《工程数学-复变函数与积分变换》课后习题详解

吉林大学数学学院　（主编：王忠仁　张静）

高等教育出版社

习题一（P12）

1.1 对任何z，$z^2=|z|^2$是否成立？如果是，就给出证明。如果不是，对哪些z值才成立？

解：设$z=x+iy$，则$z^2=x^2-y^2+2xyi$，$|z|^2=x^2+y^2$；

若$z^2=|z|^2$成立，则有$x^2-y^2+2xyi=x^2+y^2$，即$\begin{cases}x^2-y^2=x^2+y^2\\2xy=0\end{cases}$，解得$y=0$，即$z=x$。

所以，对任何z，$z^2=|z|^2$不成立，只对z为实数时才成立。

1.2 求下列各式的值：

（1）$(\sqrt{3}-i)^5$；　（2）$(1+i)^6$；　（3）$\sqrt[6]{-1}$；　（4）$(1-i)^{\frac{1}{3}}$。

解：（1）因为$\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$，所以

$$(\sqrt{3}-i)^5=\left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^5=2^5e^{-\frac{\pi}{6}\times5i}=32e^{-\frac{5\pi}{6}i}=32(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=-16(\sqrt{3}+i)$$

（2）因为$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$，所以

$$(1+i)^6=\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6=2^3e^{\frac{\pi}{4}\times6i}=8e^{\frac{3\pi}{2}}=-8i$$

（3）因为$-1=\cos\pi+i\sin\pi$，所以

$$w_k=\sqrt[6]{-1}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{6}}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}$$，其中$k=0,1,2,3,4,5$；

即$w_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$w_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$，

$w_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$w_3=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，

$w_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$， $w_5=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ 。

（4）因为 $1-i=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$，所以

$$w_k=(1-i)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right]，其中 k=0,1,2；$$

即　$w_0=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]$，　$w_1=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$，

$w_2=2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right]$。

1.3 求方程 $z^3+8=0$ 的所有根。

解法一：用因式分解法求解。

因为　$z^3+8=z^3+2^3=(z+2)(z^2-2z+4)=(z+2)\left[(z^2-2z+1)+3\right]$

$$=(z+2)\left[(z-1)^2+(i\sqrt{3})^2\right]=(z+2)(z-1+i\sqrt{3})(z-1-i\sqrt{3})$$

所以由 $z^3+8=0$，得 $(z+2)(z-1+i\sqrt{3})(z-1-i\sqrt{3})=0$，

解得　$z_1=-2$，$z_2=1-i\sqrt{3}$，$z_3=1+i\sqrt{3}$；

故方程 $z^3+8=0$ 的所有根为 $z_1=-2$，$z_2=1+i\sqrt{3}$，$z_3=1+i\sqrt{3}$。

解法二：用复数的方根的方法求解。

由 $z^3+8=0$，得 $z^3=-8$，即 z 是 -8 的三次方根；而　$-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$，所以

$z_k=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right]=2\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right]$，其中 $k=0,1,2$；

即 $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$，$z_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2$，

$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}$。

故方程$z^3+8=0$的所有根为$z_0=1+i\sqrt{3}$，$z_1=2$，$z_2=1-i\sqrt{3}$

1.4 指出下列各题中点z的轨迹或所在范围，并作图，

（1）$|z-5|=6$；（2）$|z+2i|\geq 1$；（3）$\mathrm{Im}(z)\leq 2$；（4）$0<\arg z<\pi$。

解：（1）$|z-5|=6$表示以点$(5,0)$为中心，6为半径的圆周；

（2）$|z+2i|\geq 1$表示以点$(0,-2)$为圆心，1为半径的圆周及圆周的外部；

（3）$\mathrm{Im}(z)\leq 2$表示直线$y=2$及其下面的部分；

（4）$0<\arg z<\pi$表示位于x轴上方的部分。

1.5 指出下列不等式所确定的区域或闭区域，并指明它是有界的还是无界的，单联通的还是多联通的。

（1）$\mathrm{Im}(z)>0$；（2）$|z-1|>4$；（3）$0<\mathrm{Re}(z)<1$；（4）$2\leq|z|\leq 3$。

解：（1）$\mathrm{Im}(z)>0$表示位于x轴上方的区域，它是无界区域，是单联通的；

（2）$|z-1|>4$表示以点$(1,0)$为中心，4为半径的圆周的外部区域，它是无界区域，是多联通的；

（3）$0<\mathrm{Re}(z)<1$表示介于两直线$x=0$与$x=1$之间的区域，它是无界区域，是单联通的；

（4）$2\leq|z|\leq 3$表示夹在以原点为圆心，2和3为半径的圆周之间的部分并且包含那两个圆周的闭区域，它是有界的，但它是多联通的。

1.6 已知映射$w=z^3$，求：

（1）点$z_1=i$，$z_2=1+i$，$z_3=\sqrt{3}+i$在w平面上的像；

（2）区域$0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$在w平面上的像。

解：（1）将$z_1=i$，$z_2=1+i$，$z_3=\sqrt{3}+i$分别代入$w=z^3$，得

$w_1=z_1^{\ 3}=i^3=i^2 i=-i$，

$w_2=z_2^{\ 3}=(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)=2i(1+i)=-2+2i$，

$w_3=z_3^{\ 3}=(\sqrt{3}+i)^3=\left(2e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^3=2^3e^{\frac{\pi}{6}\times 3i}=8e^{\frac{\pi}{2}i}=8i$，

即点$z_1 = i$，$z_2 = 1+i$，$z_3 = \sqrt{3}+i$在w平面上的像分别为$-i$，$-2+2i$，$8i$。

（2）设$w = u+iv$，则由$w = z^3$，可得$Argw = 3\arg z + 2k\pi$（$k \in Z$）;

又$Argw = \arg w + 2m\pi$（$m \in Z$），所以，当$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$时，$0 < \arg w < \pi$；

从而区域$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$在$w$平面上的像是位于$u$轴上方的部分。

1.7 设$f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$（$z \neq 0$），试证当$z \to 0$时$f(z)$的极限不存在。

证：因为

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right) = \frac{z^2 - (\bar{z})^2}{2iz\bar{z}} = \frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{2i|z|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(z)\ 2i\operatorname{Im}(z)}{2i|z|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)}{|z|^2},$$

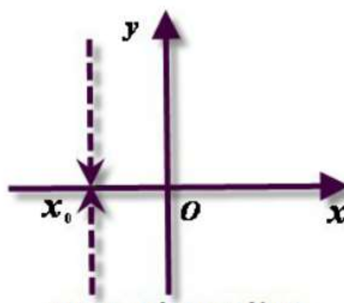
则令$z = x+iy$（$x, y \in R$），$f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$，代入上式，得

$$u(x,y)+iv(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}，即\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}; \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$

又当$z \to 0$时，有$x \to 0$且$y \to 0$；而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to o\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$不存在，

所以$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$不存在。

1.8 试证$\arg z$在原点与负实轴上不连续。



习题1-1中1.8题的图

证：（1）因为$Arg0$无意义，故$a\,rg0$也无意义，即$\arg z$在$z = 0$处无定义，故$\arg z$在$z = 0$处不连续。

（2）设$x_0 < 0$为负实轴上的任意一点，因为$-\pi < \arg z \le \pi$，如右图所示，当z在第二象限中沿直线$x = x_0$趋于x_0时，$\arg z$趋于π；而当z在第四象限中沿直线$x = x_0$趋于x_0时，$\arg z$趋于$-\pi$； 所以$\lim\limits_{z\to x_0} \arg z$（$x_0 < 0$）不存在，故$\arg z$在负实轴上不连续。

由（1）（2）可知，$\arg z$在原点与负实轴上不连续。

第二章 解析函数　习题二（P25）

2.1 利用导数定义指出：

（1）$(z^n)'=nz^{n-1}$（n 为正整数）；　　（2）$\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$。

解：（1）由导数的定义，有

$$(z^n)'=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$

$$\xlongequal[\text{因式}]{\text{分子分解}}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[(z+\Delta z)-z\right]\left[(z+\Delta z)^{n-1}+(z+\Delta z)^{n-2}z+(z+\Delta z)^{n-3}z^2+\ldots+(z+\Delta z)z^{n-2}+z^{n-1}\right]}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[(z+\Delta z)^{n-1}+(z+\Delta z)^{n-2}z+(z+\Delta z)^{n-3}z^2+\ldots+(z+\Delta z)z^{n-2}+z^{n-1}\right]$$

$$=z^{n-1}+z^{n-2}z+z^{n-3}z^2+\ldots+zz^{n-2}+z^{n-1}=nz^{n-1}$$

所以 $(z^n)'=nz^{n-1}$。

（2）由导数的定义，有

$$\left(\frac{1}{z}\right)'=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{z-(z+\Delta z)}{(z+\Delta z)z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{-\Delta z}{(z+\Delta z)z}}{\Delta z}=-\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{(z+\Delta z)z}=-\frac{1}{z^2}$$

，

故 $\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$。

2.2　下列函数何处可导？何处解析？

（1）$f(z)=x^2-iy$；　　（2）$f(z)=2x^3+3y^3i$；

（3）$f(z)=xy^2+ix^2y$；　　（4）$f(z)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$

解：（1）因为 $f(z)=x^2-iy$，所以 $\begin{cases}u=x^2\\v=-y\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$；

显然，这四个偏导函数在整个复平面上都是连续的；

若 $C-R$ 方程成立，则 $\begin{cases}2x=-1\\0=-0\end{cases}$，即 $x=-\dfrac{1}{2}$；

即只有当$x=-\dfrac{1}{2}$时，$f(z)=x^2-iy$才满足$C-R$方程。

所以，函数$f(z)=x^2-iy$只在直线$x=-\dfrac{1}{2}$上的点可导。

由函数解析的定义可知，函数$f(z)=x^2-iy$在整个复平面内处处不解析。

（2）因为$f(z)=2x^3+3y^3i$，所以$\begin{cases}u=2x^3\\v=3y^3\end{cases}$；则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=9y^2$；

显然，这四个偏导函数在整个复平面上都是连续的；

若$C-R$方程成立，则$\begin{cases}6x^2=9y^2\\0=-0\end{cases}$，即$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$；

即只有当$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$时，$f(z)=2x^3+3y^3i$才满足$C-R$方程。

所以，函数$f(z)=2x^3+3y^3i$只在直线$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$上的点可导。

由函数解析的定义可知，函数$f(z)=2x^3+3y^3i$在整个复平面内处处不解析。

（3）因为$f(z)=xy^2+ix^2y$，所以$\begin{cases}u=xy^2\\v=x^2y\end{cases}$；则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy$，

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=x^2$；

显然，这四个偏导函数在整个复平面上都是连续的；

若$C-R$方程成立，则$\begin{cases}y^2=2xy\\2xy=-x^2\end{cases}$，即$x=y=0$；

即只有当$x=y=0$时，$f(z)=xy^2+ix^2y$才满足$C-R$方程。

所以，函数$f(z)=xy^2+ix^2y$只在点$z=0$处可导。

由函数解析的定义可知，函数$f(z)=xy^2+ix^2y$在整个复平面内处处不解析。

（4）因为$f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$，所以$\begin{cases}u=\sin x\operatorname{ch}y\\v=\cos x\operatorname{sh}y\end{cases}$；

则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\,\mathrm{ch}y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x\,\mathrm{sh}y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\,\mathrm{sh}y$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos x\,\mathrm{ch}y$；

显 然 ， 这 四 个 偏 导 函 数 在 整 个 复 平 面 上 都 是 连 续 的 ， 并 且 $f(z)=\sin x\,\mathrm{ch}y+i\cos x\,\mathrm{sh}y$ 在整个复平面内满足$C-R$方程；

所以，函数$f(z)=\sin x\,\mathrm{ch}y+i\cos x\,\mathrm{sh}y$在整个复平面内处处可导，从而处处解析。

2.3 指出下列函数的解析性区域，并求其导数。

（1）$(z-1)^5$；　（2）z^3+2iz；　（3）$\dfrac{1}{z^2-1}$；

（4）$\dfrac{az+b}{cz+d}$（c，d 中至少有一个不为零）

解：（1）函数$(z-1)^5$在整个复平面内处处解析，且$\left[(z-1)^5\right]'=5(z-1)^4$。

（2）函数z^3+2iz在整个复平面内处处解析，且$(z^3+2iz)'=3z^2+2i$。

（3）函数$\dfrac{1}{z^2-1}$在除去$z=\pm1$的复平面内处处解析，且当$z\neq\pm1$时 $\left(\dfrac{1}{z^2-1}\right)'=-\dfrac{2z}{(z^2-1)^2}$。

（4）因为c，d中至少有一个不为零，则

①当$c=0$时，函数为$\dfrac{az+b}{d}$，它在整个复平面内处处解析，且$\left(\dfrac{az+b}{d}\right)'=\dfrac{a}{d}$；

②当$c\neq0$时，函数$\dfrac{az+b}{cz+d}$在除去$z=-\dfrac{d}{c}$的复平面内处处解析，且当$z\neq-\dfrac{d}{c}$时$\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)'=\dfrac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$。

2.4 求下列函数的奇点：

（1）$\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$；　（2）$\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$。

解：（1）函数$\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$的奇点即为该函数没有意义的点，也即为该函数分母等于零的点，即$z=0,\pm i$为函数$\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$的奇点。

（2）函数$\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$的奇点即为该函数没有意义的点，也即为该函数分母等于零的点，即$z=-1,\pm i$为函数$\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$的奇点。

2.5 如果 $f(z)=u+iv$ 是 z 的解析函数，证明：$\left(\dfrac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$。

证：由$f(z)=u+iv$是z的解析函数，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \text{ 且 } f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\quad \text{从而}|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2;$$

又$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，则

$$\frac{\partial|f(z)|}{\partial x}=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}\quad ,\quad \frac{\partial|f(z)|}{\partial y}=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}};$$

所以 $$\left[\frac{\partial|f(z)|}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial|f(z)|}{\partial y}\right]^2=\frac{\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{u^2+v^2}+\frac{\left(u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{\left[u^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2-2uv\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+v^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\left[u^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2uv\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+v^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{(u^2+v^2)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+(u^2+v^2)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{u^2+v^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

故$\left[\dfrac{\partial|f(z)|}{\partial x}\right]^2+\left[\dfrac{\partial|f(z)|}{\partial y}\right]^2=|f'(z)|^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$。结论得证。

2.6 设$my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$为解析函数，试确定l，m，n的值。

解：因为在复变函数$my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$中，有$\begin{cases}u=my^3+nx^2y\\ v=x^3+lxy^2\end{cases}$，

则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2nxy$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=2lxy$；

显然，这四个偏导函数在整个复平面内都是连续的；

又$my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$为解析函数，所以应满足$C-R$方程，则有

$$\begin{cases}2nxy=2lxy\\3my^2+nx^2=-(3x^2+ly^2)\end{cases}，解得\begin{cases}l=-3\\m=1\\n=-3\end{cases}。$$

