, \cdots, k_1, i_1 \cdots, i_{r-s}) \,|\, b_{(\varepsilon_s,k_s)}\cdots b_{(\varepsilon_1,k_1)}a^{(s)}_{(\underline{\alpha},\underline{i})} \neq 0\}$. 则 $I^{(s)} \neq \emptyset$ 对某恰当的 ε_s 成立.

现在我们只要令 $s=r$, $u=u_r$ 马上就得到了断言.

断言 2 . 一定存在某个权向量 $u'\in U(\mathcal{W})u_0$,

$$u'\equiv L_{-\eta_r,0}\cdots L_{-\eta_1,0}v_\Lambda \pmod{V_{r-1}},\ 这里\ (\eta_r,0)\prec\cdots\prec(\eta_1,0)\in G'_+.$$

根据断言 1, 存在某个权向量 $u\in U(\mathcal{W})u_0$, 使得对任意 $r\in\mathbb{Z}_+$,

$$u\equiv\sum_{k_1,\cdots,k_r}b_{\underline{k}}L_{-\varepsilon_r,k_r}\cdots L_{-\varepsilon_1,k_1}v_\Lambda \pmod{V_{r-1}}\ 其中\ b_{\underline{k}}\in\mathbb{F},$$

这里 $(\varepsilon_j,k_j)\in G'_+, j=1,\cdots,r,\varepsilon_r\prec\cdots\prec\varepsilon_1, J:=\{\underline{k}=(k_r,\cdots,k_1)\,|\,b_{\underline{k}}\neq0\}\neq\emptyset$.
令 $K=\max\{k_r+\cdots+k_1\,|\,\underline{k}\in J\}$, 我们知道 $u\in V^{(K-1)}$. 记

$$\delta=\min(\{\varepsilon_j-\varepsilon_i,\varepsilon_k|\,i>j,k=1,\cdots,r\}\cap\Gamma_+).$$

选择 $\epsilon'\in\Gamma_+$ 使得 $K\epsilon'\prec\delta$. 则根据 (1.2.15) 和 (1.2.2) 式，我们有

$$\begin{aligned}u'=L_{\epsilon',0}^{K-1}u\equiv&\sum_{1\leq j\leq r}b_jL_{-\varepsilon_r+k_r\epsilon',0}\cdots L_{-\varepsilon_{j-1}+k_{j-1}\epsilon',0}\\&\times L_{-\varepsilon_j+(k_j-1)\epsilon',1}L_{-\varepsilon_{j+1}+k_{j+1}\epsilon',0}\cdots L_{-\varepsilon_1+k_1\epsilon',0}v_\Lambda \pmod{V_{r-1}},\end{aligned}\quad(1.2.17)$$

这里 $B:=\{b_j\neq0\,|\,1\leq j\leq r\}\neq\emptyset$. 记 $\alpha=\max\{\varepsilon_j-(k_j-1)\epsilon'\,|\,b_j\neq0\}$. 现在选择 ε'' 使得 $\varepsilon_i\prec\varepsilon''\prec\alpha$, 此处 $\varepsilon_i\in\{\varepsilon_j-(k_j-1)\epsilon'\,|\,b_j\neq0\}\backslash\{\alpha\}$ 并且令 $u''=L_{\varepsilon'',0}u'$, 则我们有 $u''\neq0$ 对某个恰当的 ε'' 成立，并且有

$$u''\equiv\sum_{0\prec\varepsilon'_r\prec\cdots\prec\varepsilon'_1}b'_{\underline{\varepsilon}'}L_{-\varepsilon'_r,0}\cdots L_{-\varepsilon'_1,0}v_\Lambda \pmod{V_{r-1}}\ 其中\ b'_{\underline{\varepsilon}'}\in\mathbb{F}.$$

仿照断言 1 中的讨论，我们可以得之这个断言也成立.

断言 3 . 令 $k_1,\cdots,k_r\in\mathbb{Z}_+$, 记 $k=k_1+\cdots+k_r$. 一定存在某个权向量 $u\in U(\mathcal{W})u_0$ 使得

$$u\equiv L_{-\varepsilon_r,k_r}\cdots L_{-\varepsilon_1,k_1}v_\Lambda \pmod{V_{r-1}+V^{(k-2)}}\ ,$$

这里 $\varepsilon_r\prec\cdots\prec\varepsilon_1$, 且 $\varepsilon_i\in\Gamma_+, i=1,\cdots,r$.

根据断言 2, 存在权向量 $u'\in U(\mathcal{W})u_0$ 具有下列形式

$$u'\equiv L_{-\eta_r,0}\cdots L_{-\eta_1,0}v_\Lambda \pmod{V_{r-1}},$$

其中 $(\eta_r, 0) \prec \cdots \prec (\eta_1, 0) \in G'_+$.

令 $\varepsilon_1 \in B(\eta_r)$ 使得 $\eta_2 \prec \eta_1 - \varepsilon_1 \prec \eta_1$, 则令 $u_1 = L_{\eta_1-\varepsilon_1,k_1+1}u'$ 我们可以得到

$$u_1 \equiv (k_1+1)\eta_1 L_{\varepsilon_1,k_1} L_{-\eta_r,0} \cdots L_{-\eta_2,0} v_\Lambda \pmod{V_{r-1} + V^{(k_1-1)}}.$$

递规的利用上述讨论我们可以证明此断言.

断言 4 . 一定存在某个 $\xi \in \Gamma_+$, 使得对 $i \in \mathbb{Z}_+$, 有 $L_{-\xi,i}v_\Lambda \in U(\mathcal{W})u_0$.

根据断言 3, 一定存在一个权向量 $u \in U(\mathcal{W})u_0$ 具有下列形式

$$u \equiv L_{-\varepsilon_r,k_r} \cdots L_{-\varepsilon_1,k_1} v_\Lambda + \sum_{\substack{0 \le l < r,\ i_1+\cdots+i_l \ge k \\ 0 \prec (\alpha_1,i_1) \preceq \cdots \preceq (\alpha_l,i_l)}} b_{\underline{\alpha},\underline{i}} L_{-\alpha_1,i_1} \cdots L_{-\alpha_l,i_l} v_\Lambda \ (\mathrm{mod} V^{(k-2)}),$$

其中 $b_{\underline{\alpha},\underline{i}} \in \mathbb{F}, (\varepsilon_r, k_r) \prec \cdots \prec (\varepsilon_1, k_1) \in G'_+, k = k_1 + \cdots + k_r$.

取 $k_i > 0$, $i = 1, \cdots, r$ 并且令

$$I_0 := \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \,|\, b_{\underline{\alpha},\underline{i}} \neq 0\}, j^{(0)} := \min\{\varepsilon_r, \alpha_1 \,|\, \underline{\alpha} := (\alpha_1, \cdots, \alpha_l) \in I_0\}.$$

假设 $u \in M_\lambda$ (回忆 (1.2.7)). 令 $\varepsilon \in \Gamma_+$ 使得 $\varepsilon \prec j^{(0)}$. 我们有

$$\begin{aligned} L_{-\lambda-\varepsilon,r}u \equiv & \Big(f(-\lambda-\varepsilon) + \sum_{\substack{1 \le l < r \\ i_1+\cdots+i_l = k}} b_{\underline{i}} g_{\underline{i}}(-\lambda-\varepsilon)\Big) L_{-\varepsilon,k} v_\Lambda \\ & + \sum_{\substack{1 \le l < r \\ i_1+\cdots+i_l > k}} b_{\underline{i}} g'_{\underline{i}}(-\lambda-\varepsilon) L_{-\varepsilon,i_1+\cdots+i_l+1} v_\Lambda \quad (\mathrm{mod} V^{(k-2)}), \end{aligned}$$

对于 $b_i \in \mathbb{F}$, 此处 $\underline{i} = (i_1, \cdots, i_l)$, 一般来说,

$$f(x) = \begin{vmatrix} r & k_r \\ x & \varepsilon_r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r+k_r-1 & k_{r-1} \\ x & \varepsilon_{r-1} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} k & k_1 \\ x & \varepsilon_1 \end{vmatrix},$$

$$g_{\underline{i}}(x) = \begin{vmatrix} r & i_{r-1} \\ x & \alpha_{r-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r+i_r-1 & i_{r-1} \\ x & \alpha_{r-2} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} k & i_1 \\ x & \alpha_1 \end{vmatrix},$$

是关于 $x \in \mathbb{F}$ 的多项式. 因为 $\deg f(x) = r > \deg g_{\underline{i}}(x) = r - 1$, 我们可以选择 $\varepsilon \in \Gamma_+$ 且 $\varepsilon \prec j^{(0)}$ 使得

$$f(-\lambda-\varepsilon) + \sum_{\substack{1 \le l < r \\ i_1+\cdots+i_l = k}} b_{\underline{i}} g_{\underline{i}}(-\lambda-\varepsilon) \neq 0.$$

这样, 我们可以得到某个向量 $0\neq u=(a_1L_{-\varepsilon,i_1}+\cdots+a_nL_{-\varepsilon,i_n})v_\Lambda\in U(\mathcal{W})u_0$, 其中 $a_i\neq 0, i=1,\cdots,n$. 因为群的序是稠密的 (参见 (1.2.9)), 设 $p=\max\{i_1,\cdots,i_n\}$, 取恰当的 $\varepsilon'\in\Gamma'_+$ 使得 $p\varepsilon'\prec\varepsilon$, 我们有 $u'=L^{p-1}_{\varepsilon',0}u=aL_{-\varepsilon+(p-1)\varepsilon',0}v_\Lambda$, 此处 $0\neq a\in\mathbb{F}$. 接着选择 ξ 使得 $0\prec\xi\prec\varepsilon-(p-1)\varepsilon'$ 并且令 $u^{(k)}=L_{\xi,k}u', k=1,2,\cdots$, 我们有

$$u^{(k)}=a_{k-1}u^{(k-1)}+a_{k-2}u^{(k-2)}+\cdots+a_1u^{(1)},$$

这里 $a_{k-1}=ak(-\varepsilon+(p-1)\varepsilon')\neq 0$ 而且 $a_j\in\mathbb{F}, j=1,\cdots,k-1$. 这样断言可由 $u^{(k)}\in U(\mathcal{W})u_0$ 其中 $k=1,2,\cdots$. 这个事实得到.

断言 5 . 如果存在某个 $\varepsilon\in\Gamma'_+$ 使得 $L_{-\varepsilon,i}v_\Lambda\in U(\mathcal{W})u_0$ 对所有 $i\in\mathbb{Z}_+$ 成立, 则 $L_{-x,k}v_\Lambda\in U(\mathcal{W})u_0$ 对所有 $x\in B'(\varepsilon):=\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_+}\{y\in\Gamma'_+\,|\,y\preceq\varepsilon\}$ 其中 $k\in\mathbb{Z}_+$ 成立.

令 $\varepsilon'\in B(\varepsilon)$. 根据 (1.2.2) 式, 我们有

$$-\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\binom{k}{s}[\varepsilon-\varepsilon']_sL_{-\varepsilon',k-s}v_\Lambda=L_{\varepsilon-\varepsilon',0}L_{-\varepsilon,k}v_\Lambda\in U(\mathcal{W})u_0.$$

这样 $L_{-\varepsilon',k}v_\Lambda\in U(\mathcal{W})u_0$ 对 $k\in\mathbb{Z}_+$ 成立. 根据

$$-\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\binom{k}{s}[-n\varepsilon']_sL_{-(n\varepsilon'+m\varepsilon),k-s}v_\Lambda=[L_{-n\varepsilon',0},L_{-m\varepsilon,k}]v_\Lambda\in U(\mathcal{W})u_0,\ \text{这里}\ m,n\in\mathbb{Z}_+,$$

我们有 $L_{-x,k}v_\Lambda\in U(\mathcal{W})u_0$ 对所有 $k\in\mathbb{Z}_+$ 和 $x\in\mathbb{Z}_+\varepsilon+\mathbb{Z}_+\varepsilon'$ 成立. 我们的断言成立.

根据断言 4, 我们知道存在 $\xi\in\Gamma'_+$ 使得 $L_{-\xi,i}v_\Lambda\in U(\mathcal{W})u_0$ 对于所有 $i\in\mathbb{Z}_+$ 成立. 这样我们有

$$\begin{aligned}
L_{\xi,1}L_{-\xi,0}v_\Lambda&=-\xi L_{0,0}v_\Lambda=-\xi\Lambda(L_{0,0})v_\Lambda,\\
L_{\xi,k}L_{-\xi,0}v_\Lambda&=\sum_s\left(\binom{k}{s}[-\xi]_sL_{0,k-s}+(-1)^kk!\binom{\xi+k}{k+1}c\right)v_\Lambda\\
&=\sum_s\binom{k}{s}[-\xi]_s\Lambda(L_{0,k-s})v_\Lambda+(-1)^kk!\binom{\xi+k}{k+1}\Lambda(c)v_\Lambda,
\end{aligned}$$

此处 $k \in \mathbb{Z}_+$. 很容易的看出如果 $\Lambda \neq 0$, 则 $v_\Lambda \in U(\mathcal{W})u_0$. 所有在这种情况下, $M(\Lambda, \prec)$ 是不可约的. 换一个角度来讲, 如果 $\Lambda = 0$, 则明显的有

$$M'(0, \prec) = \sum_{0<k,\, \alpha_1,\cdots,\alpha_k \in \Gamma_+} \mathbb{F} L_{-\alpha_1,i_1} \cdots L_{-\alpha_k,i_k} v_0$$

是一个真 $\mathcal{W}$- 子模. 假设对所有 $x, y \in \Gamma_+$ 存在一个正整数 n 使得 $y \preceq nx$. 根据断言 5, 存在 $\varepsilon' \in \Gamma_+$ 满足 $L_{-n\varepsilon',0}\, v_0 \in M'(0, \prec)$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$ 成立. 这样对任意 $z \in \Gamma_+$, 我么有 $z \preceq n\varepsilon'$ 对于某个整数 n 成立. 根据断言 5 我们有 $L_{-z,k} v_0 \in M'(0, \prec)$ 其中 $k \in \mathbb{Z}_+$. 我们知道实际上 $M'(0, \prec)$ 是一个不可约 $\mathcal{W}$- 模.

如果存在 $x, y \in \Gamma_+$ 使得 $\mathbf{N}x \prec y$, 则 $B(x) \prec y$ (参见 (1.2.8)). 因为对任意 $k \in \mathbb{Z}_+$, 有 $L_{-y,k} v_0 \notin W'$, 所有很容易的可以验证

$$W' = \sum_{z \in B(x),\, k \in \mathbb{Z}_+} U(\mathcal{W}) L_{-z,k}\, v_0,$$

是 $M'(0, \prec)$ 的一个真子模. 这就证明了 (1).

(2) 假设序 $\prec$ 是离散的. 注意到 $a\mathbb{Z} \subseteq \Gamma$. 对于任意 $x \in \Gamma$, 如果 $na \prec x$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 成立, 我们记 $a\mathbb{Z} \prec x$. 令 $H_+ := \{x \in \Gamma \,|\, a\mathbb{Z} \prec x\}$, $H_- = -H_+$. 我们可以不困难的看出 $\Gamma = a\mathbb{Z} \cup H_+ \cup H_-$. 记 $\mathcal{W}(H_+)$ 为由 $\{L_{\alpha,k} \,|\, \alpha \in H_+, k \in \mathbb{Z}_+\}$ 生成的 $\mathcal{W}$ 的子代数. 显然的, $\mathcal{W}(H_+) M_a(\Lambda, \prec) = 0$. 既然

$$M(\Lambda, \prec) \cong U(\mathcal{W}) \otimes_{U(\mathcal{W}(a\mathbb{Z}) + \mathcal{W}(H_+))} M_a(\Lambda, \prec),$$

则 $\mathcal{W}$- 模 $M(\Lambda, \prec)$ 的不可约性蕴含了 $\mathcal{W}(a\mathbb{Z})$- 模 $M_a(\Lambda, \prec)$ 的不可约性.

相反的, 假设 $M_a(\Lambda, \prec)$ 是一个不可约 $\mathcal{W}(a\mathbb{Z})$- 模. 令 $u_0 \notin \mathbb{F}\, v_\Lambda$ 是 $M(\Lambda, \prec)$ 中任意给定的权向量, 则对某个 $r \in \mathbf{N}$ 有 $u_0 \in V_r \backslash V_{r-1}$. 我们将证明 $U(\mathcal{W})u_0 \cap M_a(\Lambda, \prec) \neq 0$, 据此, 马上就可以得到 $\mathcal{W}$- 模 $M(\Lambda, \prec)$ 的不可约性.

设

$$u_0 \equiv \sum_{\substack{\alpha'_1,\cdots,\alpha'_s \in H_+ \\ \alpha_1,\cdots,\alpha_{r-s} \in a\mathbb{Z}_+}} b_{\underline{\alpha},\underline{i}} L_{-\alpha_{r-s},i_{r-s}} \cdots L_{-\alpha_1,i_1} L_{-\alpha'_s,i'_s} \cdots L_{-\alpha'_1,i'_1}\, v_\Lambda \pmod{V_{r-1}},$$

其中 $b_{\underline{\alpha},\underline{i}} \in \mathbb{F}$ 并且 $(\alpha_{r-s}, i_{r-s}) \preceq \cdots \preceq (\alpha_1, i_1) \prec (\alpha'_s, i'_s) \preceq \cdots \preceq (\alpha'_1, i'_1)$ (参见 (1.2.4)). 定义

$$(\underline{\alpha}, \underline{i}) = (\alpha_{r-s}, \cdots, \alpha_1, \alpha'_s, \cdots, \alpha'_1\,;\, i_{r-s}, \cdots, i_1, i'_s, \cdots, i'_1).$$

令 $J=\{(\underline{\alpha},\underline{i})\,|\,b_{\underline{\alpha},\underline{i}}\neq 0\}$. 根据假设， $J\neq\emptyset$ 是一个有限集合. 根据 (1.2.16) 定义 $(\underline{\gamma},\underline{j})\prec(\underline{\alpha},\underline{i})$ 其中 $(\underline{\alpha},\underline{i}),(\underline{\gamma},\underline{j})\in J$.

令 $(\underline{\beta},\underline{j})=(\beta_{r-t},\cdots,\beta_1,\beta'_t,\cdots,\beta'_l,\beta'_1,\cdots,\beta'_1\,;\,j_{r-t},\cdots,j_1,j'_t,\cdots,j'_1)$, 此处 $1<l\leq t$, 是集合 J 中的唯一最大元. 注意到如果 $\beta'_1\neq\alpha'_k$, 则 $0\prec\beta'_1-\alpha'_k-a$. 那么有

$$u^{(1)}:=L_{\beta'_1-a,1}\,u_0\equiv\sum_{\substack{\alpha'_1,\cdots,\alpha'_s\in H_+\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_{r-s}\in a\mathbb{Z}_+}}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}_+}b_{\underline{\alpha},\underline{i}}b(k_1)L_{-a,k_1}L_{-\alpha_{r-s},i_{r-s}}\cdots L_{-\alpha_1,i_1}\times L_{-\alpha'_s,i'_s}\cdots L_{-\alpha'_2,i'_2}v_\Lambda\ (\mathrm{mod}\ V_{r-1}),$$

其中 $b(k_1)\in\mathbb{F}$. 我们定义

$$\begin{aligned}J^{(1)}:&=\{(a,\alpha_{r-s},\cdots,\alpha_1,\alpha'_s,\cdots,\alpha'_2\,;\,k_1,i_{r-s},\cdots,i_1,i'_s,\cdots,i'_2)\,|\,b(k_1)\neq 0\}\\ (\underline{\beta}^{(1)},\underline{j}^{(1)})&=(a,\beta_{r-t},\cdots,\beta_1,\beta'_t,\cdots,\beta'_2\,;\,j'_{l-1},j_{r-t},\cdots,j_1,j'_t,\cdots,j'_l,j'_{l-2},\cdots,j'_2)\end{aligned}$$

则 $J^{(1)}\neq\emptyset$. 事实上，与 $(\underline{\beta}^{(1)},\underline{j}^{(1)})$ 相对应的项出现在 $u^{(1)}$ 的表达式中. 就像证明断言 1 那样，现在对于 $m=2,3,\cdots$, 我们可以递规的定义并且归纳的证明

(i) 令 $u^{(m)}=L_{\beta'_m-a,1}u^{(m-1)}$. 则

$$u^{(m)}\equiv\sum_{\substack{\alpha'_1,\cdots,\alpha'_s\in H_+\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_{r-s}\in a\mathbb{Z}_+}}\sum_{k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{Z}_+}b_{\underline{\alpha},\underline{i}}b(k_1)\cdots b(k_m)L_{-a,k_1}\cdots L_{-a,k_m}L_{-\alpha_{r-s},i_{r-s}}\cdots L_{-\alpha_1,i_1}\times L_{-\alpha'_s,i'_s}\cdots L_{-\alpha'_{m+1},i'_{m+1}}v_\Lambda\ \ (\mathrm{mod}\ V_{r-1}),$$

(ii) 令

$$J^m=\{(a,\cdots,a,\alpha_{r-s},\cdots,\alpha_1,\alpha'_s,\cdots,\alpha'_{m+1}\,;\,k_m,\cdots,k_1,i_{r-s},\cdots,i_1,i'_s,\cdots,i'_{m+1})\,|\,b(k_1)\cdots b(k_m)\neq 0\}.$$

则有 $J^m\neq\emptyset$. 这个过程可以不断重复直到集合 $J^{(m)}$ 中的最大元可以被写成以下形式：

$$(\underline{\beta}^{(m)},\underline{j}^{(m)})=(a,\cdots,a,\beta_{r-s},\cdots,\beta_1\,;\,j'_s,\cdots,j'_1,i_{r-s},\cdots,i_1),$$

此处 $\beta_{r-s},\cdots,\beta_1\in a\mathbb{Z}_+$. 注意到 $u^{(m)}$ 是一个权向量, 我们有 $0\neq u^{(m)}\in U(\mathcal{W})u_0\cap M_a(\Lambda,\prec)$ 这正是我们想要的. □

§1.3 代数 $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 上的最高权模

我们考虑李代数 $\mathcal{W}_{1+\infty}=\widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z})$ 在空间 $\mathbb{F}[z,z^{-1},t]\oplus\mathbb{F}c$ 上的实现，这时括积

运算为

$$[z^\alpha f(t), z^\beta g(t)] = z^{\alpha+\beta}(f(t+\beta)g(t) - f(t)g(t+\alpha)) + \psi(z^\alpha f(t), z^\beta g(t))c \quad (1.3.1)$$

其中

$$\psi(z^\alpha f(t), z^\beta g(t)) = \begin{cases} \sum\limits_{-\alpha\le j\le -1} f(j)g(j+\alpha) & \text{if } \alpha = -\beta > 0, \\ 0 & \text{if } \alpha+\beta \neq 0 \text{ or } \alpha=\beta=0, \end{cases}$$

这里 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, f(t), g(t) \in \mathbb{F}[t]$. 显然的，对于 $i \in \mathbb{Z}_+, [t]_i$ 构成 $\mathbb{F}[t]$ 的一组基 (参见 (1.1.3)). 我们记

$$L_{\alpha,i} = z^\alpha [t]_i \ \text{ for } \ \alpha \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}_+.$$

则 (1.3.1) 式与 (1.1.4) 式等价.

为了简便，我们令

$$\widehat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_{1+\infty}.$$

在此我们只要考虑 $\mathbb{Z}$ 上的一般序，则我们知道 $\mathbb{Z}$ 上的序是离散的. 用 $M(\Lambda)$ 表示具有最高权向量 v_Λ 的 Verma $\widehat{\mathcal{W}}$- 模，用 $U(\widehat{\mathcal{W}})$ 表示 $\widehat{\mathcal{W}}$ 的泛包络代数.

假设 $M(\Lambda)$ 是可约的. 用 M' 表示 $M(\Lambda)$ 的最大真子模，并且令 $L(\Lambda) = M(\Lambda)/M'$ 是权 Λ 的不可约最高权模. 令

$$\mathcal{A} = \{a \in \widehat{\mathcal{W}} \mid av_\Lambda \in M'\} \ \text{ and } \ \mathcal{P} = \mathcal{A} + \widehat{\mathcal{W}}_0. \quad (1.3.2)$$

显然，$\widehat{\mathcal{W}}_+ \subset \mathcal{A}$, 而且 $\mathcal{P}$ 是 $\widehat{\mathcal{W}}$ 的子代数，进一步我们有 $\mathcal{P} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{P}_j$, 此处 $\mathcal{P}_j = \mathcal{P} \cap \widehat{\mathcal{W}}_j$.

引理 1.3.1 如果 $M(\Lambda)$ 是可约的，则 $\mathcal{P}$ 是 $\widehat{\mathcal{W}}$ 的一个抛物子代数，即 $\mathcal{P} \supset \widehat{\mathcal{W}}_0 + \widehat{\mathcal{W}}_+ \neq \mathcal{P}$.

证明. 引理的证明等价于去证 $\mathcal{P} \cap \widehat{\mathcal{W}}_m \neq 0$ 对于 $m < 0$. 注意到 $M' = \oplus_{s\in\mathbb{Z}_+} M'_{-s}$. 令 n 是最小正整数使得 $U(\widehat{\mathcal{W}})_{-n} \cap M' \neq 0$. 如果 $n = 1, 2$, 则我们可以很容易的验证引理 3.1. 假设 $n > 2$. 对于任意 $0 \neq u \in U(\widehat{\mathcal{W}})_{-n} \cap M'$, 设 (回忆 (1.2.13))

$$u \equiv \sum_{\substack{0<\alpha_1\le\cdots\le\alpha_r \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_r=n}} c_{\underline{\alpha},\underline{i}} z^{-\alpha_1}[t]_{i_1} \cdots z^{-\alpha_r}[t]_{i_r} v_\Lambda \pmod{V_{r-1}} \ \text{对于某个 } r \le n$$

这里 $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r),\underline{i}=(i_1,\cdots,i_r)$, 并且 $\underline{I}:=\{(\underline{\alpha},\underline{i})\,|\,c_{\underline{\alpha},\underline{i}}\neq 0\}\neq\emptyset$. 我们记

$$(\underline{\alpha},\underline{i})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r\,;\,i_1,\cdots,i_r),\quad\text{and}\quad \underline{1}=(1,\cdots,1)\ (r\text{ copies of 1's}).$$

对于 $(\underline{\alpha}',\underline{i}'),(\underline{\alpha},\underline{i})\in\underline{I}$, 定义 $(\underline{\alpha}',\underline{i}')\prec(\underline{\alpha},\underline{i})$(见 (1.2.16)). 记

$$(\underline{\beta},\underline{j})=(\beta_1,\cdots,\beta_r\,;\,j_1,\cdots,j_r)$$

是集合 $\underline{I}$ 中的唯一最大元.

情形 1. 假设 $\underline{\beta}\neq\underline{1}$. 设 $(\underline{\beta},\underline{j})=(\beta_1,\cdots,\beta_l,\beta_r\cdots,\beta_r\,;\,j_1,\cdots,j_l,j_{l+1},\cdots,j_r)$, $1\leq l<r$, $\beta_l\prec\beta_r$. 则 $\beta_r\neq 1$ 并且我们有对 $k\gg 0$

$$z[t]_k u\equiv\sum_{0<\alpha_1'\leq\cdots\leq\alpha_r'}c_{\underline{\alpha}',\underline{i}'}z^{-\alpha_1'}[t]_{i_1'}\cdots z^{-\alpha_r'}[t]_{i_r'}v_\Lambda\pmod{V_{r-1}}.$$

记 $(\underline{\beta}',\underline{j}'):=(\beta_1,\cdots,\beta_l,\beta_r-1,\cdots,\beta_r\,;\,j_1,\cdots,j_l,j_{l+1}+k-1,\cdots,j_r)$, 且有

$$\underline{I}'=\{(\underline{\alpha}',\underline{i}')\,|\,c_{\underline{\alpha}',\underline{i}'}\neq 0\}.$$

根据 (1.2.2) 式，单项

$$z^{-\beta_1}[t]_{j_1}\cdots z^{-\beta_l}[t]_{j_l}z^{-\beta_r+1}[t]_{j_{l+1}+k-1}\cdots z^{-\beta_r}[t]_{j_r}v_\Lambda$$

出现在 $z[t]_k u$ 的表达式中，因为相应此项的系数为 $m(k\beta_s-j_{l+1})c_{\underline{\beta},\underline{j}}\neq 0$ 其中 m 是某个固定的正整数而 $k\gg 0$. 这样 $\underline{I}'\neq\emptyset$, 并且 $z[t]_k u\in U(\widehat{\mathcal{W}})_{-n+1}\cap M'$, 与我们的假设相矛盾，所有这种情形不会出现.

