《信号与系统》（第3版）

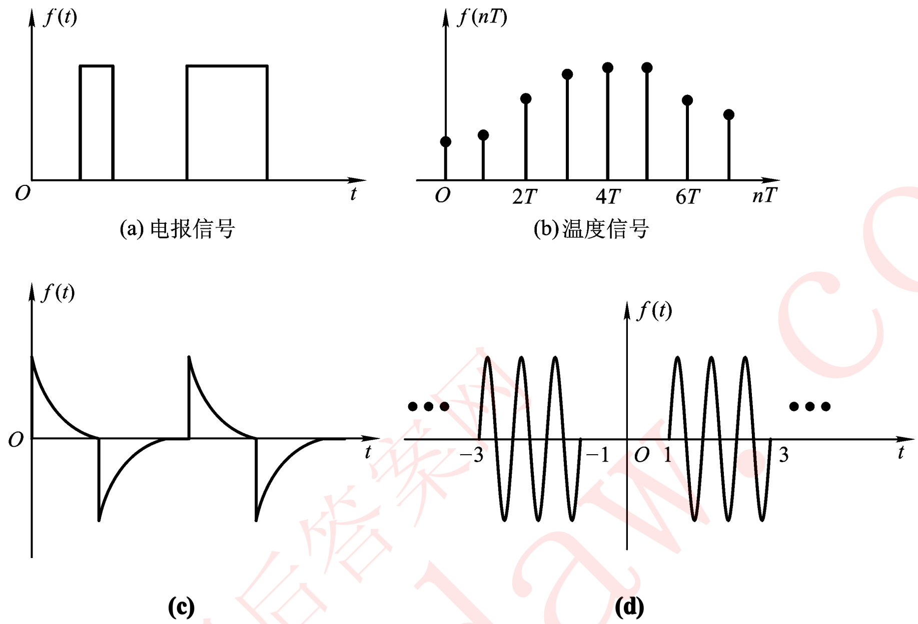
习题解析

高等教育出版社

目　录

第 1 章习题解析

1-1　题 1-1 图示信号中，哪些是连续信号？哪些是离散信号？哪些是周期信号？哪些是非周期信号？哪些是有始信号？



题 1-1 图

解　(a)、(c)、(d)为连续信号；(b)为离散信号；(d)为周期信号；其余为非周期信号；(a)、(b)、(c)为有始（因果）信号。

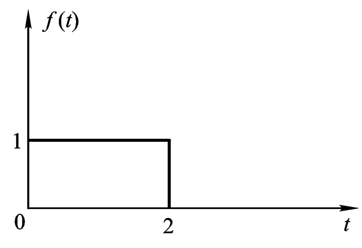
1-2　给定题 1-2 图示信号 $f(t)$，试画出下列信号的波形。[提示：$f(2t)$表示将 $f(t)$波形压缩，$f(\frac{t}{2})$表示将 $f(t)$波形展宽。]

(a)　$2f(t-2)$

(b)　$f(2t)$

(c)　$f(\frac{t}{2})$

(d)　$f(-t+1)$



题 1-2 图

解　以上各函数的波形如图 p1-2 所示。

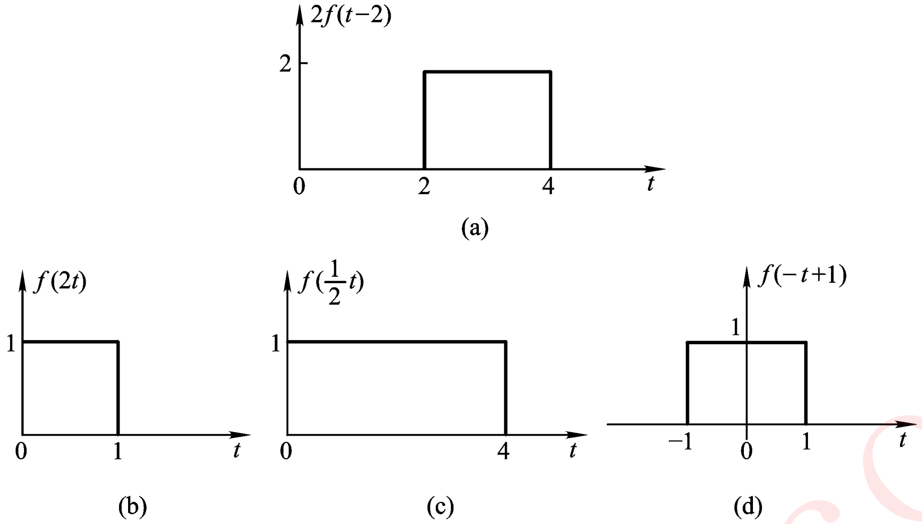
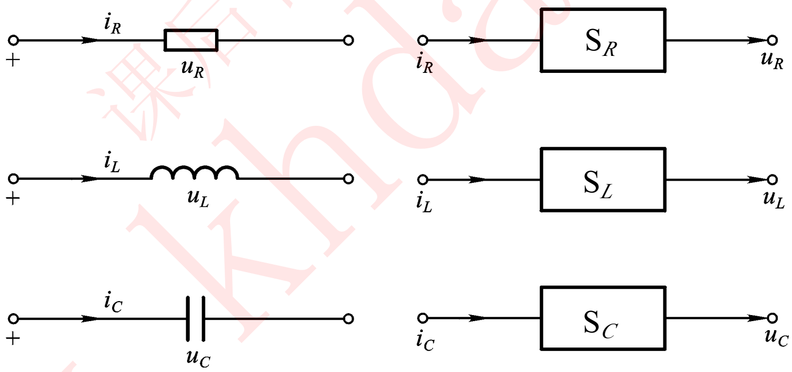


图 p1-2

1-3 如图 1-3 图示，R、L、C 元件可以看成以电流为输入，电压为响应的简单线性系统 S_R、S_L、S_C，试写出各系统响应电压与激励电流函数关系的表达式。



题 1-3 图

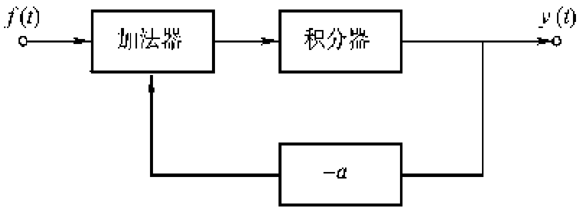
解 各系统响应与输入的关系可分别表示为

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

1-4 如题 1-4 图示系统由加法器、积分器和放大量为$-a$ 的放大器三个子系统组成，系统属于何种联接形式？试写出该系统的微分方程。



题 1-4 图

解　系统为反馈联接形式。设加法器的输出为 $x(t)$，由于

$$x(t) = f(t) + (-a)y(t)$$

且

$$y(t) = \int x(t)\mathrm{d}t, \qquad x(t) = y'(t)$$

故有

$$y'(t) = f(t) - ay(t)$$

即

$$y'(t) + ay(t) = f(t)$$

1-5　已知某系统的输入 $f(t)$与输出 $y(t)$的关系为 $y(t) = |f(t)|$，试判定该系统是否为线性时不变系统？

解　设 T为系统的运算子，则可以表示为

$$y(t) = T[f(t)] = |f(t)|$$

不失一般性，设 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$，则

$$T[f_1(t)] = |f_1(t)| = y_1(t)$$

$$T[f_2(t)] = |f_2(t)| = y_2(t)$$

故有

$$T[f(t)] = |f_1(t) + f_2(t)| = y(t)$$

显然

$$|f_1(t) + f_2(t)| \neq |f_1(t)| + |f_2(t)|$$

即不满足可加性，故为非线性时不变系统。

1-6　判断下列方程所表示的系统的性质。

(1)　$y(t) = \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$

(2)　$y''(t) + y'(t) + 3y(t) = f'(t)$

(3) $2ty'(t)+y(t)=3f(t)$

(4) $[y'(t)]^2+y(t)=f(t)$

解 (1)线性；(2)线性时不变；(3)线性时变；(4)非线性时不变。

1-7 试证明方程

$$y'(t)+ay(t)=f(t)$$

所描述的系统为线性系统。式中 a 为常量。

证明 不失一般性，设输入有两个分量，且

$$f_1(t)\to y_1(t),\quad f_2(t)\to y_2(t)$$

则有

$$y_1'(t)+ay_1(t)=f_1(t)$$

$$y_2'(t)+ay_2(t)=f_2(t)$$

相加得

$$y_1'(t)+ay_1(t)+y_2'(t)+ay_2(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[y_1(t)+y_2(t)]+a[y_1(t)+y_2(t)]=f_1(t)+f_2(t)$$

可见

$$f_1(t)+f_2(t)\to y_1(t)+y_2(t)$$

即满足可加性，齐次性是显然的。故系统为线性的。

1-8 若有线性时不变系统的方程为

$$y'(t)+ay(t)=f(t)$$

若在非零 $f(t)$ 作用下其响应 $y(t)=1-\mathrm{e}^{-t}$，试求方程

$$y'(t)+ay(t)=2f(t)+f'(t)$$

的响应。

解 因为 $f(t)\to y(t)=1-\mathrm{e}^{-t}$，由线性关系，则

$$2f(t)\to 2y(t)=2(1-\mathrm{e}^{-t})$$

由线性系统的微分特性，有

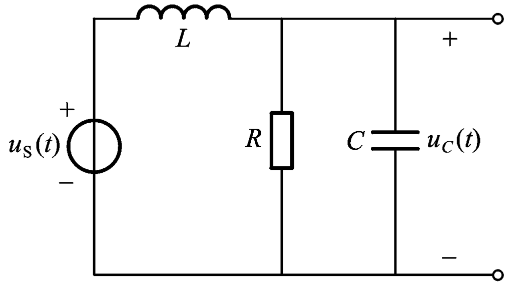
$$f'(t)\to y'(t)=\mathrm{e}^{-t}$$

故响应

$$2f(t)+f'(t)\to y(t)=2(1-\mathrm{e}^{-t})+\mathrm{e}^{-t}=2-\mathrm{e}^{-t}$$

第 2 章习题解析

2-1 如图 2-1 所示系统，试以 $u_C(t)$为输出列出其微分方程。



题 2-1 图

解 由图示，有

$$i_L = \frac{u_C}{R} + C\frac{du_C}{dt}$$

又

$$i_L = \frac{1}{L}\int_0^t (u_S - u_C)dt$$

故

$$\frac{1}{L}(u_S - u_C) = \frac{u_C'}{R} + Cu_C''$$

从而得

$$u_C''(t) + \frac{1}{RC}u_C'(t) + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{1}{LC}u_S(t)$$

2-2 设有二阶系统方程

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

在某起始状态下的 0_+起始值为

$$y(0_+) = 1,\quad y'(0_+) = 2$$

试求零输入响应。

解 由特征方程

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

则零输入响应形式为

$$y_{zi}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

由于

$$y_{zi}(0_+) = A_1 = 1$$

$$-2A_1 + A_2 = 2$$

所以

$$A_2 = 4$$

故有

$$y_{zi}(t) = (1+4t)e^{-2t}, \qquad t \ge 0$$

2-3 设有如下函数 $f(t)$，试分别画出它们的波形。

(a) $f(t) = 2\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2)$

(b) $f(t) = \sin\pi t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-6)]$

解 (a)和(b)的波形如图 p2-3 所示。

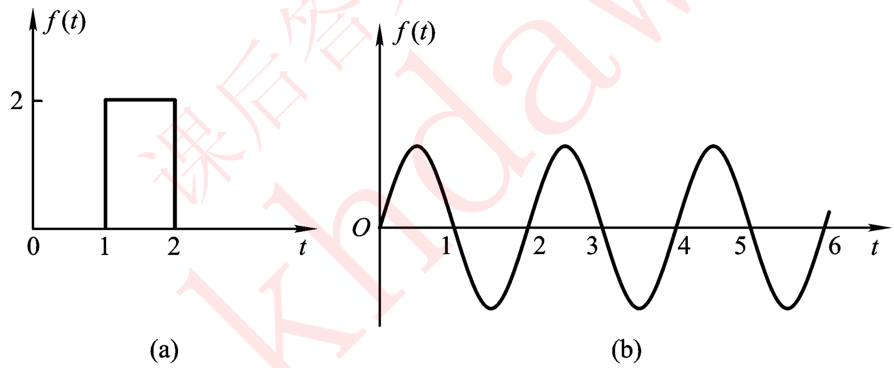
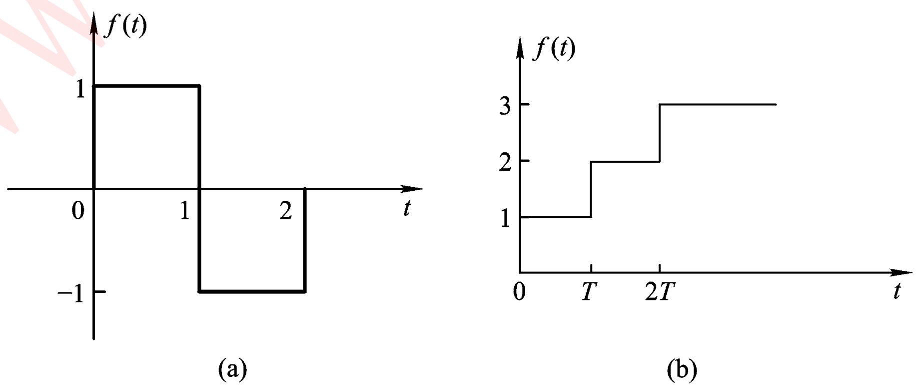