2.7 证明$C-R$方程的极坐标形式是：$\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$。

证：$C-R$方程即为$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$；

而直角坐标与极坐标的关系是$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，所以$\begin{cases}u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)\\v(x,y)=v(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{cases}$，

则$\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$，

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta=r\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta=\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta$$

，

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta=-\frac{\partial u}{\partial y}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta=r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta\right)$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$。

2.8 若函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析，且满足下列条件之一，试证$f(z)$必为常数。

（1）$f(z)$恒取实值；　　（2）$\overline{f(z)}$在D内解析；

（3）$|f(z)|$在D内为一个常数；　　（4）$\arg f(z)$在D内为一常数；

（5）$au+bv=c$，其中a，b和c为不全为零的实常数。

证：因为函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析，所以$f(z)=u+iv$在区域D内

满足$C-R$方程，即 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ …………（*）

（1）因为$f(z)$恒取实值，则可设$f(z)=u(x,y)$；此时（*）为

$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$ 解得$u(x,y)=C$（其中C为任意一个复常数），

从而$f(z)=C$为常数。结论成立。

（2）因为$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则$\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$；

由函数$\overline{f(z)}$在D内也解析，所以$\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$在$D$内满足$C-R$方程，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial(-v)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial(-v)}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \qquad (**)$$

则由（*）和（**），可得$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}u=C_1\\ v=C_2\end{cases}$（其中$C_1$，$C_2$为任意复常数）

从而$f(z)=C_1+iC_2$为常数。结论成立。

（3）因为$f(z)=u+iv$，所以$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$；

又$|f(z)|$在D内为一个常数，则$|f(z)|^2$在D内也为一个常数，即

$|f(z)|^2=u^2+v^2=C$（其中C为非负数）

①当$C=0$时，即$|f(z)|^2=u^2+v^2=0$，则$u=v=0$（因为u，v都是二元实函数），从而$f(z)=0$，结论得证。

②当$C\neq 0$时，则对方程$u^2+v^2=C$（$C\neq 0$）两边分别关于x，y求偏导数，得

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (***),$$

将（*）代入（***），得 $\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (****)$

方程（****）为齐次线性方程组，且其系数行列式

$\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix}=u^2-(-v^2)=u^2+v^2=C\neq 0$，

故方程（****）只有零解，即$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，将此结果代入（*），得$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$；

由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$解得$u=C_1$（其中$C_1$为任意复常数）；

由$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$解得$v=C_2$（其中$C_2$为任意复常数）；

所以$f(z)=C_1+iC_2$为常数。结论成立。

（4）因为$\arg f(z)$在D内为一常数，又$-\pi<\arg f(z)\leq\pi$，所以

①当$\arg f(z)=\pm\dfrac{\pi}{2}$时，有$u=0$，此时$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；

将$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$代入（*），得$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，解得$v=C$（其中$C$为任意复常数）；

此时$f(z)=iC$为常数，则结论成立。

②当$\arg f(z)\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$时，有$\tan\left[\arg f(z)\right]=\dfrac{v}{u}$且$u\neq 0$；

由$\arg f(z)$在D内为一常数，则$\tan\left[\arg f(z)\right]=\dfrac{v}{u}$也为常数；

此时记$\dfrac{v}{u}=k$（其中k为实常数），即$v=ku$；

对方程$v=ku$两边分别关于x，y求偏导数，得$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=k\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=k\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$…………（******）

将（******）代入（*），得$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=k\dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-k\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{cases}$，即$\begin{cases}(1+k^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ (1+k^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$；

因为k为实常数，所以$1+k^2\neq 0$，从而$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$，将此结论代入（*），可得$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$；

由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$解得$u=C_1$（其中$C_1$为任意复常数）；

由$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$解得$v=C_2$（其中$C_2$为任意复常数）；

所以$f(z)=C_1+iC_2$为常数。结论成立。

（5）因为$au+bv=c$（其中a，b和c为不全为零的实常数），则

（I）当a，b和c中只有一个为零时，

①当$\begin{cases}b=0\\ a\neq 0\\ c\neq 0\end{cases}$时，则$u=\dfrac{c}{a}$为实常数，是（1）的情形，此时结论成立；

②当$\begin{cases}a=0\\ b\neq 0\\ c\neq 0\end{cases}$时，则$v=\dfrac{c}{b}$为实常数，此时证明过程与（1）类似，结论也是成立的；

③当$\begin{cases}c=0\\ a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}$时，则$v=-\dfrac{a}{b}u$（其中$-\dfrac{a}{b}$是实常数），是（4）中的情形②；此时结论成立。

（II）当a，b和c中有两个为零时，

①当$\begin{cases}b=c=0\\ a\neq 0\end{cases}$时，则$u=0$为实常数，此时$f(z)=iv$，从而（*）为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$$ 解得$v(x,y)=C$（其中C为任意一个复常数），

从而$f(z)=iC$为常数。结论成立。

②当$\begin{cases} a=c=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$时，则$v=0$为实常数，此时$f(z)=u(x,y)$是（1）的情形，此时结论成立。

③不可能出现$\begin{cases} a=b=0 \\ c\neq 0 \end{cases}$的情况。

2.9　找出下列方程的全部解。

（1）$\sin z=0$；　（2）$\cos z=0$；　（3）$1+e^{z}=0$；　（4）$shz=i$。

解：（1）因为$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$，由$\sin z=0$，得$\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0$，即$e^{2iz}=1$，解得$2iz=Ln1$；而$Ln1=\ln|1|+i(\arg 1+2k\pi)=0+i(0+2k\pi)=2k\pi i$（$k\in Z$），

所以$2iz=2k\pi i$，即$z=k\pi$（$k\in Z$）；
故方程$\sin z=0$的全部解为$z=k\pi$（$k\in Z$）。

（2）因为$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，由$\cos z=0$，得$\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0$，即$e^{2iz}=-1$，解得

$2iz=Ln(-1)$；　而$Ln(-1)=\ln|-1|+i\left[\arg(-1)+2k\pi\right]=0+i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$

（$k\in Z$），

所以$2iz=(2k+1)\pi i$（$k\in Z$），即$z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in Z$）；

故方程$\cos z=0$的全部解为$z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in Z$）。

（3）因为$1+e^{z}=0$，即$e^{z}=-1$，解得$z=Ln(-1)=i(\pi+2k\pi)$（$k\in Z$），

即方程$1+e^{z}=0$的全部解为$z=(2k+1)\pi i$（$k\in Z$）。

（4）因为$shz=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$，由$shz=i$，得$\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}=i$，即$e^{2z}-2ie^{z}-1=0$，也

即$(e^{z}-i)^{2}=0$；从而$e^{z}-i=0$，解得$z=Ln(i)$；

又 $Ln(i)=\ln|i|+i[\arg(i)+2k\pi]=0+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=(2k+\frac{1}{2})\pi i$ （$k\in Z$）;

所以 $z=(2k+\frac{1}{2})\pi i$ （$k\in Z$），故方程 $shz=i$ 的全部解为 $z=(2k+\frac{1}{2})\pi i$ （$k\in Z$）。

2.10 求 $Ln(-i)$， $Ln(-3+4i)$ 和它们的主值。

解：（1） $Ln(-i)=\ln|-i|+i[\arg(-i)+2k\pi]=0+i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$ （$k\in Z$），

$Ln(-i)$ 的主值为 $\ln(-i)=\pi i$；

（2）

$$Ln(-3+4i)=\ln|-3+4i|+i[\arg(-3+4i)+2k\pi]=\ln 5+i\left[\pi+\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+2k\pi\right]$$

$$=\ln 5+\left[\pi-\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+2k\pi\right]i$$ （$k\in Z$），

$Ln(-3+4i)$ 的主值为 $\ln(-3+4i)=\ln 5+\left[\pi-\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right]i$。

2.11 证明对数的下列性质：

（1） $Ln(z_1z_2)=Ln(z_1)+Ln(z_2)$；　（2） $Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Ln(z_1)-Ln(z_2)$。

解：因为 $Ln(z_1)=\ln|z_1|+iArg(z_1)$， $Ln(z_2)=\ln|z_2|+iArg(z_2)$，

（1）又

$$Ln(z_1z_2)=\ln|z_1z_2|+iArg(z_1z_2)=\ln\left(|z_1||z_2|\right)+i\left[Arg(z_1)+Arg(z_2)\right]$$

$$=\ln|z_1|+\ln|z_2|+i\left[Arg(z_1)+Arg(z_2)\right],$$

所以 $Ln(z_1z_2)=Ln(z_1)+Ln(z_2)$。

（2）又 $Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+iArg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\ln\left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)+i\left[Arg(z_1)-Arg(z_2)\right]$

$$=\ln|z_1|-\ln|z_2|+i\left[Arg(z_1)-Arg(z_2)\right]$$

所以 $Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Ln(z_1)-Ln(z_2)$。

2.12　求 $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$，$\exp\left(\frac{1+i\pi}{4}\right)$，$3^i$ 和 $(1+i)^i$ 的值。

解：（1）$e^{1-i\frac{\pi}{2}}=e\,e^{-i\frac{\pi}{2}}=e\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-ei$，

（2）$\exp\left(\frac{1+i\pi}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}+i\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+i)$，

（　　　　　　　　　　3　　　　　　　　　　）

$$3^i=e^{iLn3}=e^{i\left[\ln|3|+i(\arg 3+2k\pi)\right]}=e^{i\left[\ln 3+i(0+2k\pi)\right]}=e^{-2k\pi+i\ln 3}=e^{-2k\pi}\left[\cos(\ln 3)+i\sin(\ln 3)\right]$$

（$k\in Z$）

（4）　$(1+i)^i=e^{iLn(1+i)}=e^{i\left[\ln|1+i|+i\left(\arg(1+i)+2k\pi\right)\right]}=e^{i\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}$

$=e^{-\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi+\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)i}=e^{-\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}\left[\cos\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)+i\sin\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)\right]$（$k\in Z$）

第三章　复变函数的积分　习题三（P46）

3.1　沿下列路线计算曲线积分 $\int_0^{3+i}z^2dz$：

（1）自原点至 $3+i$ 的直线段；
（2）自原点沿实轴至 3，再由 3 铅直向上至 $3+i$。

解：（1）自原点至 $3+i$ 的直线段对应的参数方程为 $\begin{cases}x=3t,\\ y=t,\end{cases}t:0\to 1$，也即

$z(t)=3t+it=(3+i)t$，$t:0\to 1$；则

$$\int_0^{3+i}z^2dz=\int_0^1[(3+i)t]^2d[(3+i)t]=\int_0^1(3+i)^2t^2\cdot(3+i)dt=(3+i)^3\int_0^1t^2dt$$

$=(3+i)^3\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=(3+i)^3\cdot\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{(3+i)^3}{3}$。

（2）记所给积分路径为 $C=C_1+C_2$，其中

$C_1:\begin{cases}x=3t,\\ y=0,\end{cases}$，$t:0\to 1$，即 $C_1:z(t)=3t$，$t:0\to 1$；

$C_2:\begin{cases}x=3,\\ y=t,\end{cases}$，$t:0\to 1$，即 $C_2:z(t)=3+it$，$t:0\to 1$；

则 $\int_0^{3+i} z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 (3t)^2 d(3t) + \int_0^1 (3+it)^2 d(3+it)$

$$= \left.\frac{(3t)^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{(3+it)^3}{3}\right|_0^1 = \left(\frac{3^3}{3} - 0\right) + \left[\frac{(3+i)^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right] = \frac{(3+i)^3}{3}$$

3.2 计算积分 $\int_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz$ 的值，其中C为正向圆周：$|z| = 2$。

解法一：因为$C: |z| = 2$的参数方程为$C: z = 2e^{i\theta}, \theta: 0 \to 2\pi$，所以

$$\int_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz = \int_C \frac{\bar{z}}{2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\overline{2e^{i\theta}}}{2}\ 2ie^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} 2e^{-i\theta} e^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} 2d\theta = 2i\ 2\pi = 4\pi i$$

。

解法二：因为C为正向圆周：$|z| = 2$，所以$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = 4 \Rightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$；从而

$$\int_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz = \int_C \frac{\bar{z}}{2} dz = \int_C \frac{\frac{4}{z}}{2} dz = \int_C \frac{2}{z} dz = 2\int_C \frac{1}{z} dz = 2\ 2\pi i = 4\pi i$$ 。

3.3 试用观察法得出下列积分的值，并说明观察时所依据的是什么？C为正向圆周$|z| = 1$。

（1）$\int_C \frac{dz}{z-2}$；（2）$\int_C \frac{dz}{z^2+2z+4}$；（3）$\int_C \frac{dz}{\cos z}$；（4）$\int_C \frac{dz}{z-\frac{1}{2}}$；

（5）$\int_C \sin z^3 dz$；（6）$\int_C \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2)}$。

解：（1）因为$\frac{1}{z-2}$在圆周$|z| = 1$内解析，所以由柯西-古萨基本定理，得

$$\int_C \frac{dz}{z-2} = 0$$ 。

（2）因为$\frac{1}{z^2+2z+4} = \frac{1}{(z+1+i\sqrt{3})(z+1-i\sqrt{3})}$在圆周$|z| = 1$内解析，所以

$$\int_C \frac{dz}{z^2+2z+4} = 0$$ 。

（3）因为 $\frac{1}{\cos z}$ 在圆周 $|z|=1$ 内解析，所以由柯西–古萨基本定理，得

$\int_C \frac{dz}{\cos z}=0$。

（4）因为 $\frac{1}{z-\frac{1}{2}}$ 在圆周 $|z|=1$ 内只有一个奇点 $z=\frac{1}{2}$，所以由柯西积分公式，得

$\int_C \frac{dz}{z-\frac{1}{2}}=2\pi i$。

（5）因为 $\sin z^3$ 在圆周 $|z|=1$ 内解析，所以由柯西–古萨基本定理，得

$\int_C \sin z^3 dz=0$。

（6）因为 $\frac{1}{\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2)}$ 在圆周 $|z|=1$ 内只有一个奇点 $z=\frac{i}{2}$，所以由柯西积分公式，得

$$\int_C \frac{dz}{\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2)}=\int_C \frac{\frac{1}{z+2}}{z-\frac{i}{2}}dz=2\pi i\left.\frac{1}{z+2}\right|_{z=\frac{i}{2}}=2\pi i\frac{1}{\frac{i}{2}+2}=\frac{4\pi i}{4+i}=\frac{16\pi}{17}(1+4i)$$

。

3.4 沿指定曲线的正向计算下列各积分：

（1）$\int_C \frac{e^z}{z-2}dz$，$C:|z-2|=1$；（2）$\int_C \frac{dz}{z^2-a^2}$，$C:|z-a|=a$；

（3）$\int_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}$，$C:|z-2i|=\frac{3}{2}$；（4）$\int_C \frac{zdz}{z-3}$，$C:|z|=2$；

（5）$\int_C z^3\cos z dz$，C 为包围 $z=0$ 的闭曲线；（6）$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$，$C:|z|=\frac{3}{2}$；

（7）$\int_C \frac{\sin z dz}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$，$C:|z|=2$；（8）$\int_C \frac{e^z dz}{z^5}$，$C:|z|=1$.