情形 2. 假设 $\underline{\beta}=\underline{1}$, 这时 $r=n$. 所以我们可以设

$$u\equiv\sum_{\underline{i}}c_{\underline{i}}z^{-1}[t]_{i_1}\cdots z^{-1}[t]_{i_n}v_\Lambda+\sum_{\underline{l}}c_{\underline{l}}z^{-1}[t]_{l_1}\cdots z^{-1}[t]_{l_{n-2}}z^{-2}[t]_{l_{n-1}}v_\Lambda\pmod{V_{n-2}},$$

这里 $i_1\leq\cdots\leq i_n$, $l_1\leq\cdots\leq l_{n-2}$, 并且 $\overline{I}:=\{\underline{i}=(i_1,\cdots,i_n)\,|\,c_{\underline{i}}\neq 0\}\neq\emptyset$. 对于任意的 $\underline{i},\underline{i}'\in\overline{I}$, 定义

$$\underline{i}>\underline{i}'\iff\exists\,1\leq s\leq n\ \text{使得}\ i_s>i_s',\ i_t=i_t',\ \forall\,t>s. \tag{1.3.3}$$

令 $\underline{j}=(j_1,\cdots,j_n)$ 是集合 $\overline{I}$ 中的唯一最大元. 对于 $k\gg 0$, 我们可以得到一个非零的权向量

$$z[t]_k u\equiv\sum_{i_1',\leq\cdots\leq i_{n-1}'}d_{\underline{i}'}z^{-1}[t]_{i_1'}\cdots z^{-1}[t]_{i_{n-1}'}v_\Lambda\pmod{V_{n-2}},$$

因为相应与

$$(1,\cdots,1\,;\,j_1,\cdots,j_{n-2},k+j_{n-1}+j_n-2)$$

的项的系数为 $m(k+j_{n-1})(k+j_{n-1}-1)c_{\underline{j}}+(2k+j_{n-1}+j_n-1)c'_{\underline{h}}\neq 0$ 其中 m 为某个固定的正整数，$\underline{h}=(j_1,\cdots,j_{n-2},j_{n-1}+j_n-1)$. 这样 $0\neq z[t]_k u\in U(\widehat{\mathcal{W}})_{-n+1}\cap M'$, 显然是个矛盾.

定理 4.4.1 的证明. "(1) $\Rightarrow$ (2)": 根据 (1.2.2) 式，我们有 $[\widehat{\mathcal{W}}_n,\mathcal{P}_m]\subset\mathcal{P}_{n+m}$ 对于 $n\in\mathbb{Z}_+$ 成立 (回忆 (1.3.2)). 对 $|m|$ 进行归纳可以很容易的得出,

$$\mathcal{P}\cap\widehat{\mathcal{W}}_m\neq 0 \ \text{对于某个}\ m<0 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{P}\cap\widehat{\mathcal{W}}_{-1}\neq 0.$$

这样由 1.3.1 可得出

$$\mathcal{P}_{-1}=\mathcal{P}\cap\widehat{\mathcal{W}}_{-1}\neq 0. \tag{1.3.4}$$

"(2) $\Rightarrow$ (3)": 假设 $\mathcal{P}_{-1}\neq 0$. 根据文献 [124], 我们用 $f(t)$ 来表示使得 $z^{-1}f(t)\in\mathcal{P}_{-1}$ 且有最小次数 N 的单项式，并且令 $f(t)=t^N+f_{N-1}t^{t-1}+\cdots+f_0$. 我们称这样的多项式为 **特征多项式** (参见 [19, 150]). 令 $a=z^{-1}f(t)$. 因为 M' 是一个真子模，我们有 $b\cdot a\,v_\Lambda=0$ 其中 $b\in\widehat{\mathcal{W}}_+$. 根据 (1.3.1) 式，对于 $s=0,1,\cdots$, 我们得到

$$[z(t+1)^s,z^{-1}f(t)]\,v_\Lambda=\Lambda(t^sf(t)-(t+1)^sf(t+1)+f(0)\delta_{s,0}\,c))=0. \tag{1.3.5}$$

显然这就等价于说 $[zg(t),z^{-1}f(t)]=0$ for $g(t)\in\mathbb{F}[t]$.

一个权 $\Lambda\in\widehat{\mathcal{W}}_0^*$ 被它的 *central charge* $c=\Lambda(c)$ 描述，对于 $i\geq 0$ 它的 *label* $\Lambda_i=-\Lambda(t^i)$. 我们引入 生成序列:

$$\Delta_\Lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Lambda_n,\quad \text{和}\quad F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}F_n, \tag{1.3.6}$$

此处 $F_n=\delta_{n,0}c+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\Lambda_j$. 则 (1.3.5) 式等价于

$$\sum_{n=0}^{N}f_nF_{n+s}=0\quad for\quad s=0,1,\cdots.$$

我们有 $c-F(x)=(e^x-1)\Delta_\Lambda(x)$. 根据文献 [124] 和上述讨论，我们得到了 (*3*).

"(3) $\Rightarrow$ (4)" 根据文献 [124].

"(4) $\Rightarrow$ (1)" 显然. □

第二章 拟有限 $\mathcal{W}_\infty$- 模的分类

§2.1 简介

首先让我们给出一些一般性的定义. 令 $\mathbb{F}$ 是一个特征为零的代数闭域, Γ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个 非退化的 加法子群, 即它包含了 $\mathbb{F}^n$ 的一组 $\mathbb{F}$- 基. 用 $\mathbb{F}[\Gamma]=\mathrm{span}\{t^\alpha\,|\,\alpha\in\Gamma\}$ 表示 Γ 的群代数. 对任意的 $\alpha,\beta\in\Gamma$, 有运算 $t^\alpha\cdot t^\beta=t^{\alpha+\beta}$. 我们定义 **齐次算子** D_i 是由 $D_i:t^\alpha\mapsto\alpha_i t^\alpha$ 决定的 $\mathbb{F}[\Gamma]$ 的导子, 这里 $\alpha\in\Gamma$, $i=1,...,n$. 约定本文中一个元素 $\alpha\in\mathbb{F}^n$ 总是被写成 $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$. Weyl 型李代数 $\mathcal{W}(\Gamma,n)$(见文献 [20]) 是群代数 $\mathbb{F}[\Gamma]$ 和多项式代数的 $\mathbb{F}[D_1,...,D_n]$ 的张量积,

$$\mathcal{W}(\Gamma,n)=\mathbb{F}[\Gamma]\otimes\mathbb{F}[D_1,...,D_n]=\mathrm{span}\{t^\alpha D^\mu\,|\,\alpha\in\Gamma,\ \mu\in\mathbb{Z}_+^n\},\tag{1.1}$$

这里 $D^\mu=\prod_{i=1}^n D_i^{\mu_i}$, 具有括积运算:

$$[t^\alpha D^\mu,t^\beta D^\nu]=(t^\alpha D^\mu)\cdot(t^\beta D^\nu)-(t^\beta D^\nu)\cdot(t^\alpha D^\mu),$$

其中

$$(t^\alpha D^\mu)\cdot(t^\beta D^\nu)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^n}\begin{pmatrix}\mu\\ \lambda\end{pmatrix}\beta^\lambda t^{\alpha+\beta}D^{\mu+\nu-\lambda},\tag{1.2}$$

其中 $\beta^\lambda=\prod_{i=1}^n\beta_i^{\lambda_i}$ (这里我们用符号 β^λ 表示的意思与 (1.1) 式中符号 D^μ 意思相近, 并不会引起混淆), 并且 $\binom{\mu}{\lambda}=\prod_{i=1}^n\binom{\mu_i}{\lambda_i}$. 进一步, 对于 $i,j\in\mathbb{F}$, $\binom{i}{j}=i(i-1)\cdots(i-j+1)/j!$ 如果 $j\in\mathbb{Z}_+$, 其它情况 $\binom{i}{j}=0$.

在文献 [19] 中已经证明了 $\mathcal{W}(\Gamma,n)$ 有非平凡的泛中心扩张当且仅当 $n=1$. 在 $\mathcal{W}(\Gamma,1)$ 的泛中心扩张记为 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,1)$, $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,1)$ 的李运算定义为: 对于 $\alpha,\beta\in\Gamma\subset\mathbb{F}$, $\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}[t^\alpha[D]_\mu,t^\beta[D]_\nu]=&(t^\alpha[D]_\mu)\cdot(t^\beta[D]_\nu)-(t^\beta[D]_\nu)\cdot(t^\alpha[D]_\mu)\\&+\delta_{\alpha,-\beta}(-1)^\mu\mu!\nu!\begin{pmatrix}\alpha+\mu\\ \mu+\nu+1\end{pmatrix}C,\end{aligned}\tag{1.3}$$

这里 $[D]_\mu=D(D-1)\cdots(D-\mu+1)$, C 是 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,1)$ 的中心元素. 相应 (1.3) 式 $\mathcal{W}(\mathbb{Z},1)$ 的 2- 上循环最早出现在文献 [13] 中.

用 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$ 代表由 $\{t^\alpha D^\mu\,|\,\alpha\in\Gamma,\ |\mu|\geq1\}$ 张成的 $\mathcal{W}(\Gamma,n)$ 的李子代数, 这里 $|\mu|=\sum_{i=1}^n\mu_i$. 相类似的我们可以定义 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,1)^{(1)}$. 则 $\mathcal{W}_{1+\infty}=\widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z},1)$ 和

$\mathcal{W}_\infty = \widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z},1)^{(1)}$ 是众所周知的 $\mathcal{W}$- 无穷代数，$\mathcal{W}$- 无穷代数在许多物理理论中有重要的应用，例如在共型场理论，量子 Hall effect 理论等等 (参见 [126, 127, 128, 20]).

注意到 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$ 在运算 (1.2) 下也是一个结合代数. 可以证明作为李代数或者是结合代数 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$ 是单代数 (参见 [26]). 如果把它视为结合代数我们用 $\mathcal{A}(\Gamma,n)^{(1)}$ 来表示它. 显然一个结合代数 $\mathcal{A}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模也是一个李代数 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模，但是反之不一定正确. 这样只要考虑作为李代数 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模.

李代数 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)} = \oplus_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}_\alpha$ 是 Γ- 阶化的，具有阶化空间

$$\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}_\alpha = \mathrm{span}\{t^\alpha D^\mu \mid \mu \in \mathbb{Z}^n_+\backslash\{0\}\} \quad \text{其中} \quad \alpha\in\Gamma. \tag{1.4}$$

在文献 [20] 中，已经分类了 $\mathcal{W}(\Gamma,n)$ 的拟有限模. 在本文中，我们考虑更难一些的 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$ 的拟有限模的分类问题.

一个 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模 V 被称为 **拟有限 (quasifinite) 模** 如果 $V=\oplus_{\alpha\in\Gamma}V_\alpha$ 是一个 Γ- 阶化 $\mathbb{F}$- 向量空间，使得对于 $\alpha,\beta\in\Gamma$, $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}_\alpha V_\beta \subset V_{\alpha+\beta}$, $\dim V_\alpha<\infty$. 当我们研究这类李代数的表示时注意到 (1.4) 中每一个阶化空间仍然是无限维的，这样对于拟有限模的分类问题正像文献 [128] 中指出的那样是比较难的一个问题.

对于 $\alpha\in\mathbb{F}^n$, 可以定义拟有限 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模或者 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,1)^{(1)}$- 模 A_α, B_α 如下：它们有一组基 $\{y_\beta \mid \beta\in\Gamma\}$ 使得中心元素 C 的作用是平凡的，

$$A_\alpha: \quad (t^\beta D^\mu)y_\gamma = (\alpha+\gamma)^\mu y_{\beta+\gamma},$$

$$B_\alpha: \quad (t^\beta D^\mu)y_\gamma = (-1)^{|\mu|+1}(\alpha+\beta+\gamma)^\mu y_{\beta+\gamma},$$

对于 $\beta,\gamma\in\Gamma$, $\mu\in\mathbb{Z}^n_+\backslash\{0\}$ (这里符号 $(\alpha+\gamma)^\mu$ 的意义和 (1.2) 式中 β^λ 的一样). 这些模在文献 [20, 131] 中被定义. 显然的，A_α 或者 B_α 是不可约的当且仅当 $\alpha\notin\Gamma$. 容易看出 A_α 也是一个 $\mathcal{A}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模，但 B_α 则不是.

我们称 A_α 或者 B_α 的任意商子模为中间序列模 (参见 [20]). 这样本文的主要结果如下：

定理 2.1.1. (i) $\mathcal{W}(\mathbb{Z},1)^{(1)}$ *或者* $\mathcal{W}_\infty=\widehat{\mathcal{W}}(\mathbb{Z},1)^{(1)}$ *的不可约拟有限模是最高(低)权模或者是中间序列模.*

(ii) *如果* Γ *与* $\mathbb{Z}$ *不同构，则一个不可约拟有限* $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- *或者* $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,1)^{(1)}$- *模是中间序列模.*

因为在文献 [128] 中已经有了拟有限最高权模的完整详尽的描述，而最低权模是最高权模的对偶情形，所以定理 1.1 加上上述结果实际上给出了拟有限模的完

全分类，而且定理 1.1 还给出了结合代数 $\mathcal{A}(\Gamma,n)^{(1)}$ 的拟有限模的分类.

对于仿射李代数，Virasoro 代数，高秩 Virasoro 代数，Weyl 型李代数，Block 型李代数相似与定理 1.1 的结果在文献 [20,40,66] (也可以参看 [130]) 已经得到.

我们把一个拟有限模 V 称为**一致有界的**，如果存在 $N \geq 0$ 使得 $\dim V_\beta \leq N$ 对所有的 $\beta \in \Gamma$ 成立；如果 $D_1,...,D_n$ 作用在 V 上是半单的，则称 V 为 **权模**.

定理 2.1.2. (i) 一致有界不可分解权 $\mathcal{W}(\mathbb{Z},1)^{(1)}$- 模或者 $\mathcal{W}_\infty$- 模是中间序列模.

(ii) 如果 Γ 和 $\mathbb{Z}$ 不同构，则一致有界不可分解的拟有限权 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模，或者 $\widehat{\mathcal{W}}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模是中间序列模.

最后我们需要指出的是尽管本文的结果和文献 [20] 中的结果相类似，但是由于代数的不同 (主要是代数 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$ 并不包含元素 $t^\beta = t^\beta D^0, \beta \in \Gamma,$) 所以结果的证明比文献 [20] 中的证明要更复杂更有技巧一些.

§2.2 拟有限 $\mathcal{W}_\infty$- 模

首先我们证明定理 1.1(i) 和定理 1.2(i). 因为有中心扩张的情形定理的证明和没有中心扩张的情形类似，所以为方便起见，只考虑没有中心扩张的情形.

现在考虑李代数 $W := \mathcal{W}(\mathbb{Z},1)^{(1)} = \operatorname{span}\{t^iD^j \mid i \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{Z}_+\backslash\{0\}\}$. 在这种情况下 $D = t\frac{d}{dt}$, 由 (1.4) 式，可知 $W = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} W_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的，这里

$$W_i = \operatorname{span}\{t^iD^j \mid j \in \mathbb{Z}_+\backslash\{0\}\} = \{t^iDf(D) \mid f(D) \in \mathbb{F}[D]\}$$

其中 $i \in \mathbb{Z}$. 由 (1.2) 式，我们有

$$\begin{aligned}&[t^iDf(D), t^jDg(D)]\\ &= t^{i+j}D((D+j)f(D+j)g(D) - (D+i)g(D+i)f(D)),\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

其中 $i,j \in \mathbb{Z}$, $f(D),g(D) \in \mathbb{F}[D]$. 进一步，$\mathcal{W}$ 有三角分解：$W = W_+ \oplus W_0 \oplus W_-$. 一般来说，对于任意 $\mathbb{Z}$- 阶化空间 M, 我们总是使用符号 M_+, M_-, M_0 和 $M_{[p,q)}$ 来代表由 k 齐次元素张成的空间，其中 k 分别满足条件 $k>0, k<0, k=0$ 和 $p \leq k < q$. 用 $Vir = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{F}\,t^iD$, 表示 (无中心的)Virasoro 代数.

引理 2.1. 令 S 是 W_0 的一个具有有限余维数的子空间. 取 $i_0 > 0$, 用 $M_{i_0,S}$

代表由 $t^{i_0}D, t^{i_0+1}D, t^{i_0}D^2$ 和 S 生成的 $\mathcal{W}$ 的子代数. 则一定存在整数 $K>0$ 使得 $W_{[K,\infty)} \subset M_{i_0,S}$.

证明. 根据对 S 的假设, 存在整数 $m_0 \geq 0$, 使得对所有的整数 $m \geq m_0$, 一定存在多项式 $Df(D) \in S$, 具有性质 $\deg f = m$. 在下面的断言中我们将对 m 进行归纳证明.

断言. 对任意的 $1 \leq m \leq m_0, m \in \mathbb{Z}$, 一定存在整数 $K_m > mK_{m-1}$ (这里我们取 $K_0 = i_0$), 使得对所有的整数 $k \geq K_m$ 有 $t^kD^m \in M_{i_0,S}$.

假设 $m=1$. 对于任意充分大的整数 k, 我们可以把 k 分解成表达式 $k = k_1i_0 + k_2(i_0+1)$, 其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+\backslash\{0\}$. 所以 t^kD 可以由 $t^{i_0}D, t^{i_0+1}D$ 生成, 也就是 $t^kD \in M_{i_0,S}$. 这样我们可以取 $K_1 > i_0$ 是足够大的整数, 能够保证我们的断言在 $m=1$ 时成立. 假设 $1 < m \leq m_0$, 由归纳法我们可以假设对于 $m-1$ 断言成立. 取 $K_m = mK_{m-1} + i_0$. 则对任意 $k \geq K_m$, 由 (2.1) 式我们有 $at^kD^m \equiv [t^{k-i_0}D^{m-1}, t^{i_0}D^2] \equiv 0 \pmod{M_{i_0,S}}$, 这里 $a = ((m-1)i_0 - 2(k-i_0)) < 0$, 即 $t^kD^m \in M_{i_0,S}$. 这样断言对 m 也成立.

下一步取 $K = K_{m_0}$. 对于任意的整数 $k \geq K$, 现在我们可以对 $m \geq 1$ 用归纳法如下证明 $t^kD^m \in M_{i_0,S}$; 如果 $m \leq m_0$, 则由断言 1. 我们马上就得到了结果. 假设 $m > m_0$. 令 $f(D)$ 是次数为 $m-1 \geq m_0$ 的多项式, 满足 $Df(D) \in S$, 则由 (2.1) 式, $kmt^kD^m \equiv [t^kD, Df(D)] \equiv 0 \pmod{M_{i_0,S}}$. 这就证明了 $W_{[K,\infty)} \subset M_{i_0,S}$. □

引理 2.2. 假设 V 是一个不可约拟有限 $\mathcal{W}$- 模, 没有最高或最低权. 对于任意 $i,j \in \mathbb{Z}, i \neq 0, -1$, 线性映射

$$t^iD|_{V_j} \oplus t^{i+1}D|_{V_j} \oplus t^iD^2|_{V_j} : V_j \to V_{i+j} \oplus V_{i+j+1} \oplus V_{i+j}$$

是单射. 特别的, 对于 $j \in \mathbb{Z}$, $\dim V_j \leq 2(\dim V_0) + \dim V_1$.

证明 (参见 [20]). 由于不可约性, V 一定是一个权模, 也就是一定存在 $\alpha \in \mathbb{F}$, 满足

$$V_i = \{v \in V \mid Dv = (\alpha + i)v\}. \tag{2.2}$$

令 $i > 0$, 并且对于 $0 \neq v_0 \in V_j$, 有 $(t^iD)v_0 = (t^{i+1}D)v_0 = (t^iD^2)v_0 = 0$. 如果需要我们可以平移 V_j 的阶化下标, 这样我们可以假设 $j=0$. 对于 $m \geq 1$, 令 S 是线

性映射 $W_0 \to \mathrm{End}(V_0) : D^m \mapsto D^m|_{V_0}$ 的核. 因为 $\dim V_0 < \infty$, 所以 S 是 W_0 的余维数有限的子空间. 这样 $M_{i,S}v_0 = 0$ 并且由引理 2.1, 我们有 $W_{[K,\infty)}v_0 = 0$, 这里 $K > 0$.

对于 $\mathcal{W}$ 的任意子空间 M, 我们用 $U(M)$ 来代表由 M 的标准单项式基张成的泛包络代数. 既然 $W = W_{[1,K)} + W_0 + W_- + W_{[K,\infty)}$, 利用 PBW 定理和 V 的不可约性, 我们有

$$
\begin{aligned}
V = U(W)v_0 &= U(W_{[1,K)})U(W_0 + W_-)U(W_{[K,\infty)})v_0 \\
&= U(W_{[1,K)})U(W_0 + W_-)v_0. \qquad (2.2.3)
\end{aligned}
$$

注意到 V_+ 是一个 W_+- 模. 令 V_+' 是 V_+ 的由 $V_{[0,K)}$ 生成的 W_+- 子模. 我们将要证明 $V_+ = V_+'$.

令 $k \geq 0$, 并且令 $x \in V_+$ 具有次数 $\deg x = k$. 如果 $0 \leq k < K$, 则由定义, $x \in V_+'$. 假设 $k \geq K$. 利用 (2.3) 式, x 是 u_1x_1 的线性组合形式, 其中 $u_1 \in W_{[1,K)}, x_1 \in V$. 这样 u_1 的次数 $\deg u_1$ 满足 $1 \leq \deg u_1 < K$, 所以有 $0 < \deg x_1 = k - \deg u_1 < k$. 根据归纳假设, $x_1 \in V_+'$, 这样 $x \in V_+'$. 这就证明了 $V_+ = V_+'$.

事实 $V_+ = V_+'$ 意味着 W_+- 模 V_+ 是由有限维空间 $V_{[0,K)}$ 生成的. 选择 $V_{[0,K)}$ 的一组基 B, 则对任意的 $x \in B$, 我们有 $x = u_xv_0$, 其中 $u_x \in U(W)$. 把 u_x 看作是 $\mathcal{W}$ 中的基构成的多项式, 通过对多项式的次数进行归纳利用公式 $[w, w_1w_2] = [w, w_1]w_2 + w_1[w, w_2]$ 这里 $w \in W$, $w_1, w_2 \in U(W)$, 我们可以得到一定存在一个充分大的正整数 $k_x > K$ 使得 $[W_{[k_x,\infty)}, u_x] \subset U(W)W_{[K,\infty)}$. 这样由 $W_{[K,\infty)}v_0 = 0$, 我们有 $W_{[k_x,\infty)}x = [W_{[k_x,\infty)}, u_x]v_0 + u_xW_{[k_x,\infty)}v_0 = 0$. 取 $K' = \max\{k_x \,|\, x \in B\}$, 则有 $W_{[K',\infty)}V_{[0,K)} = 0$ 并且

$$
W_{[K',\infty)}V_+ = W_{[K',\infty)}U(W_+)V_{[0,K)} = U(W_+)W_{[K',\infty)}V_{[0,K)} = 0.
$$

既然存在某个充分大的整数 $K_1 > K'$, 能够保证 $W_+ \subset W_{[K',\infty)} + [W_{[-K_1,0)}, W_{[K',\infty)}]$, 这就意味着我们有 $W_+V_{[K_1,\infty)} = 0$. 现在假设 $x \in V_{[K_1+K,\infty)}$. 则由 (2.3) 式, 它是具有 u_1x_1 这种形式元素的和, 其中 u_1 满足条件 $u_1 \in W_{[1,K)}$. 但是此时 x_1 的次数 $\deg x_1 > \deg x - K \geq K_1$, 所以 $x_1 \in V_{[K_1,\infty)}$. 这样由 $W_+V_{[K_1,\infty)} = 0$, 我们有 $u_1x_1 = 0$, 也就是 $x = 0$. 这就证明了 V 的次数 degree $\geq K_1 + K$.

现在令 K'' 是满足 $V_{K''} \neq 0$ 的最大的整数. 既然 W_0 是交换的, 则一定存在

一个 W_0 的公共特征向量 $v_0' \in V_{K''}$. 这样 v_0' 是 $\mathcal{W}$ 的最高权向量，这就与我们引理的假设相矛盾. $\square$

定理 1.1(i) 可以由定理 1.2(i) 和引理 2.2 得到，所以只要证明了定理 1.2(i) 就足够了. 这样从现在起，我们假设 V 是一致有界不可分解权 $\mathcal{W}$- 模使得 (2.2) 成立.

考虑 V 作为 Virasoro 代数 Vir 的权模，由文献 [130], 一定存在某个 $N \geq 0$ 满足 $\dim V_k = N$ 对所有的 $k \in \mathbb{Z}$ 成立，其中要求 $k + \alpha \neq 0$, 并且 $\alpha \in \mathbb{F}$ 是固定的且使得 (2.2) 成立的数. 而且 V 作为 Vir- 模只有有限个分解因子，当 $k >> 0$ 时 $t^{-1}D|_{V_k} : V_k \to V_{k-1}$ 是双射. 所以，我们可以找到 V_k 的一组基 $Y_k = (y_k^{(1)}, ..., y_k^{(N)})$ 使得

$$(t^{-1}D)Y_k = Y_{k-1} \text{ 对于 } k >> 0. \tag{2.4}$$

由于 $N = 0$ 时证明是平凡的，所以我们假设 $N \geq 1$. 在以下证明中我们总是假设 k 是整数而且 $k >> 0$. 设

$$(t^i D)Y_k = Y_{k+i}P_{i,k} \text{ 其中 } P_{i,k} \text{ 是 } N \times N \text{ 矩阵，且 } i \in \mathbb{Z}.$$

利用 (2.2), (2.4) 式，对于 $i = 1, 2$ 用 Y_k 作用在 $[t^{-1}D, t^i D] = (i+1)t^{i-1}D$ 的两边，我们得到

$$P_{-1,K} = 1, \ \ P_{0,k} = \bar{k}, \ \ P_{1,k} = [\bar{k}]^2 + P_1, \ \ P_{2,k} = [\bar{k}]^3 + 3\bar{k}P_1 + P_2, \tag{2.5}$$

其中 P_1, P_2 是 $N \times N$ 矩阵. 为了方便起见，在文章内容清楚的时候，我们用纯量 $a \in \mathbb{F}$ 等同于相应的 $N \times N$ 阶纯量矩阵 $a \cdot \mathbf{1}_N$, 这里 $\mathbf{1}_N$ 是 $N \times N$ 单位矩阵. 对于 $k \in \mathbb{Z}$ 我们也采用记号 $\bar{k} = k + \alpha$. 一般来讲，不加说明我们使用记号 $[a]^j = a(a+1)\cdots(a+j-1)$, 其中 $a \in \mathbb{F}, j \in \mathbb{Z}_+$ (参见 (1.3) 中符号 $[D]_j$). 把 V 看作 Vir- 模，通过选择 V 的分解序列我们可以假设 P_1, P_2 是上三角矩阵. 用 Y_k 作用在 $[tD, t^2D] = t^3D$ 的两边，根据 (2.5) 式，我们有

$$P_{3,k} = [\bar{k}]^4 + 6[\bar{k}]^2 P_1 + 4\bar{k}P_2 + P_3, \tag{2.6}$$

其中 $P_3 = -3(2P_1 + P_1^2 - 2P_2) + [P_1, P_2]$, 这里 $[P_1, P_2] = P_1P_2 - P_2P_1$ 是一般的李积运算. 回忆 $D = t\frac{d}{dt}$, 据此对于 $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{0\}$ 我们有 $t^{i+j}(\frac{d}{dt})^j = t^i[D]_j$. 以下方便时，我们将经常使用符号 $\frac{d}{dt}$ 来替代 D. 要记住 $\frac{d}{dt}$ 是一个次数为 -1 的算

子. 假设

$$(\tfrac{d}{dt})^i Y_k = Y_{k-i}Q_{i,k} \text{ 其中 } Q_{i,k} \text{ 是} N\times N \text{ 矩阵，并且 } i\geq 1.$$

利用 $[\frac{d}{dt},(\frac{d}{dt})^i]=0$, 我们有 $Q_{i,k}=Q_i$ 即不依赖于 k 的选择. 注意既然 $\frac{d}{dt}=t^{-1}D$, 由 (2.4) 式我们有 $Q_1=\mathbf{1}_N$.