图 p2-3

2-4 试用阶跃函数的组合表示题 2-4 图所示信号。



题 2-4 图

解 (a) $f(t)=\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$

(b) $f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-T)+\varepsilon(t-2T)$

2-5 试计算下列结果。

(1) $t\delta(t-1)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-1)\mathrm{d}t$

(3) $\int_{0_-}^{\infty} \cos(\omega t-\frac{\pi}{2})\delta(t)\mathrm{d}t$

(4) $\int_{0_-}^{0_+} \mathrm{e}^{-3t}\delta(-t)\mathrm{d}t$

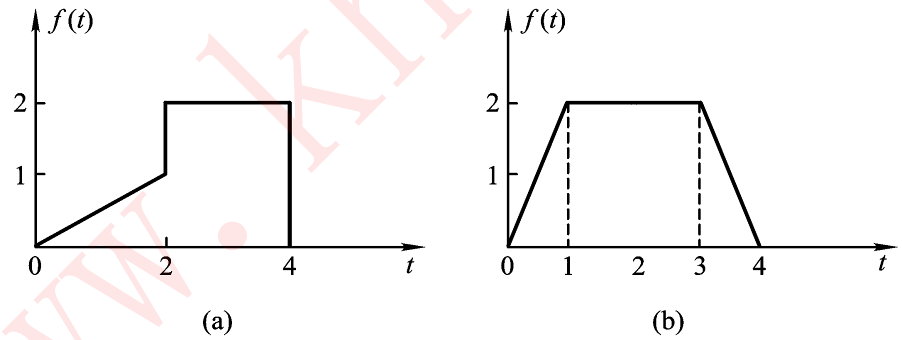
解 (1) $t\delta(t-1)=\delta(t-1)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-1)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-1)\mathrm{d}t=1$

(3) $\int_{0_-}^{\infty} \cos(\omega t-\frac{\pi}{2})\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{\infty}\cos(-\frac{\pi}{2})\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$

(4) $\int_{0_-}^{0_+} \mathrm{e}^{-3t}\delta(-t)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\mathrm{e}^{-3t}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$

2-6 设有题 2-6 图示信号 $f(t)$，对(a)写出 $f'(t)$的表达式，对(b)写出 $f''(t)$的表达式，并分别画出它们的波形。



题 2-6 图

解 (a)

$$f'(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le t\le 2\\ \delta(t-2), & t=2\\ -2\delta(t-4), & t=4\end{cases}$$

(b) $f''(t)=2\delta(t)-2\delta(t-1)-2\delta(t-3)+2\delta(t-4)$

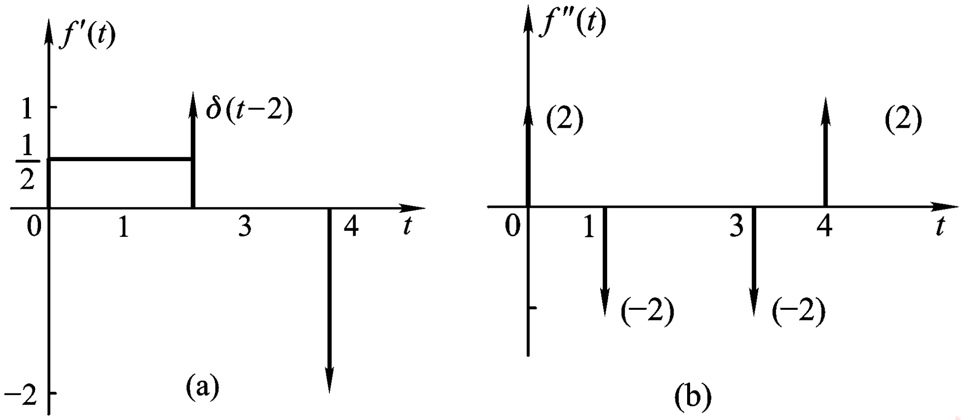
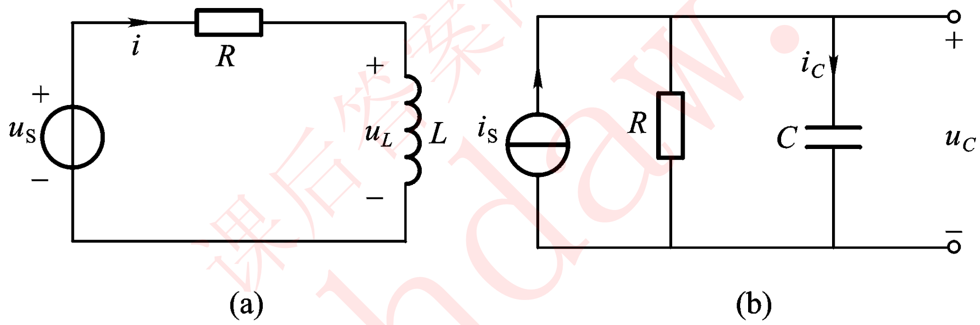


图 p2-6

2-7 如题 2-7 图一阶系统，对(a)求冲激响应 i 和 u_L，对(b)求冲激响应 u_C 和 i_C，并画出它们的波形。



题 2-7 图

解 由图(a)有

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=u_{\mathrm{S}}(t)-Ri$$

即

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{1}{L}u_{\mathrm{S}}(t)$$

当 $u_S(t)=\delta(t)$，则冲激响应

$$h(t)=i(t)=\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\cdot\varepsilon(t)$$

则电压冲激响应

$$h(t)=u_{\mathrm{L}}(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\delta(t)-\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\cdot\varepsilon(t)$$

对于图(b)RC 电路，有方程

$$C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}=i_{\mathrm{S}}-\frac{u_{\mathrm{C}}}{R}$$

即

$$u_C' + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{C}i_S$$

当 $i_S = \delta(t)$时，则

$$h(t) = u_C(t) = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \varepsilon(t)$$

同时，电流

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \varepsilon(t)$$

2-8 设有一阶系统方程

$$y'(t) + 3y(t) = f'(t) + f(t)$$

试求其冲激响应 $h(t)$和阶跃响应 $s(t)$。

解 因方程的特征根$\lambda = -3$，故有

$$x_1(t) = e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

当 $h(t) = \delta(t)$时，则冲激响应

$$h(t) = x_1(t) * [\delta'(t) + \delta(t)] = \delta(t) - 2e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

阶跃响应

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

2-9 试求下列卷积。

(a) $\delta(t) * 2$

(b) $\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5)$

(c) $te^{-t} \cdot \varepsilon(t) * \delta'(t)$

解 (a) 由$\delta(t)$的特点，故

$$\delta(t) * 2 = 2$$

(b) 按定义

$$\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau+3)\varepsilon(t-\tau-5)d\tau$$

考虑到$\tau < -3$ 时，$\varepsilon(\tau+3) = 0$；$\tau > t-5$ 时，$\varepsilon(t-\tau-5) = 0$，故

$$\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5) = \int_{-3}^{t-5} d\tau = t-2, \qquad t > 2$$

也可以利用迟延性质计算该卷积。因为

$$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$$

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$$

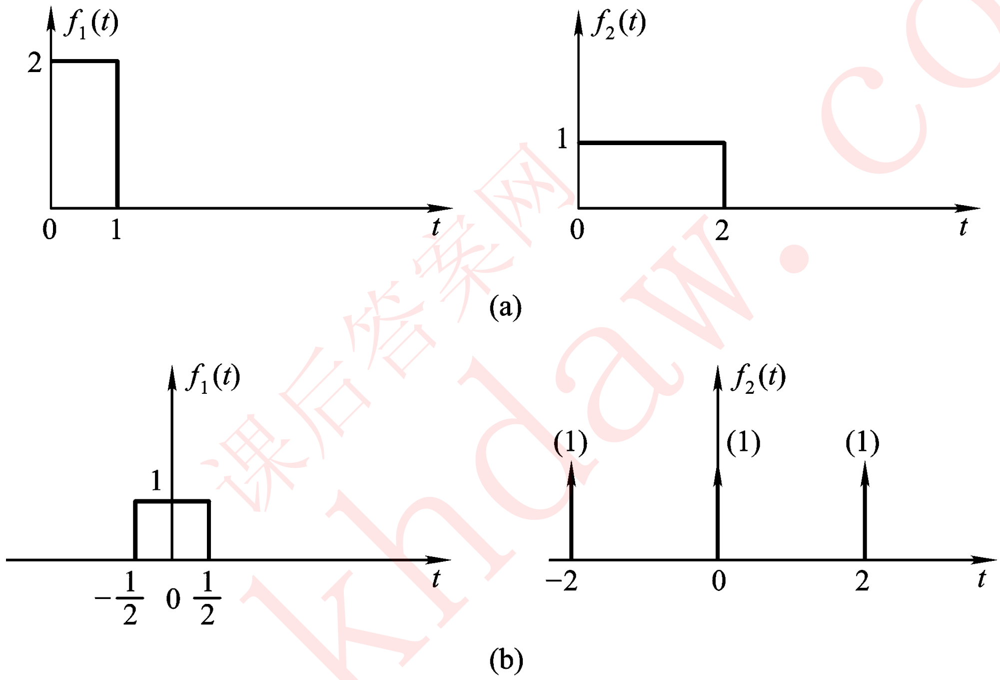
故对本题，有

$$\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5) = (t+3-5)\varepsilon(t+3-5) = (t-2)\varepsilon(t-2)$$

两种方法结果一致。

(c) $t\mathrm{e}^{-t}\cdot\varepsilon(t) * \delta'(t) = [t\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]' = (\mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$

2-10 对图示信号，求 $f_1(t) * f_2(t)$。



题 2-10 图

解 (a)先借用阶跃信号表示 $f_1(t)$和 $f_2(t)$，即

$$f_1(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$$

$$f_2(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$$

故

$$f_1(t) * f_2(t) = [2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)] * [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)]$$

因为

$$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \int_0^t 1\mathrm{d}\tau = t\varepsilon(t)$$

故有

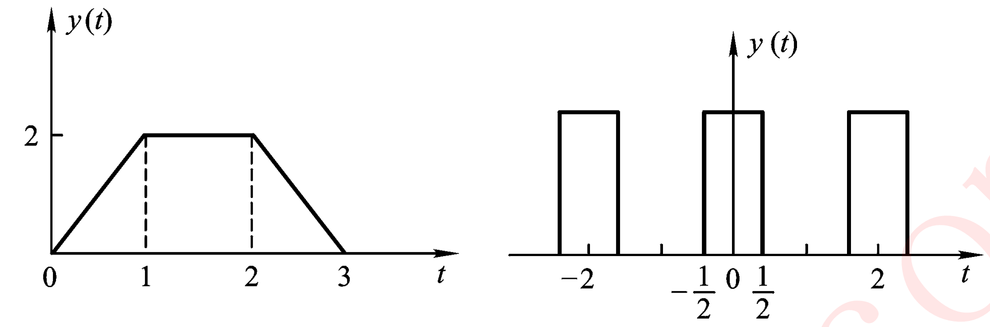
$$f_1(t) * f_2(t) = 2t\varepsilon(t) - 2(t-1)\varepsilon(t-1) - 2(t-2)\varepsilon(t-2) + 2(t-3)\varepsilon(t-3)$$

读者也可以用图形扫描法计算之。结果见图 p2-10(a)所示。

(b)根据$\delta(t)$的特点，则

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*[\delta(t)+\delta(t-2)+\delta(t+2)]$$
$$=f_1(t)+f_1(t-2)+f_1(t+2)$$

结果见图 p2-10(b)所示。



(a) (b)

图 p2-10

2-11 试求下列卷积。

(a) $(1-e^{-2t})\varepsilon(t)*\delta'(t)*\varepsilon(t)$

(b) $e^{-3t}\varepsilon(t)*\frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$

解 (a)因为$\delta'(t)*\varepsilon(t)=\varepsilon'(t)=\delta(t)$，故

$$(1-e^{-2t})\varepsilon(t)*\delta'(t)*\varepsilon(t)=(1-e^{-2t})\varepsilon(t)*\delta(t)=(1-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

(b)因为$e^{-t}\delta(t)=\delta(t)$，故

$$e^{-3t}\varepsilon(t)*\frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]=e^{-3t}\varepsilon(t)*\delta'(t)$$

2-12 设有二阶系统方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=4\delta'(t)$$

试求零状态响应

解 因系统的特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

解得特征根

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$$

故特征函数

$$x_2(t)=e^{\lambda_1 t}*e^{\lambda_2 t}=(e^{-t}*e^{-2t})\varepsilon(t)$$

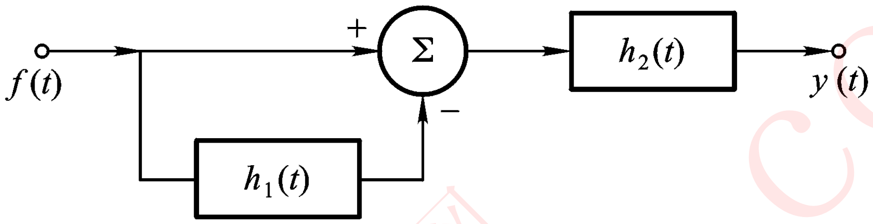
零状态响应

$$y(t)=4\delta'(t)*x_2(t)=4\delta'(t)*(\mathrm{e}^{-t}*\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$
$$=(8\mathrm{e}^{-2t}-4\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$$