解：(1) 因为 $\dfrac{e^z}{z-2}$ 在积分曲线 $C:|z-2|=1$ 的内部只有一个奇点 $z=2$，所以由柯西积分公式，得 $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i\ e^z\Big|_{z=2} = 2\pi e^2 i$。

(2) 因为 $\dfrac{1}{z^2-a^2}=\dfrac{1}{(z-a)(z+a)}$ 在积分曲线 $C:|z-a|=a$ 的内部只有一个奇点 $z=a$，所以由柯西积分公式，得 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2-a^2} = \int_C \frac{1}{(z-a)(z+a)}dz = \int_C \frac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz = 2\pi i\ \frac{1}{z+a}\Big|_{z=a} = \frac{\pi i}{a}$。

(3) 因为 $\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ 在积分曲线 $C:|z-2i|=\dfrac{3}{2}$ 的内部只有一个奇点 $z=i$，所以由柯西积分公式，得 $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+1} = \int_C \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}dz = \int_C \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i}dz = 2\pi i\ \frac{e^{iz}}{z+i}\Big|_{z=i} = \pi e^{-1} = \frac{\pi}{e}$。

(4) 因为 $\dfrac{z}{z-3}$ 在积分曲线 $C:|z|=2$ 内解析，所以由柯西-古萨基本定理，得 $\displaystyle\int_C \frac{zdz}{z-3}=0$。

(5) 因为 $z^3\cos z$ 在积分曲线 C 内解析，所以由柯西-古萨基本定理，得 $\displaystyle\int_C z^3\cos z dz=0$。

(6)因为 $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}=\dfrac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$ 在积分曲线 $C:|z|=\dfrac{3}{2}$ 的内部有两个奇点 $z=\pm i$，所以由复合闭路定理及柯西积分公式，在圆周 $C:|z|=\dfrac{3}{2}$ 的内部分别以 i、$-i$ 为圆心作圆周 C_1、C_2（使得 C_1、C_2 互不相交也互不包含），则

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \int_C \frac{1}{(z+i)(z-i)(z^2+4)}dz = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i}dz + \int_{C_2} \frac{\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}}{z+i}dz$$

$$=2\pi i\left.\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{z=i}+2\pi i\left.\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}\right|_{z=-i}=2\pi i\frac{1}{2i\ 3}+2\pi i\frac{1}{-2i\ 3}=0$$

（或

$$\int_C\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=\frac{1}{3}\int_C\left(\frac{1}{z^2+1}-\frac{1}{z^2+4}\right)dz=\frac{1}{3}\int_C\frac{1}{z^2+1}dz-\frac{1}{3}\int_C\frac{1}{z^2+4}dz$$

$$=\frac{1}{3}\int_C\frac{1}{z^2+1}dz-0=\frac{1}{3}\int_C\frac{1}{(z+i)(z-i)}dz=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2i}\int_C\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz$$

$$=\frac{1}{6i}\left(2\pi i-2\pi i\right)=0$$）

（7）因为 $\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ 在积分曲线 $C:|z|=2$ 内有一个奇点 $z=\frac{\pi}{2}$，所以由高阶导数公式，得

$$\int_C\frac{\sin z dz}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{2\pi i}{1!}(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi i\ \cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi i\cos\frac{\pi}{2}=0$$

（8）因为 $\frac{e^z}{z^5}$ 在积分曲线 $C:|z|=1$ 内有一个奇点 $z=0$，所以由高阶导数公式，得

$$\int_C\frac{e^z dz}{z^5}=\frac{2\pi i}{4!}(e^z)^{(4)}\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{12}e^z\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{12}e^0=\frac{\pi i}{12}$$

3.5 计算下列各题：

（1）$\int_0^1 z\sin z dz$；　　（2）$\int_0^i (z-1)e^{-z}dz$。

解：（1）$\int_0^1 z\sin zdz=-\int_0^1 zd\cos z=-\left[z\cos z\Big|_0^1-\int_0^1\cos zdz\right]=-\left[\cos 1-\sin z\Big|_0^1\right]$

$=-\left[\cos 1-\sin 1\right]=\sin 1-\cos 1$；

（2）$\int_0^i (z-1)e^{-z}dz=-\int_0^i (z-1)de^{-z}=-\left[(z-1)e^{-z}\Big|_0^i-\int_0^i e^{-z}dz\right]$

$=-\left[(z-1)e^{-z}\Big|_0^i+e^{-z}\Big|_0^i\right]=-ze^{-z}\Big|_0^i=-ie^{-i}=-i\left[\cos(-1)+i\sin(-1)\right]=-\sin 1-i\cos 1$

。

3.6 计算积分 $\int_{C=C_1+C_2}\frac{\cos zdz}{z^3}$，其中 $C_1:|z|=2$ 为正向，$C_2:|z|=3$ 为负向。

解法一：因为$\dfrac{\cos z}{z^3}$在多连通区域$D=\{z|2\le|z|\le3\}$（此时，该多连通区域的边界曲线即为$C^{-1}=C_1^{-1}+C_2^{-1}$（其中$C_1:|z|=2$为正向，$C_2:|z|=3$为负向）的反方向）内解析，所以

$$\int_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z dz}{z^3}=0$$

解法二：利用复变函数积分的性质，得

$$\int_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z dz}{z^3}=\int_{C_1}\frac{\cos z dz}{z^3}+\int_{C_2}\frac{\cos z dz}{z^3}=\int_{C_1}\frac{\cos z dz}{z^3}-\int_{C_2^{-1}}\frac{\cos z dz}{z^3}$$

$$=\int_{|z|=2}\frac{\cos z dz}{z^3}-\int_{|z|=3}\frac{\cos z dz}{z^3}=\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0}-\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0}=0\text{。}$$

3.7　计算积分$\int_C\dfrac{e^z dz}{z^n}$，其中$C$为正向圆周$|z|=1$，$n$为整数。

解：因为n为整数，所以

（1）当$n\le0$时，$\dfrac{e^z}{z^n}$在圆周$|z|=1$内解析，从而由柯西-古萨基本定理，得

$$\int_C\frac{e^z dz}{z^n}=0\text{；}$$

（2）当$n\ge1$时，$\dfrac{e^z}{z^n}$在圆周$|z|=1$内只有一个奇点$z=0$，从而由高阶导数公式，得

$$\int_C\frac{e^z dz}{z^n}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\left(e^z\right)^{(n-1)}\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}e^z\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\text{。}$$

3.8　如果在$|z|<1$内$f(z)$解析并且$|f(z)|\le\dfrac{1}{1-|z|}$，证明

$$\left|f^{(n)}(0)\right|\le(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad(n=1,2,\ldots)\text{。}$$

分析：从要证明的不等式可以看出，要利用解析函数的高阶导数公式$f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\int_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$（其中$C$为正向简单闭曲线，且$C$的内部既要包含点$z_0$，并且$f(z)$在$C$的内部要解析），从而

$$\left|f^{(n)}(0)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=\xi}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\le\frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=\xi<1}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|ds=\frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=\xi<1}\frac{\left|f(z)\right|}{\xi^{n+1}}ds\le\frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=\xi<1}\frac{\frac{1}{1-\xi}}{\xi^{n+1}}ds$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\frac{\frac{1}{1-\xi}}{\xi^{n+1}}2\pi\xi=\frac{n!}{(1-\xi)\xi^{n}}$$

而要证明的是

$$\left|f^{(n)}(0)\right|\le(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=n!(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\frac{n!}{\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}}=\frac{n!}{(1-\frac{n}{n+1})\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}}$$

,

所以可取$\xi=\frac{n}{n+1}$（而$\xi=\frac{n}{n+1}<1$满足条件）。

证： 由高阶导数公式及已知条件，得

$$\left|f^{(n)}(0)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{n}{n+1}<1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\le\frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=\frac{n}{n+1}<1}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|ds\le\frac{n!}{2\pi}\frac{\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}2\pi\frac{n}{n+1}$$

$$=n!\frac{n+1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}}=(n+1)!\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}。$$

所以 $\left|f^{(n)}(0)\right|\le(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ （$n=1,2,\ldots$）。

3.9 证明：$u=x^2-y^2$和$v=\frac{y}{x^2+y^2}$都是调和函数，但是$u+iv$不是解析函数。

证：（1）先证$u=x^2-y^2$和$v=\frac{y}{x^2+y^2}$都是调和函数。

对$u=x^2-y^2$，有$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$，从而$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

所以$u=x^2-y^2$是调和函数。

对 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$， $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1\ (x^2+y^2)-y\ 2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，

则 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-2y\dfrac{\partial\left[\dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}\right]}{\partial x}=-2y\dfrac{1\ (x^2+y^2)^2-x\ 2(x^2+y^2)\ 2x}{(x^2+y^2)^4}=\dfrac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$，

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{-2y(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\ 2(x^2+y^2)\ 2y}{(x^2+y^2)^4}=-\dfrac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$，

从而 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，所以 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 是调和函数。

（2）下面证明 $u+iv$ 不是解析函数。

由（1）的过程知，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$；

显然函数 $u+iv$ 不满足 $C-R$ 方程，故 $u+iv$ 不是解析函数。

3.10　由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z)=u+iv$：

（1）$u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$；　　（2）$v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$f(2)=0$；

（3）$u=2(x-1)y$，$f(2)=-i$；　　（4）$v=\arctan\dfrac{y}{x}$，$x>0$。

解：（1）先验证函数 $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ 是一个调和函数。

因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)=3(x^2+2xy-y^2)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)=3(x^2-2xy-y^2)$；

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3(2x+2y)=6(x+y)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=3(-2xy-2y)=-6(x+y)$；

故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，即 $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ 是一个调和函数。

下面求解析函数 $f(z)=u+iv$：

方法一：因为 $f(z)=u+iv$ 解析，所以

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^2+2xy-y^2)-3i(x^2-2xy-y^2)=3(1-i)z^2$$

从而 $f(z)=\int 3(1-i)z^2dz=(1-i)z^3+C$ （C 为任意复常数）。

方法二：因为 $f(z)=u+iv$ 解析，所以 $f(z)=u+iv$ 满足 $C-R$ 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases},$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=3(x^2+2xy-y^2)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^2-2xy-y^2)$，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=-3(x^2-2xy-y^2)............(*)\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=3(x^2+2xy-y^2)............(**)\end{cases},$$

由（*）式，得

$v=\int -3(x^2-2xy-y^2)dx=-x^3+3x^2y+3xy^2+C(y)$ （其中 $C(y)$ 是 y 的一元实函数），

则 $\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2+6xy+C'(y)$，结合（**）式，得 $C'(y)=-3y^2$；

故 $C(y)=-y^3+C$ （其中 C 任意实常数）；从而 $v=-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C$；

所以所求解析函数 $f(z)=u+iv$ 即为

$$f(z)=(x-y)(x^2+4xy+y^2)+i(-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C)=(1-i)z^3+iC$$

（其中 C 为任意实常数）。

（2）先验证函数 $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ 是一个调和函数。

因为 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1\ (x^2+y^2)-y\ 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，

所以 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{2y\ (x^2+y^2)^2-2xy\ 2(x^2+y^2)\ 2x}{(x^2+y^2)^4}=\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{-2y\ (x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\ 2(x^2+y^2)\ 2y}{(x^2+y^2)^4}=-\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

故 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，即 $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ 是一个调和函数。

下面求解析函数 $f(z)=u+iv$：

方法一：因为 $f(z)=u+iv$ 解析，所以 $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{z^2}$；

从而 $f(z)=\int\frac{1}{z^2}dz=-\frac{1}{z}+C$（$C$ 为任意复常数）；

又 $f(2)=0$，所以 $0=-\frac{1}{2}+C$，解得 $C=\frac{1}{2}$；故 $f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$。

方法二：因为 $f(z)=u+iv$ 解析，所以 $f(z)=u+iv$ 满足 $C-R$ 方程

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases},$$

由 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，得 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\text{..........}(*)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\text{..........}(**)\end{cases}$,

由（**）式，得

$u=\int\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy=x\int\frac{1}{(x^2+y^2)^2}d(y^2)=-\frac{x}{x^2+y^2}+C(x)$（其中 $C(x)$ 是 x 的一元实函数）；

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1\ (x^2+y^2)-x\ 2x}{(x^2+y^2)^2}+C'(x)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+C'(x)$，

结合（*）式，得 $C'(x)=0$，即 $C(x)=C$（其中 C 为任意实常数）；

从而 $u=-\frac{x}{x^2+y^2}+C$（其中 C 为任意实常数）；

所以所求解析函数 $f(z)=u+iv$ 即为

$$f(z)=-\frac{x}{x^2+y^2}+C+i\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{1}{z}+C$$ （其中 C 为任意实常数）；

又 $f(2)=0$，所以 $0=-\frac{1}{2}+C$，解得 $C=\frac{1}{2}$；故 $f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$。

（3）先验证函数 $u=2(x-1)y$ 是一个调和函数。

因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=2y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)$；所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

故 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，即 $u=2(x-1)y$ 是一个调和函数。

下面求解析函数 $f(z)=u+iv$：

方法一：因为 $f(z)=u+iv$ 解析，所以 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2y-2(x-1)i=-2iz+2i$；

从而 $f(z)=\int(-2iz+2i)dz=-iz^2+2iz+C$ （C 为任意复常数）；

又 $f(2)=-i$，所以 $-i=-4i+4i+C$，解得 $C=-i$；故 $f(z)=-iz^2+2iz-i=-i(z-1)^2$。

方法二：因为 $f(z)=u+iv$ 解析，所以 $f(z)=u+iv$ 满足 $C-R$ 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases},$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=2y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)$，得 $\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2(x-1)\text{............}(*)\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=2y\quad\text{............}(**)\end{cases}$，

由（*）式，得 $v=\int -2(x-1)dx=-x^2+2x+C(y)$（其中 $C(y)$ 是 y 的一元实函数），

则$\frac{\partial v}{\partial y}=C'(y)$，结合（**）式，得$C'(y)=2y$；故$C(y)=\int 2ydy=y^2+C$（其中$C$任意实常数）；

从而$v=-x^2+2x+y^2+C$（其中C任意实常数）；

所以所求解析函数$f(z)=u+iv$即为

$$f(z)=2(x-1)y+i(-x^2+2x+y^2+C)=i(-z^2+2z+C)$$（其中C为任意实常数）；

又 $f(2)=-i$，所以 $-i=i(-4+4+C)$，解得 $C=-1$；故 $f(z)=i(-z^2+2z-1)=-i(z-1)^2$。

（4）先验证函数$v=\arctan\frac{y}{x}$是一个调和函数。

因为$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$，

所以 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-y\left[-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right]=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=x\left[-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right]=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