引理 2.3. *对所有 $i\in 2\mathbb{Z}_++1, P_1, P_2$ 和 $Q_i-\mathbf{1}_N$ 都是严格上三角矩阵.*

证明. 设 $N>1$. 根据 (2.1) 或 (1.2) 式, 对于 $i\geq 1$ 我们可以得到

$$-[i+1]_4(\tfrac{d}{dt})^{i-2}=3[t^2\tfrac{d}{dt},[t^2\tfrac{d}{dt},(\tfrac{d}{dt})^i]]+2(2i-1)[t^3\tfrac{d}{dt},(\tfrac{d}{dt})^i],$$

$$\begin{aligned}0=&[t^2\tfrac{d}{dt},[t^2\tfrac{d}{dt},[t^2\tfrac{d}{dt},(\tfrac{d}{dt})^i]]]\\&+(i-1)(i-2)[t^4\tfrac{d}{dt},(\tfrac{d}{dt})^i]+2(i-1)[t^2\tfrac{d}{dt},[t^3\tfrac{d}{dt},(\tfrac{d}{dt})^i]],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[i+1]_6(\tfrac{d}{dt})^{i-4}=&10[t^3\tfrac{d}{dt},[t^3\tfrac{d}{dt},(\tfrac{d}{dt})^i]-6(i-4)[t^5\tfrac{d}{dt},(\tfrac{d}{dt})^i]\\&-15[t^2\tfrac{d}{dt},[t^4\tfrac{d}{dt},(\tfrac{d}{dt})^i]],\end{aligned}$$

这里符号 $[a]_j$ 和 (1.3) 式中的符号 $[D]_j$ 相似 (参见 (2.5) 式中 $[a]^j$ 的符号). 以下为了方便, 我们约定表达式中没有定义, 但是在形式上又出现的记号当作零来处理; 举例来说, 如果 $i\leq 2$ 则 $(\frac{d}{dt})^{i-2}=0$. 这三个公式用 Y_k 来作用, 我们得到

$$\begin{aligned}-[i+1]_4Q_{i-2}=&3(P_{1,k-i+1}P_{1,k-i}Q_i-2P_{1,k-i+1}Q_iP_{1,k}+Q_iP_{1,k+1}P_{1,k})\\&+2(2i-1)(P_{2,k-i}Q_i-Q_iP_{2,k}),\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}0=&P_{1,k-i+2}P_{1,k-i+1}P_{1,k-i}Q_i-3P_{1,k-i+2}P_{1,k-i+1}Q_iP_{1,k}\\&+3P_{1,k-i+2}Q_iP_{1,k+1}P_{1,k}-Q_iP_{1,k+2}P_{1,k+1}P_{1,k}\\&+(i-1)(i-2)(P_{3,k-i}Q_i-Q_iP_{3,k})\\&+2(i-1)(P_{1,k-i+2}(P_{2,k-i}Q_i-Q_iP_{2,k})\\&-(P_{2,k-i+1}Q_i-Q_iP_{2,k+1})P_{1,k}),\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}[i+1]_6Q_{i-4}=&10(P_{2,k-i+2}P_{2,k-i}Q_i-2P_{2,k-i+2}Q_iP_{2,k}+Q_iP_{2,k+2}P_{2,k})\\&-6(i-4)(P_{4,k-i}Q_i-Q_iP_{4,k})\\&-15(P_{1,k-i+3}(P_{3,k-i}Q_i-Q_iP_{3,k})\\&-(P_{3,k-i+1}Q_i-Q_iP_{3,k+1})P_{1,k}),\end{aligned}\tag{2.9}$$

其中 $i \geq 1$. 我们用符号 $p_{i,k}^{(a,b)}$ 表示矩阵 $P_{i,k}$ 的第 a 行 b 列上的元素，对于一个正整数对 (a,b), 其中 $1 \leq b \leq a \leq N$, 假设已归纳的证明了

$$q_i^{(a_1,b_1)} = 0 \tag{2.10}$$

对于所有的 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 和对于 $a_1 > a$, $b_1 \leq b$ 或者 $a_1 \geq a$, $b_1 < b$. 情形成立. 现在为了方便，我们采用下列符号:

$$p_{j,k} = p_{j,k}^{(a,a)}, \quad p'_{j,k} = p_{j,k}^{(b,b)}, \quad p_j = p_j^{(a,a)}, \quad p'_j = p_j^{(b,b)}, \quad q_j = q_j^{(a,b)}$$

其中 $j \in \mathbb{Z}$. 设 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$. 利用 (2.10) 式，通过比较 (2.7)-(2.9) 式子中第 a 行第 b 列上的元素，我们得到了

$$\begin{aligned}
-[i+1]_4 q_{i-2} = {} & (3(p_{1,k-i+1}p_{1,k-i} - 2p_{1,k-i+1}p'_{1,k} + p'_{1,k+1}p'_{1,k}) \\
& + 2(2i-1)(p_{2,k-i} - p'_{2,k}))q_i,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
0 = {} & (p_{1,k-i+2}p_{1,k-i+1}p_{1,k-i} - 3p_{1,k-i+2}p_{1,k-i+1}p'_{1,k} + 3p_{1,k-i+2}p'_{1,k+1}p'_{1,k} \\
& - p'_{1,k+2}p'_{1,k+1}p'_{1,k} + (i-1)(i-2)(p_{3,k-i} - p'_{3,k}) \\
& + 2(i-1)(p_{1,k-i+2}(p_{2,k-i} - p'_{2,k}) \\
& - (p_{2,k-i+1} - p'_{2,k+1})p'_{1,k}))q_i,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
[i+1]_6 q_{i-4} = {} & (10(p_{2,k-i+2}p_{2,k-i} - 2p_{2,k-i+2}p'_{2,k} + p'_{2,k+2}p'_{2,k}) \\
& - 6(i-4)(p_{4,k-i} - p'_{4,k}) - 15(p_{1,k-i+3}(p_{3,k-i} - p'_{3,k}) \\
& - (p_{3,k-i+1} - p'_{3,k+1})p'_{1,k}))q_i.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

对于 $j = 4, 5$, 利用 $[t^2\frac{d}{dt}, t^{j+1}\frac{d}{dt}] = (j-1)t^{i+2}\frac{d}{dt}$ 作用在 $y_k^{(b)}$ 上，因为 P_1, P_2 是上三角矩阵，利用 (2.5) 和 (2.6) 式，我们得到了

$$\begin{cases}
p_{4,k} = [\overline{k}]^5 + 10[\overline{k}]^3 p_1 + 10[\overline{k}]^2 p_2 + 5\overline{k} p_3 + p_4, \\
p_{5,k} = [\overline{k}]^6 + 15[\overline{k}]^4 p_1 + 20[\overline{k}]^3 p_2 + 15[\overline{k}]^2 p_3 + 6\overline{k} p_4 + p_5,
\end{cases} \tag{2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}
p_4 &= -2(24p_1 + 12p_1^2 - 18p_2 + p_1p_2), \\
p_5 &= 5(-72p_1 - 34p_1^2 + p_1^3 + 48p_2 - 6p_1p_2).
\end{aligned}$$

对于 $p'_{j,k}, j=4,5$ 我们有相类似的公式. 利用 $[t^3\frac{d}{dt}, t^4\frac{d}{dt}] = t^6\frac{d}{dt}$ 作用在 $y_k^{(b)}$ 上, 我们得到了关于 p_1 和 p_2 之间的关系, 这正是大家都熟知的 Virasoro 代数的关系 (参见 [44]).

$$8p_1^2 + 4p_1^3 - 6p_1p_2 + p_2^2 = 0. \tag{2.15}$$

首先我们做以下假设

$$q_i \neq 0 \quad 对于 \quad i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1. \tag{2.16}$$

在 (2.11) 式中, 通过用 $i+2$ 来代替 i, 对于 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 因为 $[i+3]_4 \neq 0$, 我们观察到有无限多个 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 使得 (2.16) 式成立. 对于一个固定的 k, 我们用 $f_1(i), f_2(i), f_3(i)$ 来分别表示 q_i 在 (2.11)-(2.13) 式中的系数. 它们是关于 i 的多项式. 这样 (2.12) 式和 (2.16) 式说明了对于无限多个 i 有 $f_2(i) = 0$. 所以对所有的 i 有 $f_2(i) = 0$ 成立. 在 (2.12) 式中利用 (2.5) 和 (2.6) 式, 直接计算 $f_2(i)$ 中 i^4 的系数可得到系数是 $p_1 - p'_1$. 因此有 $p'_1 = p_1$. 相似的, 式子 (2.11) 和 (2.13) 说明了对于所有的 i

$$g(i) := [i+1]_4[i-1]_4 f_3(i) - [i+1]_6 f_1(i-2) f_1(i)$$

是零. 稍微麻烦一点的直接计算可以得到 $g(i)$ 中 i^{12} 的系数是 $6p_1$ (利用 $p'_1 = p_1$). 这样就得到了 $p_1 = 0$. 通过 (2.15) 式知 $p_2 = 0$. 这样又得到了 $p'_1 = p'_2 = 0$. 有了这些结论 (2.11) 式可简化为 $[i+1]_4(q_i - q_{i-2}) = 0$. 根据这些我们可以得到对于所有 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 有 $q_i = q_1$ 成立.

接下来考虑两种情况: 首先假设 $b < a$. 那么有 $q_1 := q_1^{(a,b)} = 0$ (回忆 $Q_1 = \mathbf{1}_N$). 如果 (2.16) 式成立, 那么以上就证明了对所有的 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 有 $q_i = q_1 = 0$. 这与 (2.16) 式矛盾. 这样对任意的 i,(2.16) 式都不能成立. 即, 在此情况下我们得到了对所有 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 有 $q_i = 0$.

其次假设 $a = b$. 这时 $q_1 := q_1^{(a,a)} = 1$, 这样至少对于 $i = 1$ 的情形 (2.16) 成立. 那么上面的证明说明了 $p_1 = p_2 = 0$, $q_i = q_1$, 即, 在此情况下我们有 $p_1^{(a,a)} = p_2^{(a,a)} = 0$, 对于所有的 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 有 $q_i^{(a,a)} = q_1^{(a,a)} = 1$ 成立.

这样就完成了引理的证明. $\square$

引理 2.3 说明了矩阵 $P_{j,k}$ 的对角元素是 $[k]^{j+1}$, 这里 $j = 1, 2$. 由于 Vir_+ 是由

tD, t^2D 生成的，所以此结论对所有 $j \geq 1$ 也成立.

引理 2.4. 对于 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 有 $P_1 = P_2 = 0,\ Q_i = \mathbf{1}_N$.

证明. 利用归纳法. 对于给定的正整数对 (a, b), 其中 $1 \leq a < b \leq N$, 假设我们已证明

$$p_1^{(a_1,b_1)} = p_2^{(a_1,b_1)} = 0, \quad q_i^{(a_1,b_1)} = \delta_{a_1,b_1}, \tag{2.17}$$

这里 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 并且 $a_1 > a, b_1 \leq b$ 或者 $a_1 \geq a, b_1 < b$. 采用记号

$$p_{j,k} = p_{j,k}^{(a,a)}, \quad p_j = p_j^{(a,a)}, \quad p'_{j,k} = p_{j,k}^{(a,b)}, \quad p'_j = p_j^{(a,b)}, \quad q_i = q_i^{(a,b)},$$

其中 $j \in \mathbb{Z}, i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$, 并且用记号

$$\widetilde{P}_{j,k} = \begin{pmatrix} p_{j,k} & p'_{j,k} \\ 0 & p_{j,k} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}_j = \begin{pmatrix} 0 & p'_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \widetilde{Q}_i = \begin{pmatrix} 1 & q_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这样，这些 2×2 矩阵彼此之间是可交换的. 根据 (2.17) 式的假设，我们可以看到当我们用上面的矩阵 "~" 来替换 (2.7)-(2.9) 式中的相对应的矩阵时，结论仍然成立. 并且对于 $\widetilde{P}_{j,k}, j = 3, 4, 5$ 我们有和 (2.6) 以及 (2.14) 式相似的公式 (这里注意到，$[\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2] = 0$). 既然 $\widetilde{Q}_i$ 是可逆的，由 (2.8) 式，我们得到了一个关于 $\widetilde{P}_{i,k}$ 的等式. 在这个等式中利用 (2.5) 式和 (2.6) 式，我们得到 $4[i]_3(3\widetilde{P}_1 - \widetilde{P}_2) = 0$. 这说明了 $\widetilde{P}_2 = 3\widetilde{P}_1$. 接着由 (2.7) 式和 (2.9) 式我们有

$$[i+1]_4 \widetilde{Q}_{i-2} = [i]_2(i^2 - i + 12\widetilde{P}_1 - 2)\widetilde{Q}_i,$$
$$[i+1]_6 \widetilde{Q}_{i-4} = [i]_4(i^2 - 3i + 30\widetilde{P}_1 - 4)\widetilde{Q}_i.$$

既然 $\widetilde{Q}_i$ 是可逆的，上面的结论说明 $\widetilde{P}_1 = 0$ 并且 $\widetilde{P}_2 = 0$. 而且还可以得到对于 $i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$ 有 $\widetilde{Q}_i = \widetilde{Q}_1 = \mathbf{1}_2$ 成立. 这就证明了对于数对 (a, b)(2.17) 成立. 这样我们就完成了引理的证明. □

由引理 2.4 和等式 (2.5), 我们知道对于 $k >> 0$ 时 $P_{1,k} = [\overline{k}]^2$, $P_{2,k} = [\overline{k}]^3$, $Q_i = 1, i \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$, 都是纯量矩阵. 在需要的情况下通过平移 V_k 的阶化下标，我们可以假设 $[\overline{k}]^2, [\overline{k}]^3 \neq 0$ 而且对于 $k \geq 0$ 时 (2.4) 式成立. 利用 $[(\frac{d}{dt})^2, [(\frac{d}{dt})^2, t^2\frac{d}{dt}]] = 8(\frac{d}{dt})^3$ 作用在 Y_0 上，我们得到 $Q_2^2 = 1$. 由线性代数的知识可以知道， Q_2 是一个可以对角化的矩阵. 注意到

$$\sigma = (\tfrac{d}{dt})^2 \cdot (t^3 \tfrac{d}{dt})|_{V_0} \tag{2.18}$$

是 V_0 上的线性变换 (回忆 (1.2) 式，注意运算 "·"), 使得 $\sigma Y_0=[2]^3 Y_0 Q_2$. 这样通过重新选择基底 Y_0 并且重新定义 Y_k, 使得对 $k\geq 0$ 有 (2.4) 式成立 (此时对基底 Y_k 的改变不会影响 $P_{1,k},P_{2,k},Q_i,i\in 2\mathbb{Z}_++1$, 原因是它们都是纯量矩阵), 我们可以假设 Q_2 是对角矩阵，并且 Q_2 的对角元素是 ± 1).

引理 2.5. *对所有的 $i,k\in\mathbb{Z}$ 其中 $k,k+i\geq 0$, $P_{i,k}$ 是纯量矩阵.*

证明. 利用 $[tD,t^{i-1}D]=(i-2)t^iD$ 和 (2.5) 式，通过对 i 进行归纳，我们得到 $P_{i,k}=[k]^{i+1}$ 其中 $i\geq -1$, $k\geq 0$. 这样假设 $i=-i_1\leq -2$, $k+i\geq 0$. 令 j 是任意整数，使得 $j>i_1$. 利用 $(j+i_1)t^{j-i_1}D=[t^{-i_1}D,t^jD]$ 作用在 Y_k 上，我们得到

$$(j+i_1)[k]^{j-i_1+1}=[k]^{j+1}P_{-i_1,k+j}-[k-i_1]^{j+1}P_{-i_1,k}.$$

利用 $k+j$ 来替换 k,$2j$ 来替换 j, 我们分别得到两个等式. 由这三个等式，我们可以很容易的得到 $P_{-i_1,k}$ 是纯量矩阵. □

既然 $\mathcal{W}$ 是由 $Vir\cup\{(\frac{d}{dt})^2\}$ 生成的，通过对 j 进行归纳，我们可以证明

$$(t^{i+j}(\tfrac{d}{dt})^j)Y_k=Y_{k+i}P_{i,j,k}\ \text{对于某个对角矩阵}\ P_{i,j,k}, \tag{2.19}$$

对所有的 $i,j,k\in\mathbb{Z}$ 成立，其中 $j\geq 1$, $k,i+k\geq 0$.

引理 2.6. *用 $V(a)$ 表示由 $y_0^{(a)}$, $a=1,...,N$ 生成的 V 的 $\mathcal{W}$- 子模. 则 $V(a)$ 是中间序列模，使得 $V'=V(1)+...+V(N)$ 是 $\mathcal{W}$- 子模的直和.*

证明. 因为 $U(\mathcal{W})=U(\mathcal{W}_-)U(\mathcal{W}_0+\mathcal{W}_+)$ 而且 $V(a)=U(\mathcal{W})y_0^{(a)}$, 把 $u\in U(\mathcal{W})$ 写成 $u_1\cdots u_r w_1\cdots w_s$ 的线性组合的形式，其中 $u_i\in\mathcal{W}_-$, $w_i\in\mathcal{W}_0+\mathcal{W}_+$, 利用 (2.19) 式，对 $r+s$ 进行归纳我们得到通过 $\dim V(a)_k=1$ 这里 $k\geq 0$. 既然 $V(a)$ 是一个 Vir- 模，根据文献 [130], 对所有的 k 且 $k+\alpha\neq 0$, 有 $\dim V(a)_k=1$. 这样根据 (2.5) 式和上面的引理，我们可以证明 $V(a)$ 是一个 A_α 或者 B_α 的子商模，即， $V(a)$ 是一个中间序列 $\mathcal{W}$- 模 (参见 [131]).

对于 $a=1,...,N$, 令 $V'(a)=V(a)\cap\sum_{i\neq a}V(i)$. 则显而易见，对于 $k\geq 0$ 有 $V'(a)_k=\{0\}$. 这样我们一定有 $V'(a)=\{0\}$. 这就证明了引理. □

现在令 $V''=V/V'$. 则 V'' 是一个有限维的平凡模. 通过对 $N+\dim V''$ 进行归纳，我们可以得到如果 $N\geq 2$ 则 V 是可分解的. 这样 $N=1$ 并且我们可以进一步得出 V 是中间序列模. 这就证明了定理 1.2(i).

推论 2.7. *假设 V 是一致有界拟有限 $\mathcal{W}$- 模，满足 (2.2) 式，并且存在 $N\geq 1$*

使得当 $\alpha+i\neq 0$ 时 $\dim V_i=N$ 对所有的 $i\in\mathbb{Z}$ 成立. 固定 $i_0\in\mathbb{Z}$ 使得 $\alpha+i_0\neq 0$, 固定 V_{i_0} 的一组基 Y_{i_0}. 则对所有的 $k\in\mathbb{Z}$ 如果 $\alpha+k\neq 0$ 那么存在 V_k 的一组基 Y_k, 使得当 $\alpha+i_0+j\neq 0$ 时 $(t^jD)Y_{i_0}=(\alpha+i_0)Y_{i_0+j}$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}$ 成立. □

§2.3 拟有限 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模

因为定理 1.1(ii) 是定理 1.2(ii) 的特殊情况，我们证明定理 1.2(ii) (参见 [20]). 这样我们可以假设 Γ 是一个与 $\mathbb{Z}$ 不同构的群，并且 V 是一个不可分解的拟有限权 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$- 模，使得存在 $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{F}^n$ 满足 (参见 (2.2))

$$V_\beta=\{v\in V\mid D_iv=(\alpha_i+\beta_i)v,\ i=1,...,n\}\ \ 其中\ \ \beta\in\Gamma.$$

正像文献 [20] 中证明的那样， V 是一致有界的，并且存在 $N\geq 0$ 使得 $\alpha+\beta\neq 0$ 时对所有的 $\beta\in\Gamma$ 有 $\dim V_\beta=N$ 成立. 为了方便起见，对所有 $\mu\in\mathbb{F}^n$ 我们记 $\overline{\mu}=\mu+\alpha$.

根据文献 [24], 我们可以假设对 $i=1,...,n$, 所有的元素 $\gamma(i)=(\delta_{1,i},...,\delta_{n,i})$ 都在 Γ 中. 我们记 $\mathcal{D}=\oplus_{i=1}^n\mathbb{F}D_i$ 并且定义 $\Gamma\times\mathcal{D}$ 上的内积

$$\langle\beta,d\rangle=\sum_{i=1}^n\beta_id_i\quad 其中\quad \beta=(\beta_1,...,\beta_n)\in\Gamma,\ d=\sum_{i=1}^nd_iD_i\in\mathcal{D}.\tag{3.1}$$

则 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在下述意义下是 **非退化的**: 如果 $\langle\beta,\mathcal{D}\rangle=0$ 对于 $\beta\in\Gamma$ 则 $\beta=0$ 或者如果 $\langle\Gamma,d\rangle=0$ 对于 $d\in\mathcal{D}$ 则 $d=0$.

根据 (1.2) 式和 (3.1) 式，我们有

$$[t^\beta d,t^\gamma d']=t^{\beta+\gamma}(\langle\gamma,d\rangle d'-\langle\beta,d'\rangle d)\ \ 这里\ \ \beta,\gamma\in\Gamma,\ d,d'\in\mathcal{D}.\tag{3.2}$$

固定一个元素 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $\overline{\gamma},\overline{\gamma}\pm\gamma(i),\overline{\gamma}\pm 2\gamma(i)\neq 0$ 对 $i=1,...,n$ 成立. 就像在 (2.18) 式中那样,

$$\sigma_i=(t^{-2\gamma(i)}D_i(D_i-1))\cdot(t^{2\gamma(i)}D_i)|_{V_\gamma}\ \ 对于\ \ i=1,...,n,$$

是可对角化的算子 (注意在 (2.18) 式中， $(\frac{d}{dt})^2=t^{-2}D(D-1)$ 而且 $t^3\frac{d}{dt}=t^2D$). 既然 σ_i, $i=1,...,n$, 彼此之间互相交换，我们可以选择 V_γ 的一组基 Y_γ, 使得 σ_i 在这组基下是对角矩阵. 令 $\beta\in\Gamma\backslash\{0\}$ 是满足条件 $\overline{\gamma}+\beta\neq 0$ 任意元素. 我们将定义 $V_{\gamma+\beta}$ 的一组基 $Y_{\gamma+\beta}$ 如下：我们可以选择 $d\in\mathcal{D}$ 使得 $\langle\overline{\gamma},d\rangle,\langle\beta,d\rangle,\langle\overline{\gamma}+\beta,d\rangle\neq 0$.

令 $W(\beta) = \mathrm{span}\{t^{i\beta}d^j \mid i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_+\backslash\{0\}\}$ 是 $\mathcal{W}(\Gamma,n)^{(1)}$ 的一个李子代数，根据 (3.2) 它同构与 $\mathcal{W}(\mathbb{Z},1)^{(1)}$(参见 [20]). 记 $V(\beta) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} V_{\gamma+i\beta}$. 则 $V(\beta)$ 是一致有界拟有限 $W(\beta)$- 模. 根据推论 2.7, $t^\beta d|_{V_\gamma} : V_\gamma \to V_{\gamma+\beta}$ 是一个双射. 我们定义 $Y_{\gamma+\beta} = \langle\overline{\gamma}+\beta, d\rangle^{-1}(t^\beta d)Y_\gamma$.

就像在 (2.19) 式中的那样，我们可以通过对 $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ 归纳证明 $(t^\beta D^\mu)Y_\eta = Y_{\eta+\beta}P_{\beta,\mu,\eta}$, 这里 $P_{\beta,\mu,\eta}$ 是对角矩阵，并且对所有 $\beta,\eta \in \Gamma$, 我们有 $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n\backslash\{0\}$, 满足 $\overline{\eta}, \overline{\eta}+\beta \neq 0$. 这样和引理 2.6 的证明类似，我们可以知道 V 必须是中间序列模. 这就证明了定理 1.2(ii).

第三章 矩阵李超代数的 2- 上循环

§3.1 引言

由众所周知的事实，我们知道对于单李超代数来说完全可约性并不成立 (见 [3])，因此，李超代数的上同调理论比李代数的上同调理论更难更复杂，也就更让人们感兴趣 (见 [139-141, 19]). 正象李代数的上同调理论在李代数的结构和表示理论中扮演了重要角色那样 (见 [143, 144,133-138, 140, 55, 18,19, 25])，李超代数的上同调理论也是非常重要的. 特别值得注意的是李超代数的 2- 上循环在李超代数 L 的中心扩张方面起着关键作用：李超代数 L 的所有 1- 维中心扩张都是由 L 的 2- 上循环群决定的. 中心扩张在李超代数的结构理论和表示理论中经常被用到，由于中心扩张，李超代数的表示变得更丰富更令人感兴趣 (超 -Virasoro 代数是一个众所周知的例子). 这也是本文写作的主要动机之一.

首先，让我们回忆几个定义. 对于特征零域 $\mathbb{F}$ 上的李超代数， $L=L_{\bar 0}\oplus L_{\bar 1}$ (相应的一个结合超代数 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{\bar 0}\oplus\mathcal{A}_{\bar 1}$) 一个 L 上的 2- *上循环* (相应的一个 $\mathcal{A}$ 上 *cyclic* 1- *上循环* 见文献 [138, 142]) 是一个 $\mathbb{F}$- 双线形函数 $\psi: L\times L\to\mathbb{F}$ (相应的 $\psi:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{F}$) 满足条件 (3.1.1) 和 (3.1.2) (相应的 (3.1.3)):

$$\psi(v_1,v_2)=-(-1)^{\bar v_1\bar v_2}\psi(v_2,v_1)\quad(\text{斜超对称性}),\tag{3.1.1}$$

$$\psi(v_1,[v_2,v_3])=\psi([v_1,v_2],v_3)+(-1)^{\bar v_1\bar v_2}\psi(v_2,[v_1,v_3])\quad(\text{Jacobi 等式}),\tag{3.1.2}$$

$$\psi(v_0v_1,v_2)-\psi(v_0,v_1v_2)+(-1)^{\bar v_2(\bar v_0+\bar v_1)}\psi(v_2v_0,v_1)=0\quad(\text{cyclic 条件}),\tag{3.1.3}$$

对于齐次元素 $v_i\in L_{\bar v_i}$ 或者 $v_i\in\mathcal{A}_{\bar v_i}$. 在这里我们总是假设 v 是 Z_2 齐次元素，并且 $\bar v\in\mathbb{Z}_2=\{\bar 0,\bar 1\}$. 用 $C^2(L,\mathbb{F})$ (相应 $CC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})$) 代表 L 上的 2- 上循环构成的向量空间 (相应 cyclic $\mathcal{A}$) 上的 1- 上循环. 显然有：

$$CC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})\subset C^2(\mathcal{A}^L,\mathbb{F}),\tag{3.1.4}$$

这里 $\mathcal{A}^L$ 是以 $\mathcal{A}$ 为基向量空间的李超代数，它的括积运算由 super-commutator 定义. 对于任意 $\mathbb{F}$- 线形函数 $f:L\to\mathbb{F}$ (相应的 $f:\mathcal{A}\to\mathbb{F}$)，可以定义一个 2- 上循环 ψ_f(相应的 cyclic 1- 上循环)，通常称为平凡的 2- 上循环或者 2- 上边缘 (相应的平凡 cyclic 1- 上循环或 cyclic 1- 上边缘) 如下：

$$\psi_f(v_1,v_2)=f([v_1,v_2])\quad\text{for}\quad v_1,v_2\in L\quad(\text{相应的}\ \ v_1,v_2\in\mathcal{A}),\tag{3.1.5}$$

此处，在结合超代数的情况下，括积运算 $[\cdot,\cdot]$ 是 super-commutator. 用 $B^2(L,\mathbb{F})$ (相应的 $BC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})$) 代表由平凡 2-cocycles (相应的平凡的 cyclic 1- 上循环) 构成的向量空间. 两个 2- 上循环 (相应的两个 cyclic 1- 上循环) ϕ, ψ 被称为 *等价的*, 如果 $\phi-\psi$ 是平凡的. 商空间

$$H^2(L,\mathbb{F})=C^2(L,\mathbb{F})/B^2(L,\mathbb{F})=\{2\text{- 上循环的等价类}\}, \tag{3.1.6}$$

$$HC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})=CC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})/BC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})=\{\text{ 1- 上循环的等价类}\}, \tag{3.1.7}$$

被分别称为 L 的 *2- 上同调群* 和 $\mathcal{A}$ 的 *cyclic 1- 上同调群*. 约定用 $[\psi]$ 代表 2- 上循环 ψ 的等价类. 由 (3.1.4), 我们知道有事实

$$HC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})\subset H^2(\mathcal{A}^L,\mathbb{F}). \tag{3.1.8}$$

本章节的主要结果是以下定理：

定理 3.1.1 *令 $\mathcal{A}$ 是有单位元的结合超代数使得 $[\mathcal{A},\mathcal{A}]=\mathcal{A}$ 或者 $\mathcal{A}=\mathbb{F}$, $gl_{m|n}$ 是 $m|n$ 型线性超代数，其中 $m,n\geq 0$ 且 $m+n>1$. 记 $gl_{m|n}(\mathcal{A})=\mathcal{A}\otimes gl_{m|n}$. 考虑 $gl_{m|n}(\mathcal{A})$ 在 super-commutator 的意义下作为超代数，我们有 $H^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})\cong HC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})$. 更确切的说，线性映射 $\widehat{\ }: CC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})\to C^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})$ 映 $\psi\mapsto\widehat{\psi}$ 诱导了一个向量空间同构*

$$\widehat{\ }: HC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})\to H^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})\text{ 映 }[\psi]\mapsto[\widehat{\psi}], \tag{3.1.9}$$

这里对 $\psi\in CC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})$, $\widehat{\psi}$ 由下式定义

$$\widehat{\psi}(a\otimes A,b\otimes B)=(-1)^{\overline{A}\,\overline{b}}\mathrm{str}(AB)\psi(a,b)\quad for\ \ a,b\in\mathcal{A},\ A,B\in gl_{m|n}. \tag{3.1.10}$$

文中我们总用 “ $^-$ ” 代表元素的阶， $\mathrm{str}(\cdot)$ 是 $gl_{m|n}$ 由 (3.2.3) 定义的超迹.