2-13 如图系统，已知

$$h_1(t)=\delta(t-1),\quad h_2(t)=\varepsilon(t)$$

试求系统的冲激响应 $h(t)$。



题 2-13 图

解 由图关系，有

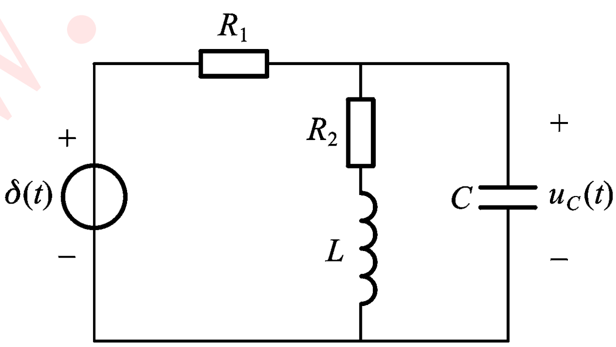
$$x(t)=f(t)-f(t)*h_1(t)=\delta(t)-\delta(t)*\delta(t-1)=\delta(t)-\delta(t-1)$$

所以冲激响应

$$h(t)=y(t)=x(t)*h_2(t)=[\delta(t)-\delta(t-1)]*\varepsilon(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$$

即该系统输出一个方波。

2-14 如图系统，已知 $R_1=R_2=1\Omega$，$L=1\mathrm{H}$，$C=1\mathrm{F}$。试求冲激响应 $u_C(t)$。



题 2-14 图

解 由 KCL 和 KVL，可得电路方程为

$$Cu_C''+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{R_2C}{L}\right)u_C'+\left(\frac{1}{L}+\frac{R_2}{R_1L}\right)u_C=\frac{1}{R_1}\delta'(t)+\frac{R_2}{R_1L}\delta(t)$$

代入数据得

$$u_C'' + 2u_C' + 2u_C = \delta'(t) + \delta(t)$$

特征根

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{j}1$$

故冲激响应 $u_C(t)$为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= (\mathrm{e}^{\lambda_1 t} * \mathrm{e}^{\lambda_2 t}) * [\delta'(t) + \delta(t)] \\ &= \mathrm{e}^{-t}(\cos t - \sin t) \cdot \varepsilon(t) + \mathrm{e}^{-t} \sin t \cdot \varepsilon(t) \\ &= \mathrm{e}^{-t} \cos t \cdot \varepsilon(t) \quad \mathrm{V} \end{aligned}$$

2-15 一线性时不变系统，在某起始状态下，已知当输入$f(t) = \varepsilon(t)$时，全响应 $y_1(t) = 3\mathrm{e}^{-3t}\cdot\varepsilon(t)$；当输入$f(t) = -\varepsilon(t)$时，全响应 $y_2(t) = \mathrm{e}^{-3t}\cdot\varepsilon(t)$，试求该系统的冲激响应 $h(t)$。

解 因为零状态响应

$$\varepsilon(t) \to s(t), \quad -\varepsilon(t) \to -s(t)$$

故有

$$y_1(t) = y_{zi}(t) + s(t) = 3\mathrm{e}^{-3t}\cdot\varepsilon(t)$$
$$y_2(t) = y_{zi}(t) - s(t) = \mathrm{e}^{-3t}\cdot\varepsilon(t)$$

从而有

$$y_1(t) - y_2(t) = 2s(t) = 2\mathrm{e}^{-3t}\cdot\varepsilon(t)$$

即

$$s(t) = \mathrm{e}^{-3t}\cdot\varepsilon(t)$$

故冲激响应

$$h(t) = s'(t) = \delta(t) - 3\mathrm{e}^{-3t}\cdot\varepsilon(t)$$

2-16 若系统的零状态响应

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

试证明：

(1) $f(t) * h(t) = \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$

(2) 利用(1)的结果，证明阶跃响应

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

证 （1）因为

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

由微分性质，有

$$y'(t)=f'(t)*h(t)$$

再由积分性质，有

$$y(t)=f'(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

（2）因为

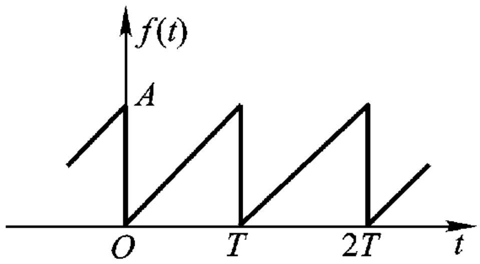
$$s(t)=\varepsilon(t)*h(t)$$

由（1）的结果，得

$$\begin{aligned}s(t)&=\varepsilon'(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\delta(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

第 3 章习题解析

3-1 求题 3-1 图所示周期信号的三角形式的傅里叶级数表示式。



题 3-1 图

解 对于周期锯齿波信号，在周期(0，T)内可表示为

$$f(t)=\frac{A}{T}t$$

系数

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{At}{T}\mathrm{d}t=\frac{A}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t=\frac{2A}{T^2}\int_0^T t\cdot\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2A}{T^2}\left|\frac{t\sin n\omega_1 t}{n\omega_1}\right|_0^T\quad\right|=0$$

$$b_n=\frac{2A}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t=\frac{2A}{T^2}\int_0^T t\cdot\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2A}{T^2}\left|\frac{t\cos n\omega_1 t}{n\omega_1}\right|_0^T\quad\right|=-\frac{A}{n\pi}$$

所以三角级数为

$$f(t)=\frac{A}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n\pi}\sin n\omega_1 t$$

3-2 求周期冲激序列信号

$$\delta_{\mathrm{T}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

的指数形式的傅里叶级数表示式，它是否具有收敛性？

解 冲激串信号的复系数为

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}$$

所以

$$\delta_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

因 F_n 为常数，故无收敛性。

3-3 设有周期方波信号 $f(t)$，其脉冲宽度 $\tau = 1\text{ms}$，问该信号的频带宽度（带宽）为多少？若 τ 压缩为 0.2ms，其带宽又为多少？

解 对方波信号，其带宽为 $\Delta f = \frac{1}{\tau}$ Hz，

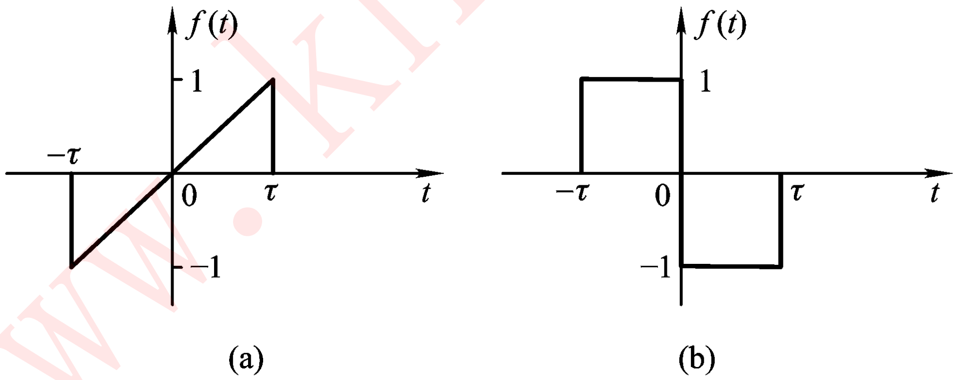
当 $\tau_1 = 1\text{ms}$ 时，则

$$\Delta f_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0.001} = 1000\text{Hz}$$

当 $\tau_2 = 0.2\text{ms}$ 时，则

$$\Delta f_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{0.0002} = 5000\text{Hz}$$

3-4 求题 3-4 图示信号的傅里叶变换。



题 3-4 图

解 (a)因为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau}, & |t| < \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

为奇函数，故

$$F(\omega)=-\mathrm{j}2\int_0^{\tau}\frac{t}{\tau}\sin\omega t\mathrm{d}t$$

$$=-\mathrm{j}\frac{2}{\tau\omega^2}[\sin\omega\tau-\omega\tau\cos\omega\tau]$$

$$=\mathrm{j}\frac{2}{\omega}[\cos\omega\tau-\mathrm{Sa}(\omega\tau)]$$

或用微分定理求解亦可。

(b) $f(t)$为奇函数，故

$$F(\omega)=-\mathrm{j}2\int_0^{\tau}(-1)\sin\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}[\cos\omega\tau-1]=\mathrm{j}\frac{4}{\omega}\sin^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

若用微分-积分定理求解，可先求出$f'(t)$，即

$$f'(t)=\delta(t+\tau)+\delta(t-\tau)-2\delta(t)$$

所以

$$f'(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}-2=2\cos\omega\tau-2$$

又因为$F_1(0)=0$，故

$$F(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F_1(\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}(\cos\omega\tau-1)$$

3-5 试求下列信号的频谱函数。

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-2|t|}$

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t\cdot\varepsilon(t)$

解 (1)

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{2+\mathrm{j}\omega}=\frac{4}{4+\omega^2}$$

(2)

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\cdot\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

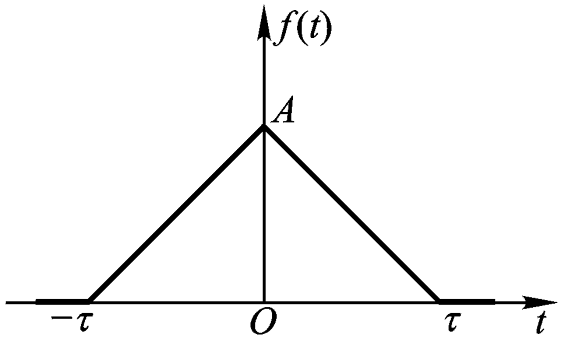
$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^{\infty}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{(-a-\mathrm{j}\omega)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{(-a-\mathrm{j}\omega)t}]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left|\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)-\mathrm{j}\omega_0}-\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)+\mathrm{j}\omega_0}\right|$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{2\mathrm{j}\omega_0}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}=\frac{\omega_0}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$$

3-6 对于如题 3-6 图所示的三角波信号，试证明其频谱函数为

$$F(\omega)=A\tau\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{2})$$



题 3-6 图

证 因为

$$f(t)=\begin{cases} A\left(1-\dfrac{|t|}{\tau}\right), & |t|<\tau \\ 0, & |t|>\tau \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2\int_0^{\tau} A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cos\omega t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2A}{\omega^2\tau}(1-\cos\omega\tau) \\ &= \frac{4A}{\omega^2\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= A\tau\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

3-7 试求信号 $f(t)=1+2\cos t+3\cos 3t$ 的傅里叶变换。

解 因为

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

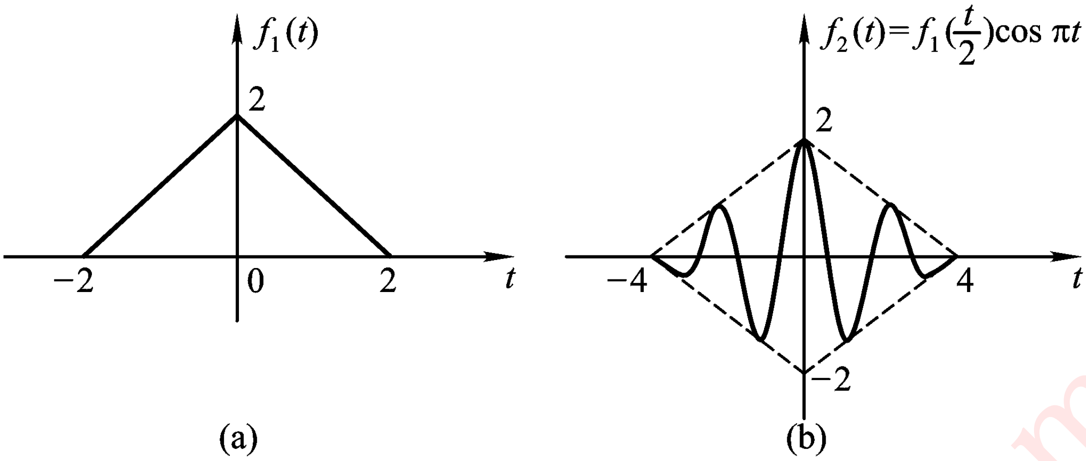
$$2\cos t \leftrightarrow 2\pi[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)]$$

$$3\cos 3t \leftrightarrow 3\pi[\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)]$$

故有

$$F(\omega)=2\pi[\delta(\omega)+\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)]+3\pi[\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)]$$

3-8 试利用傅里叶变换的性质，求题 3-8 图所示信号 $f_2(t)$ 的频谱函数。



题 3-8 图

解 由于$f_1(t)$的$A=2$，$\tau=2$，故其变换

$$F_1(\omega)=A\tau\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{2})=4\mathrm{Sa}^2(\omega)$$