故$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，即$v=\arctan\frac{y}{x}$是一个调和函数。

下面求解析函数$f(z)=u+iv$：

方法一：因为 $f(z)=u+iv$ 解析，所以 $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}$，

从而$f(z)=\int\frac{1}{z}dz=\ln z+C$（$C$为任意复常数）；

方法二：因为$f(z)=u+iv$解析，所以$f(z)=u+iv$满足$C-R$方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases},$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，得 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}\text{..........(*)}\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}\text{..........(**)}\end{cases}$，

由（*）式，得

$u=\int\dfrac{x}{x^2+y^2}dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{x^2+y^2}d(x^2)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C(y)$（其中 $C(y)$ 是 y 的一元实函数）；

则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\ \dfrac{2y}{x^2+y^2}+C'(y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}+C'(y)$，

结合（**）式，得 $C'(y)=0$，即 $C(y)=C$（其中 C 为任意实常数）；

从而 $u=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$（其中 C 为任意实常数）；

所以所求解析函数 $f(z)=u+iv$ 即为

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C+i\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C+i\arctan\frac{y}{x}=\left(\ln|z|+i\arctan\frac{y}{x}\right)+C$$

（其中 C 为任意实常数）；

因为 $x>0$，所以 $\arctan\dfrac{y}{x}=\arg(z)$；

故 $f(z)=\left(\ln|z|+i\arctan\dfrac{y}{x}\right)+C=\left(\ln|z|+i\arg z\right)+C=\ln z+C$（其中 C 为任意实常数）。

3.11　如果 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，试证 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

证：要证 $-u$ 是 v 的共轭调和函数，即证函数 $f(z)=v-iu$ 是解析函数，也即

证函数 $f(z)=v-iu$ 满足 $C-R$ 方程 $\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial(-u)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial(-u)}{\partial x}\end{cases}$，也即为 $\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{cases}$ ………(*)。

因为 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，所以 $f(z)=u+iv$ 满足 $C-R$ 方程

$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ ……….(**);

则由（**）可知，（*）显然成立。结论得证。

第四章　级数　习题四（P67）

4.1　下列序列是否有极限？如果有极限，求出其极限。

（1）$\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$；　（2）$\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$；　（3）$\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}i}$。

解：（1）因为 $\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}=\dfrac{\frac{1}{n}+i}{\frac{1}{n}-i}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}+i}{\frac{1}{n}-i}=\dfrac{0+i}{0-i}=-1$。

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}\right]$ 不存在。

（3）因为 $\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}i}=\dfrac{1}{n}\left[\cos\dfrac{n\pi}{2}-i\sin\dfrac{n\pi}{2}\right]=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-i\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{2}i}=0$。

4.2　下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$；　（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$；　（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(in)}{2^n}$。

解：（1）因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}=i-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}i+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}i-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}i+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}i-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}i+\dfrac{1}{12}+\ldots$

（或因为 $i^n=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n=\cos\dfrac{n\pi}{2}+i\sin\dfrac{n\pi}{2}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}+i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

）

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$的实部与虚部构成的级数分别为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$；

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$都是条件收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$收敛，但非绝对收敛。

（2）因为$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(6+5i)^n}{8^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{6+5i}{8}\right|^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$是公比$q=\frac{\sqrt{61}}{8}<1$的等比级数，

故$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(6+5i)^n}{8^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$绝对收敛。

（3）因为$\frac{\cos(in)}{2^n}=\frac{\frac{e^{i(in)}+e^{-i(in)}}{2}}{2^n}=\frac{1}{2}\,\frac{e^{-n}+e^n}{2^n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2e}\right)^n+\left(\frac{e}{2}\right)^n\right]$，

方法一：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2e)^n}+\left(\frac{e}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n$，

而$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$是公比$q=\frac{1}{2e}<1$的等比级数，故收敛；$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n$是公比$q=\frac{e}{2}>1$的等比级数，故发散；

从而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$发散。

方法二：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{e^{-n}+e^n}{2^n}=\infty$，所以$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$发散。

4.3 试确定下列幂级数的收敛半径。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$（$p$为正整数）； （2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}z^n$；

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$； （4）$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{\ln(in)}\right]^n$。

解：（1）收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^p}}{\dfrac{1}{(n+1)^p}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^p}{n^p}=1$。

（2）收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n!)^2}{n^n}}{\dfrac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n-1}}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^{n-1}=0$。

（3）收敛半径为：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|(1+i)^n|}}=\dfrac{1}{|1+i|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

（4）因为 $\ln(in)=\ln|in|+i\arg(in)=\ln n+i\ \dfrac{\pi}{2}=\ln n+\dfrac{\pi}{2}i$，

所以收敛半径为：

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\left[\dfrac{1}{\ln(in)}\right]^n\right|}}=\lim_{n\to\infty}|\ln(in)|=\lim_{n\to\infty}\left|\ln n+\frac{\pi}{2}i\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right|=+\infty。$$

4.4 将下列各函数展开为 z 的幂级数，并指出其收敛区域。

（1）$\dfrac{1}{1+z^3}$；（2）$\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$（$a\neq 0$，$b\neq 0$）；（3）$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$；

（4）$\sin^2 z$；（5）$e^{\frac{z}{z-1}}$。

解：（1）$\dfrac{1}{1+z^3}=\dfrac{1}{1-(-z^3)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-z^3)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n}$（$|z|<1$）。

（2）因为 $a\neq 0$，$b\neq 0$，所以

①当 $a=b$ 时，$\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{(z-a)^2}=-\left(\dfrac{1}{z-a}\right)'$，

而 $\dfrac{1}{z-a}=-\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{a}}=-\dfrac{1}{a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{a}\right)^n=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{a^{n+1}}z^n$（$\left|\dfrac{z}{a}\right|<1$），

所以 $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{(z-a)^2}=-\left(\dfrac{1}{z-a}\right)'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{a^{n+1}}z^n\right)'$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a^{n+1}}z^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a^{n+1}}z^{n-1}$（$|z|<|a|$）。

②当$a \neq b$时，$\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{1}{z-b}\right)=\dfrac{1}{a-b}\left(-\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{a}}+\dfrac{1}{b}\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{b}}\right)$

$$=\frac{1}{a-b}\left[-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n+\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n\right]=\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^{n+1}}-\frac{1}{a^{n+1}}\right)z^n$$

（$|z|<\min(|a|,|b|)$）

（3）因为$\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'=-\dfrac{2z}{(1+z^2)^2}$，

而

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}=1-z^2+z^4-z^6+z^8+...+(-1)^n z^{2n}+...$$

（$|z|<1$）

所 以 $\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}2n(-1)^n z^{2n-1}=-2z+4z^3-6z^5+8z^7+...+2n(-1)^n z^{2n-1}+...$

（$|z|<1$）

从而$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}z^{2n-2}=1-z^2+z^4-z^6+...+n(-1)^{n-1}z^{2n-2}+...$（$|z|<1$）

（4）因为$\sin^2 z=\dfrac{1-\cos(2z)}{2}$，而

$\cos(2z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\dfrac{z^8}{8!}+...+\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+...$（$|z|<+\infty$），

所以$\sin^2 z=\dfrac{1-\cos(2z)}{2}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(2z)^{2n}}{(2n)!}$（$|z|<+\infty$）。

（5）因为$\dfrac{z}{z-1}=1-\dfrac{1}{1-z}=1-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=-\sum_{n=1}^{\infty}z^n$（$|z|<1$），所以

$$e^{\frac{z}{z-1}}=1+\left[-\sum_{n=1}^{\infty}z^n\right]+\frac{\left[-\sum_{n=1}^{\infty}z^n\right]^2}{2!}+\frac{\left[-\sum_{n=1}^{\infty}z^n\right]^3}{3!}+...+\frac{\left[-\sum_{n=1}^{\infty}z^n\right]^n}{n!}+...$$

$$=1-(z+z^2+...+z^n+...)+\frac{(z+z^2+...+z^n+...)^2}{2!}-\frac{(z+z^2+...+z^n+...)^3}{3!}+...$$

$$+\frac{(-1)^n(z+z^2+...+z^n+...)^n}{n!}+... \quad (|z|<1)$$

4.5 求下列函数在指定点z_0处的泰勒展开式。

（1）$\frac{z-1}{z+1}$，$z_0=1$；（2）$\frac{z}{(z+1)(z+2)}$，$z_0=2$；（3）$\frac{1}{z^2}$，$z_0=-1$；（4）$\frac{1}{4-3z}$，$z_0=1+i$。

解：（1）因为$z_0=1$，所以

$$\frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}=1-\frac{2}{(z-1)+2}=1-\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n$$

（$|z-1|<2$）

（2）因为$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$，$z_0=2$，而

$$\frac{2}{z+2}=\frac{2}{(z-2)+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n \quad \left(\left|\frac{z-2}{4}\right|<1,\right.$$

即$|z-2|<4$），

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-2)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n \quad \left(\left|\frac{z-2}{3}\right|<1,\right.$$

即$|z-2|<3$），

所以 $$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right](z-2)^n \quad (|z-2|<3)$$

（3）因为 $\dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'$，而 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{(z+1)-1}=-\dfrac{1}{1-(z+1)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+1)^n$（$|z+1|<1$），

所以 $\dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\left[-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\right]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(z+1)^n\right]'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}$（$|z+1|<1$）。

（4）因为 $\dfrac{1}{4-3z}=\dfrac{1}{(1-3i)-3[z-(1+i)]}=\dfrac{1}{1-3i}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{1-3i}[z-(1+i)]}$

$=\dfrac{1}{1-3i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{\dfrac{3}{1-3i}[z-(1+i)]\right\}^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$（$\left|\dfrac{3[z-(1+i)]}{1-3i}\right|<1$，即

$|z-(1+i)|<\dfrac{\sqrt{10}}{3}$）

所以 $\dfrac{1}{4-3z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$（$|z-(1+i)|<\dfrac{\sqrt{10}}{3}$）。

4.6 将下列各函数在指定圆环域内展开为洛朗级数。

（1）$\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，$1<|z|<2$；（2）$\dfrac{1}{z(1-z)^2}$，$0<|z|<1$，$0<|z-1|<1$；

（3）$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，$0<|z-1|<1$，$1<|z-2|<+\infty$；（4）$\dfrac{1}{z^2(z-i)}$，在以 i 为中心的圆环域内；

（5）$\sin\dfrac{1}{1-z}$，在 $z=1$ 的去心邻域内。

解：（1）因为在圆环域 $1<|z|<2$ 内，有 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$，$\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$，所以

方法一：

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{z}{z^2+1}-\frac{2}{z^2+1}\right)=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{z^{2n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}\right] \quad (1<|z|<2)$$

方法二： $$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{1}{z-2}=\left[\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2}\right]\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{1}{z}\right)^2\right]^n\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]=-\frac{1}{2z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\right]$$

（$1<|z|<2$）

（2）①在圆环域$0<|z|<1$内，有

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{z}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(z^n)'=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-2}$$

$$\xlongequal[\text{则}n=k+2]{\text{令}n-2=k}\sum_{k=-1}^{\infty}(k+2)z^k\xlongequal{\text{令}k=n}\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n \quad (0<|z|<1)$$

②在圆环域$0<|z-1|<1$内，有

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}[-(z-1)]^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

$$\xlongequal[\text{则}n=k+2]{\text{令}n-2=k}\sum_{k=-2}^{\infty}(-1)^{k+2}(z-1)^k\xlongequal{\text{令}k=n}\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad (0<|z-1|<1)$$

（3）①在圆环域$0<|z-1|<1$内，有

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

（$0<|z-1|<1$）

②在圆环域$1<|z-2|<+\infty$内，有$\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$，则

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\frac{1}{(z-2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{1}{z-2}\right)\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+2}}$$

（$1<|z-2|<+\infty$）

（4）函数 $\dfrac{1}{z^2(z-i)}$ 的解析区域中，以 i 为中心的圆环域有 $0<|z-i|<1$ 和 $1<|z-i|<+\infty$。

①在圆环域 $0<|z-i|<1$ 内，有

$$\frac{1}{z^2(z-i)}=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{i+(z-i)}\right)'=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}}\right)'$$

$$=-\frac{1}{z-i}\left[\frac{1}{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{i}\right)^n\right]'=-\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{z-i}{i}\right)^n\right]'=-\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(z-i)^{n-1}}{i^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}}\quad (0<|z-i|<1)$$

②在圆环域 $1<|z-i|<+\infty$ 内，有 $\left|\dfrac{1}{z-i}\right|<1$，则

$$\frac{1}{z^2(z-i)}=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{i+(z-i)}\right)'=-\frac{1}{z-i}\left(\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}}\right)'$$

$$=-\frac{1}{z-i}\left[\frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{z-i}\right)^n\right]'=-\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^{n+1}}\right]'=-\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)i^n}{(z-i)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)i^n}{(z-i)^{n+3}}\quad (1<|z-i|<+\infty)$$

（5）因为 $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$ （$|z|<+\infty$），则在 $z=1$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内，有

$$\sin\frac{1}{1-z}=-\sin\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

4.7 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解：函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 的解析区域中，以 $z=1$ 为中心的圆环域有 $0<|z-1|<1$ 和 $1<|z-1|<+\infty$。

①在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内，有

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1}\quad（0<|z-1|<1）$$

②在圆环域 $1<|z-1|<+\infty$ 内，有 $\left|\dfrac{1}{z-1}\right|<1$，则

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}\quad（1<|z-1|<+\infty）$$

4.8　计算积分 $\int_{|z|=1}z^4\sin\dfrac{1}{z}dz$，其中 $|z|=1$ 为正向圆周。

解：被积函数 $z^4\sin\dfrac{1}{z}$ 在积分曲线 $|z|=1$ 的内部只有一个奇点 $z=0$，而圆周 $|z|=1$ 在函数 $z^4\sin\dfrac{1}{z}$ 的解析圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内，将函数 $z^4\sin\dfrac{1}{z}$ 在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展开为洛朗级数，得

$$z^4\sin\frac{1}{z}=z^4\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\frac{1}{7!z^7}+\dots\right)$$

上式中含 $\dfrac{1}{z}$ 项的系数为：$c_{-1}=\dfrac{1}{5!}$，故 $\int_{|z|=1}z^4\sin\dfrac{1}{z}dz=2\pi ic_{-1}=\dfrac{2\pi i}{5!}=\dfrac{\pi i}{60}$。

4.9　计算积分 $\int_{|z|=2}\dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，其中 $|z|=2$ 为正向圆周。