特别的此定理证明了一个众所周知的结果 (参见 [19])： $H^2(gl_{m|n},\mathbb{F})=0$.

在这里，我们还定义了一大类李超代数 $\mathcal{W}(gl_{m|n})$ (见 (3.3.1)，和 (3.3.2)) 广义的矩阵微分算子代数. 广义的矩阵微分算子代数可以看作 $\mathcal{W}$- 无穷代数 $\mathcal{W}_\infty(gl_N)$ (见 [3]). 作为定理的应用 3.1.1, 作为定理的应用，我们可以决定这些李超代数的 2- 上循环 (定理 3.3.1). 我们之所以研究这些李超代数，不仅仅是因为它们与 $\mathcal{W}$- 无穷超代数有密切关系，而且还因为它们与一般共型超代数 $gc_{m|n}$ 有密切关系. 对于 $H^2(\mathcal{W}(gl_{m|n}),\mathbb{F})$ 的计算可以帮助我们决定 $gc_{m|n}$ 的二上循环群 (见 [16]).

赵开明 [132] 研究了基于量子环面的 Weyl 型代数并且给出了它们的二上循环群. 这里利用定理 3.1.1 能够得到量子矩阵微分算子李超代数的二上循环群 (定理 3.3.2).

§3.2 主要结果的证明

令 $m,n\geq 0$ 满足 $m+n>1$. 用 E_{ij} 代表 $(m+n)\times(m+n)$ 矩阵单位也就是当 $(p,q)=(i,j)$ 时第 (p,q) 个位置是 1 其它位置是 0 的矩阵. 则 $\{E_{ij}\,|\,1\leq i,j\leq m+n\}$ 是广义李超代数 $gl_{m|n}$ 的一组基. 并且我们知道这样的一组基具有性质: 当 $1\leq i,j\leq m$ 或者 $m<i,j\leq m+n$ 时 E_{ij} 是偶的, 其它情况为奇的. 我们如下定义 parity 映射 $[\cdot]$

$$[i]=\begin{cases}\bar{0} & \text{如果 } 1\leq i\leq m,\\ \bar{1} & \text{如果 } m<i\leq m+n.\end{cases} \tag{3.2.1}$$

则 E_{ij} 具有阶 $[i]+[j]$, 并且 $gl_{m|n}$ 的换位关系如下:

$$[E_{ij},E_{k\ell}]=\delta_{jk}E_{i\ell}-(-1)^{([i]+[j])([k]+[\ell])}\delta_{\ell i}E_{kj} \tag{3.2.2}$$

对于 $A=(a_{ij})_{(m+n)\times(m+n)}=\sum_{i,j=1}^{m+n}a_{ij}E_{ij}\in gl_{m|n}$, 我们定义超迹

$$\operatorname{str}(A)=\sum_{i=1}^{m+n}(-1)^{[i]}a_{ii}. \tag{3.2.3}$$

令 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{\bar{0}}\oplus\mathcal{A}_{\bar{1}}$ 是有 1 的结合超代数. 记 $gl_{m|n}(\mathcal{A})=\mathcal{A}\otimes gl_{m|n}$. 为方便见, 我们采用记号 $aA=a\otimes A$, 对于 $a\in\mathcal{A}$, $A\in gl_{m|n}$. 那么 $gl_{m|n}(\mathcal{A})$ 的换位关系由下面式子给出:

$$[aE_{ij},bE_{k\ell}]=(-1)^{\bar{b}([i]+[j])}\delta_{jk}abE_{i\ell}-(-1)^{(\bar{a}+[i]+[j])\bar{b}+([i]+[j])([k]+[\ell])}\delta_{\ell i}baE_{kj}, \tag{3.2.4}$$

其中齐次元素 $a,b\in\mathcal{A}$.

令 ϕ 是 $gl_{m|n}(\mathcal{A})$ 的一个 2- 上循环. 我们将采用减去平凡的 2- 上循环的办法把 ϕ 约简为最简单的形式. 固定一个线性函数 $f_0:\mathcal{A}\mapsto\mathbb{F}$. 我们定义线性函数 $f:gl_{m|n}(\mathcal{A})\to\mathbb{F}$ 如下:

$$f(aE_{ij})=\begin{cases}(-1)^{[1]}f_0(a) & \text{如果 } i=j=1,\\ (-1)^{\bar{a}([1]+[i])}\phi(E_{i1},aE_{1i})-(-1)^{[i]}f_0(a) & \text{如果 } i=j>1,\\ \phi(E_{ii},aE_{ij}) & \text{如果 } i\neq j.\end{cases} \tag{3.2.5}$$

(当 $m > 0$, 注意到 $[1] = 0$). 令 $\varphi = \phi - \psi_f$.

引理 3.2.1 $\varphi(E_{ij}, aE_{k\ell}) = 0$ 其中 $1 \le i, j, k, \ell \le m+n$, $a \in \mathcal{A}$.

证明. 证明将分成两种情形.

情形 1. $i = j$. 我们考虑下列子情况.

(i): $k = \ell = i$. 如果 $a \in \mathbb{F}$, 则由斜对称性 (3.1.1) 我们可以得到想要的结果. 如果 $a \notin \mathbb{F}$ 则我们可以写 $aE_{ii} = \sum_p [a_p E_{ii}, b_p E_{ii}]$ (有限和), 其中由于 $\mathcal{A} = [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ 则 $a_p, b_p \in \mathcal{A}$, 接着使用 Jacobi 等式 (3.1.2) 和 (3.2.4), 我们得到

$$\varphi(E_{ii}, aE_{ii}) = \sum_p (\varphi([E_{ii}, a_p E_{ii}], b_p E_{ii}) + \varphi(a_p E_{ii}, [E_{ii}, b_p E_{ii}])) = 0. \tag{3.2.6}$$

(ii): $k = i \neq \ell$. 由 (3.1.5) 和最后一种情形 (3.2.5),

$$\varphi(E_{ii}, aE_{i\ell}) = \phi(E_{ii}, aE_{i\ell}) - f(aE_{i\ell}) = 0. \tag{3.2.7}$$

(iii): $k \neq i = \ell$. 由 $aE_{ki} = [E_{kk}, aE_{ki}]$, Jacobi 等式和 (3.2.7), 我们有

$$\varphi(E_{ii}, aE_{ki}) = \varphi([E_{ii}, E_{kk}], aE_{ki}) + \varphi(E_{kk}, [E_{ii}, aE_{ki}]) = \varphi(E_{kk}, aE_{ki}) = 0.$$

(iv): $k, \ell \neq i$ 且 $k \neq \ell$. 利用 $aE_{k\ell} = [E_{kk}, aE_{k\ell}]$ 和 Jacobi 等式, 可以得到结果.

(v): $k = \ell \neq i$. 通过利用 $aE_{kk} = (-1)^{\bar{a}([i]+[k])}[E_{ki}, aE_{ik}] + (-1)^{[i]+[k]} aE_{ii}$, Jacobi 等式和 (3.2.6), 我们有

$$\varphi(E_{ii}, aE_{k\ell}) = (-1)^{\bar{a}([i]+[k])}(\varphi([E_{ii}, E_{ki}], aE_{ik}) + \varphi(E_{ki}, [E_{ii}, aE_{ik}])) = 0,$$

这里要注意 E_{ki}, aE_{ik} 分别是 $\operatorname{ad} E_{ii}$ 的特征值为 -1 和 1 的特征向量.

情形 2. $i \neq j$. 利用情形 1, Jacobi 等式 (3.1.2) 和 (3.2.4), 我们有

$$0 = \varphi(E_{ii}, [E_{ij}, aE_{k\ell}]) = (1 + \delta_{i,k} - \delta_{i,\ell})\varphi(E_{ij}, aE_{k\ell}),$$
$$0 = \varphi(E_{jj}, [E_{ij}, aE_{k\ell}]) = (-1 + \delta_{j,k} - \delta_{j,\ell})\varphi(E_{ij}, aE_{k\ell}).$$

剩下的工作是考虑 $k = j$, $\ell = i$ 的情形.

如果 $i<j$, 利用 $aE_{ji}=(-1)^{\bar{a}([i]+[j])}[E_{ji},aE_{ii}]$, Jacobi 等式和情形 1, 我们得到了

$$\begin{aligned}\varphi(E_{ij},aE_{ji}) &= (-1)^{\bar{a}([i]+[j])}(\varphi([E_{ij},E_{ji}],aE_{ii})+(-1)^{[i]+[j]}\varphi(E_{ji},[E_{ij},aE_{ii}])) \\ &= (-1)^{[i]+[j]}\varphi(E_{ji},aE_{ij}). \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

这样的话只需考虑 $i>j$ 的情况就够了.

如果 $j=1$, 利用

$$[E_{i1},aE_{1i}]=(-1)^{\bar{a}([1]+[i])}aE_{ii}-(-1)^{([1]+[i])(\bar{a}+[1]+[i])}aE_{11},$$

(3.1.5) 和一开始的两种情况 (3.2.5), 我们有

$$\varphi(E_{i1},aE_{1i})=\phi(E_{i1},aE_{1i})-(-1)^{\bar{a}([1]+[i])}f(aE_{ii})+(-1)^{([1]+[i])(\bar{a}+[1]+[i])}f(aE_{11})=0. \tag{3.2.9}$$

如果 $j>1$, 利用 $E_{ij}=(-1)^{([1]+[i])([1]+[j])}[E_{i1},E_{1j}]$ 和 Jacobi 等式, 我们可以得到

$$\begin{aligned}\varphi(E_{ij},aE_{ji}) &= (-1)^{([1]+[i])([1]+[j])}(\varphi(E_{i1},[E_{1j},aE_{ji}]) \\ &\quad +(-1)^{([1]+[j])(\bar{a}+[i]+[j])}\varphi([E_{i1},aE_{ji}],E_{1j})) \\ &= 0,\end{aligned}$$

最后一个等号由 (3.2.8) 和 (3.2.9) 得来. □.

对于任意的 2- 上循环 $\phi\in C^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})$, 我们定义 $\phi_0:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{F}$ by

$$\phi_0(a,b)=(-1)^{[1]}\phi(aE_{11},bE_{11}) \text{ 其中 } a,b\in\mathcal{A}. \tag{3.2.10}$$

直接验证可得到 ϕ_0 是一个 $\mathcal{A}^L$ 上的 2-cocycle . 这样，我们得到了一个线形映射

$$C^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})\to C^2(\mathcal{A}^L,\mathbb{F}):\phi\mapsto\phi_0. \tag{3.2.11}$$

引理 3.2.2 . *存在关系式* $\varphi(aE_{ij},bE_{k\ell})=(-1)^{[i]+\bar{b}([i]+[j])}\delta_{jk}\delta_{\ell i}\varphi_0(a,b)$, *其中* $1\le i,j,k,\ell\le m+n$ *且* $a,b\in\mathcal{A}$.

证明. 如果 $\mathcal{A}=\mathbb{F}$, 可由引理 3.2.1 得到结论. 这样我们可以假设 $\mathcal{A}=[\mathcal{A},\mathcal{A}]$.

考虑 $\varphi(aE_{ii},bE_{kk})$ 其中 $k\ne i$. 利用情形 1(i) 中相似的讨论和引理 3.2.1 中的证明，我们有

$$\varphi(aE_{ii},bE_{kk})=0 \text{ 如果 } k\ne i, \tag{3.2.12}$$

这样可得到在此种情况下引理成立.

考虑 $\varphi(aE_{ii}, bE_{ii})$. 如果 $i=1$, 则引理可以由定义 (3.2.10) 得到. 如果 $i>1$, 利用 $bE_{ii} = (-1)^{\bar{b}([1]+[i])}[E_{i1}, bE_{1i}] + (-1)^{[1]+[i]}bE_{11}$, Jacobi 等式和 (3.2.12), 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(aE_{ii}, bE_{ii}) &= (-1)^{\bar{b}([1]+[i])}\varphi([aE_{ii}, E_{i1}], bE_{1i}) = (-1)^{\bar{b}([1]+[i])}\varphi(aE_{i1}, bE_{1i}) \\ &= -\varphi(aE_{i1}, [E_{1i}, bE_{11}]) = -\varphi([aE_{i1}, E_{1i}], bE_{11}) \\ &= (-1)^{[1]+[i]}\varphi(aE_{11}, bE_{11}) = (-1)^{[i]}\varphi_0(a,b),\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

这里第二和第三个等号可由 (3.2.4) 得到, 第四个等号则是根据 Jacobi 等式和引理 3.2.1 得到, 第五个等号是根据 (3.2.4) 和 (3.2.12). 这样在此情形下引理成立.

考虑 $\varphi(aE_{ii}, bE_{k\ell})$ 其中 $k \neq \ell$: 利用引理 3.2.1 和 Jacobi 等式, 我们有

$$0 = \varphi(E_{kk}, [aE_{ii}, bE_{k\ell}]) = \varphi(aE_{ii}, bE_{k\ell}) \text{ 如果 } k \neq \ell, \tag{3.2.14}$$

这样引理在 $i=j$ 时成立.

最后考虑 $\varphi(aE_{ij}, bE_{k\ell})$ 其中 $i \neq j$. 利用 $aE_{ij} = [aE_{ii}, E_{ij}]$, Jacobi 等式和引理 3.2.1, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(aE_{ij}, bE_{k\ell}) &= \varphi(aE_{ii}, [E_{ij}, bE_{k\ell}]) \\ &= (-1)^{\bar{b}([i]+[j])}\delta_{jk}\varphi(aE_{ii}, bE_{i\ell}) - (-1)^{([i]+[j])(\bar{b}+[k]+[\ell])}\delta_{\ell i}\varphi(aE_{ii}, bE_{kj}) \\ &= (-1)^{\bar{b}([i]+[j])+[i]}\delta_{jk}\delta_{\ell i}\varphi_0(a,b),\end{aligned}$$

这样就得到了引理, 其中第二个等号根据 (3.2.4) 得到. □

根据 (3.2.3), 引理 3.2.2 蕴含了

$$\varphi(aA, bB) = (-1)^{\bar{A}\bar{b}}\mathrm{str}(AB)\varphi_0(a,b) \text{ 其中 } a,b \in \mathcal{A},\ A,B \in gl_{m|n}. \tag{3.2.15}$$

引理 3.2.3 . (3.2.11) 中的线性映射诱导了一个双射 $\tau : H^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}), \mathbb{F}) \to HC^1(\mathcal{A}, \mathbb{F})$ (参见 (3.1.4) 和 (3.1.8)).

证明. 首先可以直接验证下面的断言.

断言 1. 假设 $\varphi : gl_{m|n}(\mathcal{A}) \times gl_{m|n}(\mathcal{A}) \to \mathbb{F}$ 和 $\varphi_0 : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ 是两个双线性映射满足 (3.2.15). 则 φ 是一个 $gl_{m|n}(\mathcal{A})$ 上的 2- 上循环当且仅当 φ_0 是一个 $\mathcal{A}$ 上的 (cyclic) 1- 上循环.

对于任意 $\phi_0 \in CC^1(\mathcal{A}, \mathbb{F}) \subset C^2(\mathcal{A}^L, \mathbb{F})$, 我们象 (3.2.15) 那样定义 ϕ. 则断言 1 说明 $\phi \in C^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}), \mathbb{F})$,(3.2.11) 式中的映射映 ϕ 到 ϕ_0. 相反的, 对于任

意 $\phi \in C^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})$, 我们取 $\varphi=\phi-\psi_f$, 其中 f 在 (3.2.5) 式中被定义并且有 $f_0=0$. 这样 $[\phi]=[\varphi]$ 而且 $[\phi_0]=[\varphi_0]$. 我们已经证明 (3.2.15) 成立, 这样根据断言 1, $\varphi_0 \in CC^1(\mathcal{A},\mathbb{F})$. 所以, 只剩下要证明对 $\phi \in C^2(gl_{m|n}(\mathcal{A}),\mathbb{F})$,

$$[\phi]=0 \quad \Leftrightarrow \quad [\phi_0]=0. \tag{3.2.16}$$

如果 $[\phi]=0$, 也就是说对于某个线性函数 $f: gl_{m|n}(\mathcal{A}) \to \mathbb{F}$ 有 $\phi=\psi_f$. 我们定义线性函数 $f_0:\mathcal{A}\to\mathbb{F}$ 使得 $f_0(a)=(-1)^{[1]}f(aE_{11})$ 对于 $a\in\mathcal{A}$. 则根据 (3.2.10),

$$\begin{aligned}\phi_0(a,b)&=(-1)^{[1]}\phi(aE_{11},bE_{11})=(-1)^{[1]}f([aE_{11},bE_{11}])\\&=(-1)^{[1]}f([a,b]E_{11})=f_0([a,b])=\psi_{f_0}(a,b),\end{aligned}$$

即, $\phi_0=\psi_{f_0}$ 是平凡的. 相反的, 假设 $[\phi_0]=0$, 即对某个线性函数 $f_0:\mathcal{A}\to\mathbb{F}$ 有 $\phi_0=\psi_{f_0}$. 我们根据 (3.2.5) 定义线性函数 $f: gl_{m|n}(\mathcal{A})\to\mathbb{F}$, 并且令 $\varphi=\phi-\psi_f$. 则根据 (3.2.10) 和 (3.2.5) 的第一种情况, 我们有

$$\varphi(aE_{11},bE_{11})=\phi(aE_{11},bE_{11})-f([aE_{11},bE_{11}])=(-1)^{[1]}\phi_0(a,b)-(-1)^{[1]}f_0([a,b])=0.$$

这样根据 (3.2.10) 有 $\varphi_0=0$, 根据 (3.2.15) 有 $\varphi=0$. 所有 $[\phi]=[\varphi]=0$. □

显然的, 引理 3.2.3 中的映射 τ 是 (3.1.9) 中的映射$\hat{}$ 的逆映射. 这样就完成了定理 3.1.1 的证明.

§3.3 定理 3.1.1 的应用

对与定理 3.1.1, 我们这里给出两个应用. 首先我们介绍一类令人感兴趣的李超代数 $\mathcal{W}(gl_{m|n})$, 即广义矩阵微分算子代数. 广义矩阵微分算子代数可以被看成众所周知的 $\mathcal{W}_\infty(gl_N)$ 代数, 即 $\mathcal{W}$- 无穷代数的推广. 这样它与 $\mathcal{W}$- 无穷超代数和一般共型超代数有着紧密的联系.

令 $\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_5$ 是五个非负整数, 满足 $\ell=\sum_{p=1}^5\ell_p>0$. 一个元素 $\alpha\in\mathbb{F}^\ell$ 可以写成 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\ell)$. 令 $V=\{0\}^{\ell_1}\times\mathbb{F}^{\ell_2+\ell_3+\ell_4}\times\{0\}^{\ell_5}\subset\mathbb{F}^\ell$. 取一个 V非退化 的加法子群 Γ(即 Γ 包含了一组 V 的 $\mathbb{F}$- 基). 这样一个元素 $\alpha\in\Gamma$ 满足

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_{\ell_1}=\alpha_{\ell'_4+1}=\cdots=\alpha_\ell=0 \ \text{ for } \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\ell)\in\Gamma,$$

这里一般的说 $\ell'_q=\sum_{p=1}^q\ell_p$. 令 $\mathcal{J}=\mathbb{Z}_+^{\ell'_2}\times\mathbb{Z}^{\ell_3}\times\{0\}^{\ell_4}\times\{0,1\}^{\ell_5}$. 则一个元素 $\vec{i}\in\mathcal{J}$ 满足

$$i_{\ell'_3+1}=\cdots=i_{\ell'_4}=0 \ \text{ 对于 } \ \vec{i}=(i_1,i_2,...,i_\ell)\in\mathcal{J}.$$

令 $\mathcal{A}_1=\mathbb{F}[\Gamma]=\mathrm{span}\{x^\alpha\,|\,\alpha\in\Gamma\}$ 是 Γ 的群代数，$\mathcal{A}_2=\mathbb{F}[\mathcal{J}]=\mathbb{F}[t_1,t_2,\cdots,t_{\ell'_3},s_1,s_2,\cdots,s_{\ell_5}]$ 是 (超) 多项式代数具有 *ordinary* (偶的) 变元 t_p, $1\le p\le\ell'_3$ 和 *Grassmannian* (奇的) 变元 s_q, $1\le q\le\ell_5$ (故 $s_q^2=0$). 取 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2=\mathbb{F}[\Gamma\times\mathcal{J}]$ 是一个半群超代数具有基 $\{x^{\alpha,\vec{i}}\,|\,(\alpha,\vec{i})\in\Gamma\times\mathcal{J}\}$, 这里

$$x^{\alpha,\vec{i}}=x^\alpha t_1^{i_1}\cdots t_{\ell'_3}^{i_{\ell'_3}}s_1^{i_{\ell'_4+1}}\cdots s_{\ell_5}^{i_\ell},$$

其中 $\alpha\in\Gamma,\vec{i}=(i_1,i_2...,i_\ell)\in\mathcal{J}$. 在 $\mathcal{A}$ 上定义线性变换 ∂_p, $1\le p\le\ell$

$$\partial_p(x^{\alpha,\vec{i}})=a_px^{\alpha,\vec{i}}+(-1)^{\sum_{q=\ell'_4+1}^{p-1}i_q}\,i_p\,x^{\alpha,\vec{i}-\epsilon_p},$$

其中 $\epsilon_p=(\delta_{p,1},\delta_{p,2},...,\delta_{p,\ell})$ 而且当 $p\le\ell'_4+1$ 时，和式 $\sum_{q=\ell'_4+1}^{p-1}i_q$ 是零. 这样如果 $p\le\ell'_4$, 则 ∂_p 是一个偶导子，如果 $p>\ell'_4$, 且满足 $\partial_p^2=0$ 则 ∂_p 是一个奇导子.

记 $\mathcal{D}=\sum_{p=1}^{\ell}\mathbb{F}\partial_p$. 令 $\mathbb{F}[\mathcal{D}]$ 是 $\mathcal{D}$ 的 (超) 多项式代数具有基

$$\{\partial^\mu=\prod_{p=1}^{\ell}\partial_p^{\mu_p}\,|\,\mu=(\mu_1,...,\mu_\ell)\in\mathcal{K}\},\text{ 这里 }\mathcal{K}=\mathbb{Z}_+^{\ell'_4}\times\{0,1\}^{\ell_5}.$$

则向量空间

$$\mathcal{W}=\mathcal{W}(\ell_1,\cdots,\ell_5,\Gamma)=\mathcal{A}\otimes\mathbb{F}[\mathcal{D}]=\mathrm{span}\{x^{\alpha,\vec{k}}\partial^\mu\,|\,(\alpha,\vec{k},\mu)\in\Gamma\times\mathcal{J}\times\mathcal{K}\}\quad(3.3.1)$$

变成了一个有单位元 (unital) 的结合超代数 (把它看成 $\mathcal{A}$ 的微分算子), 有时也称为*广义 Weyl 型超代数*, 它的乘法运算在文献 [140,141] 中给出 (也可以看文献 [20-22])

$$a\partial^\mu\cdot b\partial^\nu=a\sum_{\lambda\in\mathcal{K}}\begin{pmatrix}\mu\\ \lambda\end{pmatrix}(-1)^{\bar{b}(|\mu|-|\lambda|)+\sum_{\ell'_4<p<q\le\ell}(\mu_q-\lambda_q)\nu_p}\partial^\lambda(b)\partial^{\mu+\nu-\lambda},$$

其中 $\bar{b}$ 是 b 的阶，并且 $|\mu|=\sum_{p=\ell'_4+1}^{\ell}\mu_p$, $\binom{\mu}{\lambda}=\prod_{p=1}^{\ell}\binom{\mu_p}{\lambda_p}$ (这里 $\binom{j}{i}$ 是二项式系数),$\partial^\lambda(b)=\partial_1^{\lambda_1}(\partial_2^{\lambda_2}(\cdots(\partial_\ell^{\lambda_\ell}(b))))$.$\mathcal{W}$ 的这个构造一开始是受到了文献 [24] 中广义 Cartan 型李代数的启发.

现在我们定义 **广义矩阵微分算子李超代数**

$$\mathcal{W}(gl_{m|n})=gl_{m|n}(\mathcal{W})=\mathcal{W}\otimes gl_{m|n},\qquad(3.3.2)$$

它是著名的 $\mathcal{W}$- 无限代数 $\mathcal{W}_\infty(gl_N)$. 这样我们可以应用定理 3.1.1 到 [141, 定理 3.5] 来得到 $H^2(\mathcal{W}(gl_{m|n}),\mathbb{F})$. 为了说清楚结果，我们需要一些记号 (参见 [13]). 我们记 $\mathcal{W}_0$ 是 $\mathcal{W}$ 的子代数，由下面的集合张成：

$$\{x^{\alpha,\vec{i}}\partial^\mu\ \mid\ (\alpha,\vec{i},\mu)\in\Gamma\times\mathcal{J}\times\mathcal{K}\text{ 其中，当 }\ell'_4<p\le\ell\text{ 时 },i_p=\mu_p=0\}.$$

则 $\mathcal{W}_0$ 是文献 [19] 中考虑的 Weyl 型李代数 (参见 [7, 8, 14]). 另外我们还记 $\mathcal{W}_1$ 是 $\mathcal{W}$ 的李子超代数，由下列集合张成

$$\{x^{0,\vec{i}}\partial^{\mu} \mid (\vec{i},\mu) \in \mathcal{J} \times \mathcal{K} \text{ 当 } 1 \le p \le \ell_4' \text{ 时,} \quad i_p = \mu_p = 0\}.$$

则 $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{W}_1$. 我们定义线性函数 $P : \mathcal{W}_0 \to \mathbb{F}$, 令

$$P(x^{0,\vec{i}}\partial^{\mu}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \vec{i} = \mu = (0,...,0,1,...,1) \ (\ell_5 \text{ copies of 1's}), \\ 0 & \text{其它情况}. \end{cases}$$

注意到 $\mathcal{W}^L$ 上循环出现在文献 [13, 定理 3.5] 中，是 (cyclic)$\mathcal{W}$ 的 1- 上循环 (参见 [19]), 我们得到下列定理.