根据尺度特性，有

$$f_1(\frac{t}{2})\leftrightarrow 2F_1(2\omega)=8\mathrm{Sa}^2(2\omega)$$

再由调制定理得

$$f_2(t)=f_1(\frac{t}{2})\cos\pi t\leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$F_2(\omega)=\frac{1}{2}[8\mathrm{Sa}^2(2\omega-2\pi)+8\mathrm{Sa}^2(2\omega+2\pi)]$$

$$=4\mathrm{Sa}^2(2\omega-2\pi)+4\mathrm{Sa}^2(2\omega+2\pi)$$

$$=\frac{\sin^2(2\omega)}{(\omega-\pi)^2}+\frac{\sin^2(2\omega)}{(\omega+\pi)^2}$$

3-9 试利用卷积定理求下列信号的频谱函数。

(1) $f(t)=A\cos(\omega_0 t)*\varepsilon(t)$

(2) $f(t)=A\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$

解 （1）因为

$$A\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow A\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\varepsilon(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

所以由时域卷积定理

$$F(\omega)=A\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\cdot[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]$$

$$=\frac{A\pi}{j\omega}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

（2）因为

$$A\sin(\omega_0 t)\leftrightarrow jA\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\varepsilon(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

由频域卷积定理

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{jA\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]*[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]\right\}$$

$$=\frac{jA\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]-\frac{\omega_0 A}{\omega^2-\omega_0^2}$$

3-10 设有信号

$$f_1(t)=\cos 4\pi t$$

$$f_2(t)=\begin{cases}1, & |t|<\tau\\ 0, & |t|>\tau\end{cases}$$

试求$f_1(t)f_2(t)$的频谱函数。

解 设$f_1(t)\leftrightarrow F_1(\omega)$，由调制定理

$$f_1(t)\cos 4\pi t\leftrightarrow \frac{1}{2}[F_1(\omega+4\pi)+F_1(\omega-4\pi)]=F(\omega)$$

而

$$F_1(\omega)=\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})=2\mathrm{Sa}(\omega)$$

故

$$F(\omega)=\mathrm{Sa}(\omega+4\pi)+\mathrm{Sa}(\omega-4\pi)$$

3-11 设有如下信号$f(t)$，分别求其频谱函数。

(1) $f(t)=e^{-(3+j4)t}\cdot\varepsilon(t)$

(2) $f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$

解 (1) 因 $e^{-\alpha t}\leftrightarrow\frac{1}{\alpha+j\omega}$

故

$$e^{-(3+j4)t}\leftrightarrow\frac{1}{(3+j4)+j\omega}=\frac{1}{3+j(4+\omega)}$$

(2) 因 $$\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)=G_{\tau}(t)\varepsilon(t-1),\quad \tau=2$$

故

$$F(\omega)=\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}=2\mathrm{Sa}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$$

3-12 设信号

$$f_1(t)=\begin{cases}2, & 0\le t\le 4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求 $f_2(t)=f_1(t)\cos 50t$ 的频谱函数，并大致画出其幅度频谱。

解 因

$$F(\omega)=2\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}=8\mathrm{Sa}(2\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

故

$$F_2(\omega)=\frac{1}{2}[F_1(\omega+50)+F_1(\omega-50)]$$
$$=4\mathrm{Sa}[2(\omega+50)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(\omega+50)}+4\mathrm{Sa}[2(\omega-50)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(\omega-50)}$$

幅度频谱见图 p3-12。

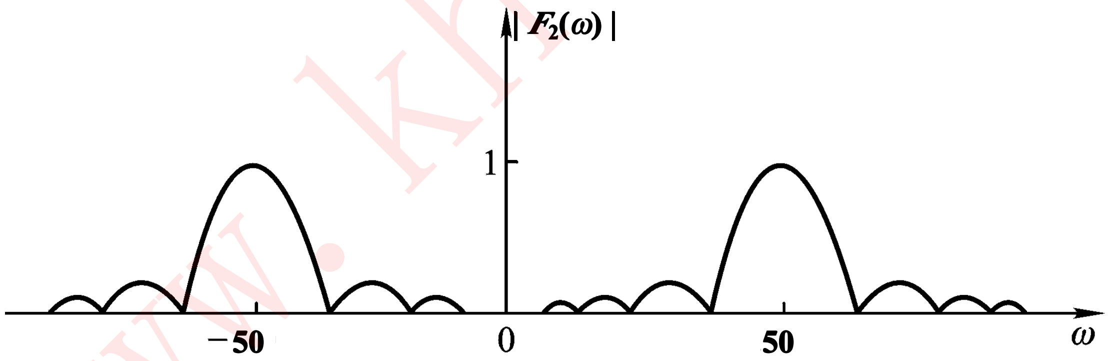
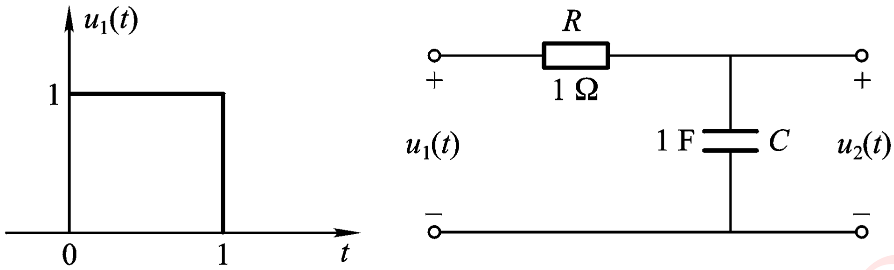


图 p3-12

第 4 章习题解析

4-1 如题 4-1 图示 RC 系统，输入为方波 $u_1(t)$，试用卷积定理求响应 $u_2(t)$。



题 4-1 图

解 因为 RC 电路的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}$$

而响应

$$u_2(t)=u_1(t)*h(t)$$

故由卷积定理，得

$$U_2(\omega)=U_1(\omega)*H(\mathrm{j}\omega)$$

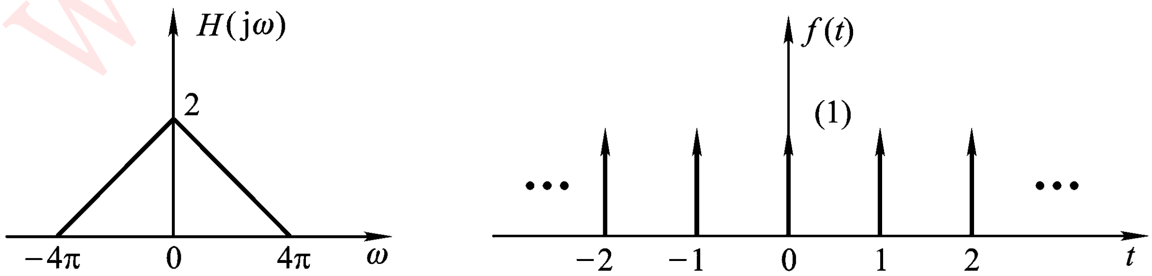
而已知 $U_1(\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$，故

$$U_2(\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

反变换得

$$u_2(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)-[1-\mathrm{e}^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

4-2 一滤波器的频率特性如题图 4-2 所示，当输入为所示的 $f(t)$ 信号时，求相应的输出 $y(t)$。



题 4-2 图

解　因为输入 $f(t)$ 为周期冲激信号，故

$$F_n = \frac{1}{T} = 1, \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

所以 $f(t)$ 的频谱

$$F(\omega) = 2\pi \sum^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) = 2\pi \sum^{\infty} \delta(\omega - 2n\pi)$$

当 $n = 0$，±1，±2 时，对应 $H(\mathrm{j}\omega)$ 才有输出，故

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= F(\omega)\,H(\mathrm{j}\omega) \\ &= 2\pi[2\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)] \end{aligned}$$

反变换得

$$y(t) = 2(1 + \cos 2\pi t)$$

4-3　设系统的频率特性为

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{2}{\mathrm{j}\omega + 2}$$

试用频域法求系统的冲激响应和阶跃响应。

解　冲激响应，故

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\mathrm{j}\omega)] = 2\mathrm{e}^{-2t} \cdot \varepsilon(t)$$

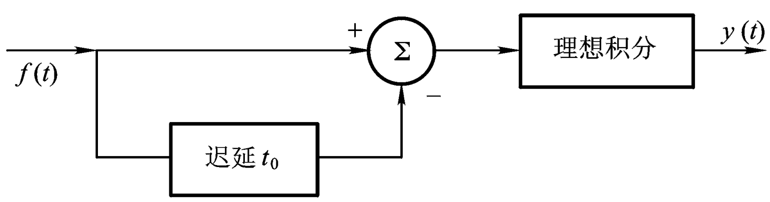
而阶跃响应频域函数应为

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathcal{F}[\varepsilon(t)] \cdot H(\mathrm{j}\omega) = [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}] \cdot \frac{2}{\mathrm{j}\omega + 2} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega} \cdot \frac{2}{\mathrm{j}\omega + 2} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega + 2} \end{aligned}$$

所以阶跃响应

$$s(t) = (1 - \mathrm{e}^{-2t}) \cdot \varepsilon(t)$$

4-4　如题图 4-4 所示是一个实际的信号加工系统，试写出系统的频率特性 $H(\mathrm{j}\omega)$。



题 4-4 图

解　由图可知输出

$$y(t)=\int_0^t[f(t)-f(t-t_0)]\mathrm{d}t$$

取上式的傅氏变换，得

$$Y(\omega)=\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0})$$

故频率特性

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\omega)}{F(\omega)}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0})$$

4-5　设信号$f(t)$为包含$0\sim\omega_{\mathrm{m}}$分量的频带有限信号，试确定$f(3t)$的奈奎斯特采样频率。

解　由尺度特性，有

$$f(3t)\leftrightarrow\frac{1}{3}F(\frac{\omega}{3})$$

即$f(3t)$的带宽比$f(t)$增加了 3 倍，即$\Delta\omega=3\omega_{\mathrm{m}}$。从而最低的抽样频率$\omega_{\mathrm{s}}=6\omega_{\mathrm{m}}$ 。故采样周期和采样频率分别为

$$T_{\mathrm{S}}=\frac{1}{6f_{\mathrm{m}}}$$

$$f_{\mathrm{S}}=6f_{\mathrm{m}}$$

4-6　若电视信号占有的频带为 0 ~ 6MHz，电视台每秒发送 25 幅图像，每幅图像又分为 625 条水平扫描线，问每条水平线至少要有多少个采样点？

解　设采样点数为 x，则最低采样频率应为

$$2f_{\mathrm{m}}=25\times625\times x$$

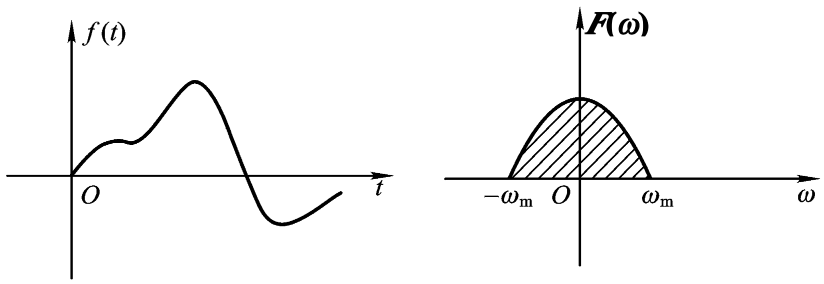
所以

$$x=\frac{2f_{\mathrm{m}}}{25\times625}=\frac{2\times6\times10^6}{25\times625}=768$$

4-7　设$f(t)$为调制信号，其频谱$F(\omega)$如题图 4-7 所示，$\cos\omega_0 t$为高频载波，则广播发射的调幅信号$x(t)$可表示为

$$x(t)=A[1+mf(t)]\cos\omega_0 t$$

式中，m为调制系数。试求$x(t)$的频谱，并大致画出其图形。



(a) (b)

题 4-7 图

解 因为调幅信号

$$x(t)=A\cos\omega_0 t+mAf(t)\cos\omega_0 t$$

故其变换

$$X(\omega)=\pi A[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{mA}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$$