解：记$I=\int_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，因为被积函数$\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$在积分曲线$|z|=2$的内部有两个奇点$z=0$和$z=-1$，利用复合闭路原理，分别以$z=0$和$z=-1$为圆心在圆周$|z|=2$的内部作两个互不相交也互不包含的正向圆周$C_1:|z|=r_1$（$0<r_1<1$）与$C_2:|z+1|=r_2$（$0<r_2<1$），则

$$\int_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=\int_{|z|=r_1}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz+\int_{|z+1|=r_2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz,$$

记$I_1=\int_{|z|=r_1}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，$I_2=\int_{|z+1|=r_2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，下面计算$I_1$，$I_2$：

（1）对$I_1=\int_{|z|=r_1}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，第三章中计算复变函数积分的公式及方法都不适用，所以需将被积函数$\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$在圆环域$0<|z|<1$（圆周$C_1:|z|=r_1$（$0<r_1<1$）在此圆环域内）内展开成洛朗级数，得

$$\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}=z^3\cdot\frac{1}{1+z}\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^3\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}+\ldots\right)$$

$$=\left(z^3-z^4+z^5-z^6+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\frac{1}{5!z^5}\ldots\right)$$

上式中含$\frac{1}{z}$项的系数为：$c_{-1}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\ldots=e^{-1}-\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=e^{-1}-\frac{1}{3}$，

所以$I_1=\int_{|z|=r_1}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i(e^{-1}-\frac{1}{3})$。

（2）对$I_2=\int_{|z+1|=r_2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，

解法一：利用柯西积分公式，得

$$I_2=\int_{|z+1|=r_2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\cdot z^3e^{\frac{1}{z}}\Big|_{z=-1}=2\pi i\cdot(-1)^3e^{-1}=-2\pi ie^{-1}。$$

解法二：将被积函数$\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$在圆环域$0<|z+1|<1$（圆周$C_2:|z+1|=r_2$

（$0<r_2<1$）在此圆环域内）内展开成洛朗级数，得

$$\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}=\frac{(z+1)^3-3(z+1)^2+3(z+1)-1}{1+z}e^{-\frac{1}{1-(z+1)}}=\left[(z+1)^2-3(z+1)+3-\frac{1}{z+1}\right]e^{-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n}$$

$$=\left[(z+1)^2-3(z+1)+3-\frac{1}{z+1}\right]\left[1+\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\right)+\frac{\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\right)^2}{2!}+\ldots+\frac{\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\right)^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=\left[(z+1)^2-3(z+1)+3-\frac{1}{z+1}\right]\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n+\frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\right)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\right)^n}{n!}+\ldots\right]$$

上式中含$\frac{1}{z+1}$项的系数为：$c_{-1}=-\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots\right)=-e^{-1}$，

所以$I_2=\int_{|z+1|=r_2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i c_{-1}=2\pi i\cdot(-e^{-1})=-2\pi i e^{-1}$。

从而

$$\int_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=\int_{|z|=r_1}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz+\int_{|z+1|=r_2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i(e^{-1}-\frac{1}{3})-2\pi i e^{-1}=-\frac{2\pi i}{3}$$

。

4.10　求双边幂级数　$\ldots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\ldots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\ldots$　的收敛圆环与和函数。

解：双边幂级数　$\ldots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\ldots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\ldots$　含正幂项的部分与含负幂项的部分分别为：$-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$，

$-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\ldots-\frac{1}{z^n}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$，

而$-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$的收敛域为$\left|\frac{z}{2}\right|<1$，即$|z|<2$；

$-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots-\frac{1}{z^n}-\dots=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$ 的收敛域为 $\left|\frac{1}{z}\right|<1$，即 $|z|>1$；

从而双边幂级数 $\dots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\dots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\dots$ 的收敛圆环为 $1<|z|<2$。

又 $-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\dots=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{z-2}$ （$|z|<2$），

$-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots-\frac{1}{z^n}-\dots=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{1-z}$ （$|z|>1$），

故 $\dots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\dots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\dots=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z-2}$ （$1<|z|<2$）。

第五章　留数　习题五（P93）

5.1　下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级。

（1）$\frac{1}{z(z^2+1)^2}$；　（2）$\frac{\sin z}{z^3}$；　（3）$\frac{1}{z^3-z^2-z+1}$；

（4）$\frac{\ln(z+1)}{z}$ （$|z|<1$）；　（5）$\frac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$；　（6）$e^{\frac{1}{z-1}}$；

（7）$\frac{1}{z^2(e^z-1)}$；　（8）$\frac{z^{2n}}{1+z^n}$ （n 为整数）；　（9）$\frac{1}{\sin z^2}$。

解：（1）因为 $\frac{1}{z(z^2+1)^2}=\frac{1}{z(z+i)^2(z-i)^2}$ 的奇点为 $z=0,\pm i$；则由第五章中的定理 1.2 得，$z=0$ 是函数 $\frac{1}{z(z^2+1)^2}$ 的一级极点，$z=\pm i$ 是函数 $\frac{1}{z(z^2+1)^2}$ 的二级极点。

（2）方法一：因为 $\frac{\sin z}{z^3}$ 的奇点为 $z=0$，而

$$\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\dots \quad （0<|z|<+\infty）$$

所以由极点的定义可知，$z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。

方法二：因为$\dfrac{\sin z}{z^3}$的奇点为$z=0$，又$z=0$是z^3的三级零点；而由$\sin 0=0$，$(\sin z)'\big|_{z=0}=\cos 0=1\neq 0$知，$z=0$是$\sin z$的一级零点；从而由第五章中的定理 1.5 得$z=0$是$\dfrac{\sin z}{z^3}$的二级极点。

（3）因为$\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$的奇点为$z=\pm 1$；则由第五章中的定理 1.2 得，$z=-1$是函数$\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$的一级极点，$z=1$是函数$\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$的二级极点。;

（4）因为函数$\dfrac{\ln(z+1)}{z}$在$|z|<1$内只有唯一的奇点$z=0$，

解法一：因为$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(z+1)}{z}=1$，所以由第五章中的定理 1.1 知$z=0$是函数$\dfrac{\ln(z+1)}{z}$的可去奇点。

解法二：因为函数$\dfrac{\ln(z+1)}{z}$在圆环域$0<|z|<1$内的洛朗展开式为

$$\frac{\ln(z+1)}{z}=\frac{1}{z}\left[z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\ldots\right]=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}z^{n-1}}{n}+\ldots$$

，

所以$z=0$是函数$\dfrac{\ln(z+1)}{z}$的可去奇点。

（5）因为$\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}=\dfrac{z}{(z+i)(z-i)(1+e^{\pi z})}$的奇点为$z=\pm i$与

$z_k=\dfrac{1}{\pi}Ln(-1)=\dfrac{1}{\pi}\left\{\ln|-1|+i\left[\arg(-1)+2k\pi\right]\right\}=(2k+1)i$ （$k\in Z$）；

而$(1+e^{\pi z})'\big|_{z=(2k+1)i}=\pi e^{\pi z}\big|_{z=(2k+1)i}=\pi e^{\pi(2k+1)i}=-\pi\neq 0$ （$k\in Z$），

所以$z=\pm i$是函数$\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$的二级极点，$z_k=(2k+1)i$（$k\in Z$，且$k\neq 0$，

$k \neq -1$）是函数$\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$的一级极点。

（6）因为$e^z = 1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+...+\dfrac{z^n}{n!}+...$（$|z|<+\infty$），

则在$z=1$去心邻域$0<|z-1|<+\infty$内，有

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+...+\frac{1}{n!(z-1)^n}+...,$$

所以$z=1$是函数$e^{\frac{1}{z-1}}$的本性奇点。

（7）因为函数$\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$的奇点为$z=0$与

$z_k = Ln1 = \ln|1| + i\left[\arg(1)+2k\pi\right] = 2k\pi i$（$k \in Z$），

而$(e^z-1)'\big|_{z=2k\pi i} = e^z\big|_{z=2k\pi i} = 1 \neq 0$，所以

$z=0$是函数$\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$的三级极点，$z_k = 2k\pi i$（$k \in Z$，$k \neq 0$）是函数$\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$的一级极点。

（8）因为函数$\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$的奇点为$z_k = \sqrt[n]{-1} = \cos\dfrac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{n} = e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}$

（$k=0,1,2,3,...,n-1$），而$z^{2n}\big|_{z=z_k} = 1 \neq 0$，$(1+z^n)'\big|_{z=z_k} = nz^{n-1}\big|_{z=z_k} \neq 0$，

所以$z_k = \cos\dfrac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{n} = e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}$（$k=0,1,2,3,...,n-1$）是函数$\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$的一级极点。

（9）函数$\dfrac{1}{\sin z^2}$的奇点为$\sin z^2 = 0$，即$z = \pm\sqrt{k\pi}$（$0 \le k \in Z^+$）与$z = \pm i\sqrt{k\pi}$（$0 \le k \in Z^+$）；

①当$k=0$，即$z=0$时，因为

$(\sin z^2)'\big|_{z=0} = 2z\cos z^2\big|_{z=0} = 0$，

$(\sin z^2)''\big|_{z=0} = (2z\cos z^2)'\big|_{z=0} = (2\cos z^2 - 4z^2\sin z^2)\big|_{z=0} = 2 \neq 0$，

所以$z=0$是函数$\sin z^2$的二级零点，从而$z=0$是函数$\dfrac{1}{\sin z^2}$的二级极点。

② 当 $k\neq 0$ 时，因为 $(\sin z^2)'\big|_{z=\pm\sqrt{k\pi}}=2z\cos z^2\big|_{z=\pm\sqrt{k\pi}}\neq 0$，

$(\sin z^2)'\big|_{z=\pm i\sqrt{k\pi}}=2z\cos z^2\big|_{z=\pm i\sqrt{k\pi}}\neq 0$，

所以，$z=\pm\sqrt{k\pi}$（$k\in Z^+$）与$z=\pm i\sqrt{k\pi}$（$k\in Z^+$）是函数$\sin z^2$的一级零点，

从而$z=\pm\sqrt{k\pi}$（$k\in Z^+$）与$z=\pm i\sqrt{k\pi}$（$k\in Z^+$）是函数$\dfrac{1}{\sin z^2}$的一级极点。。

5.2 证明：如果z_0是$f(z)$的m（$m>1$）级零点，则z_0是$f'(z)$的$m-1$级零点。

证：如果z_0是$f(z)$的m（$m>1$）级零点，则有

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)\text{，其中 } g(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 处解析，且 } g(z_0)\neq 0\text{；}$$

由$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，则

$$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}g(z)+(z-z_0)^m g'(z)=(z-z_0)^{m-1}\left[mg(z)+(z-z_0)g'(z)\right]$$

，

其中$\left[mg(z)+(z-z_0)g'(z)\right]\Big|_{z=z_0}=mg(z_0)\neq 0$，且$\left[mg(z)+(z-z_0)g'(z)\right]$在$z_0$处解析。

从而根据零点的定义可知，z_0是$f'(z)$的$m-1$级零点。

5.3 $z=0$是$(\sin z+shz-2z)^{-2}$的几级极点？

5.4 证明定理 1.5。

5.5 求出下列各函数$f(z)$在有限奇点处的留数：

（1）$\dfrac{z+1}{z^2-2z}$； （2）$\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$； （3）$\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$；

（4）$\dfrac{z}{\cos z}$； （5）$\cos\dfrac{1}{1-z}$； （6）$z^2\sin\dfrac{1}{z}$。

解：(1) 因为$\dfrac{z+1}{z^2-2z}=\dfrac{z+1}{z(z-2)}$，所以$z=0$与$z=2$是函数$\dfrac{z+1}{z^2-2z}$的一级极点，则

解法一：由准则 I，得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z^2-2z},0\right]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z+1}{z^2-2z}=\lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z-2}=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z^2-2z},2\right]=\lim_{z\to 2}(z-2)\cdot\frac{z+1}{z^2-2z}=\lim_{z\to 2}\frac{z+1}{z}=\frac{3}{2}。$$

解法二：由准则 III，得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z^2-2z},0\right]=\left.\frac{z+1}{(z^2-2z)'}\right|_{z=0}=\left.\frac{z+1}{2z-2}\right|_{z=0}=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z^2-2z},2\right]=\left.\frac{z+1}{(z^2-2z)'}\right|_{z=2}=\left.\frac{z+1}{2z-2}\right|_{z=2}=\frac{3}{2}。$$

（2）函数 $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的孤立奇点是 $z=0$，又 $(1-e^{2z})\big|_{z=0}=0$，

$(1-e^{2z})'\big|_{z=0}=-2e^{2z}\big|_{z=0}=-2\neq 0$，

所以 $z=0$ 是 $(1-e^{2z})$ 的一级零点，$z=0$ 是 z^4 的四级零点，从而 $z=0$ 是 $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 的三级极点。

下面计算 $\mathrm{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4},0\right]$：

方法一：利用准则 II，得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4},0\right]=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^4\cdot\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right]'''=\frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\left[1-e^{2z}\right]'''=\frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\left[-8e^{2z}\right]=-\frac{4}{3}$$

方法二：将函数 $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ 在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数，得

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left\{1-\left[1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2z)^n}{n!}+\ldots\right]\right\}$$

$$=-\frac{1}{z^4}\left[2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2z)^n}{n!}+\ldots\right]$$

上式中含 $\frac{1}{z}$ 项的系数 $c_{-1}=-\frac{2^3}{3!}=-\frac{4}{3}$，故 $\mathrm{Res}\left[\frac{1-e^{2z}}{z^4},0\right]=c_{-1}=-\frac{4}{3}$。

（3）因为 $\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}=\frac{(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)}{(z+i)^3(z-i)^3}$，所以 $z=\pm i$ 是函数 $\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$ 的二级

极点，从而由准则 II，得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3},i\right]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^3\cdot\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[\frac{z^4+1}{(z+i)^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[(z^4+1)(z+i)^{-3}\right]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left\{(z^4+1)''(z+i)^{-3}+2(z^4+1)'\left[(z+i)^{-3}\right]'+(z^4+1)\left[(z+i)^{-3}\right]''\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left\{12z^2(z+i)^{-3}+2\ 4z^3\ (-3)(z+i)^{-4}+(z^4+1)\ 12(z+i)^{-5}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12i^2}{(2i)^3}-\frac{24i^3}{(2i)^4}+\frac{12(i^4+1)}{(2i)^5}\right]=-\frac{3i}{8};$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3},-i\right]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -i}\left[(z+i)^3\cdot\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left[\frac{1+z^4}{(z-i)^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left[(z^4+1)(z-i)^{-3}\right]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left\{(z^4+1)''(z-i)^{-3}+2(z^4+1)'\left[(z-i)^{-3}\right]'+(z^4+1)\left[(z-i)^{-3}\right]''\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left[12z^2(z-i)^{-3}+2\ 4z^3\ (-3)(z-i)^{-4}+(z^4+1)\ 12(z-i)^{-5}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12(-i)^2}{(-2i)^3}-\frac{24(-i)^3}{(-2i)^4}+\frac{12\left[(-i)^4+1\right]}{(-2i)^5}\right]=\frac{3i}{8}。$$