定理 3.3.1 (1) 假设 $\ell_4' = \ell_4 = 1$. 则 $H^2(\mathcal{W}(gl_{m|n}), \mathbb{F}) = \mathbb{F}[\varphi_0]$, 这里 φ_0 由下式给出：

$\varphi_0(auA, bvB) = (-1)^{\overline{A}\,\overline{v}}\mathrm{str}(AB)\phi_0(a,b)P(uv)$ 其中$a, b \in \mathcal{W}_0$, $u, v \in \mathcal{W}_1$, $A, B \in gl_{m|n}$,

$\phi_0 \in C^2(\mathcal{W}_0, \mathbb{F})$ 由下式定义：

$$\phi_0(x^{\alpha}[\partial_1]_{\mu}, x^{\beta}[\partial_1]_{\nu}) = \delta_{\alpha+\beta,0}(-1)^{\mu}\mu!\nu! \begin{pmatrix} \alpha+\mu \\ \mu+\nu+1 \end{pmatrix} \text{ 其中}\alpha, \beta \in \Gamma \subseteq \mathbb{F},\ \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.3.3}$$

这里 $[\partial_1]_{\mu} = \partial_1(\partial_1 - 1)\cdots(\partial_1 - \mu + 1)$.

(2) 假设 $\ell_4' = \ell_3 = 1$. 则对任意 $\gamma \in \Gamma$, 相应的上同调类 $[\varphi_\gamma] \in H^2(\mathcal{W}(gl_{m|n}), \mathbb{F})$ 由下式定义

$\varphi_\gamma(auA, bvB) = (-1)^{\overline{A}\,\overline{v}}\mathrm{str}(AB)\phi_\gamma(a,b)P(uv)$ 其中$a, b \in \mathcal{W}_0$, $u, v \in \mathcal{W}_1$, $A, B \in gl_{m|n}$,

并且 ϕ_γ 由下式定义

$$\phi_\gamma(x^{\alpha,i}\partial^{\mu}, x^{\beta,j}\partial^{\nu}) = \delta_{\alpha+\beta,\gamma}(-1)^{\mu}\mu!\nu! \sum_{s=0}^{\mu+\nu+1} \begin{pmatrix} i \\ s \end{pmatrix} \frac{\alpha^{\mu+\nu+1-s}}{(\mu+\nu+1-s)!} \cdot \frac{\gamma^{s-i-j-1}}{(s-i-j-1)!},$$

对所有 $(\alpha, i, \mu), (\beta, j, \nu) \in \Gamma \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, 这里正象 [17] 式中， $\frac{1}{k!}$ 被认为是零当 $k < 0$, 当 α 取值为 0 时，它被理解为 $\lim_{\alpha\to 0}\alpha$ (这样，特别的， $\alpha^{\mu+\nu+1-r} = 1$ 如果 $\mu+\nu+1-r = 0$ 且 $\alpha = 0$). 进一步， $H^2(\mathcal{W}(gl_{m|n}), \mathbb{F})$ 是直和：

$$H^2(\mathcal{W}(gl_{m|n}), \mathbb{F}) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{F}[\varphi_\gamma].$$

(3) 如果 $\ell_2' \ge 1$ *or* $\ell_4' \ge 2$, 则 $H^2(\mathcal{W}(gl_{m|n}), \mathbb{F}) = 0$.

定理的各种情况出现在文献 [133,135-137, 140, 141, 18] 中. 特别的, 当 $\Gamma = \mathbb{Z}$ 时 2- 上循环 (3.3.3) 首先出现在文献 [7] 中.

赵开明 [132] 研究了量子情况下的 Laurent 多项式上的微分算子代数. q- 量子环面 $\mathbb{F}_q^{(r)}$ 是一个有 1 的结合代数, 它是由 $t_1^{\pm 1}, ..., t_r^{\pm 1}$ 生成, 具有关系 $t_i t_j = q_{ij} t_j t_i$, 这里量子矩阵 $q = (q_{ij})_{r\times r}$ 满足 $q_{ii} = 1$, $q_{ij} = q_{ji}^{-1}$. 令 $\mathcal{D}$ 是 $\oplus_{i=1}^{r} \mathbb{F}\partial_i$ 的子空间, 其中 ∂_i 是 $\mathbb{F}_q^{(r)}$ 上的导子定义为 $\partial_i : t_1^{k_1} \cdots t_r^{k_r} \mapsto k_i t_1^{k_1} \cdots t_r^{k_r}$. 则量子微分算子代数是结合代数 $\mathbb{F}_q^{(r)}[\mathcal{D}]$(参见 [132]).

我们定义矩阵量子微分算子李超代数:

$$gl_{m|n}(\mathbb{F}_q^{(r)}[\mathcal{D}]) = \mathbb{F}_q^{(r)}[\mathcal{D}] \otimes gl_{m|n}.$$

应用定理 3.1.1 到 [132, 定理 1.1], 其中所有的 2- 上循环 $\mathbb{F}_q^{(r)}[\mathcal{D}]^L$ 被证明是 cyclic, $\mathbb{F}_q^{(r)}[\mathcal{D}]$ 上的 1- 上循环 (对于 $HC^1(\mathbb{F}_q^{(0)})$ 参看 [1]), 我们得到

定理 3.3.2 假设 $\mathbb{F}_q^{(r)}[\mathcal{D}]$ 是单的结合代数. 则

$$\dim H^2(gl_{m|n}(\mathbb{F}_q^{(r)}[\mathcal{D}]), \mathbb{F}) = \begin{cases} r & \text{如果} \quad \mathcal{D} = 0, \\ 1 & \text{如果} \quad \mathcal{D} = 1, \\ 0 & \text{如果} \quad \mathcal{D} > 1. \end{cases}$$

□

第四章 广义 Hamilton- 型李双代数

§4.1 背景介绍

近来出现了很多有关李双代数结构理论的文章. 一般说来，所谓 Lie 双代数实际上是一个同时赋予了李代数结构李余代数结构的向量空间，在李代数结构和李余代数结构之间满足一个相容条件. 这个相容条件的提出是基于研究 Hamiltonian 动力学和 Poisson Lie 群的需要提出来的. 由于 Lie 双代数具有双代数结构，这对于研究满足特定条件的 Lie 代数具有特别的意义. Lie 余代数的概念是由 Michaelis 在文献 [37] 中提出的，同时作者还讨论了相对于 Lie 代数来说， Lie 余代数的一些性质. 在文献 [36] 中， Michaelis 给出了一类 Witt- 型 Lie 双代数，与此同时，作者还给出了一个如何在一个满足条件：存在线性无关的两个元素 a 和 b, 使得 $[a,b]=kb$(对某个非零数 $k\in\mathbb{F}$, 这里 $\mathbb{F}$ 是一特征为零的固定域) 的 Lie 代数上构造一个三角的，上边缘李双代数的方法. 而 Siu-Hung Ng,Earl J.Taft 对 Michaelis 定义的 Witt- 型的 Lie 双代数进行了分类. 在本章中我们的主要结果是确定由徐晓平定义的一类广义 Hamilton- 型 Lie 代数 (参看 [9]) 的 Lie 双代数结构.

§4.2 基础知识

在本章中我们用 $\mathbb{F}$ 记一特征为零的域，用 τ 记 $L\otimes L$ 的扭映射 (means $\tau(x\otimes y)=y\otimes x$). $\xi: L\otimes L\otimes\otimes L\rightarrow L\otimes\otimes L\otimes L$ 为一线性的循环置换映射，即 $\xi(x_1\otimes x_2\otimes x_3)=x_2\otimes x_3\otimes x_1$. 首先让我们回忆一下有关李双代数的基本概念.

定义 4.2.1 令 L 为一 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，$\varphi: L\otimes L\rightarrow L$ 是一双线性映射，我们称二元对 (L,φ) 是一 *Lie* 代数，如果满足下列条件

(1) $Ker(1-\tau)\subset Ker\varphi$ (1 是 $L\otimes L$ 的恒等映射),

(2) $\varphi\cdot(1\otimes\varphi)\cdot(1+\xi+\xi^2)=0: L\otimes L\otimes L\rightarrow L.$

注意到 Ker $(1-\tau)=\text{span}\{x\otimes x|x\in L\}$ ，并且 $\text{Im}(1+\tau)\subset\text{Ker}(1-\tau)$ ，并且，如果 char$\mathbb{F}\neq 2$ 时等号成立，定义 (4.2.1) 中的条件（ 1 ）就可以用下面的条件来代替

$$(1'): \varphi=-\varphi\cdot\tau.$$

定义 4.2.2 令 M 是 $\mathbb{F}$ 上的一个向量空间，$\Delta: M \to M \otimes M$ 是一线性映射，二元对 (M, Δ) 称为 $\mathbb{F}$ 上的 *Lie* 余代数，如果它满足下列条件

(1) $Im\Delta \subset Im(1-\tau)$,

(2) $(1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta)\cdot\Delta = 0 : M \to M\otimes M\otimes M.$

这里 Δ 称为 M 的余乘法运算或者称为余方括号运算或者称为 M 的对角运算. 条件（1）称为强反交换性，条件（2）称为 Jacobi- 等式. 与定义 4.2.1 类似，因为 $\mathrm{Im}(1-\tau) \subset \mathrm{Ker}(1+\tau)$，如果 $\mathrm{charc}F \neq 2$ 时，等号成立，定义（4.2.2）中的条件（1）可以用下面的条件来代替

$$(1')\ \ \Delta = -\tau\Delta.$$

定义 4.2.3 如果 (M_1, Δ_1) 与 (M_2, Δ_2) 是两个 *Lie* 余代数，从 (M_1, Δ_1) 到 (M_2, Δ_2) 的态射是一个线性映射

$$f : M_1 \to M_2$$

使得

$$\Delta_2 \cdot f = (f\otimes f)\cdot\Delta_1.$$

定义 4.2.4 *Lie* 余代数 (N, Δ_N) 称为是 *Lie* 余代数 (M, Δ_M) 的子代数，如果 N 是向量空间 M 的子空间并且使得包含映射

$$i_N : N \to M$$

是 *Lie* 余代数的态射.

定义 4.2.5 令 L 是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，*Lie* 双代数是一满足下列条件的三元对 (L, φ, Δ)，

(1) (L, φ) 是一 *Lie* 代数，

(2) (L, Δ) 是一 *Lie* 余代数，

(3) $\Delta\cdot\varphi(x,y) = x\cdot\Delta y - y\cdot\Delta x$, 对所有的 $x, y \in L$.

其中对所有的 $x, a_i, b_i \in L$,

$$x\cdot(\sum_i a_i\otimes b_i) = \sum_i([x,a_i]\otimes b_i + a_i\otimes[x,b_i]). \tag{4.2.1}$$

这里 $[\cdot,\cdot] = \varphi$, 在不引起混淆的情况下，我们习惯上用 $[\cdot,\cdot]$ 来代替 φ.

注解 4.2.6 *Lie*双代数定义中的相容条件(*3*)与双代数定义中的相容条件并非平行的,双代数中的相容条件是 Δ 是一代数态射,即 $\Delta\cdot\varphi = (\varphi\otimes\varphi)\cdot(1\otimes\tau\otimes1)\cdot\Delta\otimes\Delta$. 但是在 *Lie* 双代数中 Δ 是 $L \to L\otimes L$ 的导子. 因此 *Lie* 双代数的性质和双代数的性质并非完全类似的.

定义 4.2.7 从 *Lie* 双代数 $(L_1, \varphi_1, \Delta_1)$ 到 *Lie* 双代数 $(L_2, \varphi_2, \Delta_2)$ 的线性映射 f 称为这两个 *Lie* 双代数之间的一个态射, 如果 f 是 *Lie* 代数 $(L_1, \varphi_1,)$ 到 *Lie* 代数 $(L_2, \varphi_2,)$ 的态射, 同时 f 又是 *Lie* 余代数 (L_1, Δ_1) 到 *Lie* 余代数 (L_2, Δ_2) 的态射.

定义 4.2.8 令 L 是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间, 四元对 (L, φ, Δ, r) 称为上边缘 *Lie* 双代数, 如果 (L, φ, Δ) 是一个 *Lie* 双代数, 并且 $r \in Im(1-\tau) \subset L\otimes L$ 使得 Δ 是 r 的一个上边缘, 即对任意的 $x \in L$

$$\Delta(x) = x\cdot r.$$

定义 4.2.9 上边缘 *Lie* 双代数 (L, φ, Δ, r) 称为三角的, 如果它满足经典的 *Yang-Baxter Equation*(*CYBE*)

$$c(r) := [r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}] = 0. \tag{4.2.2}$$

这里, 如果 $r = \sum\limits_i a_i \otimes b_i \in L\otimes L$, $\mathcal{U}(l)$ 记 L 的普遍包络代数, 则

$$\begin{aligned}
r^{12} &= \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1 \in \mathcal{U}(l)\otimes\mathcal{U}(l)\otimes\mathcal{U}(l),\\
r^{13} &= \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i \in \mathcal{U}(l)\otimes\mathcal{U}(l)\otimes\mathcal{U}(l),\\
r^{23} &= \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i \in \mathcal{U}(l)\otimes\mathcal{U}(l)\otimes\mathcal{U}(l).
\end{aligned}$$

这里 1 是 $\mathcal{U}(l)$ 的恒等元, 并且

$$\begin{aligned}
[r^{12}, r^{13}] &= \sum_{i,j} [a_i, a_j] \otimes b_i \otimes b_j \in L\otimes L\otimes L,\\
[r^{12}, r^{23}] &= \sum_{i,k} a_i, \otimes [b_i, a_k] \otimes b_k \in L\otimes L\otimes L,\\
[r^{13}, r^{23}] &= \sum_{j,k} a_j \otimes a_k \otimes [b_j, b_k] \in L\otimes L\otimes L.
\end{aligned}$$

令 L 是一 Lie 代数, 则 $L\otimes L$ 在 L 的伴随对角作用下, 是一个 L- 模. 并且如果 $r \in \mathrm{Im}(1-\tau) \subset L\otimes L$, 定义线性映射

$$\Delta = \Delta_r : L \to L\otimes L$$

使得

$$\Delta(x) = x \cdot r.$$

显然 $\mathrm{Im}\Delta \subset \mathrm{Im}(1-\tau)$, 而且

$$\Delta[x,y] = x \cdot \Delta y - y \cdot \Delta x.$$

因此如果 Δ 满足 Jacobi-identity，则 $(L, [,], \Delta)$ 是上边缘 Lie 余代数

下面的例子来自 [36]，它给出了一个是边缘 Lie 双代数但不是三角的例子.

例题 4.2.10 令 L 是 3- 维欧式空间, e_1, e_2, e_3 是它的一组基, 它的方括号运算由下是给出:

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2.$$

则 $(L, [\cdot,\cdot]$ 是一 *Lie* 代数。令

$$r = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \in Im(1-\tau) \subset L \otimes L.$$

对于所有的 $x \in L$, 定义 $\Delta : L \to L \otimes L$ 如下:

$\Delta(x) := x \cdot r = [x, e_1] \otimes e_2 - e_2 \otimes [x, e_1] + e_1 \otimes [x, e_2] - [x, e_2] \otimes e_1.$

特别的, 我们有

$$\begin{aligned} \Delta(e_1) &= e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1, \\ \Delta(e_2) &= e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2, \\ \Delta(e_3) &= 0. \end{aligned}$$

下面我们验证 $(L, [\cdot,\cdot], \Delta)$ 是一 *Lie* 双代数.

首先我们验证 (L, Δ) 是一个 *Lie* 余代数.

显然有 $Im(\Delta) \subset Im(1-\tau)$ 。因此我们只需验证对所有的 $x \in L$ 有

$$(1 + \xi + \xi^2) \cdot (1 \otimes \Delta) \cdot \Delta(x) = 0.$$

由其线性性, 我们只需对 $x \in \{e_1, e_2, e_3\}$ 验证上式成立即可. 首先

$$\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1$$

因此

$$\begin{aligned} (1 \otimes \Delta) \cdot \Delta(e_1) &= -e_3(e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1) \\ &= e_3 \otimes e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_1 \otimes e_3. \end{aligned}$$

为方便期间我们用 (a, b, c) 代替 (e_a, e_b, e_c) 。则

$$\begin{aligned} (1 + \xi + \xi^2)((3,3,1) - (3,1,3)) &= (3,3,1) + (3,1,3) + (1,3,3) \\ &\quad -(3,1,3) - (1,3,3) - (3,3,1) = 0. \end{aligned}$$

类似的, 我们有

$$(1 + \xi + \xi^2) \cdot (1 \otimes \Delta) \cdot \Delta(e_2) = 0.$$

因为 $\Delta(e_3)=0$, 故 $(1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta)\cdot\Delta(e_3)=0$ 是显而易见的. 所以 (L,Δ) 是一 *Lie* 余代数. 由 Δ 的定义很容易验证 Δ 是 $L\otimes L\to L$ 的导子, 由 *Lie* 双代数的定义知 $(L,[,],\Delta,r)$ 是上边缘 *Lie* 双代数.

下面我们要说明这个上边缘 *Lie* 双代数 $(L,[,],\Delta,r)$ 不是三角的, 即 $C(r)\neq 0$. 对于 $r=e_1\otimes e_2-e_2\otimes e_1$, 我们有

$$r^{12}=e_1\otimes e_2\otimes 1-e_2\otimes e_1\otimes 1,$$
$$r^{13}=e_1\otimes 1\otimes e_2-e_2\otimes 1\otimes e_1,$$
$$r^{23}=1\otimes e_1\otimes e_2-1\otimes e_2\otimes e_1,$$
$$[r^{12},r^{13}]=-[e_1,e_2]\otimes e_2\otimes e_1-[e_2,e_1]\otimes e_1\otimes e_2,$$
$$[r^{12},r^{23}]=e_1\otimes[e_2,e_1]\otimes e_2+e_2\otimes[e_1,e_2]\otimes e_1,$$

以及

$$[r^{13},r^{23}]=-e_1\otimes e_2\otimes[e_2,e_1]-e_2\otimes e_1\otimes[e_1,e_2],$$

因此

$$[r^{12},r^{13}]=-e_3\otimes e_2\otimes e_1+e_3\otimes e_1\otimes e_2,$$
$$[r^{12},r^{23}]=-e_1\otimes e_3\otimes e_2+e_2\otimes e_3\otimes e_1,$$

以及

$$[r^{13},r^{23}]=e_1\otimes e_2\otimes e_3-e_2\otimes e_1\otimes e_3,$$

故

$$\begin{aligned}C(r)&=[r^{12},r^{13}]+[r^{12},r^{23}]+[r^{13},r^{23}]\\&=-(3,2,1)+(3,1,2)-(1,3,2)+(2,3,1)+(1,2,3)-(2,1,3)\\&\neq 0.\end{aligned}$$

这就证明了 $(L,[,],\Delta,r)$ 是一个上边缘的 *Lie* 双代数, 但不是三角的.

下面的定理是文献 [37] 中的主要定理.

定理 4.2.11 [37] 令 L 是一域 $\mathbb{F}$ 上的 *Lie* 代数, 若存在两个线性无关的元素 $a,b\in L$ 使得 $[a,b]=kb$, 这里 $0\neq k\in\mathbb{F}$. 令

$$r=a\otimes b-b\otimes a$$

定义线性映射

$$\Delta_r(x)=x\cdot r=[x,a]\otimes b-b\otimes[x,a]+a\otimes[x,b]-[x,b]\otimes a\quad for\ \ x\in L.$$

则 $(L,[,],\Delta_r,r)$ 是一个三角的, 上边缘的 *Lie* 双代数.

在满足以上定理的条件下, [37] 的作者还证明了以下结论: 在定理 4.1.11 条

件下，余乘法 $\Delta=\Delta_r$ 满足

$$(1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta)\cdot\Delta(x)=x\cdot c(r)\quad \text{for}\ \ x\in L. \tag{4.2.3}$$

因此

$$(1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta)\cdot\Delta(x)=0$$

当且仅当

$$x\cdot c(r)=0\quad \text{for all}\ \ x\in L, \tag{4.2.4}$$

即 r 满足 *modified Yang-Baxter Equation* (4.1.2).

下面的命题是属于 V.G.Drinfel'd 的，Michaelis 给出了部分证明，Earl J.Taft 给出了在 $C(r)=0$ 的条件下的一个证明，对 Earl J.Taft 的证明稍加改进就是下面的命题的证明.

命题 4.2.12 令 L 是一 Lie 代数. 对任意的 $a_i,b_i\in L$ 令 $r=\sum_{i=1}^n(a_i\otimes b_i-b_i\otimes a_i)\in L\otimes L$，令 $\Delta=\Delta_r$. 则对于任意的 $x\in L$,

$$(1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta)\cdot\Delta(x)=x\cdot c(r), \tag{4.2.5}$$

这里 $c(r):=[r^{12},r^{13}]+[r^{12},r^{23}]+[r^{13},r^{23}]$. 因此，对于任意的 $x\in L$ 有

$$(1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta)\cdot\Delta(x)=0 \text{ 当且仅当}$$

$$x\cdot c(r)=0.$$

特别的，如果 $c(r)=0$ 则 Δ 满足 *Jacobi-* 等式.

证明. 对于 $r=\sum_{i=1}^n(a_i\otimes b_i-b_i\otimes a_i)$，我们有

$$\begin{aligned}
r^{12}&=\sum_{i=1}^n(a_i\otimes b_i\otimes 1-b_i\otimes a_i\otimes 1),\\
r^{13}&=\sum_{i=1}^n(a_i\otimes 1\otimes b_i-b_i\otimes 1\otimes a_i),\\
r^{23}&=\sum_{i=1}^n(1\otimes a_i\otimes b_i-1\otimes b_i\otimes a_i,)
\end{aligned}$$

以及

$$
\begin{aligned}
[r^{12},r^{13}] &= \sum_{i,j}([a_i,a_j]\otimes b_i\otimes b_j-[a_i,b_j]\otimes b_i\otimes a_j\\
&\quad -[b_i,a_j]\otimes a_i\otimes b_j+[b_i,b_j]\otimes a_i\otimes a_j),\\
[r^{12},r^{23}] &= \sum_{i,j}(a_i\otimes[b_i,a_j]\otimes b_j-a_i\otimes[b_i\otimes b_j]\otimes a_j\\
&\quad -b_i\otimes[a_i,a_j]\otimes b_j+b_i\otimes[a_i,b_j]\otimes a_j),\\
[r^{13},r^{23}] &= \sum_{i,j}(a_i\otimes a_j\otimes[b_i,b_j]-a_i\otimes b_j\otimes[b_i,a_j]\\
&\quad -b_i\otimes a_j\otimes[a_i,b_j]+b_i\otimes b_j\otimes[a_i,a_j]).
\end{aligned}
$$

So

$$
\begin{aligned}
x\cdot c(r) = \sum_{i,j}(&[x,[a_i,a_j]]\otimes b_i\otimes b_j+[a_i,a_j]\otimes[x,b_i]\otimes b_j\\
&+[a_i,a_j]\otimes b_i\otimes[x,b_j]-[x,[a_i,b_j]]\otimes b_i\otimes a_j\\
&-[a_i,b_j]\otimes[x,b_i]\otimes a_j-[b_i,a_j]\otimes b_j\otimes[x,a_j]\\
&-[x,[b_i,a_j]]\otimes a_i\otimes b_j-[b_i,a_j]\otimes[x,a_i]\otimes b_j\\
&-[b_i,a_j]\otimes a_i\otimes[x,b_j]+[x,[b_i,b_j]]\otimes a_i\otimes a_j\\
&+[b_i,b_j]\otimes[x,a_i]\otimes a_j+[b_i,b_j]\otimes a_i\otimes[x,a_j]\\
&+[x,a_i]\otimes[b_i,a_j]\otimes b_j+a_i\otimes[x,[b_i,a_j]]\otimes b_j\\
&+a_i\otimes[b_i,a_j]\otimes[x,b_j]-[x,a_i]\otimes[b_i,b_j]\otimes a_j\\
&-a_i\otimes[x,[b_i,b_j]]\otimes a_j-a_i\otimes[b_i,b_j]\otimes[x,a_j]\\
&-[x,b_i]\otimes[a_i,a_j]\otimes b_j-b_i\otimes[x,[a_i,a_j]]\otimes b_j\\
&-b_i\otimes[a_i,a_j]\otimes[x,b_j]+[x,b_i]\otimes[a_i,b_j]\otimes a_j\\
&+b_i\otimes[x,[a_i,b_j]]\otimes a_j\otimes b_i\otimes[a_i,b_j]\otimes[x,a_j]\\
&+[x,a_i]\otimes a_j\otimes[b_i,b_j]+a_i\otimes[x,a_j]\otimes[b_i,b_j]\\
&+a_i\otimes a_j\otimes[x,[b_i,b_j]]-[x,a_i]\otimes b_j\otimes[b_i,a_j]\\
&-a_i\otimes[x,b_j]\otimes[b_i,a_j]-a_i\otimes b_j\otimes[x,[b_i,a_j]]\\
&-[x,b_i]\otimes a_j\otimes[a_i,b_j]-b_i\otimes[x,a_j]\otimes[a_i,b_j]\\
&-b_i\otimes a_j\otimes[x,[a_i,b_j]]+[x,b_i]\otimes b_j\otimes[a_i,a_j]\\
&+b_i\otimes[x,b_j]\otimes[a_i,a_j]+b_i\otimes b_j\otimes[x,[a_i,a_j]]),
\end{aligned}
\tag{4.2.6}
$$

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= x\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\otimes b_i-b_i\otimes a_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}([x,a_i]\otimes b_i+a_i\otimes[x,b_i]\\ &\quad -[x,b_i]\otimes a_i-b_i\otimes[x,a_i]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(1\otimes\Delta)\cdot\Delta(x)\\ &=\sum_{i=1}^{n}([x,a_i]\otimes\Delta(b_i)+a_i\otimes\Delta([x,b_i])-[x,b_i]\otimes\Delta(a_i)-b_i\otimes\Delta([x,a_i]))\\ &=\sum_{i,j}([x,a_i]\otimes([b_i,a_j]\otimes b_j+a_j\otimes[b_i,b_j]-[b_i,b_j]\otimes a_j-b_j\otimes[b_i,a_j])\\ &\quad +a_i\otimes([[x,b_i],a_j]\otimes b_j+a_j\otimes[[x,b_i],b_j]-[[x,b_i],b_j]\otimes a_j-b_j\otimes[[x,b_i],a_j])\\ &\quad -[x,b_i]\otimes([a_i,a_j]\otimes b_j+a_j\otimes[a_i,b_j]-[a_i,b_j]\otimes a_j-b_j\otimes[a_i,a_j])\\ &\quad -b_i\otimes([[x,a_i],a_j]\otimes b_j+a_j\otimes[[x,a_i],b_j]-[[x,a_i],b_j]\otimes a_j-b_j\otimes[[x,a_i],a_j])),\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

$$\begin{aligned}&\xi(1\otimes\Delta)\Delta(x)\\ &=\sum_{i,j}(([b_i,a_j]\otimes b_j+a_j\otimes[b_i,b_j]-[b_i,b_j]\otimes a_j-b_j\otimes[b_i,a_j])\otimes[x,a_i]\\ &\quad +([[x,b_i],a_j]\otimes b_j+a_j\otimes[[x,b_i],b_j]-[[x,b_i],b_j]\otimes a_j-b_j\otimes[[x,b_i],a_j])\otimes a_i\\ &\quad -([a_i,a_j]\otimes b_j+a_j\otimes[a_i,b_j]-[a_i,b_j]\otimes a_j-b_j\otimes[a_i,a_j])\otimes[x,b_i]\\ &\quad -([[x,a_i],a_j]\otimes b_j+a_j\otimes[[x,a_i],b_j]-[[x,a_i],b_j]\otimes a_j-b_j\otimes[[x,a_i],a_j])\otimes b_i),\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

$$\begin{aligned}&\xi^2(1\otimes\Delta)\Delta(x)\\ &=\sum_{i,j}(b_j\otimes[x,a_i]\otimes[b_i,a_j]+[b_i,b_j]\otimes[x,a_i]\otimes a_j-a_j\otimes[x,a_i]\otimes[b_i,b_j]\\ &\quad -[b_i,a_j]\otimes[x,a_i]\otimes b_j+b_j\otimes a_i\otimes[[x,b_i],a_j]+[[x,b_i],b_j]\otimes a_i\otimes a_j\\ &\quad -a_j\otimes a_i\otimes[[x,b_i],b_j]-[[x,b_i],a_j]\otimes a_i\otimes b_j-b_j\otimes[x,b_i]\otimes[a_i,a_j]\\ &\quad -[a_i,b_j]\otimes[x,b_i]\otimes a_j+a_j\otimes[x,b_i]\otimes[a_i,b_j]+[a_i,a_j]\otimes[x,b_i]\otimes b_j\\ &\quad -b_j\otimes b_i\otimes[[x,a_i],a_j]-[[x,a_i],b_j]\otimes b_i\otimes a_j+a_j\otimes b_i\otimes[[x,a_i],b_j]\\ &\quad +[[x,a_i],a_j]\otimes b_i\otimes b_j).\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

由 Jacobi-identity 以及 (4.2.6), 我们有

$$(4.2.7)+(4.2.8)+(4.2.9)=(1+\xi+\xi^2)(1\otimes\Delta)\Delta(r)=x\cdot c(r).\quad\square$$

推论 4.2.13 令 L 是一 *Lie* 代数，则 $\Delta = \Delta_r$ (对某个 $r \in L \otimes L$) 使得 $(L, [\cdot,\cdot], \Delta)$ 具有 *Lie* 双代数的结构的充分必要条件是 r 满足 *Modified Yang-Baxter Equation* (4.1.2).