式中，$F(\omega)$为$f(t)$的频谱。$x(t)$的频谱图如图 p4-7 所示。

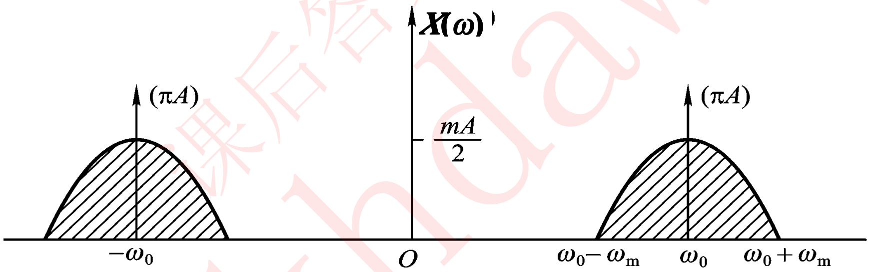
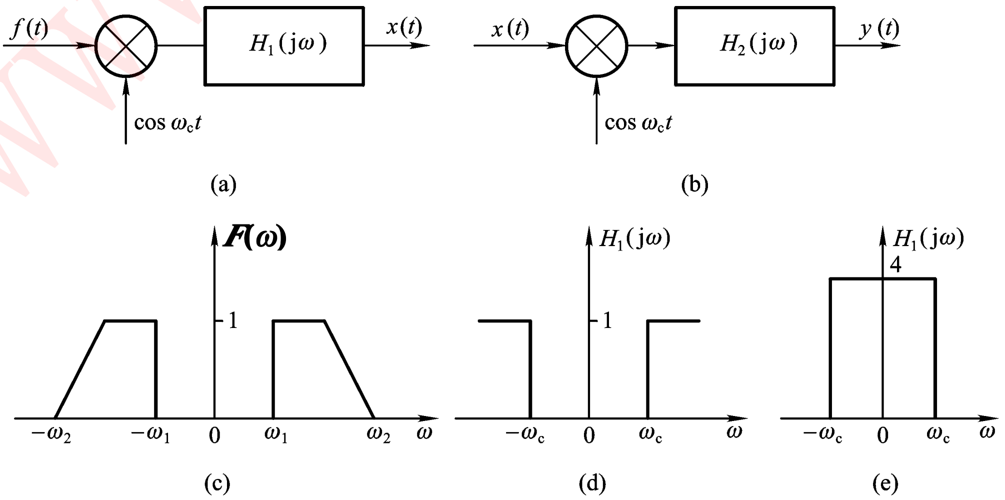


图 p4-7

4-8 题 4-8 图所示(a)和(b)分别为单边带通信中幅度调制与解调系统。已知输入$f(t)$的频谱和频率特性$H_1(j\omega)$、$H_2(j\omega)$如图所示，试画出$x(t)$和$y(t)$的频谱图。



题 4-8 图

解　由调制定理知

$$f_1(t)=f(t)\cos\omega_C t \leftrightarrow F_1(\omega)=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_C)+F(\omega-\omega_C)]$$

而 $x(t)$的频谱

$$X(\omega)=F_1(\omega)\cdot H_1(j\omega)$$

又因为

$$f_2(t)=x(t)\cos\omega_C t \leftrightarrow F_2(\omega)=\frac{1}{2}[X(\omega+\omega_C)+X(\omega-\omega_C)]$$

所以

$$Y(\omega)=F_2(\omega)\cdot H_2(j\omega)$$

它们的频谱变化分别如图 p4-8 所示，设$\omega_C>\omega_2$。

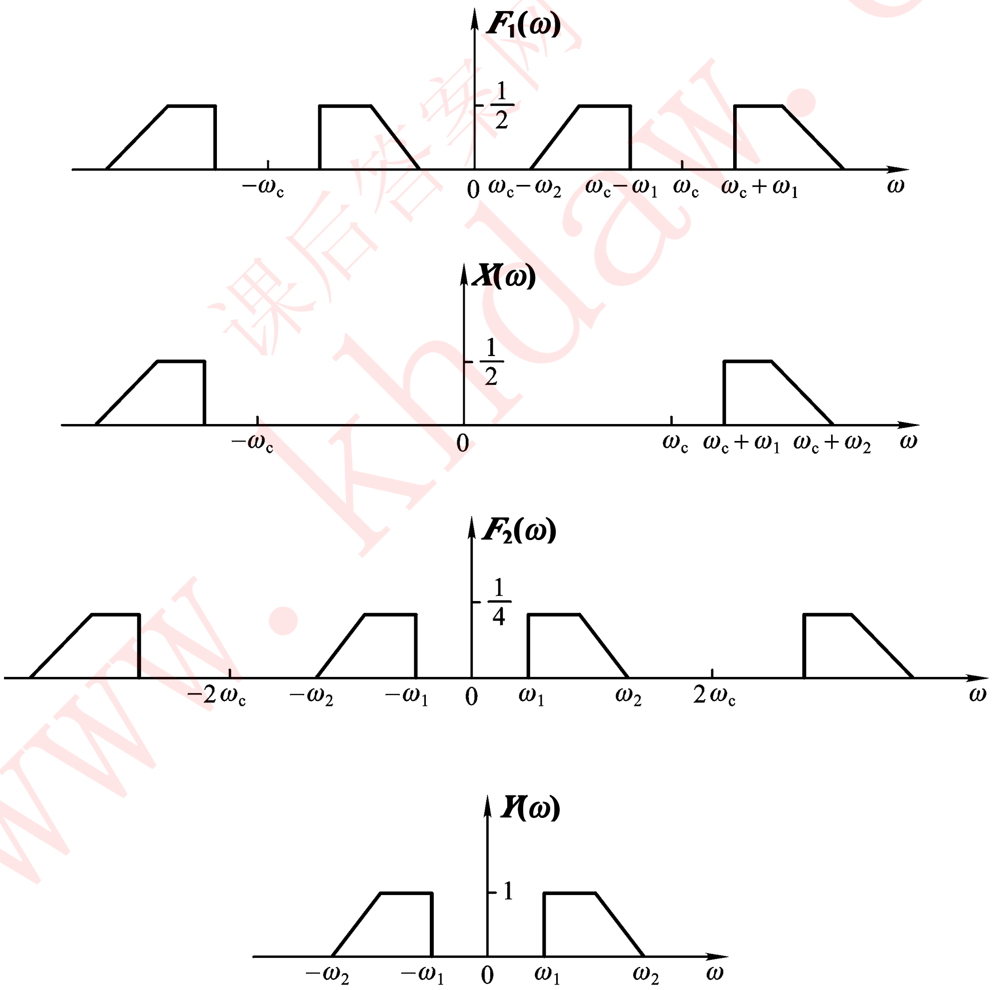
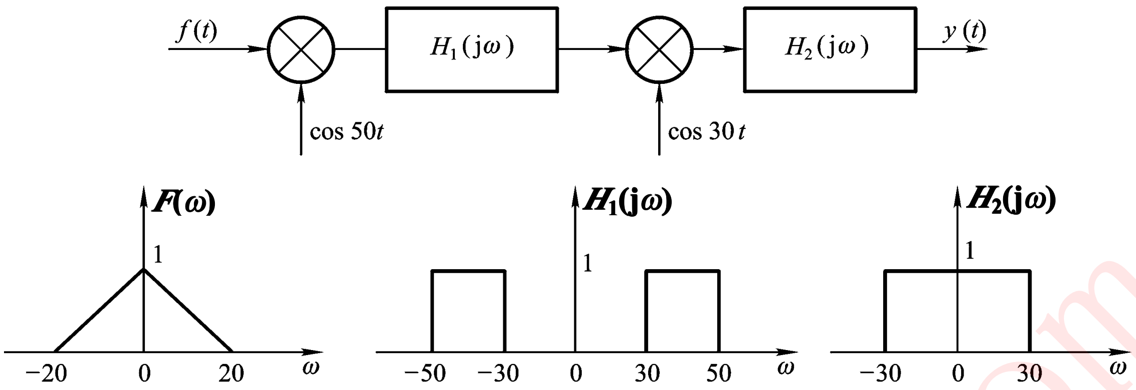


图 p4-8

4-9　如题 4-9 图所示系统，设输入信号 $f(t)$的频谱 $F(\omega)$和系统特性 $H_1(j\omega)$、$H_2(j\omega)$均

给定，试画出 $y(t)$的频谱。



题 4-9 图

解 设 $f_1(t) = f(t)\cos 50t$，故由调制定理，得

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega + 50) + F(\omega - 50)]$$

从而

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) = H_1(\omega) \cdot F_1(\omega)$$

它仅在$|\omega| = (30 \sim 50)$内有值。再设

$$f_3(t) = f_2(t)\cos 30t$$

则有

$$F_3(\omega) = \frac{1}{2}[F_2(\omega + 30) + F_2(\omega - 30)]$$

即 $F_3(\omega)$是 $F_2(\omega)$的再频移。进而得响应的频谱为

$$Y(\omega) = F_3(\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

其结果仅截取 $-20 < \omega < 20$ 的部分。以上过程的频谱变化如图 p4-9 所示。

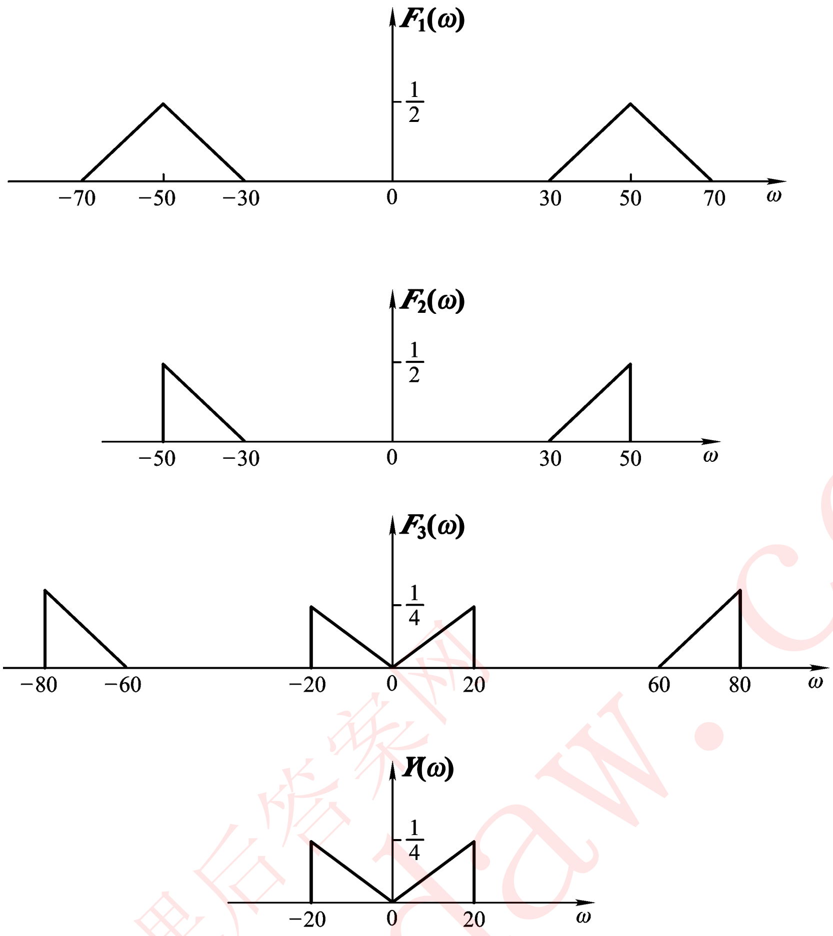
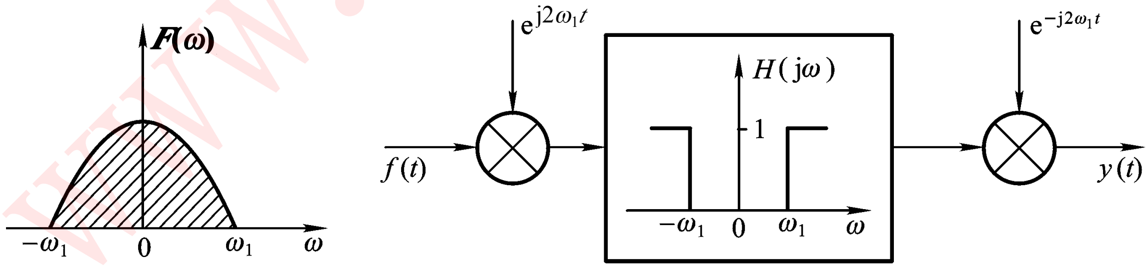


图 p4-9

4-10 设信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 如题 4-10 图(a)所示，当该信号通过图(b)系统后，证明 $y(t)$ 恢复为 $f(t)$。



(a) (b)

题 4-10 图

证明 因为

$$f(t)e^{j2\omega_1 t} \leftrightarrow F_1(\omega - 2\omega_1)$$

故通过高通滤波器后，频谱 $F_1(\omega)$为

$$F_1(\omega) = H(\mathrm{j}\omega)F(\omega - 2\omega_1) = F(\omega - 2\omega_1)$$

所以输出

$$y(t) \leftrightarrow Y(\omega) = F(\omega - 2\omega_1 + 2\omega_1) = F(\omega)$$

即 $y(t)$包含了 $f(t)$的全部信息 $F(\omega)$，故恢复了 $f(t)$。

第 5 章习题解析

5-1 求下列函数的单边拉氏变换。

(1) $2-\mathrm{e}^{-t}$

(2) $\delta(t)+\mathrm{e}^{-3t}$

(3) $\mathrm{e}^{-2t}\cos t$

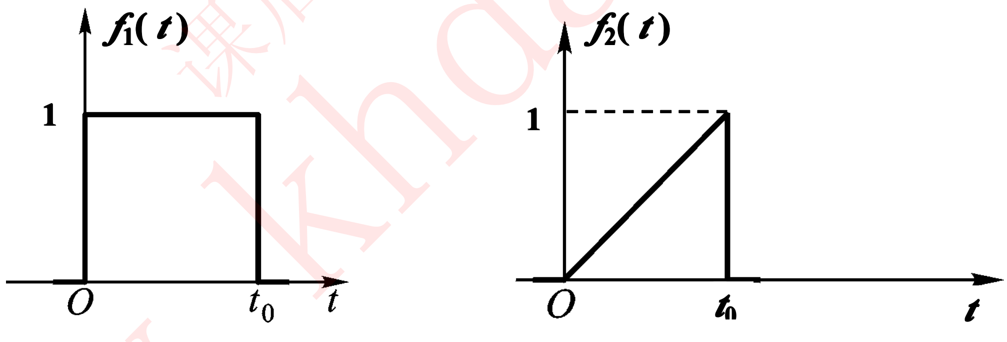
解 (1) $F(s)=\int_0^{\infty}(2-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s+1}=\dfrac{s+2}{s(s+1)}$