（4）因为 $\frac{z}{\cos z}$ 的奇点即为 $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$），而 $(\cos z)'\big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=\sin z\big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}\neq 0$，

所以 $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$）是函数 $\cos z$ 的一级零点，

从而 $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$）是函数 $\frac{z}{\cos z}$ 的一级极点。

故

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\cos z},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]=\frac{z}{(\cos z)'}\bigg|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}}{-\sin(k\pi+\frac{\pi}{2})}=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}}{-(-1)^k}=(-1)^{k+1}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)。$$

（5）因为 $\cos\frac{1}{1-z}$ 的奇点为 $z=1$，而 $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$，

则在以 $z=1$ 为中心的去心邻域 $0<|z-1|<+\infty$ 内，函数 $\cos\frac{1}{1-z}$ 的洛朗展开式为

$$\cos\frac{1}{1-z}=\cos\frac{1}{z-1}=1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\frac{1}{6!}+...+\frac{(-1)^n 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+...$$

从而 $\mathrm{Re}\,s\left[\cos\frac{1}{1-z},1\right]=0$。

（6）因为 $z^2\sin\frac{1}{z}$ 的奇点为 $z=0$，而 $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...+\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$，

则在以 $z=0$ 为中心的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内，函数 $z^2\sin\frac{1}{z}$ 的洛朗展开式为

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\frac{1}{7!z^7}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!z^{2n-1}}+...\right]$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{7!z^5}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!z^{2n-3}}+...,$$

所以 $\mathrm{Re}\,s\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$。

5.6　计算下列各积分（利用留数：圆周均取正向）：

（1）$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}dz$；　　（2）$\int_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$；

（3）$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z(z-1)(z+2)^2}dz$；　　（4）$\int_{|z|=2}\frac{1}{z^4-1}dz$；

（5）$\int_{|z|=3}\tan(\pi z)dz$；　　（6）$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}dz$（$m$ 为整数）。

解：（1）方法一：因为被积函数 $\frac{\sin z}{z}$ 在积分曲线 $|z|=\frac{3}{2}$ 内部只有一个可去奇点 $z=0$，则由留数定理，得　$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}dz=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{\sin z}{z},0\right]=0$。

方法二：由柯西积分公式，得 $\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin z}{z}dz=2\pi i\ \sin z\big|_{z=0}=0$。

（2）方法一：因为被积函数 $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ 在积分曲线 $|z|=2$ 内部只有一个二级极点 $z=1$，则由留数定理，得

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz=2\pi i\ \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to1}\left[(z-1)^2\ \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\right]'=2\pi i\ \lim_{z\to1}(e^{2z})'=2\pi i\ \lim_{z\to1}(2e^{2z})=4\pi e^2 i$$

方法二：由高阶导数公式，得

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{(2-1)!}(e^{2z})'\Big|_{z=1}=2\pi i\ (2e^{2z})\Big|_{z=1}=4\pi e^2 i\ ;$$

（3）方法一：被积函数 $\frac{1}{z(z-1)(z+2)^2}$ 在积分曲线 $|z|=\frac{3}{2}$ 内只有两个一级极点 $\mathbf{0}$，$\mathbf{1}$，则由留数定理，得

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z(z-1)(z+2)^2}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)(z+2)^2},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)(z+2)^2},1\right]\right\}$$

$$=2\pi i\left[\lim_{z\to0}z\ \frac{1}{z(z-1)(z+2)^2}+\lim_{z\to1}(z-1)\ \frac{1}{z(z-1)(z+2)^2}\right]=2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)=-\frac{5}{18}\pi i$$

方法二：由复合闭路原理和柯西积分公式，得

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z(z-1)(z+2)^2}dz=2\pi i\left[\frac{1}{(z-1)(z+2)^2}\Big|_{z=0}+\frac{1}{z(z+2)^2}\Big|_{z=1}\right]=2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)=-\frac{5}{18}\pi i$$

（4）方法一：被积函数 $\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)}$ 在积分曲线 $|z|=2$ 内有四个一级极点 ±1，$\pm i$，则由留数定理，得

$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^4-1}dz=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},-1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},-i\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},i\right]\right\}$$

，

下面计算 $\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},-1\right]$，$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},1\right]$，$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},-i\right]$，$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},i\right]$：

利用准则 I，得：

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},-1\right]=\lim_{z\to-1}(z+1)\ \frac{1}{z^4-1}=-\frac{1}{4},\quad \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},1\right]=\lim_{z\to1}(z-1)\ \frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},-i\right]=\lim_{z\to-i}(z+i)\ \frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{4i},\quad \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},i\right]=\lim_{z\to i}(z-i)\ \frac{1}{z^4-1}=-\frac{1}{4i},$$

（或者是利用准则 III，得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},-1\right]=\frac{1}{(z^4-1)'}\bigg|_{z=-1}=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=-1}=-\frac{1}{4}$$,

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},1\right]=\frac{1}{(z^4-1)'}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=1}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},-i\right]=\frac{1}{(z^4-1)'}\bigg|_{z=-i}=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=-i}=\frac{1}{4i}$$,

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4-1},i\right]=\frac{1}{(z^4-1)'}\bigg|_{z=i}=\frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=i}=-\frac{1}{4i}$$ ）

所以 $\int_{|z|=2}\frac{1}{z^4-1}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4i}-\frac{1}{4i}\right)=0$。

方法二：由复合闭路原理和柯西积分公式，得

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z^4-1}dz=2\pi i\left[\frac{1}{(z^2+1)(z-1)}\bigg|_{z=-1}+\frac{1}{(z^2+1)(z+1)}\bigg|_{z=1}+\frac{1}{(z^2-1)(z-i)}\bigg|_{z=-i}+\frac{1}{(z^2-1)(z+i)}\bigg|_{z=i}\right]$$

$$=2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4i}-\frac{1}{4i}\right)=0$$

（5）被积函数 $\tan(\pi z)=\frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$ 在积分曲线 $|z|=3$ 内有六个一级极点 $z=k+\frac{1}{2}$

（$k\in Z$，且 $\left|k+\frac{1}{2}\right|<3$），而 $\mathrm{Res}\left[\tan(\pi z),k+\frac{1}{2}\right]=\frac{\sin(\pi z)}{[\cos(\pi z)]'}\bigg|_{z=k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$，则

由留数定理，得

$$\int_{|z|=3}\tan(\pi z)dz=2\pi i\ 6\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-12i$$ 。

（6）**（此题要用洛朗展开式才容易讨论）**

因为 m 为整数，而

$$1-\cos z=1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^4}{6}+\frac{z^8}{8!}+\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^4}{6}-\frac{z^8}{8!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

则①当 $m=2k+1$（$k\in Z^+$），即 m 为大于或等于 3 的奇数时，

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^m}dz=0$$

$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1-\cos z}{z^m} dz$（$m$ 为整数）

5.8 求下列积分（圆周均取正向）：

（1）$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz$；　　（2）$\int_{|z|=3} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$。

解：（1）被积函数 $\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}$ 在积分曲线 $|z|=2$ 内有一个一级极点 -1 和一个本性起点 0，则由留数定理，得

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, -1\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, 0\right] \right\};$$

下面计算 $\operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, -1\right]$，$\operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, 0\right]$：

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, -1\right] = \lim_{z\to -1}(z+1)\ \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{z\to -1} z^3 e^{\frac{1}{z}} = -e^{-1};$$

要计算 $\operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, 0\right]$，需将函数 $\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}$ 在以 0 为中心的去心邻域 $0<|z|<1$ 内展开为洛朗级数：

$$\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} = z^3\ \frac{1}{1-(-z)}\ e^{\frac{1}{z}} = z^3\left[1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots\right]\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots\right]$$

$$=\left[z^3-z^4+z^5-z^6+\ldots+(-1)^n z^{n+3}+\ldots\right]\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots\right],$$

上式中，含 $\frac{1}{z}$ 项的系数为：

$$c_{-1} = \frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots$$

$$=\left[\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots\right)\right]-\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=e^{-1}-\frac{1}{3},$$

故 $\operatorname{Res}\left[\frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}}, 0\right] = e^{-1}-\frac{1}{3}$，

从而 $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i\left[-e^{-1}+\left(e^{-1}-\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{2\pi}{3} i$。

（2）计算 $\int_{|z|=3}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$，需要利用函数在无穷远点处的留数与函数在有限点处的留数的关系，所以此题不需要大家掌握。

5.9　计算下列积分：

（1）$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta$；　（2）$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{a+b\cos\theta}d\theta$（$a>b>0$）；　（3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；

（4）$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$；　（5）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$；　（6）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$。

解：（1）$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta\overset{z=e^{i\theta}}{=\!=}\int_{|z|=1}\frac{1}{5+3\,\frac{z^2-1}{2iz}}\,\frac{1}{iz}dz=\int_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz$

$=\frac{2}{3}\int_{|z|=1}\frac{1}{(z+3i)(z+i/3)}dz=\frac{4}{3}\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+3i)(z+i/3)},-i/3\right]$

$=\frac{4}{3}\pi i\lim_{z\to -i/3}(z+i/3)\cdot\frac{1}{(z+3i)(z+i/3)}=\frac{4}{3}\pi i\cdot\frac{3}{8i}=\frac{\pi}{2}$

（2）因为 $a>b>0$，则

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\overset{z=e^{i\theta}}{=\!=}\int_{|z|=1}\frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{a+b\,\frac{z^2+1}{2z}}\,\frac{1}{iz}dz=\frac{i}{2}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}dz$$

$$=\frac{i}{2}\,2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)},\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]\right\}$$

$$=-\pi\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)},\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]\right\}$$

下面计算 $\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)},0\right]$，$\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)},\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]$：

$$\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)},0\right]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\left[z^2\,\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}\right]'=\lim_{z\to0}\left[\frac{(z^2-1)^2}{(bz^2+2az+b)}\right]'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{4z(z^2-1)(bz^2+2az+b)-(z^2-1)^2(2bz+2a)}{(bz^2+2az+b)^2}=-\frac{2a}{b^2};$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)},\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]=\frac{(z^2-1)^2}{\left[z^2(bz^2+2az+b)\right]'}\Bigg|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}$$

$$=\frac{(z^2-1)^2}{2z(bz^2+2az+b)+z^2(2bz+2a)}\Bigg|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{(z^2-1)^2}{2z^2(bz+a)}\Bigg|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}$$

$$=\frac{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}{2(bz+a)}\Bigg|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}-\frac{b}{-a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\left(b\ \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}+a\right)}$$

$$=\frac{\left[\frac{2\sqrt{a^2-b^2})}{b}\right]^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\frac{4\left(a^2-b^2\right)}{b^2}}{2\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2};$$

从而 $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta=-\pi\left[-\frac{2a}{b^2}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\right]=\frac{2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b^2}$。

（3）因为被积函数 $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ 的分母含 x 的最高次比分子含 x 的最高次高 4 次，

并且作为复变量 z 的函数 $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在实轴上没有奇点，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=2\pi i\ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2},i\right]=2\pi i\ \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^2\ \frac{1}{(1+z^2)^2}\right]'$$

$$=2\pi i\ \lim_{z\to i}\left[(z+i)^{-2}\right]'=2\pi i\ \lim_{z\to i}\left[-2(z+i)^{-3}\right]=2\pi i\ \frac{-2}{(2i)^3}=\frac{\pi}{2}。$$

（4）因为被积函数 $\frac{x^2}{1+x^4}$ 是偶函数，且分母含 x 的最高次比分子含 x 的最高次

高 2 次，并且作为复变量 z 的函数 $\frac{z^2}{1+z^4}$ 在实轴上没有奇点，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4},\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{1+z^4},\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right]\right\}$$

$$=\pi i\left[\left.\frac{z^2}{(1+z^4)'}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}+\left.\frac{z^2}{(1+z^4)'}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}\right]=\pi i\left[\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}+\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}\right]$$

$$=\pi i\left[\frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)}+\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)}\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

（5）因为被积函数中的 $\frac{1}{x^2+4x+5}$ 分母含 x 的最高次比分子含 x 的最高次高 2 次，并且作为复变量 z 的函数 $\frac{1}{z^2+4z+5}$ 在实轴上没有奇点，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx=\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx\right]=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\ \mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},-2+i\right]\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left[2\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)'}\right|_{z=-2+i}\right]=\mathrm{Re}\left[2\pi i\left.\frac{e^{iz}}{2z+4}\right|_{z=-2+i}\right]=\mathrm{Re}\left(2\pi i\frac{e^{i(-2+i)}}{2i}\right)=\mathrm{Re}\left(\pi e^{-1-2i}\right)=\pi e^{-1}\cos 2$$

（6）因为被积函数中的 $\frac{x}{1+x^2}$ 分母含 x 的最高次比分子含 x 的最高次高 1 次，并且作为复变量 z 的函数 $\frac{z}{1+z^2}$ 在实轴上没有奇点，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx\right]=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\ \mathrm{Res}\left[\frac{ze^{iz}}{1+z^2},i\right]\right\}=\mathrm{Im}\left(2\pi i\left.\frac{ze^{iz}}{(1+z^2)'}\right|_{z=i}\right)$$

$$=\mathrm{Im}\left(2\pi i\left.\frac{e^{iz}}{2}\right|_{z=i}\right)=\mathrm{Im}\left(\pi ie^{-1}\right)=\pi e^{-1}。$$

5.10 试用图 5.6 中的积分闭路，求例 3.4 中的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 。

第七章 傅里叶变换 习题七（P141）

7.4 求下列函数的傅氏积分。

（1）$f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\le 1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$；　（2）$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-t}\sin(2t), & t\ge 0.\end{cases}$；

（3） $f(t)=\begin{cases} -1, -1<t<0, \\ 1, \ 0<t<1, ; \\ 0, 其他. \end{cases}$

解：（1）函数 $f(t)$ 的傅氏变换为：

$$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)\left[\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\right]dt$$

$$=2\int_{0}^{1}(1-t^2)\cos(\omega t)dt=2\left[\frac{(1-t^2)\sin(\omega t)}{\omega}-\frac{2t\cos(\omega t)}{\omega^2}+\frac{2\sin(\omega t)}{\omega^3}\right]_0^1$$

$$=2\left(-\frac{2\cos\omega}{\omega^2}+\frac{2\sin\omega}{\omega^3}\right)=\frac{4\left(\sin\omega-\omega\cos\omega\right)}{\omega^3}$$

因为 $f(t)=\begin{cases}1-t^2, |t|\le 1, \\ 0 \ \ , |t|>1.\end{cases}$ 在其定义域内处处连续，所以

$$f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\left(\sin\omega-\omega\cos\omega\right)}{\omega^3}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\left(\sin\omega-\omega\cos\omega\right)}{\omega^3}\left[\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right]d\omega=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos(\omega t)d\omega$$

即 $f(t)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos(\omega t)d\omega$。