§4.3 广义 Hamilton- 型李双代数

为了研究 Hamiltonian 系统和 Poisson 李群，最近很自然的出现了很多关于李双代数的文章 (参见，[39, 36-38, 34, 149, 145, 146, 33]). 在本节中，我们考虑在文献 [147](也可见 [148]) 中定义的广义 Hamiltonian 型李双代数 (或者称为 H 型李双代数). 令 Γ 是 $\mathbb{F}^{2n}$ 的任意 非退化的加法子群,(即，Γ 中包含了一组 $\mathbb{F}^{2n}$ 的 $\mathbb{F}$- 基). 选择 $\mathbb{F}^{2n}$ 的一组 $\mathbb{F}$- 基 $\{\varepsilon_p \,|\, 1\le p\le 2n\}\subset\Gamma$. 对任意元素 $\alpha=\sum_{p=1}^{2n}\alpha_p\varepsilon_p$ 可以写成如下形式：

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_{\bar 1},...,\alpha_n,\alpha_{\bar n})\in\Gamma \text{ 其中 } \alpha_1,\alpha_{\bar 1},...,\alpha_n,\alpha_{\bar n}\in\mathbb{F} \text{ and } \bar p=n+p \tag{4.3.1}$$

写

$$\sigma_p=\sigma_{\bar p}=\varepsilon_p+\varepsilon_{\bar p}\quad\text{for}\quad 1\le p\le n.$$

令 $\overline{\mathcal{P}}=\overline{\mathcal{P}}(2n,\Gamma):=\text{span}\{t^\alpha\,|\,\alpha\in\Gamma\}$ 是一个群代数，具有乘法运算 $t^\alpha\cdot t^\beta=t^{\alpha+\beta}$. 定义 $[\cdot,\cdot]$ 如下，

$$[t^\alpha,t^\beta]=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\beta_{\bar i}-\beta_i\alpha_{\bar i})t^{\alpha+\beta-\sigma_i}\quad\text{这里}\quad \alpha,\beta\in\Gamma. \tag{4.3.2}$$

则 $(\overline{\mathcal{P}},\cdot,[\cdot,\cdot])$ 是一个 *Poisson* 代数 满足下列相容条件：

$$[u,v\cdot w]=[u,v]\cdot w+v\cdot[u,w]\quad\text{这里}\quad u,v,w\in\overline{\mathcal{P}}.$$

记 $\mathcal{P}=\overline{\mathcal{P}}/\mathbb{F}\cdot 1$(这里 $1=t^0$), 已知它是单李代数，通常人们把它称为 Cartan 型 Hamilton 李代数，参见 [147, 148] 也可以见 [71, 73].

令 V 是 $\mathcal{P}$ 的模. 采用记号 $\text{Der}(\mathcal{P},V)$ 表示导子集合，导子 $d:\mathcal{P}\to V$ 满足

$$d([x,y])=x\cdot d(y)-y\cdot d(x)\quad\text{对于}\quad x,y\in\mathcal{P}, \tag{4.3.3}$$

使用记号 $\text{Inn}(\mathcal{P},V)$ 表示由所有 内导子 a_{inn}, $a\in V$ 构成的集合，内导子的定义为：

$$a_{\text{inn}}:x\mapsto x\cdot a\quad\text{对于}\quad x\in\mathcal{P}. \tag{4.3.4}$$

一个众所周知的事实是 $\mathcal{P}$ 的系数在 V 中的一阶上同调群 $H^1(\mathcal{P},V)$ 同构于 $H^1(\mathcal{P},V)\cong\text{Der}(\mathcal{P},V)/\text{Inn}(\mathcal{P},V)$.

本节的主要结果如下.

定理 4.3.1 (1) $\mathcal{P}$ 的每一个李双代数结构都是三角的上边缘李双代数.

(2) 一个元素 $r \in \mathcal{P}$ 满足 *CYBE* (4.2.2) 当且仅当满足下列 *Modified Yang-Baxter* 方程 (*MYBE*) :

$$x \cdot c(r) = 0 \quad \text{对所有的} \quad x \in \mathcal{P}. \tag{4.3.5}$$

(3) 考虑向量空间 $V = \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$, 在对角作用下把 v 看作 $\mathcal{P}$- 模 (4.2.1), 我们有 $H^1(\mathcal{P}, V) = \mathrm{Der}(\mathcal{P}, V)/\mathrm{Inn}(\mathcal{P}, V) = 0$.

定理 4.3.1(2) 我们可以在很多地方看到类似的结果, 比如文献 [39, 34, 33] 中. 而在此我们由引理 4.4.4 得到.

§4.4 广义 Hamilton- 型李双代数的构造

首先我们在文献 Drinfeld [39], Michaelis [34], Ng-Taft [34] 中抽出一些有用的结果，并把它们合成下面的定理.

定理 4.4.1 (1) 对于一个李代数 L 和 $r \in \mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau) \subset L$, 三元对 $(L, [\cdot,\cdot], \Delta_r)$ 是一个李双代数当且仅当 r 满足 *MYBE*.

(2) 设 L 是一个李代数，a, b 是 L 中的两个元素，满足 $[a, b] = b$, 令 $r = a\otimes b - b\otimes a$. 则 Δ_r 赋予 L 上三角的上边缘李双代数结构.

(3) 对于一个李代数 L,$r \in \mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau) \subset L$, 我们有

$$(1+\xi+\xi^2)\cdot(1\otimes\Delta)\cdot\Delta(x) = x\cdot c(r) \quad \text{对所有的} \quad x \in L. \tag{4.4.1}$$

为了证明定理 4.3.1, 我们要证明几个几个引理. 首先我们需要一些准备工作. 定义线性映射 $\pi : \Gamma \to \mathbb{F}^n$ 如下：

$$\pi(\alpha) = (\alpha_1 - \alpha_{\overline{1}}, \alpha_2 - \alpha_{\overline{2}}, ..., \alpha_n - \alpha_{\overline{n}}) \in \mathbb{F}^n \quad \text{这里} \quad \alpha \in \Gamma. \tag{4.4.2}$$

令

$$G := \pi(\Gamma) = \{\pi(\alpha)\,|\,\alpha \in \Gamma\} \subset \mathbb{F}^n.$$

对于 $\mathbb{F}^n$ 中元素 μ 我们总是采用记号：

$$\mu = (\mu_1, ..., \mu_n).$$

这样 $\mathcal{P}$ 是一个 G- 阶化李代数 (但不是有限阶化的):

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{\mu\in G} \mathcal{P}_\mu, \quad \text{这里} \quad \mathcal{P}_\mu = \mathrm{span}\{t^\beta\,|\,\pi(\beta) = \mu\}. \tag{4.4.3}$$

另外

$$V := \mathcal{P}\otimes\mathcal{P} = \bigoplus_{\mu\in G} V_\mu \text{ 是 } G\text{- 阶化的，这里 } V_\mu = \sum_{\nu+\lambda=\mu} \mathcal{P}_\nu\otimes\mathcal{P}_\lambda.$$

由 (4.3.2) 式很容易看出

$$t^{\sigma_p}|_{V_\mu} = \mu_p\cdot 1_{V_\mu} \quad \text{其中} \quad \mu \in G, \quad p = 1, 2, ..., n. \tag{4.4.4}$$

对于 $1 \le p \le n$, 我们采用下列符号

$$\mathcal{P}^p = \mathrm{span}\{t^\alpha\,|\,\alpha_p = \alpha_{\overline{p}} = 0\}, \quad \mathcal{P}^{\le p} = \mathrm{span}\{t^\alpha\,|\,\alpha_q = \alpha_{\overline{q}} = 0,\, q \le p\}. \tag{4.4.5}$$

明显的，$\mathcal{P}^{\le n}=0$. 令

$$V^p=\mathcal{P}^p\otimes\mathcal{P}+\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}^p,\quad V^{\le p}=\mathcal{P}^{\le p}\otimes\mathcal{P}+\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}^{\le p}.$$

引理 4.4.2 令 $v\in V$, $1\le p\le n$. 假设 $t^{k\epsilon_p}\cdot v=t^{k\epsilon_{\overline{p}}}\cdot v=0$ 对 $k\in\mathbb{Z}$ 成立. 则 $v\in V^p$.

证明. 写 $v=\sum_{\alpha,\beta\in\Gamma}c_{\alpha,\beta}t^{\alpha}\otimes t^{\beta}$ 其中 $c_{\alpha,\beta}\in\mathbb{F}$, 而且 $\{(\alpha,\beta)\,|\,c_{\alpha,\beta}\neq 0\}$ 是一个有限集合. 选择 $k\gg 0$ 使得对所有的 α,β 有 $c_{\alpha+k\epsilon_p-\sigma_p,\beta-k\epsilon_p+\sigma_p}=0$. 则

$$\begin{aligned}0=t^{k\epsilon_p}\cdot v&=k\sum_{\alpha,\beta\in\Gamma}c_{\alpha,\beta}(\alpha_{\overline{p}}t^{\alpha+k\epsilon_p-\sigma_p}\otimes t^{\beta}+\beta_{\overline{b}}t^{\alpha}\otimes t^{\beta+k\epsilon_p-\sigma_p})\\&=k\sum_{\alpha,\beta\in\Gamma}(\alpha_{\overline{p}}c_{\alpha,\beta}+(\beta_{\overline{p}}+1)c_{\alpha+k\epsilon_p-\sigma_p,\beta-k\epsilon_p+\sigma_p})t^{\alpha+k\epsilon_p-\sigma_p}\otimes t^{\beta}\\&=k\sum_{\alpha,\beta\in\Gamma}\alpha_{\overline{p}}c_{\alpha,\beta}t^{\alpha+k\epsilon_p-\sigma_p}\otimes t^{\beta}.\end{aligned}$$

这样 $c_{\alpha,\beta}\neq 0\Rightarrow\alpha_p=0$. 相似的 $c_{\alpha,\beta}\neq 0\Rightarrow\beta_p=0$. 利用 $\overline{p}$ 代替 p, 我们有 $c_{\alpha,\beta}\neq 0\Rightarrow\alpha_{\overline{p}}=\beta_{\overline{p}}=0$. □

引理 4.4.3 设 $r\in V$ 使得对所有的 $a\in\mathcal{P}$ 有 $a\cdot r\in\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$. 则 $r\in\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$.

证明. (参见 [146]) 设 $r=\sum_{\alpha\in\Gamma}r_{\alpha}$ 其中 $r_{\alpha}\in V_{\alpha}$. 显然 $r\in\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$ 当且仅当 $r_{\alpha}\in\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$ 对所有的 $\alpha\in\Gamma$ 成立. 这样不失一般性，我们可以假设 $r=r_{\alpha}$ 是齐次元素. 注意到 $\mathcal{P}\cdot\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)\subset\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$. 我们将用 $r_{\alpha}-u$ 来代替 r_{α} 直到把它约化为零，其中 $u\in\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$.

首先假设 $\alpha\neq 0$. 根据 (4.4.4) 式，我们可以选择 t^{σ_p} 使得 $t^{\sigma_p}|_{V_{\alpha}}=\alpha_p\cdot 1_{V_{\alpha}}\neq 0$. 这样，$r_{\alpha}=\alpha_p^{-1}t^{\sigma_p}\cdot r_{\alpha}\in\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$.

现在假设 $\alpha=0$. 设 $r_0=\Sigma_{\gamma,\beta\in\Gamma}c_{\gamma,\beta}t^{-\beta}\otimes t^{\gamma+\beta}$, 这里 $\pi(\gamma)=0$. 对于群 Γ 选择一个全序, 与它的群结构相容. 因为 $u_{\gamma,\beta}:=t^{-\beta}\otimes t^{\gamma+\beta}-t^{\gamma+\beta}\otimes t^{-\beta}\in\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$, 利用 $r-u$ 来代替 r, 其中 u 是 $u_{\gamma,\beta}$ 的线性组合，我们可以假设

$$c_{\gamma,\beta}\neq 0\implies -\beta\preceq\gamma+\beta.\tag{4.4.6}$$

对于 $-\beta\preceq\gamma+\beta$ 现在假设 $c_{\gamma,\beta}\neq 0$. 对于某个 i 如果 $\beta_{\overline{i}}\neq 0$. 取 $m\gg 0$, 我们可得到：

$$t^{m\epsilon_i}\cdot r_0=-m\sum_{\gamma,\beta\in\Gamma}c_{\gamma,\beta}(\beta_{\overline{i}}t^{-\beta+m\epsilon_i-\sigma_i}\otimes t^{\gamma+\beta}-(\gamma_{\overline{i}}+\beta_{\overline{i}})t^{-\beta}\otimes t^{\gamma+\beta+m\epsilon_i-\sigma_i}).$$

由此式，我们知道 $t^{m\varepsilon_i}\cdot r_0 \notin \mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$. Thus $\beta_i=0$ for $1\le i\le n$. 由对称性，$\beta_i=0$ 对于 $1\le i\le n$ 都成立. 相似的，$\gamma_i=0$ 对于 $1\le i\le 2n$ 成立. 也就是说，$c_{\gamma,\beta}\neq 0$ 意味着 $\gamma=\beta=0$. 这就证明了 $r_0=0$. □

定理 4.3.1(2) 可以由下面的一般性结果得到.

引理 4.4.4 *考虑 $\mathcal{P}[m]=\mathcal{P}\otimes\cdots\otimes\mathcal{P}$（一共 m 个）在对角作用下作为 $\mathcal{P}$-模，假设 $c\in\mathcal{P}[m]$ 满足 $a\cdot c=0$ 对所有 $a\in\mathcal{P}$. 则 $c=0$.*

证明. 和引理 4.4.2 的证明相类似，我们可以证明 $c\in\mathcal{P}[m]^{\le n}=\{0\}$ (参见. (4.4.5)). □

定理 4.3.1(1) 的证明. 令 $(\mathcal{P},[\cdot,\cdot],\Delta)$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个李双代数结构. 根据定义 4.2.5 (3), 式子 (4.3.3) 和引理 4.5.1, $\Delta=\Delta_r$(见定理 4.2.11)，其中 $r\in\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$. 根据定义 4.2.2(1), $\mathrm{Im}\,\Delta\subset\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$. 这样由引理 4.4.3, $r\in\mathrm{Im}(1\otimes 1-\tau)$. 则 Jacobi- 等式，(4.4.1) 和定理 4.3.1(2) 说明了 $c(r)=0$. 这样根据定义 4.2.9 $(\mathcal{P},[\cdot,\cdot],\Delta)$ 是一个三角的上边缘的李双代数. □

§4.5 技术性引理

定理 4.3.1(3) 的证明可以从下面的技术性引理得到.

引理 4.5.1 $\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)=\mathrm{Inn}(\mathcal{P},V)$, 这里 $V=\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$.

证明. 我们将通过几个断言来证明此引理. 称一个导子 $d\in\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)$ 是 *次数为* $\mu\in G$ *的齐次导子*, 如果 $d(\mathcal{P}_\nu)\subset V_{\mu+\nu}$ 对于 $\nu\in G$ 成立. 采用下列记号来表示

$$\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)_\mu=\{d\in\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)\mid\deg d=\mu\}.$$

断言 1 . 令 $d\in\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)$. 则

$$d=\sum_{\mu\in G}d_\mu,\quad 此处\ \ d_\mu\in\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)_\mu,\tag{4.5.1}$$

在以下意义下成立: 即对每一个 $u\in\mathcal{P}$, 只有有限多个 $d_\mu(u)\neq 0$, 并且有表达式 $d(u)=\sum_{\mu\in G}d_\mu(u)$ (我们称这样的和式 (4.5.1) 为可和的).

对于 $\mu\in G$, 我们定义 d_μ 如下: 对于 $u\in\mathcal{P}_\nu$ 和 $\nu\in G$, 写 $d(u)=\sum_{\gamma\in G}v_\gamma\in V$ 其中 $v_\gamma\in V_\gamma$, 则我们令 $d_\mu(u)=v_{\mu+\nu}$. 显然的 $d_\mu\in\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)_\mu$ 并且我们有 (4.5.1).

断言 2 . 如果 $0\neq\mu\in G$, 那么 $d_\mu\in\mathrm{Inn}(\mathcal{P},V)$.

因为 $\mu\neq 0$, 我们可以选择 p 使得 $\mu_p\neq 0$. 对于 $x\in\mathcal{P}_\eta$, $\eta\in G$, 用 d_μ 作用在 $[t^{\sigma_p},x]=\eta_p x$ 的两边, 根据 (4.3.3), 我们有

$$-x\cdot d_\mu(t^{\sigma_p})+t^{\sigma_p}\cdot d_\mu(x)=\eta_p d_\mu(x).$$

既然 $d_\mu(x)\in V_{\mu+\eta}$, 我们有 $t^{\sigma_p}\cdot d_\mu(x)=(\mu_p+\eta_p)d_\mu(x)$. 这样 $d_\mu(x)=u_p^{-1}x\cdot d_\mu(t^{\sigma_p})$. 也就是说, $d_\mu=a_{\mathrm{inn}}$ 这里 $a=u_p^{-1}d_\mu(t^{\sigma_p})$.

断言 3 $d_0(t^{\sigma_p})=0$ 其中 $1\leq p\leq n$.

用 d_0 作用在 $[t^{\sigma_p},t^\alpha]=\pi(\alpha)_p t^\alpha$ 的两边, 其中 $\alpha\in\Gamma$, 我们有

$$-t^\alpha\cdot d_0(t^{\sigma_p})+\pi(\alpha)_p t^\alpha=-t^\alpha\cdot d_0(t^{\sigma_p})+t^{\sigma_p}\cdot d_0(t^\alpha)=\pi(\alpha)_p t^\alpha.\tag{4.5.2}$$

也就是, $t^\alpha\cdot d_0(t^{\sigma_p})=0$. 根据引理 4.4.4, $d_0(t^{\sigma_p})=0$.

断言 4 . $d_0\in\mathrm{Inn}(\mathcal{P},V)$.

我们将对 $p=0,1,...,n$, 用归纳法. 对于 $u\in V_0$ 通过用 $d_0-u_{\rm inn}$ 来代替 d_0 将要证明,

$$d_0(x)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, V^{\le p})\quad 其中\ \ x\in\mathcal{P}. \tag{4.5.3}$$

如果 $p=0$, 那么我们并不需要做什么,结论是显然的. 假设 $i>0$ 而且对于 $p=i-1$, 式子 (4.5.3) 已经成立. 下设 $p=i$. 我们将通过几个子断言来证明 (4.5.3) 式成立.

子断言 1 我们可以假设 $d_0(t^{\epsilon_i})\equiv d_0(t^{\epsilon_{\bar{i}}})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,V^{\le i})$.

对于任意元素 $\gamma\in\Gamma$, 我们可以唯一的写 (回忆 $\mathcal{P}$ 是 G- 阶化的而不是 Γ- 阶化)

$$d_0(t^\gamma)=\sum_{\beta,\alpha\in\Gamma:\,\pi(\alpha)=0}c^\gamma_{\beta,\alpha}t^{-\beta}\otimes t^{\beta+\alpha+\gamma}\ \ (有限和), \tag{4.5.4}$$

其中 $c^\gamma_{\beta,\alpha}\in\mathbb{F}^*=\mathbb{F}\backslash\{0\}$. 对于 $\alpha\in\pi^{-1}(0)$, 定义线性映射 D^α

$$D^\alpha(t^\gamma)=\sum_{\beta\in\Gamma}c^\gamma_{\beta,\alpha}t^{-\beta}\otimes t^{\beta+\alpha+\gamma}.$$

非常容易验证 $D^\alpha\in\mathrm{Der}(\mathcal{P},V)$ 并且 $d_0=\sum_{\alpha\in\pi^{-1}(0)}D^\alpha$.

我们将分两步来证明子断言 1).

Step 1. 我们将证明 $d_0(t^{\epsilon_i})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,V^{\le i})$.

对于 $m,m'\in\mathbb{Z}$, 我们可以写

$$D^\alpha(t^{m\epsilon_i+m'\epsilon_{\bar{i}}})=\sum_{\beta\in\overline{\Gamma},\,j,k\in\mathbb{Z}}c^{m,m'}_{\beta,j,k}t^{-(\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}}+\alpha+m\epsilon_i+m'\epsilon_{\bar{i}}}\ \ (有限和), \tag{4.5.5}$$

此处 $\overline{\Gamma}=\Gamma/(\mathbb{Z}\epsilon_i+\mathbb{Z}\epsilon_{\bar{i}})$, 并且我们可以要求

$$\beta_p\in\mathbb{Z}\quad\Longrightarrow\quad\beta_p=0\ \text{ for }\ p=i,\bar{i}. \tag{4.5.6}$$

首先我们考虑 $D^\alpha(t^{\epsilon_i})$. 注意到

$$\begin{aligned}&[t^{\epsilon_i},t^{-(\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}}+\alpha+\sigma_i}]\\&=-(\beta_{\bar{i}}+k)t^{-(\beta+j\epsilon_i+(k+1)\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j\epsilon_i+(k+1)\epsilon_{\bar{i}}+\alpha+\epsilon_i}\\&\quad+(\beta_{\bar{i}}+k+\alpha_{\bar{i}}+1)t^{-(\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}}+\alpha+\epsilon_i}.\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

根据 (4.5.7), 通过用 $D^{\alpha}-u_{inn}$, 来替换 D^{α}, 这里 u 是一些具有 $t^{-(\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}}+\alpha+\sigma_i}$ 这种形式的元素的线性组合. 重新约定 $b_{\beta,j,k}=c^{1,0}_{\beta,j,k}$ (为了避免混淆), 我们可以假设

$$b_{\beta,j,k}\neq 0 \implies \begin{cases} 1)\ \beta_{\bar{i}}\neq 0,\ \beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}\notin\mathbb{Z},\ \text{and}\ \ k=0,\ \ \text{or} \\ 2)\ \beta_{\bar{i}}=0,\ \alpha_{\bar{i}}\notin\mathbb{Z}, \qquad\quad \text{and}\ \ k=1,\ \ \text{or} \\ 3)\ \beta_{\bar{i}}\neq 0,\ \beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}\in\mathbb{Z},\ \text{and}\ \ k=-(\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}+1),\ \ \text{or} \\ 4)\ \beta_{\bar{i}}=0,\ \alpha_{\bar{i}}\in\mathbb{Z}, \qquad\quad \text{and}\ \ k=1\ \text{or}\ k=-(\alpha_{\bar{i}}+1). \end{cases} \tag{4.5.8}$$

用 D^{α} 作用在 $[t^{\epsilon_i},t^{\epsilon_{\bar{i}}}]=0$ 两边, 根据定义 (4.5.5), 我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta,j,k}(-(\beta_i+j-1)b_{\beta,j-1,k}+(\beta_i+\alpha_i+j+1)b_{\beta,j,k})t^{-(\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}}+\alpha}\\ &=\sum_{\beta,j,k}((\beta_{\bar{i}}+k-1)c^{0,1}_{\beta,j,k-1}-(\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}+k+1)c^{0,1}_{\beta,j,k})t^{-(\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}}+\alpha}.\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

对于固定的 j, 我们得到

$$(\beta_i+\alpha_i+j+1)b_{\beta,j,k}-(\beta_i+j-1)b_{\beta,j-1,k}=-(\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}+k+1)c^{0,1}_{\beta,j,k}+(\beta_{\bar{i}}+k-1)c^{0,1}_{\beta,j,k-1}. \tag{4.5.10}$$

定义 $k_1\geq k_2$ 是最大和最小的两个整数 (依赖于 j) 使得 $c^{0,1}_{\beta,j,k}\neq 0$, 也就是,

$$k_1\geq k_2\quad 且\quad \begin{cases} c^{0,1}_{\beta,j,k}=0\ \ 如果\ \ k>k_1 或者\ \ k<k_2, \\ c^{0,1}_{\beta,j,k}\neq 0\ \ 如果\ \ k=k_1\ 或者\ \ k=k_2. \end{cases} \tag{4.5.11}$$

现在假设 $b_{\beta,j,k}\neq 0$. 我们将逐条讨论 (4.5.8) 的各种情形.

情形 1) $\beta_{\bar{i}}\neq 0$, $\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}\notin\mathbb{Z}$ 且 $k=0$. 首先假设 $k_1\neq -1$. 在 (4.5.10) 式中, 用 k_1+1 来代替 k, 式子的左端变成了零, 这样我们就得到了 $\beta_{\bar{i}}+k_1=0$, 这意味着 $\beta_{\bar{i}}\in\mathbb{Z}$. 根据 (4.5.6) 的要求这与我们的假设 $\beta_{\bar{i}}\neq 0$ 相矛盾. 这样 $k_1=-1$.

其次如果 $k_2\neq 0$. 在 (4.5.10) 式中, 用 k_2 来代替 k, 我们可以得到 $\beta_{\bar{i}}+k_2+\alpha_{\bar{i}}+1=0$, 这与我们的假设 $\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}\notin\mathbb{Z}$ 相矛盾. 这样 $k_2=0$. 但是此时 $k_1<k_2$, 显然是一个矛盾. 这也就是说这种情形不会出现.

情形 2) $\beta_{\bar{i}}=0$, $\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}\notin\mathbb{Z}$ 且 $k=1$. 和情形 1) 相类似, 在 (4.5.10) 式中,

分别用 k_1+1 和 k_2 来替换 k, 我们得到了矛盾 $k_1=-\beta_{\bar{i}}<k_2=1-\beta_{\bar{i}}$. 这样这种情形也不会出现.

情形 3) $\beta_{\bar{i}}\neq 0, \alpha_{\bar{i}}\in\mathbb{Z}$ 且 $k=-(\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}+1)$. 利用相同的方法，我们可以得到矛盾 $k_1=-(\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}+2)<k_2=-(\beta_{\bar{i}}+\alpha_{\bar{i}}+1)$.

以上三种情形说明了对于任意的 j,

$$b_{\beta,j,k}\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \beta_{\bar{i}}=0, \alpha_i\in\mathbb{Z} \text{ 且 } k=1, \text{ 或者 } k=-(\alpha_{\bar{i}}+1). \tag{4.5.12}$$

这样我们只需要考虑剩下的情形.

情形 4) $\beta_{\bar{i}}=0, \alpha_{\bar{i}}\in\mathbb{Z}$ 且 $k=1$, 或 $k=-(\alpha_{\bar{i}}+1)$. 在次情形下问题变的非常复杂，所以我们要分成四种情况来讨论.

情况 4.1) $\alpha_{\bar{i}}=-2$. 在此情况下，$b_{\beta,j,k}\neq 0$ 蕴含着 $k=1$. 而在 (4.5.10) 式中 k 的值取 1 时，式子的右端变成了零. 我们得到 (注意到 $\alpha_i=\alpha_{\bar{i}}=-2$)

$$-(\beta_i+j-1)b_{\beta,j,1}=(\beta_i+j-1)b_{\beta,j-1,1}. \tag{4.5.13}$$

如果对 $\beta_i\notin\mathbb{Z}$ 有 $b_{\beta,j,1}\neq 0$, 则 (4.5.13) 式蕴含了 $b_{\beta,j',1}=b_{\beta,j,1}\neq 0$ 其中 $j'\in\mathbb{Z}$. 这就和 $D^\alpha(t^{\epsilon_i})$ 是一个有限和的事实相矛盾. 所以 $\beta_i\in\mathbb{Z}$, 也就是说，根据 (4.5.6) 式 $\beta_i=0$.