(2) $F(s)=\int_0^{\infty}[\delta(t)+\mathrm{e}^{-3t}]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=1+\dfrac{1}{s+3}$

(3) $F(s)=\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-2t}\cos t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})\mathrm{e}^{-2t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+2-\mathrm{j}}+\frac{1}{s+2+\mathrm{j}}\right)=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

5-2 求下列题 5-2 图示各信号的拉氏变换。



题 5-2 图

解 (a) 因为 $f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$

而 $\varepsilon(t)\to\dfrac{1}{s}$，$\varepsilon(t-t_0)\to\dfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-st_0}$

故

$$f_1(t)\to\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-st_0})$$

(b) 因为 $f(t)=\dfrac{t}{t_0}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)]=\dfrac{t}{t_0}\varepsilon(t)-\dfrac{t}{t_0}\varepsilon(t-t_0)$

又因为 $\frac{t}{t_0}\varepsilon(t) \to \frac{1}{s^2 t_0}$

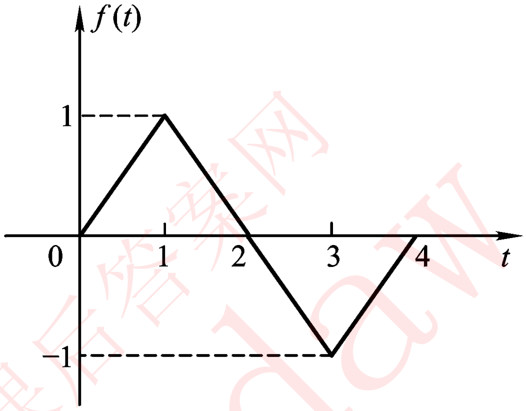
$\frac{t}{t_0}\varepsilon(t-t_0) \to (\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2 t_0})e^{-st_0}$

故有

$$f_2(t) \to \frac{1}{s^2 t_0} - (\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2 t_0})\mathrm{e}^{-st_0}$$

$$= \frac{1}{s^2 t_0}(1-\mathrm{e}^{-st_0}) - \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st_0}$$

5-3 利用微积分性质，求题 5-3 所示信号的拉氏变换。



题 5-3 图

解 先对 $f(t)$求导，则

$$f'(t) = \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1) + 2\varepsilon(t-3) - \varepsilon(t-4)$$

故对应的变换

$$F_1(s) = \frac{1}{s}(1 - 2\mathrm{e}^{-s} + 2\mathrm{e}^{-3s} - \mathrm{e}^{-4s})$$

所以

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{s} = \frac{1 - 2\mathrm{e}^{-s} + 2\mathrm{e}^{-3s} - \mathrm{e}^{-4s}}{s^2}$$

5-4 用部分分式法求下列象函数的拉氏反变换。

(1) $F(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$

(2) $F(s) = \frac{2s^2+s+2}{s(s^2+1)}$

(3) $F(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$

(4) $F(s)=\dfrac{4}{s(s+2)^2}$

解 (1) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}=\dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\dfrac{k_1}{s+2}+\dfrac{k_2}{s+3}$

$$k_1=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=-1$$

$$k_2=(s+3)F(s)\big|_{s=-3}=2$$

故有

$$F(s)=\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

所以

$$f(t)=(-\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

(2) $F(s)=\dfrac{2s^2+s+2}{s(s^2+1)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{Bs+C}{s^2+1}$

可得

$$A=sF(s)\big|_{s=0}=2$$

又 $$2s^2+s+2=As^2+A+Bs^2+Cs$$

可得

$$B=0，\quad C=1$$

$$F(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2+1}$$

所以

$$f(t)=(2+\sin t)\varepsilon(t)$$

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+2}=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{k_1}{s+1}+\dfrac{k_2}{s+2}$

$$k_1=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=1$$

$$k_2=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=-1$$

故有

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

故

$$f(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

(4) $F(s)=\dfrac{4}{s(s+2)^2}=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_{11}}{(s+2)^2}+\dfrac{k_{12}}{s+2}$

故

$$k_1=sF(s)\big|_{s=0}=1$$

$$k_{11}=(s+2)^2F(s)\big|_{s=-2}=\dfrac{4}{s}\Big|_{s=-2}=-2$$

$$k_{12}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2F(s)]\Big|_{s=-2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\dfrac{4}{s})\Big|_{s=-2}=-1$$

故有

$$F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{-1}{s+2}-\dfrac{2}{(s+2)^2}$$

所以

$$f(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

5-5 求下列象函数的拉氏反变换。

(1) $F(s)=1-\mathrm{e}^{-s}$

(2) $F(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s+2}$

(3) $F(s)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s(1-\mathrm{e}^{-s})}$

解 (1) $f(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)$

(3) $f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)+\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-3)+\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-5)+\cdots$

5-6 设系统微分方程为

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=2f'(t)+f(t)$$

已知 $y(0_-)=1,\ \ y'(0_-)=1,\ f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cdot\varepsilon(t)$。试用 s 域方法求零输入响应和零状态响应。

解 对系统方程取拉氏变换，得

$$s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)+4sY(s)-4y(0_-)+3Y(s)=2sF(s)+F(s)$$

从而

$$Y(s)=\dfrac{sy(0_-)+y'(0_-)+4y(0_-)}{s^2+4s+3}+\dfrac{2s+1}{s^2+4s+3}\cdot F(s)$$

由于

$$F(s)=\frac{1}{s+2}$$

故

$$Y(s)=\frac{s+5}{s^2+4s+3}+\frac{2s+1}{(s+2)(s^2+4s+3)}$$

求反变换得

$$y_{\mathrm{zi}}(t)=\frac{7}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-3t}$$

$$y_{\mathrm{zs}}(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t}-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-3t}$$

全响应为

$$y(t)=3\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t}-5\mathrm{e}^{-3t},\qquad t\geq 0$$

5-7 设某 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f(t)$$

试求其冲激响应和阶跃响应。

解 对方程取拉氏变换，得系统函数

$$H(s)=\frac{3}{s^2+5s+6}=\frac{3}{(s+2)(s+3)}$$

当 $f(t)=\delta(t)$ 时，$F(s)=1$，得

$$Y(s)=H(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)}$$

从而

$$h(t)=3\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-3t},\qquad t\geq 0$$

当 $f(t)=\varepsilon(t)$ 时，$F(s)=\frac{1}{s}$，得

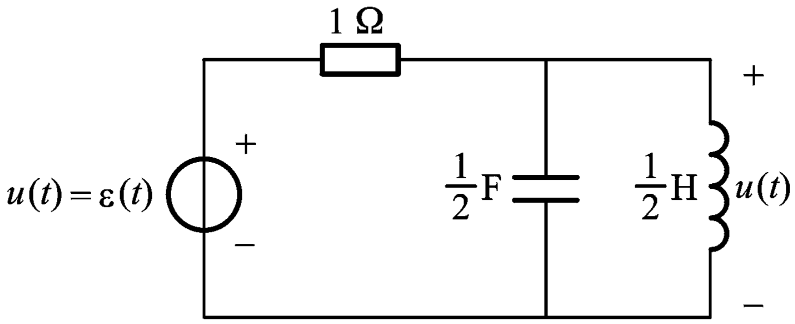
$$Y(s)=\frac{1}{s}H(s)=\frac{3}{s(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{0.5}{s}+\frac{-1.5}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

故得

$$y(t)=s(t)=0.5-1.5\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t},\qquad t\geq 0$$

5-8 试求题 5-8 图示电路中的电压 $u(t)$。



题 5-8 图

解　对应的 s 域模型如图 p5-8 所示，则

$$H(s)=\frac{U(s)}{F(s)}=\frac{\frac{1}{\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{s}\right)}}{1+\frac{1}{\frac{s}{2}+\frac{2}{s}}}=\frac{2s}{s^2+2s+4}$$

而 $F(s)=\frac{1}{s}$，故有

$$U(s)=F(s)H(s)=\frac{2}{s^2+2s+4}=\frac{2}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

所以

$$u(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-t}\cdot\sin\sqrt{3}t\cdot\varepsilon(t)\ \mathrm{V},\qquad t\geq 0$$

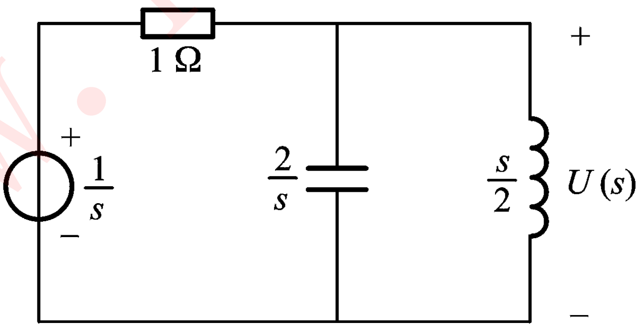
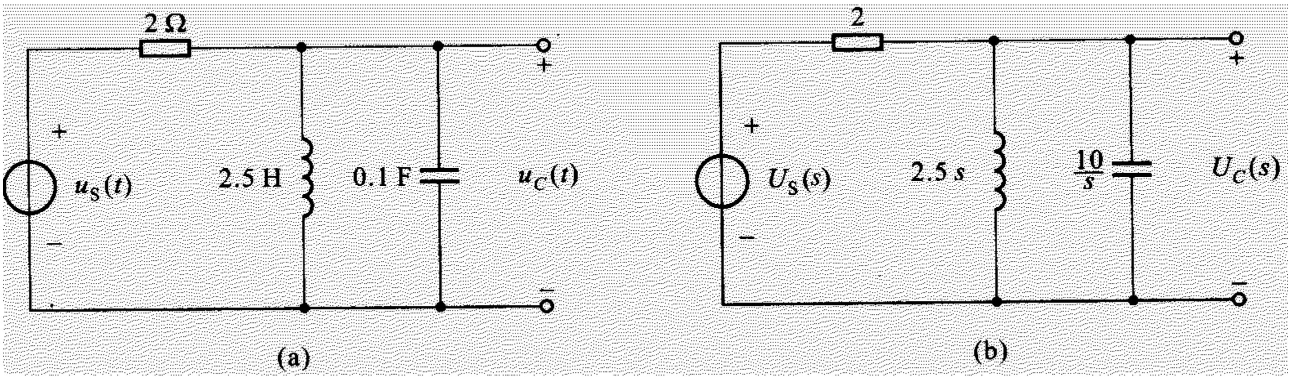


图 p5-8

5-9　如题 5-9 图所示电路，试求冲激响应 $u_C(t)$。



题 5-9 图

解　以 $U_C(s)$为变量列节点方程

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.5s}+\frac{s}{10}\right)U_C(s)=\frac{1}{2}U_S(s)$$

因 $U_C(s)=1$，则

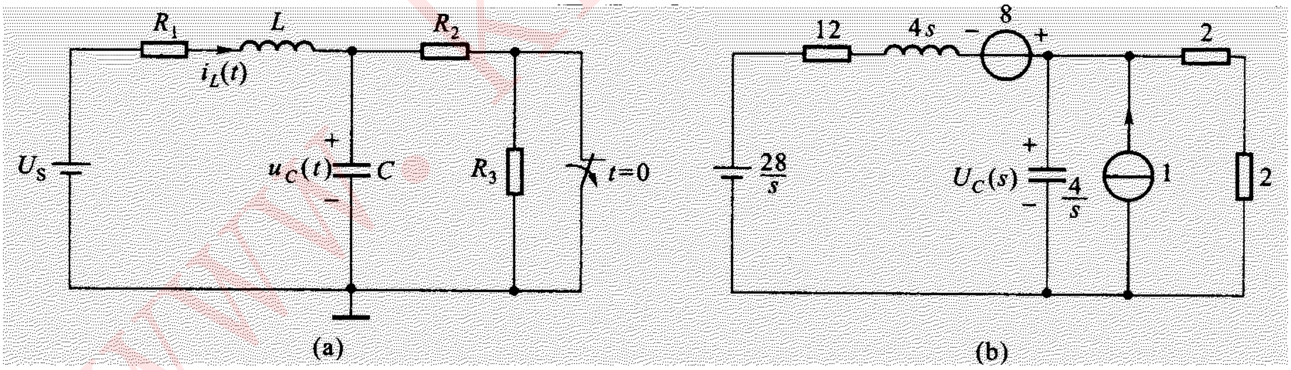
$$U_C(s)=\frac{5s}{(s+1)(s+4)}$$

$$=\frac{-\frac{5}{3}}{s+1}+\frac{\frac{20}{3}}{s+4}$$

故

$$h(t)=u_C(t)=\left(-\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{20}{3}e^{-4t}\right)\cdot\varepsilon(t)$$