（2）函数 $f(t)$ 的傅氏变换为：

$$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\sin(2t)e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\int_{0}^{+\infty}e^{-[1+(\omega-2)i]t}dt-\int_{0}^{+\infty}e^{-[1+(\omega+2)i]t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{-[1+(\omega-2)i]}e^{-[1+(\omega-2)i]t}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{-[1+(\omega+2)i]}e^{-[1+(\omega+2)i]t}\Big|_0^{+\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1+(\omega-2)i}-\frac{1}{1+(\omega+2)i}\right]=\frac{2(5-\omega^2)-4\omega i}{\omega^4-6\omega^2+25}$$

因为函数 $f(t)=\begin{cases} 0 \quad , t<0, \\ e^{-t}\sin(2t), t\ge 0.\end{cases}$ 在其定义域内连续，所以

$$f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(5-\omega^2)-4\omega i}{\omega^4-6\omega^2+25}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(5-\omega^2)-4\omega i}{\omega^4-6\omega^2+25}\left[\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right]d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega t)}{\omega^4-6\omega^2+25}d\omega$$

即 $f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega t)}{\omega^4-6\omega^2+25}d\omega$。

（3）函数 $f(t)$ 的傅氏变换为：

$$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{0}-e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{1}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{1-e^{i\omega}-e^{-i\omega}+1}{i\omega}=\frac{2-2\cos\omega}{i\omega}$$

因为函数 $f(t)=\begin{cases}-1,-1<t<0,\\ 1,\ 0<t<1,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$ 的间断点为 $0,\pm1$，所以

$$f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2-2\cos\omega}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega$$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2-2\cos\omega}{i\omega}\left[\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right]d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin(\omega t)d\omega$ （$t\neq0$ 且 $t\neq\pm1$）。

7.5 求下列函数的傅氏变换，并推证所列的积分结果。

（1）$f(t)=e^{-\beta|t|}$（$\beta>0$），证明 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\omega t)}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$。

（2）$f(t)=\begin{cases}1,|t|\le1,\\ 0,|t|>1,\end{cases}$ 证明 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos(\omega t)}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2},|t|<1,\\ \frac{\pi}{4},|t|=1,\\ 0,|t|>1.\end{cases}$

（3）$f(t)=\begin{cases}\sin t,|t|\le\pi,\\ 0\ ,|t|>\pi,\end{cases}$ 证明 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(\omega\pi)\sin(\omega t)}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t,\ |t|\le\pi,\\ 0\quad ,|t|>\pi.\end{cases}$

解：（1）函数 $f(t)$ 的傅氏变换为：

$$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|t|}e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{\beta t}e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{(\beta-i\omega)t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-(\beta+i\omega)t}dt=\frac{1}{\beta-i\omega}e^{(\beta-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{\beta+i\omega}e^{-(\beta+i\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$\overset{\beta>0}{=\!=}\frac{1}{\beta-i\omega}+\frac{1}{\beta+i\omega}=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2},$$

即 $F\left[f(t)\right]=\dfrac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$ （$\beta>0$）。

因为函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}$ 在其定义域内连续，所以

$$f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}\left[\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right]d\omega=\frac{2\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}\cos(\omega t)d\omega$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}\cos(\omega t)d\omega=\frac{\pi}{2\beta}f(t)=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}。$$

（2）函数 $f(t)$ 的傅氏变换为：

$$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1}1\ e^{-i\omega t}dt=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

，

因 为 函 数 $f(t)=\begin{cases}1,|t|\le 1,\\0,|t|>1,\end{cases}$ 不 连 续 的 点 为 $t=\pm1$ ， 令

$f(t)=\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\begin{cases}1,|t|<1,\\0,|t|>1,\\\dfrac{1}{2},|t|=1.\end{cases}$ 则不管 t 是函数 $f(t)$ 的连续点还是间断点，t 都是函数 $f(t)$ 的连续点，所以

$$f(t)=F^{-1}\left[f(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\left[\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right]d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega t)d\omega,$$

故 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega t)d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2},|t|<1,\\ 0,|t|>1,\\ \frac{\pi}{4},|t|=1.\end{cases}$

（3）函数 $f(t)$ 的傅氏变换为：

$$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\ e^{-i\omega t}dt\ \overset{\text{分部积}}{\underset{\text{分法}}{=}}\ \frac{1}{(i\omega)^2+1^2}\left(i\omega\sin t+\cos t\right)e^{-i\omega t}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\omega^2-1}\left[-e^{-i\omega\pi}-(-e^{i\omega\pi})\right]=\frac{1}{\omega^2-1}\left[-e^{-i\omega\pi}-(-e^{i\omega\pi})\right]=\frac{2\sin(\omega\pi)}{\omega^2-1}i,$$

因为函数 $f(t)=\begin{cases}\sin t\ ,|t|\le\pi,\\ 0\ \ ,|t|>\pi,\end{cases}$ 在其定义域内处处连续，所以

$$f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin(\omega\pi)}{\omega^2-1}ie^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega\pi)}{\omega^2-1}i\left[\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right]d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(\omega\pi)\sin(\omega t)}{1-\omega^2}d\omega,$$

故 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(\omega\pi)\sin(\omega t)}{1-\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t,\ |t|\le\pi,\\ 0\quad\ ,|t|>\pi.\end{cases}$。

7.6　求下列函数的傅氏变换：

（1）$\operatorname{sgn}t=\begin{cases}-1,t<0,\\ 1,t>0;\end{cases}$　　（2）$f(t)=\cos t\sin t.$

解：（1）因为 $\operatorname{sgn}t=2u(t)-1$，而 $F\left[u(t)\right]=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$，$F\left[1\right]=2\pi\delta(\omega)$，则根据拉氏变换的线性性质，得

$$F\left[\operatorname{sgn}t\right]=F\left[2u(t)-1\right]=2F\left[u(t)\right]-F\left[1\right]=2\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]-2\pi\delta(\omega)=\frac{2}{i\omega}。$$

（2）因为 $f(t)=\cos t\sin t=\frac{1}{2}\sin(2t)$，

方法一（定义法）：由拉氏变换的定义，得

$$F\left[\cos t\sin t\right]=F\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\sin(2t)\ e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i}\ e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{4i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega-2)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega+2)t}dt\right]=\frac{1}{4i}\left[2\pi\delta(\omega-2)-2\pi\delta(\omega+2)\right]=\frac{\pi i}{2}\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$$

所以$F\left[\cos t\sin t\right]=\dfrac{\pi i}{2}\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$。

方 法 二 （ 利 用 拉 氏 变 换 及 δ 函 数 的 性 质 ）： 记 $G(\omega)=F\left[\sin t\right]=i\pi\left[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right]$，则由拉氏变换的线性性质和相似性质，得

$$F\left[\cos t\sin t\right]=F\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]=\frac{1}{2}F\left[\sin(2t)\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{|2|}G\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{4}\left\{i\pi\left[\delta(\frac{\omega}{2}+1)-\delta(\frac{\omega}{2}-1)\right]\right\}$$

$$=\frac{i\pi}{4}\left[\delta(\frac{\omega+2}{2})-\delta(\frac{\omega-2}{2})\right]\overset{\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{i\pi}{4}\left[2\delta(\omega+2)-2\delta(\omega-2)\right]=\frac{i\pi}{2}\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$$

所以$F\left[\cos t\sin t\right]=\dfrac{\pi i}{2}\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]$。

7.7　证 明 周 期 为 T 的 非 正 弦 函 数 $f(t)$ 的 傅 氏 变 换 为 $F(\omega)=2\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\delta(\omega-\omega_0)$，其中$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$，$c_n$是$f(t)$的离散频谱。

7.8　已知$F(\omega)=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$为$f(t)$的傅氏变换，求$f(t)$。

解：由傅氏逆变换的定义及线性性质，得

$$f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]=F^{-1}\left[\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]\right]=\pi\left\{F^{-1}\left[\delta(\omega-\omega_0)\right]+F^{-1}\left[\delta(\omega+\omega_0)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{i\omega t}d\omega+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+\omega_0)e^{i\omega t}d\omega\right]\overset{\delta\text{函数的}}{\underset{\text{筛选性质}}{=\!=\!=\!=}}\frac{1}{2}\left[e^{i\omega t}\Big|_{\omega=\omega_0}+e^{i\omega t}\Big|_{\omega=-\omega_0}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right]=\cos(\omega_0 t),$$

故 $f(t)=\cos(\omega_0 t)$。

7.9 求如图 7.9 所示的三角形脉冲的傅氏变换。

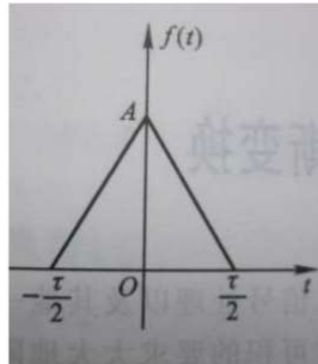


图 7.9

解：$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$

$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}A(\frac{2}{\tau}t+1)e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}A(-\frac{2}{\tau}t+1)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{2A}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}te^{-i\omega t}dt+A\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0}e^{-i\omega t}dt-\frac{2A}{\tau}\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}te^{-i\omega t}dt+A\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}e^{-i\omega t}dt$$

$$=-\frac{2A}{\tau}\left[\frac{t}{i\omega}+\frac{1}{(i\omega)^2}\right]e^{-i\omega t}\bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{0}-\frac{A}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0}+\frac{2A}{\tau}\left[\frac{t}{i\omega}+\frac{1}{(i\omega)^2}\right]e^{-i\omega t}\bigg|_{0}^{\frac{\tau}{2}}-\frac{A}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$=-\frac{2A}{\tau}\left[\frac{1}{(i\omega)^2}-\left(\frac{-\frac{\tau}{2}}{i\omega}+\frac{1}{(i\omega)^2}\right)e^{i\frac{\tau}{2}\omega}\right]-\frac{A}{i\omega}\left(1-e^{i\frac{\tau}{2}\omega}\right)+\frac{2A}{\tau}\left[\left(\frac{\frac{\tau}{2}}{i\omega}+\frac{1}{(i\omega)^2}\right)e^{-i\frac{\tau}{2}\omega}-\frac{1}{(i\omega)^2}\right]-\frac{A}{i\omega}\left(e^{-i\frac{\tau}{2}\omega}-1\right.$$

$$=\frac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\frac{\tau\omega}{2}\right)$$

故 $F\left[f(t)\right]=\frac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\frac{\tau\omega}{2}\right)$。

7.11 若 $F(\omega)=F\left[f(t)\right]$，证明 $F^{-1}\left[F(\omega\pm\omega_0)\right]=e^{\mp i\omega_0 t}f(t)$。

证：因为 $F(\omega)=F\left[f(t)\right]$，则 $f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]$，再由拉屎逆变换的定义，得

$$F^{-1}\left[F(\omega\pm\omega_0)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega\pm\omega_0)e^{i\omega t}d\omega\,\frac{\text{令}\,\omega\pm\omega_0=u}{\text{则}\,\omega=u\mp\omega_0}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{i(u\mp\omega_0)t}du$$

$$=e^{\mp i\omega_0 t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{iut}du\right]=e^{\mp i\omega_0 t}F^{-1}\left[F(\omega)\right]=e^{\mp i\omega_0 t}f(t),$$

故 $F^{-1}\left[F(\omega\pm\omega_0)\right]=e^{\mp i\omega_0 t}f(t)$。

7.12 证明 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$。

解：由卷积的定义，得

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \xlongequal{令\tau=t-u} \int_{+\infty}^{-\infty}f_1(t-u)f_2(u)(-1)du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(u)f_1(t-u)du=f_2(t)*f_1(t)$$

所以 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$。

7.13 若 $F_1(\omega)=F\left[f_1(t)\right]$，$F_2(\omega)=F\left[f_2(t)\right]$，证明 $F\left[f_1(t)\ f_2(t)\right]=\dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$。

证明：由拉氏变换的定义，得

$$F\left[f_1(t)\ f_2(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega_0)e^{i\omega_0 t}d\omega_0\right]e^{-i\omega t}dt$$

因为当 $F_2(\omega_0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积时，交换积分顺序【刘建亚《复变函数与积分变换》，P171】,因此

$$F\left[f_1(t)\ f_2(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega_0)e^{i\omega_0 t}d\omega_0\right]e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega_0)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f_1(t)e^{i\omega_0 t}\right)e^{-i\omega t}dt\right]d\omega_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega_0)F_1(\omega-\omega_0)d\omega_0=F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

故 $F\left[f_1(t)\ f_2(t)\right]=\dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$。

7.14 若 $f_1(t)=t^2u(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ t^2, t>0;\end{cases}$ $f_2(t)=\begin{cases}1, |t|\le 1,\\ 0, |t|>1.\end{cases}$，求 $f_1(t)*f_2(t)$。

解：由卷积的定义和卷积的交换律，得

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau$$

又 $f_1(t)=t^2u(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ t^2, t>0;\end{cases}$ $f_2(t)=\begin{cases}1, |t|\le 1,\\ 0, |t|>1.\end{cases}$，则只有当 $\begin{cases}|\tau|\le 1\\ t-\tau>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-1\le\tau\le 1\\ \tau<t\end{cases}$ 时，$f_2(\tau)f_1(t-\tau)\ne 0$。所以

（1）当 $t<-1$ 时，则 $\tau<t<-1$，此时 $f_2(\tau)=0$，从而 $f_1(t)*f_2(t)=0$；

（2）当$-1\le t\le 1$时，$f_2(\tau)f_1(t-\tau)=1\ (t-\tau)^2$，则

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-1}^{t}1\ (t-\tau)^2d\tau=\left.\frac{(\tau-t)^3}{3}\right|_{-1}^{t}=\frac{(t+1)^3}{3};$$

（3）当$t>1$时，由$\tau<t$，此时只有满足$-1\le\tau<1<t$，有 $_2(\tau)f_1(t-\tau)=1\ (t-\tau)^2$，从而

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-1}^{1}1\ (t-\tau)^2d\tau=\left.\frac{(\tau-t)^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{(1-t)^3-(-t-1)^3}{3}=\frac{6t^2+2}{3};$$

综上，得$f_1(t)*f_2(t)$为：$f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0\ , & t<-1,\\ \dfrac{(t+1)^3}{3}, & -1\le t\le 1,\\ \dfrac{6t^2+2}{3}, & t>1.\end{cases}$

7.15 给定微分方程$x'(t)+x(t)=h(t)$，其中$-\infty<t<+\infty$，$h(t)$为已知函数。试证该方程的解可以表为$x(t)=\int_0^{+\infty}e^{-\tau}h(t-\tau)\tau$。

解：记$F\left[x(t)\right]=X(\omega)$，$F\left[h(t)\right]=H(\omega)$，对方程两边取傅氏变换，得

$i\omega X(\omega)+X(\omega)=H(\omega)$，则$X(\omega)=\dfrac{1}{i\omega+1}H(\omega)$，