如果对于 $j>1$ 有 $b_{\beta,j,1}\neq 0$, 则 (4.5.13) 说明了 $b_{\beta,j+n,1}=b_{\beta,j,1}\neq 0$ 对所有的 $n\in\mathbb{Z}_+$ 成立，这显然又是一个矛盾. 相似的，如果对 $j<1$ 有 $b_{\beta,j,1}\neq 0$, 我们还是得到了矛盾. 这样 $j=1$.

所以假设 $b_{\beta,j,1}\neq 0$ 这蕴含了 $\beta_i=0, j=1$. 采用记号 $\alpha'=\alpha+2\sigma_i$. 则有 $\alpha'_i=\alpha'_{\bar{i}}=0$, 当 $(m,m')=(1,0)$, 这样 (4.5.5) 式变为

$$D^\alpha(t^{\epsilon_i})=\sum_\beta b_{\beta,1,1}t^{-(\beta+\sigma_i)}\otimes t^{\beta+\alpha'-\epsilon_{\bar{i}}}, \text{ 这里 } b_{\beta,1,1}\neq 0 \text{ 蕴含了} \beta_i=\beta_{\bar{i}}=0. \tag{4.5.14}$$

注意到 $(m,m')=(0,1)$ 时 (4.5.5) 式变为

$$D^\alpha(t^{\epsilon_{\bar{i}}})=\sum_{\beta,j',k'}c^{0,1}_{\beta,j',k'}t^{-(\beta+j'\epsilon_i+k'\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j'\epsilon_i+k'\epsilon_{\bar{i}}+\alpha'-2\sigma_i+\epsilon_{\bar{i}}}.$$

用 D^α 作用在 $[t^{\epsilon_i},t^{\epsilon_{\bar{i}}}]=0$ 的两边，我们得到 $t^{\epsilon_i}\cdot D^\alpha(t^{\epsilon_{\bar{i}}})=t^{\epsilon_{\bar{i}}}\cdot D^\alpha(t^{\epsilon_i})$. 所以

$$\sum_{\beta,j',k'}c^{0,1}_{\beta,j',k'}\Big(k't^{-(\beta+j'\epsilon_i+(k'+1)\epsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j'\epsilon_i+k'\epsilon_{\bar{i}}+\alpha'-2\sigma_i+\epsilon_{\bar{i}}}$$

$$+ (k'-1)t^{-(\beta+j'\epsilon_i+k'\epsilon_{\bar{i}})} \otimes t^{\beta+j'\epsilon_i+k'\epsilon_{\bar{i}}+\alpha'-2\sigma_i}\Big)$$

$$= \sum_{\beta} b_{\beta,1,1} t^{-(\beta+\sigma_i+\epsilon_{\bar{i}})} \otimes t^{\beta+\alpha'-\epsilon_{\bar{i}}}. \tag{4.5.15}$$

这就迫使 $b_{\beta,1,1} = c^{0,1}_{\beta,j',k'} = 0$.

情况 4.2) $\alpha_{\bar{i}} > -1$. 用 D^α 作用在 $[t^{\epsilon_i}, t^{m\epsilon_i}] = 0, m \in \mathbb{Z}$ 两边，我们得到

$$t^{\epsilon_i} \cdot D^\alpha(t^{m\epsilon_i}) = t^{m\epsilon_i} \cdot D^\alpha(t^{\epsilon_i}).$$

为了简便，我们约定采用记号

$$t^{\beta,j,k}_{\alpha,\gamma} = t^{-(\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}})} \otimes t^{\beta+j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}}+\alpha+\gamma}. \tag{4.5.16}$$

利用 (4.5.5) 式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta,j,k}(-m(k-1)b_{\beta,j+m-1,k-1} + m(k+\alpha_{\bar{i}})b_{\beta,j,k})t^{\beta,j,k}_{\alpha,m\epsilon_i-\epsilon_{\bar{i}}} \\
&= \sum_{\beta,j,k}(-(k-1)c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,k-1} + (k+\alpha_{\bar{i}})c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,k})t^{\beta,j,k}_{\alpha,m\epsilon_i-\epsilon_{\bar{i}}}.
\end{aligned} \tag{4.5.17}$$

因为 $D^\alpha(t^{\epsilon_i})$ 是一个有限和，我们可以选择 $m \gg 0$ 使得

$$b_{\beta,j,k} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad b_{\beta,j+m-1,k-1} = b_{\beta,j-m+1,k+1} = 0.$$

这样由 (4.5.17) 式我们有

$$m(k+\alpha_{\bar{i}})b_{\beta,j,k} = -(k-1)c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,k-1} + (k+\alpha_{\bar{i}})c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,k}, \tag{4.5.18}$$

$$-mkb_{\beta,j,k} = -kc^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j-m+1,k} + (k+1+\alpha_{\bar{i}})c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j-m+1,k+1}. \tag{4.5.19}$$

注意到由 $b_{\beta,j,k} \neq 0$, 可得到 $k = 1, -(\alpha_i + 1)$. 首先假设 $b_{\beta,j,1} \neq 0$. 则由 (4.5.18) 式我们得到

$$m(1+\alpha_{\bar{i}})b_{\beta,j,1} = (1+\alpha_{\bar{i}})c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,1}, \text{ 这意味着 } c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,1} \neq 0.$$

取 $k = 2, 3, 4, \cdots$, 我们有

$$0 = -c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,1} + (2+\alpha_{\bar{i}})c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,2} = -2c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,2} + (3+\alpha_{\bar{i}})c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,3} = -3c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,2} + (4+\alpha_{\bar{i}})c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,4} = \cdots. \tag{4.5.20}$$

由以上讨论，我们可以得出对 $1 \leq k \in \mathbb{Z}$ 有 $c^{m\epsilon_i,0}_{\beta,j,k} \neq 0$, 这与 $D^\alpha(t^{m\epsilon_i})$ 是一个有限和的事实相矛盾. 这样 $b_{\beta,j,1} = 0$.

接着，令 $q=-(\alpha_{\bar{i}}+1)$, 并且假设 $b_{\beta,j,q}\neq 0$. 根据 (4.5.19) 式，我们有

$$mqb_{\beta,j,q}=qc^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j-m+1,q},\quad \text{这意味着}\quad c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j-m+1,q}\neq 0.$$

取 $k=q-1,q-2,\cdots$, 我们有

$$\begin{aligned}0&=(q-1)c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j-m+1,q-1}+(q+\alpha_{\bar{i}})c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j-m+1,q}\\&=(q-2)c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j-m+1,q-2}+(q-1+\alpha_{\bar{i}})c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j-m+1,q-1}=\cdots.\end{aligned}$$

和上面的原因相同，我们还是得到了矛盾. 这样 $b_{\beta,j,q}=0$.

情况 4.3) $\alpha_{\bar{i}}<-2$. 在此情况下，因为 $-(\alpha_{\bar{i}}+1)>1$, 我们可以进一步用 $D^\alpha-u_{\rm inn}$ 来替换 D^α, 这里的 u 具有形式

$$u=\sum_j\sum_{k=2}^{-(\alpha_{\bar{i}}+1)}a_{j,k}t^{-(\beta+j\varepsilon_i+k\varepsilon_{\bar{i}})}\otimes t^{\beta+j\varepsilon_i+k\varepsilon_{\bar{i}}+\alpha+\sigma_i},\quad \text{对某些}\ a_{j,k}\in\mathbb{F},$$

使得只有当 $k=1$ 时 $b_{\beta,j,k}\neq 0$,(注意，为了保证替换以后当 $k\neq 1$ 时 $b_{\beta,j,k}=0$, 这样的 u 是存在且唯一的，并且系数 $a_{j,k}$ 被唯一决定了). 和情况 4.2) 相同的原因，由 (4.5.18) 式，如果 $mb_{\beta,j,1}=c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j,1}\neq 0$, 我们有

$$0=-c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j,1}+(2+\alpha_{\bar{i}})c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j,2}=-2c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j,2}+(3+\alpha_{\bar{i}})c^{m\varepsilon_i,0}_{\beta,j,3}=\cdots,\tag{4.5.21}$$

这样我们就又得到了矛盾.

情况 4.4) $\alpha_{\bar{i}}=-1$. 只有 $k=0$ 或者 $k=1$ 时，有 $b_{\beta,j,k}\neq 0$. 根据 (4.5.10) 式，我们有

$$(\beta_i+j)b_{\beta,j,0}-(\beta_i+j-1)b_{\beta,j-1,0}=-c^{0,1}_{\beta,j,-1},\tag{4.5.22}$$

$$(\beta_i+j)b_{\beta,j,1}-(\beta_i+j-1)b_{\beta,j-1,1}=-c^{0,1}_{\beta,j,1}.\tag{4.5.23}$$

如果 $c^{0,1}_{\beta,j,-1}\neq 0$ 或者 $c^{0,1}_{\beta,j,1}\neq 0$, 则由于和 4.2) 相似的原因，我们可以得知 $D^\alpha(t^{m\varepsilon_i})$ 是一个无限和. 这样 $c^{0,1}_{\beta,j,-1}=c^{0,1}_{\beta,j,1}=0$, 并且 (4.5.22) 式和 (4.5.23) 式变为

$$(\beta_i+j)b_{\beta,j,0}-(\beta_i+j-1)b_{\beta,j-1,0}=(\beta_i+j)b_{\beta,j,1}-(\beta_i+j-1)b_{\beta,j-1,1}=0.\tag{4.5.24}$$

类似于情况 4.1) 得讨论，我们可以得到：如果 $b_{\beta,j,0}\neq 0$ 或者 $b_{\beta,j,1}\neq 0$, 则 $\beta_i=0$ 并且 $j=0$. 这样的话我们就可以假设

$$d_0(t^{\varepsilon_i})=\sum_\beta(b_{\beta,0,0}t^{-\beta}\otimes t^{\beta-\varepsilon_{\bar{i}}}+b_{\beta,0,1}t^{-\beta-\varepsilon_{\bar{i}}}\otimes t^\beta)\ .\tag{4.5.25}$$

因为 $\beta_i = \beta_{\bar{i}} = 0$, 如果 β 出现在 (4.5.25) 式中，我们就有

$$d_0(t^{\varepsilon_i}) \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, V^{\leq i}). \tag{4.5.26}$$

Step 2. 我们将要证明 $d_0(t^{\varepsilon_{\bar{i}}}) \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, V^{\leq i})$.

首先，根据 (4.5.5) 式，我们可以重写 (回忆符号 (4.5.16))

$$D^{\alpha}(t^{\varepsilon_{\bar{i}}}) = \sum_{\beta\in\overline{\Gamma},\, j\in\mathbb{Z},\, k\in I} c^{0,1}_{\beta,j,k} t^{\beta,j,k}_{\alpha,\varepsilon_{\bar{i}}}, \quad \text{这里 } I \subset \mathbb{Z} \text{ 是个有限集}. \tag{4.5.27}$$

注意此时 (4.5.10) 变成了

$$0 = -(\beta_{\bar{i}} + \alpha_{\bar{i}} + k + 1) c^{0,1}_{\beta,j,k} + (\beta_{\bar{i}} + k - 1) c^{0,1}_{\beta,j,k-1}. \tag{4.5.28}$$

利用这个式子，仿照 Step 1 中情形 1-3) 的讨论，我们得到

$$c^{0,1}_{\beta,j,k} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta_{\bar{i}} = 0 \text{ 且 } \alpha_{\bar{i}} = \alpha_i \in \mathbb{Z}. \tag{4.5.29}$$

令 $u_{\beta,j} = \sum_{k\in I} c^{0,1}_{\beta,j,k} t^{\beta,j,k}_{\alpha,\sigma_i}$. 则 (4.5.28) 式意味着

$$[t^{\varepsilon_i}, u_{\beta,j}] = \sum_{k\in I}((\beta_{\bar{i}} + \alpha_{\bar{i}} + k + 1) c^{0,1}_{\beta,j,k} - (\beta_{\bar{i}} + k - 1) c^{0,1}_{\beta,j,k-1}) t^{\beta,j,k}_{\alpha,\varepsilon_i} = 0. \tag{4.5.30}$$

另一方面，

$$[t^{\varepsilon_{\bar{i}}}, u_{\beta,j}] = \sum_{k\in I}((\beta_i + j) c^{0,1}_{\beta,j,k} t^{\beta,j+1,k}_{\alpha,\varepsilon_{\bar{i}}} - (\beta_i + j + \alpha_i + 1) c^{0,1}_{\beta,j,k} t^{\beta,j,k}_{\alpha,\varepsilon_{\bar{i}}}). \tag{4.5.31}$$

这样如果我们用 $D^{\alpha} - u_{\mathrm{inn}}$ 来替换 D^{α}, 这里 u 是某些 $u_{\beta,j}$ 的线性组合，(4.5.26) 式仍然成立，那么我们就可以进一步假设

$$c^{0,1}_{\beta,j,k} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1) \ \beta_i \neq 0, \text{ 且 } j = 0, \text{ 或} \\ 2) \ \beta_i = 0, \text{ 且 } j = 1 \text{ 或 } j = -(\alpha_{\bar{i}} + 1). \end{cases} \tag{4.5.32}$$

剩下的证明部分和 Step 1 中的证明方法很类似 (实际上证明的方法比 Step 1 中的要简单，这是因为我们用 (4.5.10) 来代替了 (4.5.28)).

子断言 2 进一步我们可以假设 $d_0(t^{2\varepsilon_i}) \equiv d_0(t^{2\varepsilon_{\bar{i}}}) \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, V^{\leq i})$.

对于 $\alpha \in \pi^{-1}(0)$ 我们将考虑 D^{α}. 根据 1 的证明，我们只需要考虑 $\alpha_i = \alpha_{\bar{i}} \in \mathbb{Z}$ 的情况.

为了证明这个子断言，我们首先证明下面的子断言.

子断言 3 假设对 $m, m' \in \mathbb{Z}_+$,

$$t^{\varepsilon_i} \cdot (D^\alpha(t^{m\varepsilon_i+m'\varepsilon_{\bar{i}}})) = t^{\varepsilon_{\bar{i}}} \cdot (D^\alpha(t^{m\varepsilon_i+m'\varepsilon_{\bar{i}}})) = 0. \tag{4.5.33}$$

令 $q = -(\alpha_i + m)$, $q' = -(\alpha_i + m')$. 则 (4.5.5) 能够被写成

$$D^\alpha(t^{m\varepsilon_i+m'\varepsilon_{\bar{i}}}) = \sum_\beta \sum_{j=q}^{0} \sum_{k=q'}^{0} c_{\beta,j,k}^{m,m'} t_{\alpha,m\varepsilon_i+m'\varepsilon_{\bar{i}}}^{\beta,j,k}, \tag{4.5.34}$$

使得

$$c_{\beta,j,k}^{m,m'} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta_i = \beta_{\bar{i}} = 0 \ \text{并且}\ \alpha_i \geq \max\{-m, -m'\}. \tag{4.5.35}$$

进一步,

$$D^\alpha(t^{m\varepsilon_i+m'\varepsilon_{\bar{i}}}) = 0 \quad \text{如果}\ c_{\beta,j,k}^{m,m'} = 0\ \text{对某些}\ q < j < 0\ \text{或某些}\ q' < k < 0. \tag{4.5.36}$$

利用等式 $t^{\varepsilon_i} \cdot (D^\alpha(t^{m\varepsilon_i+m'\varepsilon_{\bar{i}}})) = 0$, 对于固定的 (β, j), 我们有

$$(\beta_{\bar{i}} + k - 1)c_{\beta,j,k-1}^{m,m'} = (\beta_{\bar{i}} + k + \alpha_{\bar{i}} + m')c_{\beta,j,k}^{m,m'} \ \text{这里}\ k \in \mathbb{Z}. \tag{4.5.37}$$

首先假设 $\beta_{\bar{i}} \neq 0$. 则根据 (4.5.6) 有 $\beta_{\bar{i}} + k - 1 \neq 0$ 此处 $k \in \mathbb{Z}$. 这样 (4.5.37) 式说明了如果 $c_{\beta,j,k}^{m,m'} \neq 0$ 对于 $k \in \mathbb{Z}$ 则 $c_{\beta,j,k}^{m,m'} \neq 0$ 对所有的 $k \in \mathbb{Z}$ 成立. 这样 $c_{\beta,j,k}^{m,m'} \neq 0$ 蕴含了 $\beta_{\bar{i}} = 0$.

其次假设 $c_{\beta,j,k}^{m,m'} \neq 0$ 对 $k > 0$ 或着 $k < -(\alpha_{\bar{i}} + m')$ 或者 $\alpha_{\bar{i}} < -m'$. 则根据 (4.5.37) 式我们还是可以得出 $c_{\beta,j,k}^{m,m'} \neq 0$ 对无限多个 k 成立. 这样根据 $c_{\beta,j,k}^{m,m'} \neq 0$ 就可以得到 $-(\alpha_{\bar{i}} + m') \leq k \leq 0$ 和 $\alpha_{\bar{i}} \geq -m'$. 进一步, 如果 $c_{\beta,j,k}^{m,m'} = 0$ 对 $q' < k < 0$ 成立, 我们根据 (4.5.37) 可得到 $c_{\beta,j,k}^{m,m'} = 0$ 对所有的 $q' < k < 0$ 成立. 利用这个结果和根据式子 $t^{\varepsilon_{\bar{i}}} \cdot (D^\alpha(t^{m\varepsilon_i+m'\varepsilon_{\bar{i}}})) = 0$ 得到的对称的结果, 我们可以得到 (4.5.34)-(4.5.36).

现在我们证明子断言 2). 首先根据子断言 1), 我们知道 (4.5.33) 式成立, 这里 $(m, m') = (2, 0), (0, 2)$. 这样根据 3), 我们可以假设

$$D^\alpha(t^{2\varepsilon_i}) = \sum_\beta \sum_{j=-(\alpha_i+2)}^{0} \sum_{k=-\alpha_i}^{0} c_{\beta,j,k}^{2,0} t_{\alpha,2\varepsilon_i}^{\beta,j,k}, \qquad D^\alpha(t^{2\varepsilon_{\bar{i}}}) = \sum_\beta \sum_{j=-\alpha_i}^{0} \sum_{k=-(\alpha_i+2)}^{0} c_{\beta,j,k}^{0,2} t_{\alpha,2\varepsilon_{\bar{i}}}^{\beta,j,k}. \tag{4.5.38}$$

利用 D^α 作用在 $[t^{2\varepsilon_i}, t^{2\varepsilon_{\bar{i}}}] = 4t^{\sigma_i}$ 的两边, 根据断言 3, 我们得到对于一个固定的 β,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=-(\alpha_i+2)}^{0} \sum_{k=-\alpha_i}^{0} (-2(j-1)c_{\beta,j-1,k+1}^{2,0} + (j + \alpha_i + 2)c_{\beta,j,k}^{2,0})t_{\alpha,2\sigma_i}^{\beta,j,k}\\ &= \sum_{j=-\alpha_i}^{0} \sum_{k=-(\alpha_i+2)}^{0} (-2(k-1)c_{\beta,j+1,k-1}^{0,2} + (k + \alpha_{\bar{i}} + 2)c_{\beta,j,k}^{0,2})t_{\alpha,2\sigma_i}^{\beta,j,k}.\end{aligned}$$

取 $j=-(\alpha_i+1), k=-\alpha_i$, 我们得到 $c^{2,0}_{\beta,-(\alpha_i+1),-\alpha_i}=0$. 取 $j=-\alpha_i, k=-(\alpha_i+1)$, 我们得到 $c^{0,2}_{\beta,-\alpha_i,-(\alpha_i+1)}=0$. 根据 (4.5.36) 式, 我们得到子断言 2).

子断言 4 我们可以进一步假设 $d_0(t^{\sigma_i+\epsilon_i})\equiv d_0(t^{\sigma_i+\epsilon_{\bar{i}}})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,V^{\leq i})$.

我们还是考虑 D^α 其中 $\alpha_i=\alpha_{\bar{i}}\in\mathbb{Z}$. 注意到在子断言 3) 中, $t^{\sigma_i+\epsilon_i}$ 和 $t^{\sigma_i+\epsilon_{\bar{i}}}$ 分别和 $(m,m')=(2,1),(1,2)$ 相对应, 并且等式 (4.5.33) 对这两种情况都成立. 这样我们可以假设 $\alpha_i\geq 2$.

利用 D^α 作用在 $[t^{2\epsilon_i},[t^{2\epsilon_{\bar{i}}},t^{\sigma_i+\epsilon_i}]=-8t^{\sigma_i+\epsilon_i}$ 两边, 我们有

$$t^{2\epsilon_i}\cdot t^{2\epsilon_{\bar{i}}}\cdot D^\alpha(t^{\sigma_i+\epsilon_i})=-8D^\alpha(t^{\sigma_i+\epsilon_i}). \tag{4.5.39}$$

利用 (4.5.34) 式, 我们得到

$$(k-1)(jc^{2,1}_{\beta,j,k}-(j+\alpha_i+3)c^{2,1}_{\beta,j+1,k-1})-(k+\alpha_i+2)((j-1)c^{2,1}_{\beta,j-1,k+1}-(j+\alpha_i+2)c^{2,1}_{\beta,j,k})$$

$$=2c^{2,1}_{\beta,j,k}.$$

注意根据 (4.5.34) 有 $c^{2,1}_{\beta,j,k}=0$ 其中 $j>0$ 或者 $k>0$. 取 $j=0$, 我们有

$$(k+\alpha_i+2)c^{2,1}_{\beta,-1,k+1}=\alpha_i c^{2,1}_{\beta,j,k}.$$

取 $k=0$, 我们得到 $c^{2,1}_{\beta,-1,0}=\alpha_i^{-1}(\alpha_i+2)c^{2,1}_{\beta,-1,1}=0$. 这样根据 (4.5.36), 我们知道有 $D^\alpha(t^{\sigma_i+\epsilon_i})=0$ 成立. 相似的有 $D^\alpha(t^{\sigma_i+\epsilon_{\bar{i}}})=0$.

子断言 5 我们可以假设 $d_0(t^{m\epsilon_i+m'\epsilon_{\bar{i}}})\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,V^{\leq i})$ 对所有的 $m,m'\in\mathbb{Z}$ 成立.

记

$$\mathcal{P}_i^+=\mathrm{span}\{t^{j\epsilon_i+k\epsilon_{\bar{i}}}\,|\,1\leq j,k\in\mathbb{Z}\},$$

是 $\mathcal{P}$ 的一个子代数. 非常容易的可以验证 $A=\{t^{\epsilon_p},t^{2\epsilon_p},t^{\sigma_p+\epsilon_p}|p=i,\bar{i}\}$ 是 $\mathcal{P}_i^+$ 的生成集. 所以 $d_0(x)=0$ 对任意 $x\in\mathcal{P}_i^+$ 成立. 对于任意的 $m,m'\in\mathbb{Z}$, 我们可以选择 $\widetilde{m},\widetilde{m}'\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $m+\widetilde{m}\gg 0$, $m'+\widetilde{m}'\gg 0$. 利用 d_0 作用在等式

$$[t^{m\epsilon_i+m'\epsilon_{\bar{i}}},t^{\widetilde{m}\epsilon_i+\widetilde{m}'\epsilon_{\bar{i}}}]=(m\widetilde{m}'-m'\widetilde{m})t^{(m+m')\epsilon_i+(\widetilde{m}+\widetilde{m}')\epsilon_{\bar{i}}-\sigma_i}\in\mathcal{P}_i^+, \tag{4.5.40}$$

我们得到 $t^{\widetilde{m}\epsilon_i+\widetilde{m}'\epsilon_{\bar{i}}}\cdot d_0(t^{m\epsilon_i+m'\epsilon_{\bar{i}}})=0$ 对所有 $\widetilde{m},\widetilde{m}'\gg 0$ 成立. 仿照引理 4.4.2 的证明, 我们可得到 $d_0(t^{m\epsilon_i+m'\epsilon_{\bar{i}}})=0$.

现在我们来完成 (4.5.3) 的证明 (即，断言 4). 令 $\gamma \in \Gamma$. 如果 $\gamma_i = \gamma_{\bar{i}} = 0$, 则利用 d_0 作用在等式

$$[t^{m\epsilon_i}, t^\gamma] = 0, \quad [t^{m\epsilon_{\bar{i}}}, t^\gamma] = 0 \quad 对于 \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{4.5.41}$$

我们得到 $t^{m\epsilon_i} \cdot d_0(t^\gamma) = t^{m\epsilon_{\bar{i}}} \cdot d_0(t^\gamma) = 0$. 根据引理 4.4.2, 我们有 $d_0(t^\gamma) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, V^{\leq i})$.