5-10　如题 5-10 图所示电路，已知 $U_S=28$V，$L=4$H，$C=\frac{1}{4}$F，$R_1=12\Omega$，$R_2=R_3=2\Omega$。当 $t=0$ 时 S 断开，设开关断开前电路已稳定，求 $t\geq 0$ 后响应 $u_C(t)$。



题 5-10 图

解　初始状态在 $t=0_$时求得

$$i_L(0_-)=\frac{U_S}{R_1+R_2}=2\text{A}$$

$$u_C(0_-)=\frac{U_S}{R_1+R_2}\cdot R_2=4\text{V}$$

对于图(b)S 域模型，列出关于 $U_C(s)$的节点方程，即

$$\left(\frac{1}{12+4s}+\frac{s}{4}+\frac{1}{4}\right)U_{\mathrm{C}}(s)=\frac{\frac{\quad}{s}+8}{12+4s}+1$$

解得

$$U_{\mathrm{C}}(s)=\frac{4(s^2+5s+7)}{s(s^2+4s+4)}=\frac{7}{s}-\frac{3s+8}{(s+2)^2}$$

可得

$$u_{\mathrm{C}}(t)=7-2(t+1.5)\mathrm{e}^{-2t}\qquad(t\geq 0)$$

5-11 设有

$$y(t)=\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)*\delta'(t)$$

试用卷积定理求 $y(t)$。

解

$$\mathrm{e}^{-3t}\leftrightarrow\frac{1}{s+3}$$

$$\delta'(t)\leftrightarrow s$$

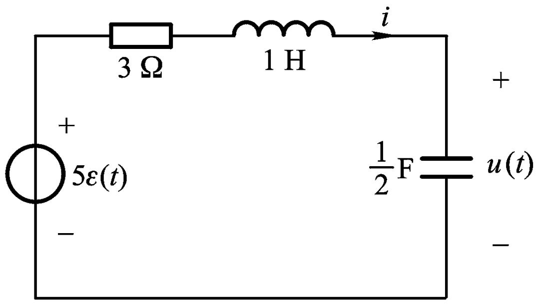
所以

$$Y(s)=\frac{1}{s+3}\cdot s=\frac{s}{s+3}=1-\frac{3}{s+3}$$

故

$$y(t)=\delta(t)-3\mathrm{e}^{-3t}\cdot\varepsilon(t)$$

5-12 如题 5-12 图所示 RLC 电路，已知 $u_s(t)=5\varepsilon(t)$，$i(0_-)=2\mathrm{A}$，$u(0_-)=2\mathrm{V}$。试用S域方法求全响应 $u(t)$。



题 5-12 图

解 由该电路对应的 S 域模型（此处略），可得

$$I(s)=\frac{\frac{\cdots}{s}+Li(0_-)-\frac{\cdots}{s}}{\cdots}=\frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

$$U(s)=\frac{u(0_-)}{s}+I(s)\cdot\frac{1}{sC}=\frac{2}{s}+\frac{2(2s+3)}{s(s^2+3s+2)}$$

$$=\frac{5}{s}-\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

得

$$u(t)=5-2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\qquad(t\geq 0)$$

5-13 若有系统方程

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=\delta(t)$$

且 $y(0_-)=y'(0_-)=0$，试求 $y(0_+)$和 $y'(0_+)$。

解 取拉氏变换，得系统函数

$$H(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

所以

$$h(t)=\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t},\quad t\geq 0$$

故

$$h(0_+)=y(0_+)=0,$$

$$h'(0_+)=y'(0_+)=1$$

5-14 设有系统函数

$$H(s)=\frac{s+3}{s+2}$$

试求系统的冲激响应和阶跃响应。

解 因为

$$H(s)=\frac{s+3}{s+2}=\frac{s+2}{s+2}+\frac{1}{s+2}=1+\frac{1}{s+2}$$

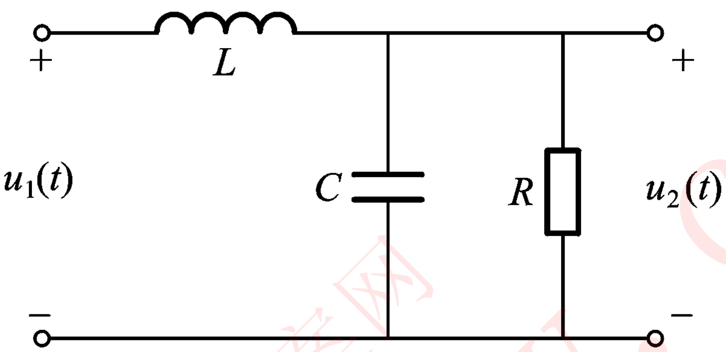
故

$$h(t)=\delta(t)+\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

$$= (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

5-15 如题 5-15 图所示二阶系统，已知 $L = 1\mathrm{H}$，$C = 1\mathrm{F}$，$R = 1\Omega$，$u_S(t) = \delta(t)$。试求以 $u_C(t)$为响应时的冲激响应 $h(t)$。



题 5-15 图

解 列 S 域节点方程

$$(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + sC)U_C(s) = \frac{U_S(s)}{sL}$$

可得

$$U_C(s) = \frac{R}{LCRs^2 + Ls + R}U_S(s)$$

因 $U_S(s) = 1$，故有

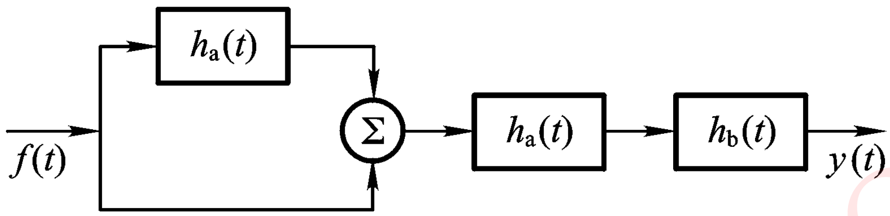
$$U_C(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

故

$$u_C(t) = h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\cdot\varepsilon(t)$$

第 6 章习题解析

6-1 在题 6-1 图示系统中，已知 $h_a(t)=\delta(t-1)$，$h_b(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$，试求系统函数 $H(s)$ 和冲激响应 $h(t)$，并画出其波形。



题 6-1 图

解 因为

$$y_1(t)=f(t)*h_a(t)+f(t)$$

故

$$Y_1(s)=F(s)H_a(s)+F(s)=[1+H_a(s)]F(s)$$

而

$$Y(s)=Y_1(s)H_a(s)\cdot H_b(s)$$

其中

$$H_a(s)=e^{-s},\quad H_b(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-2s})$$

所以

$$Y(s)=(1+e^{-s})e^{-s}\cdot\frac{1}{s}(1-e^{-2s})\cdot F(s)$$

故

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{(1+e^{-s})(1-e^{-2s})\cdot e^{-s}}{s}$$

$$=\frac{1}{s}(e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s})$$

所以冲激响应

$$h(t)=\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)-\varepsilon(t-4)$$

$h(t)$的波形如图 p6-1 所示。

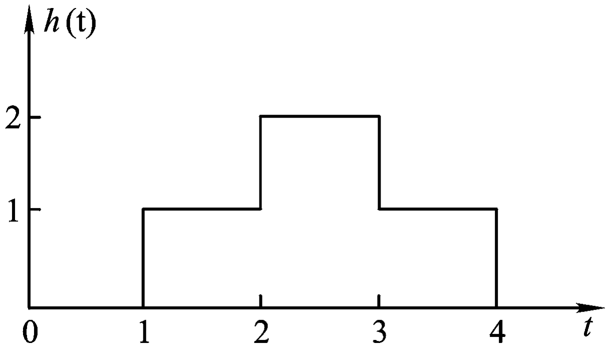
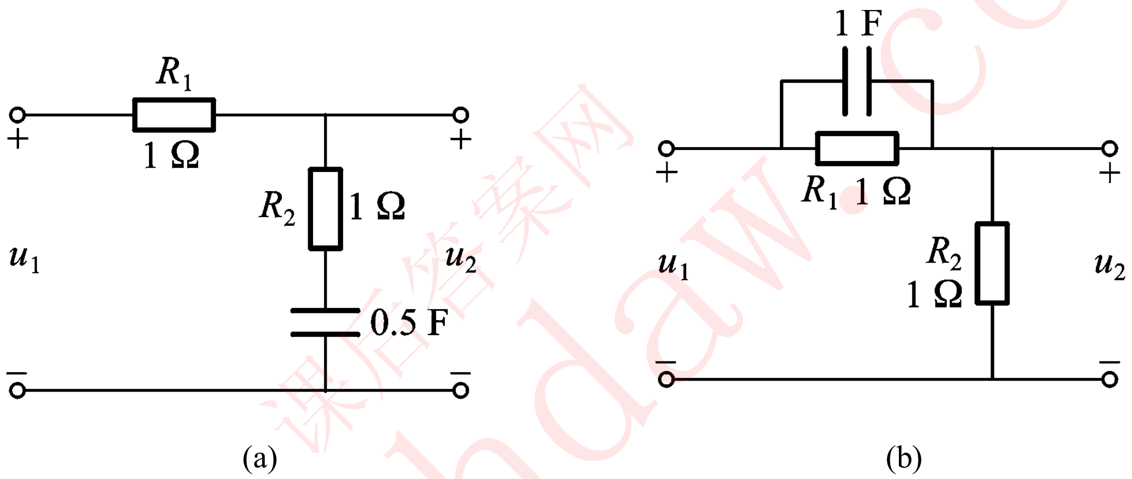


图 p6-1

6-2 试画出题 6-2 图所示网络的系统函数 $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 的波特图。



题 6-2 图

解 (a) 由图可得系统函数

$$H(s)=\frac{sR_2C+1}{s(R_1+R_2)C+1}=\frac{0.5s+1}{s+1}$$

可见其超前环节 $\omega_1=\dfrac{1}{0.5}=2\ \mathrm{rad/s}$，滞后环节 $\omega_2=1\ \mathrm{rad/s}$，故得波特图如图 p6-2(a)所示。

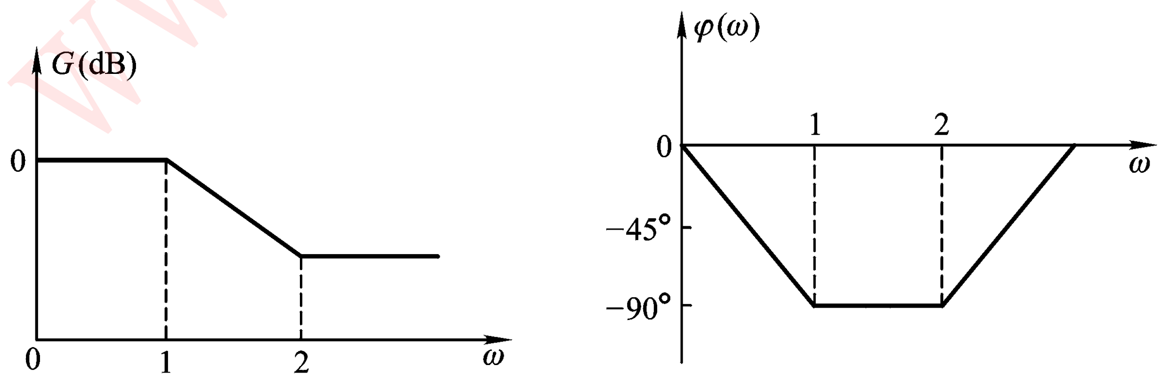


图 p6-2(a)

(b) 由图可得系统函数

$$H(s)=\frac{R_2}{R\ \cdots}=\frac{R_2}{R\ +\ R\ \cdots}\cdot\frac{s\tau_1+1}{\cdots}$$

其中

$$\tau_1=R_1C,\ \ \tau_2=(R_1\,//\,R_2)C$$

故

$$H(s)=\frac{0.5(s+1)}{0.5\ \cdots}$$

从而得波特图如图 p6-2(b)所示。

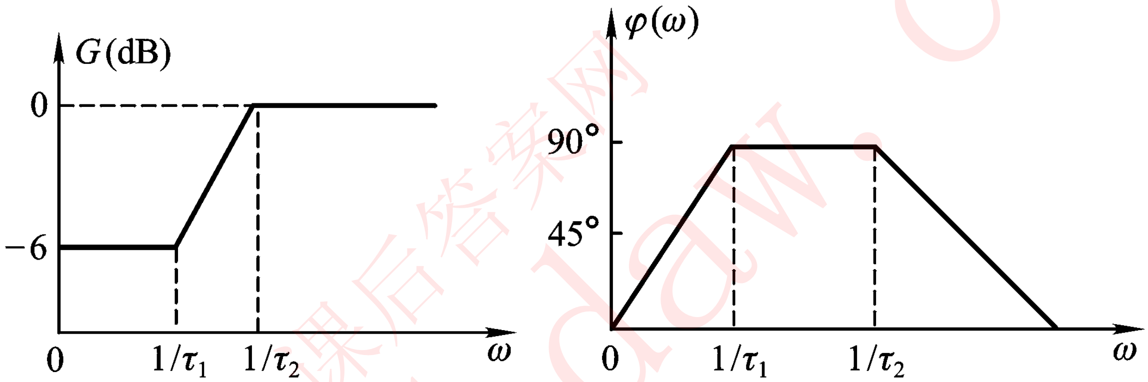
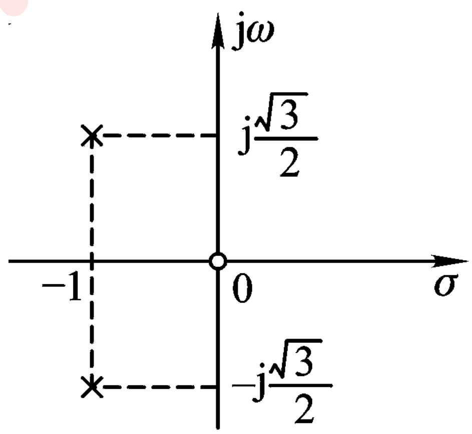