求上式的傅氏逆变换，得

$$x(t)=F^{-1}\left[\frac{1}{i\omega+1}H(\omega)\right]\underline{\underline{\text{卷积}}}_{\text{定理}}\left\{F^{-1}\left[\frac{1}{1+i\omega}\right]\right\}*\left\{F^{-1}\left[H(\omega)\right]\right\}=\left\{F^{-1}\left[\frac{1}{1+i\omega}\right]\right\}*h(t)$$

，

而$F^{-1}\left[\dfrac{1}{1+i\omega}\right]=\begin{cases}e^{-t},t>0\\ \dfrac{1}{2},t=0\\ 0\ ,t<0\end{cases}$，所以$\left\{F^{-1}\left[\dfrac{1}{1+i\omega}\right]\right\}*h(t)=\int_0^{+\infty}e^{-\tau}h(t-\tau)d\tau$，

从而$x(t)=F^{-1}\left[\dfrac{1}{i\omega+1}H(\omega)\right]=\left\{F^{-1}\left[\dfrac{1}{1+i\omega}\right]\right\}*h(t)=\int_0^{+\infty}e^{-\tau}h(t-\tau)d\tau$，

即$x(t)=\int_0^{+\infty}e^{-\tau}h(t-\tau)d\tau$。

第八章　拉普拉斯叶变换　习题八（P160）

8.1 求下列函数的拉氏变换，并用查表的方法来验证结果。

（1）$f(t)=\sin\frac{t}{2}$；　（2）$f(t)=e^{-2t}$；　（3）$f(t)=t^2$；　（4）$f(t)=\sin t\cos t$。

解：（1）方法一(定义法)：由拉氏变换的定义，得

$$L[f(t)]=L\left[\sin\frac{t}{2}\right]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\sin\frac{t}{2}dt=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\sin\frac{t}{2}de^{-st}$$

$$\overset{\text{分部积}}{\underset{\text{分法}}{=}}-\frac{1}{s}e^{-st}\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2s}\int_0^{+\infty}e^{-st}\cos\frac{t}{2}dt=0-\frac{1}{2s^2}\int_0^{+\infty}\cos\frac{t}{2}de^{-st}\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$$

$$\overset{\text{分部积}}{\underset{\text{分法}}{=}}-\frac{1}{2s^2}e^{-st}\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{4s^2}\int_0^{+\infty}e^{-st}\sin\frac{t}{2}dt=\frac{1}{2s^2}-\frac{1}{4s^2}L\left[\sin\frac{t}{2}\right]\quad(\mathrm{Re}(s)>0)$$

所以　$L\left[\sin\frac{t}{2}\right]=\dfrac{\frac{1}{2s^2}}{1+\frac{1}{4s^2}}=\dfrac{2}{4s^2+1}$（$\mathrm{Re}(s)>0$）。

方法二（利用$L[\sin(kt)]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$（$k$为实数，$\mathrm{Re}(s)>0$））

因为$L[\sin(kt)]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$（$k$为实数，$\mathrm{Re}(s)>0$），

所以$L\left[\sin\frac{t}{2}\right]=\dfrac{\frac{1}{2}}{s^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{2}{4s^2+1}$（$\mathrm{Re}(s)>0$）。

（2）方法一(定义法)：由拉氏变换的定义，得

$$L[f(t)]=L\left[e^{-2t}\right]=\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{-2t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s+2)t}dt=-\frac{1}{s+2}e^{-(s+2)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$=0-\left(-\dfrac{1}{s+2}\right)=\dfrac{1}{s+2}$（$\mathrm{Re}(s+2)>0$，即$\mathrm{Re}(s)>-2$）。

方法二（利用$L\left[e^{-kt}\right]=\dfrac{1}{s-k}$（$k$为实数，$\mathrm{Re}(s)>k$））

因为$L\left[e^{-kt}\right]=\dfrac{1}{s-k}$（$k$为实数，$\mathrm{Re}(s)>k$），所以$L\left[e^{-2t}\right]=\dfrac{1}{s-(-2)}=\dfrac{1}{s+2}$

（$\mathrm{Re}(s)>-2$）。

（3）方法一(定义法)：由拉氏变换的定义，得

$$L[f(t)]=L\left[t^2\right]=\int_0^{+\infty}t^2e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}t^2de^{-st}\overset{\text{分部积}}{\underset{\text{分法}}{=}}-\frac{1}{s}t^2e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{s}\int_0^{+\infty}te^{-st}dt$$

$$=-\frac{2}{s^2}\int_0^{+\infty} t de^{-st}(\mathrm{Re}(s)>0)\xlongequal[\text{分法}]{\text{分部积}}-\frac{2}{s^2}te^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{s^2}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt(\mathrm{Re}(s)>0)=-\frac{2}{s^3}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}(\mathrm{Re}(s)>0)$$

$$=\frac{2}{s^3}(\mathrm{Re}(s)>0),$$

故 $L\left[t^2\right]=\frac{2}{s^3}$ （$\mathrm{Re}(s)>0$）

方法二（利用 $L\left[t^m\right]=\frac{m!}{s^{m+1}}$ （m 为正整数，$\mathrm{Re}(s)>0$））：

由 $L\left[t^m\right]=\frac{m!}{s^{m+1}}$ （m 为正整数，$\mathrm{Re}(s)>0$），得

$$L\left[t^2\right]=\frac{2!}{s^{2+1}}=\frac{2}{s^3}\quad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

方法三（利用 $L[1]=\frac{1}{s}$ （$\mathrm{Re}(s)>0$）及拉氏变换的微分性质）：

因为 $f(t)=t^2=t^2\ 1$，记 $G(s)=L[1]=\frac{1}{s}$ （$\mathrm{Re}(s)>0$），则由拉氏变换的微分性质，得

$$L[f(t)]=L\left[t^2\ 1\right]=(-1)^2L\left[t^2\ 1\right]=G''(s)=\left(\frac{1}{s}\right)''=\left(-\frac{1}{s^2}\right)'=\frac{2}{s^3}$$

（$\mathrm{Re}(s)>0$）

即 $L\left[t^2\right]=\frac{2!}{s^{2+1}}=\frac{2}{s^3}$ （$\mathrm{Re}(s)>0$）。

（4）方法一(定义法)：由拉氏变换的定义，得

$$L[f(t)]=L[\sin t\cos t]=L\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(2t)dt=-\frac{1}{2s}\int_0^{+\infty}\sin(2t)de^{-st}$$

$$\xlongequal[\text{分法}]{\text{分部积}}-\frac{1}{2s}e^{-st}\sin(2t)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(2t)dt=-\frac{1}{s^2}\int_0^{+\infty}\cos(2t)de^{-st}(\mathrm{Re}(s)<0)$$

$$\xlongequal[\text{分法}]{\text{分部积}}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\cos(2t)\Big|_0^{+\infty}-\frac{2}{s^2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(2t)dt(\mathrm{Re}(s)<0)=\frac{1}{s^2}-\frac{4}{s^2}L\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right](\mathrm{Re}(s)<0)$$

所以 $L\left[\dfrac{1}{2}\sin(2t)\right]=\dfrac{\dfrac{1}{s^2}}{1+\dfrac{4}{s^2}}=\dfrac{1}{s^2+4}$ （$\mathrm{Re}(s)<0$）

方法二（利用 $L[\sin(kt)]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$ （k 为实数，$\mathrm{Re}(s)>0$）及拉氏变换的线性性质）

因为 $L[\sin(kt)]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$ （k 为实数，$\mathrm{Re}(s)>0$），则根据拉氏变换的线性性质，得

$$L[\sin t\cos t]=L\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]=\frac{1}{2}L[\sin(2t)]=\frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{1}{s^2+4}\ （\mathrm{Re}(s)>0）。$$

8.2 求下列函数的拉氏变换。

（1） $f(t)=\begin{cases}3\,,0\le t<2,\\-1\,,2\le t<4,\\0\,,t\ge 4;\end{cases}$ （2） $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$。

解：（1）由拉氏变换的定义，得

$$L[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^2 3e^{-st}dt+\int_2^4 -e^{-st}dt=-3\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^2+\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_2^4$$

$$=-3\left(\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{e^{-4s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}\right)=\frac{3+e^{-4s}-4e^{-2s}}{s}$$

故 $L[f(t)]=\dfrac{3+e^{-4s}-4e^{-2s}}{s}$。

（2）

$$L[f(t)]=L\left[e^{2t}+5\delta(t)\right]\overset{\text{拉氏变换的}}{\underset{\text{线性性质}}{=\!=\!=}}L\left[e^{2t}\right]+5L[\delta(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{-2t}dt+5L[u'(t)]$$

$$\overset{\text{拉氏变换的}}{\underset{\text{微分性质}}{=\!=\!=}}\int_0^{+\infty}e^{-(s+2)t}dt+5\{sL[u(t)]-u(0)\}=-\left.\frac{e^{-(s+2)t}}{s+2}\right|_0^{+\infty}+5\left(s\,\frac{1}{s}-0\right)$$

$$=\frac{1}{s+2}+5\ （\mathrm{Re}(s+2)>0，即\ \mathrm{Re}(s)>-2）$$

故 $L[f(t)]=L\left[e^{2t}+5\delta(t)\right]=\dfrac{1}{s+2}+5$ （$\mathrm{Re}(s+2)>0$，即 $\mathrm{Re}(s)>-2$）。

8.3 求下列函数的拉氏变换。

（1） $f(t)=t^2+3t+2$；（2） $f(t)=1-te^t$；（3） $f(t)=(t-1)^2e^t$；（4）

$f(t)=e^{2t}\sin(6t)$。

解：（1）方法一（定义法）：由拉氏变换的定义，得

$$L[f(t)]=L[t^2+3t+2]=\int_0^{+\infty}e^{-st}(t^2+3t+2)dt=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}(t^2+3t+2)de^{-st}$$

$$\overline{\underline{\text{分部积}}}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!_{\text{分法}}\ -\frac{1}{s}(t^2+3t+2)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}(2t+3)e^{-st}dt=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\int_0^{+\infty}(2t+3)de^{-st}\ (\mathrm{Re}(s)>0)$$

$$\overline{\underline{\text{分部积}}}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!_{\text{分法}}\ \frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}(2t+3)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{s^2}\int_0^{+\infty}e^{-st}dt(\mathrm{Re}(s)>0)=\frac{2}{s}+\frac{3}{s^2}-\frac{2}{s^3}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}(\mathrm{Re}(s)>0)$$

$$=\frac{2}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s^3}(\mathrm{Re}(s)>0),$$

所以 $L[f(t)]=L[t^2+3t+2]=\frac{2}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s^3}$ （$\mathrm{Re}(s)>0$）

方法二（利用$L[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}$（$m$为正整数，$\mathrm{Re}(s)>0$）及拉氏变换的线性性质）

因为$L[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}$（$m$为正整数，$\mathrm{Re}(s)>0$），则由拉氏变换的线性性质，得

$$L[f(t)]=L[t^2+3t+2]=L[t^2]+3L[t]+2L[1]=\frac{2!}{s^{2+1}}+3\ \frac{1!}{s^{1+1}}+2\ \frac{1}{s}=\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}$$

（$\mathrm{Re}(s)>0$）

方法三（利用$L[1]=\frac{1}{s}$（$\mathrm{Re}(s)>0$）及拉氏变换的线性性质和微分性质）

因为$L[1]=\frac{1}{s}$（$\mathrm{Re}(s)>0$），则由拉氏变换的线性性质和微分性质，得

$$L[f(t)]=L[t^2+3t+2]=L[t^2]+3L[t]+2L[1]$$

$$=\{(-1)^2L[t^2\ 1]\}-3\{(-1)L[t\ 1]\}+\frac{2}{s}=\left(\frac{1}{s}\right)''-3\left(\frac{1}{s}\right)'+\frac{2}{s}=\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}$$

（$\mathrm{Re}(s)>0$）

（2）方法一（定义法）：由拉氏变换的定义，得

$$L[f(t)]=L[1-te^t]=\int_0^{+\infty}e^{-st}(1-te^t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt-\int_0^{+\infty}te^{-(s-1)t}dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{s-1}\int_0^{+\infty}tde^{-(s-1)t}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}te^{-(s-1)t}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{s-1}\int_0^{+\infty}e^{-(s-1)t}dt(\mathrm{Re}(s)>0)$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s-1)^2}e^{-(s-1)t}\Big|_0^{+\infty}(\mathrm{Re}(s)>0)=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}(\mathrm{Re}(s)>0\text{且}\mathrm{Re}(s-1)>0)$$

故 $L\left[1-te^t\right]=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}(\mathrm{Re}(s)>1)$。

方法二（利用拉氏变换的线性性质和微分性质）：由拉氏变换的线性性质和微分性质，得

$$L\left[f(t)\right]=L\left[1-te^t\right]\xlongequal[\text{性质}]{\text{线性}}L[1]-L\left[te^t\right]\xlongequal[\text{性质}]{\text{微分}}\frac{1}{s}+\left\{L\left[e^t\right]\right\}'=\frac{1}{s}+\left(\frac{1}{s-1}\right)'(\mathrm{Re}(s)>1)$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}(\mathrm{Re}(s)>1)$$

故 $L\left[1-te^t\right]=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}(\mathrm{Re}(s)>1)$

$L\left[f(t)\right]=L\left[1-te^t\right]=L[1]-L\left[te^t\right]$

（3）方法一（定义法）：由拉氏变换的定义，得

$$L\left[f(t)\right]=L\left[(t-1)^2e^t\right]=\int_0^{+\infty}(t-1)^2e^t\ e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}(t-1)^2e^{-(s-1)t}dt=-\frac{1}{s-1}\int_0^{+\infty}(t-1)^2de^{-(s-1)t}$$

$$\xlongequal[\text{积分}]{\text{分部}}-\frac{1}{s-1}(t-1)^2e^{-(s-1)t}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{s-1}\int_0^{+\infty}(t-1)e^{-(s-1)t}dt=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}\int_0^{+\infty}(t-1)de^{-(s-1)t}\ (\mathrm{Re}(s)>1)$$

$$\xlongequal[\text{积分}]{\text{分部}}\frac{1}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}(t-1)e^{-(s-1)t}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{(s-1)^2}\int_0^{+\infty}e^{-(s-1)t}dt\ (\mathrm{Re}(s)>1)$$

$$=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}-\frac{2}{(s-1)^3}e^{-(s-1)t}\Big|_0^{+\infty}\ (\mathrm{Re}(s)>1)=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{2}{(s-1)^3}$$

故 $L\left[f(t)\right]=L\left[(t-1)^2e^t\right]=\frac{1}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{2}{(s-1)^3}$。

方法二（利用拉氏变换的平移性质和微分性质）：由拉氏变换的平移性质和微分性质，得

$$L\left[f(t)\right]=L\left[(t-1)^2e^t\right]$$