假设 $\gamma_i \neq 0$ 或者 $\gamma_{\bar{i}} \neq 0$. 简记 $d_0(t^\gamma)$ 为

$$d_0(t^\gamma) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} t^\alpha \otimes t^\beta \quad 对于某些 \quad c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{F}.$$

为方便记，我们令

$$a_{j,k} = -((j+2)\gamma_{\bar{i}} - (k+2)\gamma_i)(j(k+1+\gamma_{\bar{i}}) - k(j+1+\gamma_i)).$$

用 d_0 作用到等式

$$[t^{-j\epsilon_i - k\epsilon_{\bar{i}}}, [t^{(j+2)\epsilon_i + (k+2)\epsilon_{\bar{i}}}, t^\gamma]] = a_{j,k} t^\gamma, \tag{4.5.42}$$

我们得到

$$t^{-j\epsilon_i - k\epsilon_{\bar{i}}} \cdot t^{(j+2)\epsilon_i + (k+2)\epsilon_{\bar{i}}} \cdot \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} t^\alpha \otimes t^\beta = a_{j,k} \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} t^\alpha \otimes t^\beta. \tag{4.5.43}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
& a_{j,k} \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} t^\alpha \otimes t^\beta \\
= & -\sum_{\alpha,\beta} (c_{\alpha,\beta}((j+2)\alpha_{\bar{i}} - (k+2)\alpha_i)(j(\alpha_{\bar{i}} + k + 1) - k(\alpha_i + j + 1))t^\alpha \otimes t^\beta \\
& + c_{\alpha,\beta}((j+2)\alpha_{\bar{i}} - (k+2)\alpha_i)(j\beta_{\bar{i}} - k\beta_i) t^{\alpha + (j+1)\epsilon_i + (k+1)\epsilon_{\bar{i}}} \otimes t^{\beta - (j+1)\epsilon_i - (k+1)\epsilon_{\bar{i}}} \\
& + c_{\alpha,\beta}((j+2)\beta_{\bar{i}} - (k+2)\beta_i)(j\alpha_{\bar{i}} - k\alpha_i) t^{\alpha - (j+1)\epsilon_i - (k+1)\epsilon_{\bar{i}}} \otimes t^{\beta + (j+1)\epsilon_i + (k+1)\epsilon_{\bar{i}}} \\
& + c_{\alpha,\beta}((j+2)\beta_{\bar{i}} - (k+2)\beta_i)(j(\beta_{\bar{i}} + k + 1) - k(\beta_i + j + 1)))t^\alpha \otimes t^\beta.
\end{aligned}$$

选择 $j, k \gg 0$, 并且比较等式的两端，我们有

$$c_{\alpha,\beta}((j+2)\alpha_{\bar{i}} - (k+2)\alpha_i)(j\beta_{\bar{i}} - k\beta_i) = c_{\alpha,\beta}((j+2)\beta_{\bar{i}} - (k+2)\beta_i)(j\alpha_{\bar{i}} - k\alpha_i) = 0.$$

这说明了 $c_{\alpha,\beta} \neq 0$ 蕴含了 $\alpha_i = \alpha_{\bar{i}}$ 或者 $\beta_i = \beta_{\bar{i}} = 0$. 现在我们只需考虑 $\beta_i = \beta_{\bar{i}} = 0$ 但是 $t^\alpha \notin \mathcal{P}^{\leq i}$ 或者 $\alpha_i = \alpha_{\bar{i}}$ 但是 $t^\beta \notin \mathcal{P}^{\leq i}$ 这两种情况. 不失一般性，我们可以假设存在一项 $t^\xi \otimes t^\eta$ 使得对于 $j < i$ 有 $\xi_{\bar{i}} \neq 0, \xi_{\bar{j}} = \xi_j = 0$, 并且 $\eta_i = \eta_{\bar{i}} = 0$. 记

$$d_0(t^\gamma) = ct^\xi \otimes t^\eta + \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} t^\alpha \otimes t^\beta, \tag{4.5.44}$$

此处 $0 \neq c \in \mathbb{F}$. 根据假设我们知道对于 $j < i$ 存在 $\eta_j \neq 0$ 或 $\eta_{\bar{j}} \neq 0$. 固定 j 并且令 $d_0(t^{\varepsilon_{\bar{i}}+\varepsilon_j}) = \sum_{\tau,\tau'} c_{\tau,\tau'} t^\tau \otimes t^{\tau'}$, 则根据 $[t^{k\varepsilon_i}, t^{\varepsilon_{\bar{i}}+\varepsilon_j}] = kt^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j}$ 我们有

$$k\, d_0(t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j}) = t^{k\varepsilon_i} \cdot d_0(t^{\varepsilon_{\bar{i}}+\varepsilon_j}). \tag{4.5.45}$$

对于任意 $k \neq 0$, 用 d_0 作用在 $[t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j}, t^\gamma] = \gamma_{\bar{j}} t^{\gamma-\varepsilon_{\bar{j}}} + (k-1)\gamma_{\bar{i}} t^{\gamma+(k-1)\varepsilon_i-\sigma_i}$ 两端, 我们有

$$t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot d_0(t^\gamma) - t^\gamma \cdot d_0(t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j}) = d_0(\gamma_{\bar{j}} t^{\gamma-\varepsilon_{\bar{j}}} + (k-1)\gamma_{\bar{i}} t^{\gamma+(k-1)\varepsilon_i-\sigma_i}). \tag{4.5.46}$$

因为

$$\begin{aligned}
t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j} \cdot d_0(t^\xi \otimes t^\eta) &= (k-1)(\xi_{\bar{i}} t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j+\xi-\sigma_i} \otimes t^\eta + \eta_{\bar{i}} t^\xi \otimes t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j+\eta-\sigma_i}) \\
t^\gamma \cdot d_0(t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j}) &= \sum_{\tau,\tau'} c_{\tau,\tau'} k(\tau_{\bar{i}}(\gamma_i(\tau_{\bar{i}}-1) - \gamma_{\bar{i}}(\tau_i+k-1))t^{\tau+k\varepsilon_i+\gamma-2\sigma_i} \otimes t^{\tau'} \\
&\quad + \tau'_{\bar{i}}(\gamma_i(\tau'_{\bar{i}}-1) - \gamma_{\bar{i}}(\tau'_i+k-1)))t^\tau \otimes t^{\tau'+k\varepsilon_i+\gamma-2\sigma_i} \\
&\quad + \sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} t^\mu \otimes t^\nu,
\end{aligned}$$

此处 $\sum_{\mu,\nu} c_{\mu,\nu} t^\mu \otimes t^\nu \in V$, 我们知道 $t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j+\xi-\sigma_i} \otimes t^\eta$ 的系数不等于零, 但是根据上面的讨论, 我们知道 $t^{(k-1)\varepsilon_i+\varepsilon_j+\xi-\sigma_i} \otimes t^\eta$ 并不出现在等式 (4.5.46) 的右端. 这显然是一个矛盾. 这样我们知道 $d_0(t^\gamma) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, V^{\leq i})$. 这就证明了 (4.5.3) 和 4.

断言 5 . $d_\alpha = 0$ 对有限多个 $\alpha \in \Gamma$ 成立.

令 $u_\alpha \in V_\alpha$ 使得 $d_\alpha = (u_\alpha)_{\mathrm{inn}}$ 其中 $\alpha \in \Gamma$. 如果 $u_\alpha \neq 0$ 对无限多个 $\alpha \in \Gamma$ 成立, 则存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $(\alpha_i, \alpha_{\bar{i}}) \neq (0,0)$ 对无限多个 α 有 $u_\alpha \neq 0$. 所有我们可以选择 $t^{j\varepsilon_i+k\varepsilon_{\bar{i}}}$ 使得 $j\alpha_{\bar{i}} - k\alpha_i \neq 0$ 对无限多个 α 有 $u_\alpha \neq 0$. 这样 $t^{j\varepsilon_i+k\varepsilon_{\bar{i}}} \cdot u_\alpha \neq 0$ (参见 (4.3.2)) 对无限多 α 有 $u_\alpha \neq 0$, 进而 $d(t^{j\varepsilon_i+k\varepsilon_{\bar{i}}}) = \sum_{\alpha\in\Gamma} t^{j\varepsilon_i+k\varepsilon_{\bar{i}}} \cdot u_\alpha$ 是无限和, 显然是一个矛盾. 这就证明了断言和引理 4.5.1. □

参考文献

[1] Y.Su, Classification of finite dimensional modules of the Lie superalgebra sl(2/1), Comm.Alg. 20 (1992), 3259-3277.

[2] N. Kawamoto, Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero, Hiroshima Math. J. 16 (1986), 417-462.

[3] V. G. Kac, "Lie superalgebras," *Adv. Math.* **26** (1977), 8-96.

[4] D.Z.Dokovic and K.zhao , Generalized Cartan type W Lie algebras in characteristic zero, J.*Algebra 195(1997), 170-210*.

[5] J. M. Osborn, "New simple infinite-dimensional Lie algebras of characteristic 0," *J. Algebra* **185** (1996), 820-835.

[6] J. M. Osborn, K. Zhao, Generalized Cartan type K Lie algebras in characteristic 0, *Commun. Algebra* **25** (1997), 3325-3360.

[7] Arnold,V.I.,Mathemetical Methods of Classical Mechanics. second edition, Springer-Verlag New York,1989.

[8] Y. Su, X. Xu and H. Zhang, "Derivation-simple algebras and the structures of Lie algebras of Witt type," *J. Algebra* **233** (2000), 642-662.

[9] X. Xu, "New generalized simple Lie algebras of Cartan type over a field with characteristic 0," *J. Algebra* **224** (2000), 23-58.

[10] X. Xu, "Quadratic conformal superalgebras," *J. Algebra* **231** (2000), 1-38.

[11] D. A. Jordan, On the simplicity of Lie algebras of derivations of commutative algebras, J. Alg. 228 (2000), 580-585.

[12] D. A. Jordan, Iterated skew-polynomial rings and quantum groups, J. Alg. 156 (1993), 194-218.

[13] V.G. Kac, D.H. Peterson, "Spin and pepresentation of infinite dimensional Lie algebras and groups," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **78** (1981), 3308–3312.

[14] W. Li, "2-Cocycles on the algebra of differential operators," *J. Algebra* **122** (1989), 64–80.

[15] W. Li, R.L. Wilson, "Central extensions of some Lie algebras," *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 2569–2577.

[16] M. Scheunert, R.B. Zhang, "Cohomology of Lie superalgebras and their generalizations," *J. Math. Phys.* **39** (1998), 5024–5061.

[17] M. Scheunert, R.B. Zhang, "The second cohomology of $sl(m/1)$ with coefficients in its enveloping algebra is trivial," *Lett. Math. Phys.* **47** (1999), 33–48.

[18] Y. Su, "2-Cocycles on the Lie algebras of all differential operators of several indeterminates," *(Chinese) Northeastern Math. J.* **6** (1990), 365–368.

[19] Y. Su, "2-cocycles on the Lie algebras of generalized differential operators", *Comm. Algebra* **30** (2002), 763–782.

[20] Y. Su, "Classification of quasifinite modules over the Lie algebras of Weyl type," *Adv. Math.* **174** (2003), 57–68.

[21] Y. Su, "Low dimensional cohomology of general conformal algebras gc_N," *J. Math. Phys.* in press.

[22] Dubrivin,B,"Geometry of 2D topological field theories." In Integradle Systems and Quantum Groups (Montecatini Tenne, 1993), Lecture Notes in Math.1020,Speringer-Verlag, Berlin,1996,

[23] Y. Su, K. Zhao, "Simple Lie algebras of Weyl type," *Science in China A* **44** (2001), 419–426.

[24] Y. Su, K. Zhao, "Isomorphism classes and automorphism groups of algebras of Weyl type," *Science in China A* **45** (2002), 953–963.

[25] Y. Su, K. Zhao, "Second cohomology group of generalized Witt type Lie algebras and certain reperesentations," *Comm. Alegrba* **30** (2002), 3285–3309.

[26] Y. Su, K. Zhao and L. Zhu, "Simple Lie color algebras of Weyl types," *Israel J. Math.* in press.

[27] X. Xu, "Generalizations of Block algebras," *Manuscripta Math.* **100** (1999), 489–518.

[28] X. Xu, "Simple conformal superalgebras of finite growth," *Algebra Colloquium* **7** (2000), 205–240.

[29] X. Xu, "Equivalence of conformal superalgebras to Hamiltonian superoperators," *Algebra Colloquium* **8** (2001), 63–92.

[30] K. Zhao, "Simple algebras of Weyl type II," *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 1323–1332.

[31] D.Dokovic, K. Zhao, "Derivations, Isomorphisms,and Second Cohomology of Generalized Witt Algebras," *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 643–664.

[32] D.Passman, *New Simple Infinite Dimensional Lie Algebras,J. Algebra* **206** (1998),682-692

[33] Earl J. Taft, "Witt and Virasoro algebras as Lie bialgebras," *J. P. App. algebra.* **87** (1993), 301-312.

[34] S-H Ng, Earl J. Taft, "Classification of the Lie bialgebra structures on the Witt and Virasoro algebras," *J. P.App. algebra.* **151** (2000), 67–88.

[35] W. D. Nichols, "The Structure of The Dual Lie Coalgebra Of the Witt Algebra," *J. P. App. Alg.* **68** (1990), 395–364W

[36] W.Michaelis, "A Class of Infinite-dimensional Lie Bialgebras Containing the Virasoro Algebras", *Adv. Math.* **107** (1994), 365–392.

[37] W.Michaelis, "Lie Coalgebras,", *Adv. Math.* **38** (1980), 1 -54.

[38] W.Michaelis, "The dual Poincare-Birkhoff-Witt theorem", *Adv. Math.* **57** (1985), 93-162.

[39] V.G.Drinfel'd,Quantum groups,"Proceedings of International Congress of Mathematicians, August,3-11, 1986,Berkeley,CA",pp.798-820,Amer.Math.Soc.,Providence,RI1987.

[40] V.G.Drinfel'd,Hamlitonian structures on Lie group, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations,Soviet Math.Dokl.27(1),1983,68-71.

[41] Y.Su,Quasifinite representations of a family of Lie algebras of Block type, J.Pure App. Alg., 192(2004)293-305.

[42] Y.Su, J.Zhou, A class of nongraded simple Lie algebras, Comm. Alg. in press (accept), 12 pages.

[43] Y.Su Virasoro algebras and high rank super-Virasoro algebras, J.Math.Phys. 35 (1994), 2013-2023.

[44] Y.Su, A classification of indecomposable sl2(C)-modules and a conjecture of Kac on irreducible modules over the Virasoro algebra, J.Alg. 161 (1993), 33-46.

[45] Y.Su, Some irreducible representations of the affine Lie superalgebra, J.Math.Phys. 33 (1992), 2422-2427.

[46] Y,.Su, Realization of a class of affine Lie superalgebras, J.Math.Phys. 33 (1992), 2653-2655.

[47] Y.Su, A complete classification of indecomposable Harish-Chandra modules of the Lie superalgebra B(0,1), Comm.Alg. 20 (1992), 573-582.

[48] Yucai Su, Xiaoping Xu, "Structure of contact Lie algebras related to locally-finite derivations," *manuscripta math.* **112** (2003),231-257.

[49] Y.Su, K.Zhao, Indecomposable Harish-Chandra modules, Chinese Science Bulletin (in Chinese), No.7 (1991), 486-489.

[50] Y.Su, Some String function of Level one for Cl(1), Acta Mathematika Sinica (in Chinese), No.6 (1990), 853-858.

[51] Hertling,C., Yu.Manin, Weak Frobenius manifolds. Intern.Math. Res. Notice, no.6, 277-280 (1999).

[52] M.Scheunert, The Theory of Lie Superalgebras, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York,1979.

[53] Y.Su, String functions of level one for F4(1) and G2(1), (Abstract) Chinese Science Bulletin (in Chinese) , No. 2 (1989), 156-157.

[54] Y.Su, The general integral Lie algebra gl(V)fin and the group associated to it, Chinese Science Bulletin, 17 (1989), 1287-1290.

[55] Y.Su, On low dimensional cohomology over the Kac-Moody algebras, (Chinese) Advances in Mathematics (in Chinese), 18 (1989), 346-351.

[56] A.S.Dzhumadildaev,Central extensions of infinte-dimensional Lie algebras, Funkts.Anal.Prilozhen.26(1992)21-29.

[57] Y.Su, R.B.Zhang, Character and dimension formulae for finite dimensional irreducible representations of the general linear superalgebra, preprint, 20 pages (see http://lanl.arxiv.org/abs/math.QA/0403315).

[58] Y.Su, Cohomology of Lie superalgebras sl(m—n) and osp(2—2n), preprint 42 pages (see http://lanl.arxiv.org/abs/math.QA/0402419) (with R.B. Zhang).

[59] Y.Su, Composition factor of Kac-modules for the general linear Lie superalgebras gl(m/n), preprint, 19 pages (see http://lanl.arxiv.org/abs/math.QA/0404154)

[60] Y.Su, Classification of quasifinite representations of W, preprint, 13 pages.

[61] Y.Su, Classification of quasifinite modules over Lie algebras of matrix differential operators on the circle, preprint (2004), 12 pages.

[62] Y.Su, L.Zhu, Derivation algebras of centerless perfect Lie algebras are complete, J.Alg.285(2005)508-515.

[63] Y.Su, Classification of *Harish-Chandra* modules over the super-Virasoro algebras, Comm.Alg. 23 (1995), 3653-3675.

[64] H.Cartan and S.Eilenberg, Homological Algebra, Princeton Univ. Press, Princeton,N.J.,1965.

[65] J.C.Jantzen, Lectures on Quantum Groups,Graduate studies in mathematics, ISSN 1065-7339;v.6.

[66] Y.Su, Classification of Harish-Chandra modules over the higher rank Virasoro algebras, Comm. Math. Phys., 240 (preprint), 539-551.

[67] Y.Su K.Zhao and L.Zhu, Simple color algebras of Weyl type, Israel. J. Math., 137(2003), 109-123.

[68] Y.Su Low dimensional cohomology of general conformal algebras gc_N, J. Math. Phys., 45 (*preprint*), 509-524.

[69] Y.Su, K. Zhao and L.Zhu,Classification of derivation-simple color algebras related to locally finite derivations, J. Math. Phys., 45(accept), 525-536.

[70] Y.Su , K.Zhao, Structure of algebras of Weyl type, Comm. Algebra, 32(preprint), 1051-1059.

[71] Y.Su, Poisson brackets and structure of nongraded Hamiltonian Lie algebras related to locally-finite derivations, Canad. J. Math., 55 (prepint), 856-896.

[72] Y.Su, Structure of a new class of non-graded infinite-dimensional simple Lie algebras, J. Algebra, 267 (accept), 542-558.

[73] Y.Su , X.Xu, 中心单 Poisson 代数, 中国科学 A, 33 (accept), 570-586.

[74] Y.Su Structure of Lie superalgebras of Block type related to locally finite derivations, Comm. Algebra, 31(accept), 1725-1751.

[75] Y.Su, K.Zhao, Generalized Virasoro and super-Virasoro algebras and modules of the intermediate series, J. Algebra, 252(2002), 1-19.

[76] Y.Su, J.Zhang, K.Zhao, Z x Z-graded algebras generated by the Virasoro algebra and sl2, Math. Nach., 246/247 (2002), 188-201.

[77] Y.SU, Derivations of generalized Weyl algebras, Science in China A, 46 (2003), 346-354.

[78] Y.Su, J.Zhou, Structure of the Lie algebras related to those of Block, Comm. Algebra, 30 (2002), 3205-3226.

[79] Y.Su, K.Zhao, Second cohomology group of generalized Cartan type W Lie algebras and central extensions, Comm. Algebra, 30 (2002), 3285-3309.

[80] Y. Su, X.Xu, Structures of divergence-free Lie algebras, J. Algebra, 243 (2001), 557-595.

[81] Y.Su, J.Zhou Some representations of nongraded Lie algebras of generalized Witt type, J. Algebra, 246 (2001), 721-738.

[82] Y.Su, Derivations and structure of the Lie algebras of Xu type, Manuscripta Math., 105 (2001), 483-500.

[83] Y.Su, K.Zhao, Isomorphism classes and automorphism groups of algebras of Weyl type, Science in China A, 45 (2002), 953-963.

[84] Y.Su, On indecomposable modules over the Virasoro algebra, Science in China A, 44 (2001), 980-983.

[85] Y.Su, Weakly primitive vectors in the Kac-module of the Lie superalgebra sl(m/n), J.Math.Phys., 42 (2001), 5444-5457.

[86] Y.Su,Classification of infinite dimensional weight modules over the Lie superalgebra sl(2/1), Comm. Algebra, 29 (2001), 1301-1309.

[87] Y.Su, Simple modules over the high rank Virasoro algebras, Comm. Algebra, 29 (2001), 2067-2080.

[88] Y.Su, Simple modules over the higher rank super-Virasoro algebras, Lett. Math. Phys., 53 (2000), 263-272.

[89] Y.Su, Primitive vectors in the Kac-module of the Lie superalgebra sl(m/n), J.Math.Phys., 41 (2000), 5044-5087 (with J.W.B.Hughes, R.C.King).

[90] C.Kassel, Quantum Groups, Springer-Verlag, Reprinted in China by Beijing Publishing Co.2000.

[91] Y.Su,Classification of sl(m/n)-modules of singly atypical type, J.Math.Phys., 41 (2000), 602-613.

[92] H. Strade and R.Fransteiner. Modular Lie Algebras and their Representations. Marcel Dekker Monographs 116. New York 1988 algebra of 1,246,564-593.

[93] C. Jiang and D. Meng, The classification of complete Lie algebras with commutative nilpotent radical, Proc.AMS.1998,Vol.126,15-23.

[94] C. Jiang and D. Meng, The derivation algebra of the associative algebra Cq[x ± 1 ,Y ± 1], Comm.Alg.1998,Vol,26,1723-1736.

[95] D. Meng and C. Jiang, The derivation algebra and the universal central extension of the q-analog of the Virasoro-like algebra, Comm.Alg.1998,Vol.126, 1335-1446.

[96] C. Jiang and D. Meng, Complete Lie algebras whose nilpotent radicals are Heisenberg algebras, Chinese Science Bulletin, 1998,Vol.43,383-385.

[97] C. Jiang ,D. Meng and Sh. Zhang, Some complete Lie algebras, J.Alg.1996,186, 807-817.

[98] C.Jiang ang D.Meng, Relation of representations of A_∞ and C_∞, Chinese Science Bulletin,1996,41,1155-1159.

[99] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed.; Combridge Univ. Press, 1990.

[100] M. Jimbo and T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. RIMS, 19 *(1983), 943-1001.*

[101] V.G.Ka Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekinds η -function, Funkt. Anal. i ego Prilozh, 8 (1974), No. 1, 77-78. English translation : Funct. Anal. Appl., 8 (1974), 68-70.

[102] V.G.Kac, Infinite-dimensional algebras, Dedekind's η -function, classical M?bius function and the very strange formula, Advances in Math., 30 (1978), 85-136.

[103] V.G.Kac. Representations of classical Lie superalgebras, Lecture Notes in Mathematics, 676 (1978), 597-626.

[104] V.G.Kac, Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras, Lecture Notes in Physics, 94 (1979), 441-445.

[105] V.G.Kac, A.K. Raina, Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, World Science, Singapore,1987.

[106] V.G.Kac, Highest weight representations of conformal current algebras, Symposium on Topological and Geometric and methods in Field theory. Espoo, Finland, World Scientific (1986),

[107] V.G.Kac, D. Peterson, Lectures on the infinite wedge representation and the MKP hierarchy. S é minaire de Math. Sup é rieures, Les Presses de L'Universit é de Montr é al, 102 (1986), 141-186.

[108] J. W. Van de Leur, Contragredient Lie superalgebras of finite growth, Thesis Utrecht, May 1986.

[109] T. H. R. Skyrme, Kinks and the Dirac equation, J. Math. Physics, 12 (1971), 1735-1743.

[110] K. Ueno, H. Yamada, A supersymmetric extension of infinite-dimensional Lie algebras, RIMS-Kokyuroku, 554 (1955), 91-101.

[111] I. N. Herstein, On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring, Amer. J. Math. 77 (1955), 279-285.

[112] R. Farnsteiner, "Derivations and central extensions of finitely generated graded Lie algebras," *J. Algebra* **118** (1988), 33-45.

[113] V.G.Kac, Lectures on Infinite Wedge Representation and Soliton equations, *Advanced in math. Chinese,* Vol.16,No.4,Oct.,1987.

[114] V. G. Kac, "A description of filtered Lie algebras whose associated graded Lie algebras are of Cartan types," *Math. of USSR-Izvestijia* 8 (1974), 801-835.

[115] J. M. Osborn, New simple infinite-dimensional Lie algebras of characteristic 0, J. Alg. 185 (1996), 820-835.

[116] H. Strade and R.Fransteiner, Modular Lie Algebras and Their Representations, Marcel Dekker, New York-Basel, 1988.

[117] H. Strade and R.Fransteiner. Modular Lie Algebras and their Representations. Marcel Dekker Monographs 116 New York, 1988

[118] H. Strade and R.Fransteiner. Modular Lie Algebras and their Representations of type Bl , J. Alg. 2000

[119] J.Dixmier, Enveloping algebras, North-Holland Publishing Co. Amsterdam, New York Oxford,1977.

[120] K.Zhao, A class of infinite dimensional simple Lie algebra J.London Math.soc.(2)62 (2000)

[121] R.V.Moody, A.Pianzola. Lie algebras with triangular dacompositions, Wiley, New York, 1995.

[122] B. Bakalov, V.G. Kac, A.A. Voronov, "Cohomology of conformal algebras," *Comm. Math. Phys.* **200** (1999), 561~598.

[123] J. Hu, X. Wang, and K. Zhao, Verma modules over generalized Virasoro algebra Vir[G], *J. Pure Appl. Algebra* **177** (2003), 61–69.

[124] V. Kac, A.Radul, Quasi-finite higest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993), 429–457.

[125] V. Kac, W. Wang and C. Yan, Quasifinite represent of classical Lie subalgebras of $W_{1+\infty}$, *Adv. Math.* **139** (1998), 56–140.

[126] C. Boyallian, V. Kac, J. Liberati and C. Yan, Quasifinite highest weight modules of the Lie algebra of matrix differential operators on the circle, *J. Math. Phys.* **39** (1998), 2910-2928.

[127] E. Frenkel, V. Kac, R. Radul and W. Wang, $\mathcal{W}_{1+\infty}$ and $\mathcal{W}(gl_N)$ with central charge N, *Comm. Math. Phys.* **170** (1995), 337-357.

[128] V. Kac and J. Liberati, Unitary quasi-finite representations of W_∞, *Lett. Math. Phys.* **53** (2000), 11-27.

[129] V. Kac and A. Radul, Quasi-finite highest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993), 429-457.

[130] Y. Su, Indecomposable modules over the Virasoro algebra, *Science in China A* **44** (2001), 980-983.

[131] K. Zhao, The classification of a kind of irreducible Harish-Chandra modules over algebras of differential operators, *(Chinese) Acta Math. Sinica* **37** (1994), 332-337.

[132] Zhao, K., Weyl type algebras from quantu tori[J], to appear in *Comm. Contemp. Math.*

[133] Kac, V. G., Lectures on infinite wedge representation and soliton equations[J], *Shuxue Jinzhan* (Chinese Adv. in Math.,) **16**(1987), 343-376.

[134] Kac, V. G., Infinite dimensional Lie algebras[M], 3rd ed., Combridge Univ. Press, 1990.

[135] Kac, V. G., Peterson, D. H., Spin and wedge representations of infinite dimensional Lie algebras and groups[J], *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **78**(1981), 3308-3312.

[136] Li, W., 2-Cocycles on the algebra of differential operators[J], *J. Algebra*, **122**(1989), 64-80.

[137] Li, W., Wilson, R. L., Central extensions of some Lie algebras[J], *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**(1998), 2569-2577.

[138] Loday, J.-L., Cyclic homology[M], Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 301. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[139] Scheunert, M., Zhang, R.B., Cohomology of Lie superalgebras and their generalizations[J], *J. Math. Phys.*, **39**(1998), 5024-5061.

[140] Song, G., The structure if infinite dimensional non-graded Lie algebras and Lie superalgebras of $\mathcal{W}$-type and the related problems, Ph. D. Thesis, Shanghai Jiaotong University, 2005.

[141] Song, G., Su, Y., 2-cocycles on the Lie superalgebras of Weyl type[J], *Commun. Algebra*, **33** (2005), in press.

[142] Tsygan, B., Homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology[J], *Uspekhi Mat. Nauk*, **38**(1983), 217-218 .

[143] Berman, S., Gao, Y., Krylyuk, Y.S., Quantum tori and the structure of elliptic quasi-simple Lie algebras[J], *J. Funct. Anal.*, **135**(1996), 339-389.

[144] Gelfand, I. M., Fuks, D. B., The cohomology of the Lie algebra of the vector fields in a circle [J], *Funct. Anal. Appl.*, **2**(1968), 342-343.

[145] G. Song, The structure if infinite dimensional non-graded Lie algebras and Lie superalgebras of $\mathcal{W}$-type and the related problems, *Ph. D. Thesis,* Shanghai Jiaotong University (2005)

[146] G. Song, Y. Su, Lie bialgebras of generalized Witt type, *Science in China A*

[147] J.M. Osborn, K. Zhao, Generalized Poisson brackets and Lie algebras for type H in characteristic 0, *Math. Z.* **230** (1999), 107–143.

[148] X. Xu, New generalized simple Lie algebras of Cartan type over a field with characteristic 0, *J. Algebra* **224** (2000), 23–58.

[149] W.D. Nichols, The structure of the dual Lie coalgebra of the Witt algebra, *J. Pure Appl. Algebra* **68** (1990), 395–364.

[150] V. Kac, A.Radul, Quasi-finite higest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993), 429–457.

附录一　致 谢

在这里我要向许多人表示衷心的感谢！首先是我的博士导师苏育才教授. 苏老师知识渊博、治学态度严谨、对科学研究的执著和对数学问题的敏锐洞察力深深感染了我. 每一次聆听先生的讲课，都使我受益匪浅. 是先生的谆谆善诱、诲人不倦，把我引向了学术前沿. 三年来，先生不仅教会了我如何做学问，还教会了我如何做人. 先生的一言一行都使我没齿难忘，终生受益，在苏老师的悉心帮助下我才得以完成本文. 姜翠波教授在我的学习和科研过程中，给予了大量的帮助，在此，谨向导师表示最诚挚的敬意和衷心的感谢，并争取在以后的学习和工作中取得更大的成绩，以不辜负先生的培育之恩.

同时，感谢数学系的领导和工作人员在学习和生活上为我提供了良好的条件. 感谢师弟师妹们的帮助，他们那好学上进的精神值得我好好学习，感谢所有帮助过我，关心过我的老师、同学和朋友.

附录二　作者读博士期间发表和录用论文情况

1. Yucai Su, Bin Xin, Classification of quasifinite $\mathcal{W}_\infty$-modules, *Israel. J. Math.*, 2006, in press.

2. Bin Xin, Yucai Su, 2-Cocycles on Lie superalgebras of matrices with coefficients in associative superalgebras, Chinese Ann. Math. A, 2006, in press

3. Bin Xin, Guang'ai Song, Yucai Su, Lie bialgebras of generalized Hamiltonian type,

4. Bin Xin, Yucai Su, Yuezhu Wu, Verma modules over generalized $\mathcal{W}$-infinity algebras,

5. Shang Yuan Lin, Bin Xin, Representations of a Noncommutative Associative Algebra Related to Quantum Torus of Rank Three, *Acta Math. Sinica* **21** (2005),1521-1524.