图 p6-2(a)

6-3 已知某系统函数 $H(s)$的零、极点分布如题 6-3 图所示，若冲激响应的初值 $h(0_+)=2$，求系统函数 $H(s)$，并求出 $h(t)$。



题 6-3 图

解 由图示零、极点分布，应有

$$H(s)=\frac{H_0 s}{(s+1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

又因为

$$h(0_+)=\lim_{s\to\infty} sH(s)=H(0)=2$$

故有

$$H(s)=\frac{2s}{(s+1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

进一步可表示为

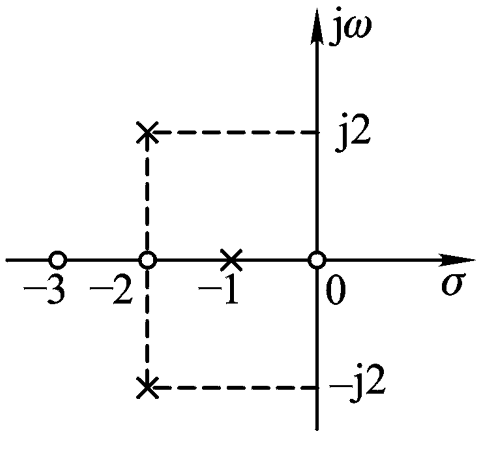
$$H(s)=2\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\frac{1}{(s+1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right]$$

$$=\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\times 2$$

所以

$$h(t)=2\mathrm{e}^{-t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t),\quad t\geq 0$$

6-4 某系统函数 $H(s)$ 的零、极点分布如题 6-4 图所示，且 $H_0=5$，试写出 $H(s)$ 的表达式。



题 6-4 图

解 从图可知系统的零点为

$$z_1=0，\ z_2=-2，\ z_3=-3$$

极点为

$$S_1=-1，\quad S_{2,3}=-2\pm \mathrm{j}2$$

故系统函数

$$H(s)=H_0\cdot\frac{N(s)}{D(s)}=5\cdot\frac{s(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2+\mathrm{j}2)(s+2-\mathrm{j}2)}$$

$$=\frac{5s(s^2+5s+6)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$$

6-5 设系统函数

$$H(s)=\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$$

试画出其 S 域模拟框图。

解 $H(s)$可改写为

$$H(s)=\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}=\frac{5s+5}{s^3+7s^2+10s}$$

$$=\frac{5s^{-2}+5s^{-3}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}}$$

从而得模拟图如图 p6-5 所示。

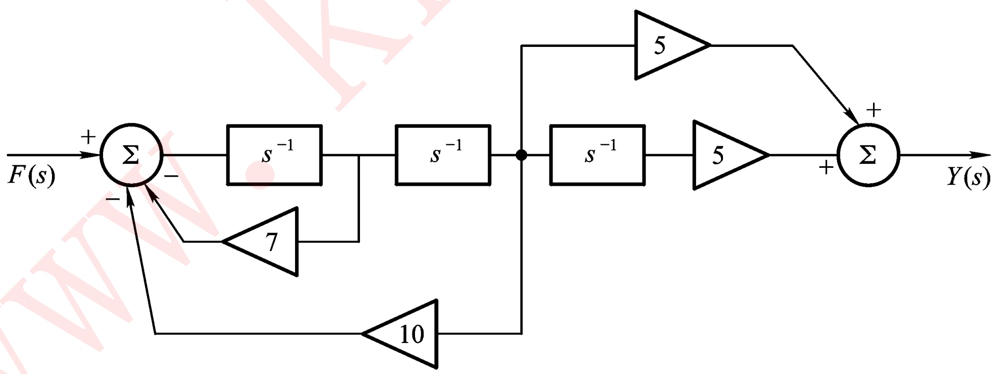
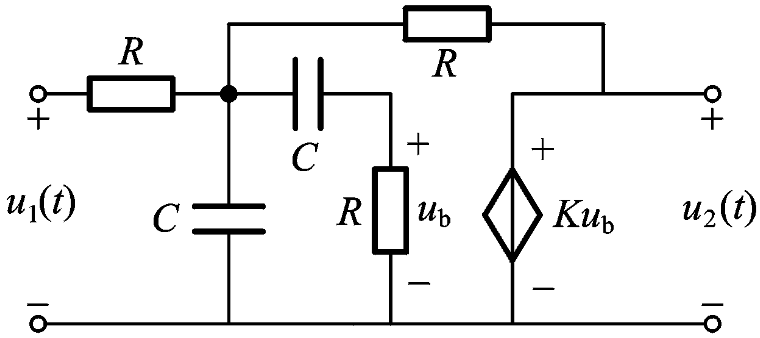


图 p6-5

6-6 如题 6-6 图所示为二阶有源带通系统的模型，设 $R=1\Omega$，$C=1\mathrm{F}$， $K=3$，试求系统函数 $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$。



题 6-6 图

解　对于电路的 S 域模型，可列节点方程

$$\begin{cases} \dfrac{U_1(s)-U_a(s)}{R}+\dfrac{U_2(s)-U_a(s)}{R}=\dfrac{U_a(s)}{1}+\dfrac{U_b(s)}{R} \\ sC(U_a-U_b)=\dfrac{U_b(s)}{R} \\ U_2(s)=KU_b(s) \end{cases}$$

代入数据后，可得

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{3s}{s^2+s+2}$$

6-7　试判定下列系统的稳定性。

(1)　$H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+8s+6}$

(2)　$H(s)=\dfrac{3s+1}{s^3+4s^2-2s+2}$

(3)　$H(s)=\dfrac{2s+4}{(s+1)(s^2+4s+2)}$

解　(1) 因 $H(s)$分母多项式各项系数均为正，故稳定。

(2) 因 $H(s)$分母多项式有负系数，故不稳定。

(3) 因

$$H(s)=\frac{2s+4}{(s+1)(s^2+4s+2)}=\frac{2s+4}{(s+1)(s+1)(s+2)}$$

其极点均在左半平面，故系统稳定。

6-8　已知系统的微分方程为

$$y'''(t)+y'(t)+6y(t)=f'(t)$$

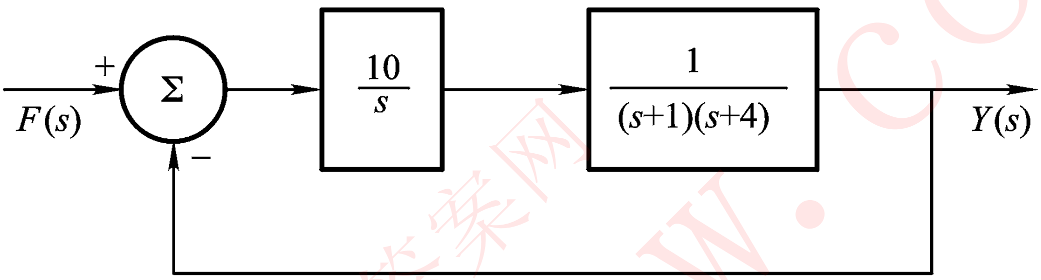
试求系统函数 $H(s)$，系统是否稳定？

解 因系统函数为

$$H(s)=\frac{s}{s^2+s+6}$$

则二阶系统之 $D(s)$的各项系数均为正，故系统稳定。

6-9 如题 6-9 图所示系统，试判定其稳定性。



题 6-9 图

解 由图可得系统函数

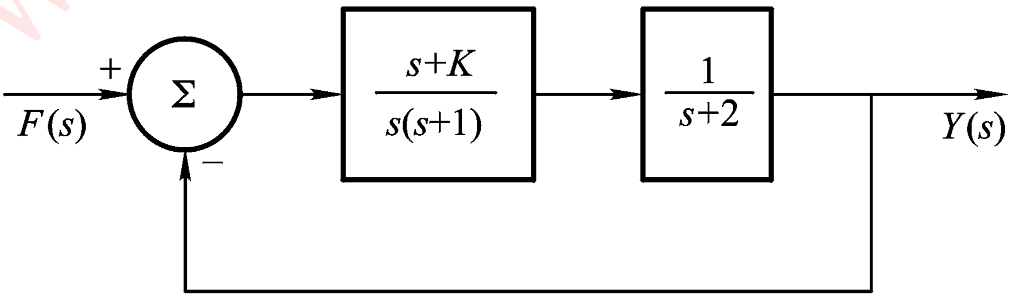
$$H(s)=\frac{s \quad (s+1)(s+4)}{10 \quad\quad 1}=\frac{2s+4}{s^3+5s^2+4s+10}$$

因为 $a_1a_2=20$，$a_0a_3=10$，故满足

$$a_1a_2>a_0a_3$$

故系统稳定。

6-10 如题 6-10 图示反馈系统，为使其稳定，试确定 K 值。



题 6-10 图

解　该系统的 $H(s)$为

$$H(s)=\frac{s(s+1)}{s+K}\,\frac{s+2}{1}=\frac{s+K}{s^3+3s^2+3s+K}$$

从必要条件考虑，应当 $K>0$，再由

$$a_1a_2>a_0a_3$$

考虑，应满足 $K<9$，故当

$$0<K<9$$

时系统稳定。

也可以从劳斯阵列判定。因为阵列：

$$\begin{array}{cc} 3 & K \\ 9-K & 0 \end{array}$$

为使第一列元素不变号，即应

$$\frac{9-K}{3}>0,\quad K>0$$

即

$$0<K<9$$

时系统稳定。

第 7 章习题解析

7-1 试画出下列离散信号的图形。

(a) $f_1(n) = (\frac{1}{2})^n \varepsilon(n)$

(b) $f_2(n) = \varepsilon(2-n)$

(c) $f_3(n) = \varepsilon(-2-n)$

(d) $f_4(n) = 2(1-0.5^n)\varepsilon(n)$

解 各信号的图形分别如图 p7-1 所示。

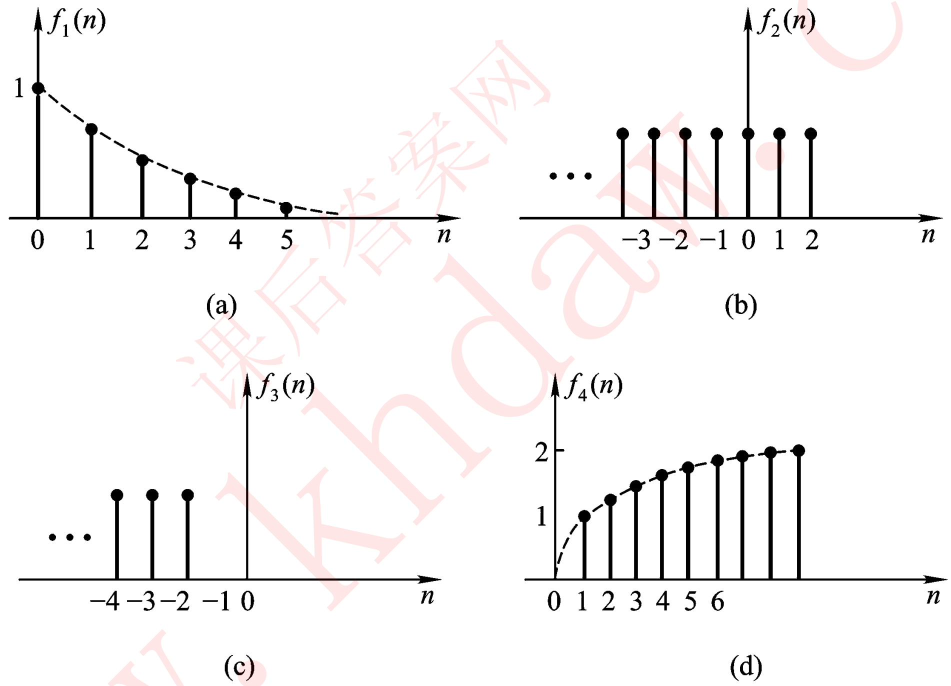


图 p7-1

7-2 试画出下列序列的图形。

(a) $f_1(n) = \varepsilon(n-2) - \varepsilon(n-6)$

(b) $f_2(n) = \varepsilon(n+2) + \varepsilon(-n)$

(c) $f_3(n) = n\varepsilon(n) \cdot [\varepsilon(n) - \varepsilon(n-5)]$

(d) $f_4(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4)$

解 各序列的图形分别如图 p7-2 所示。

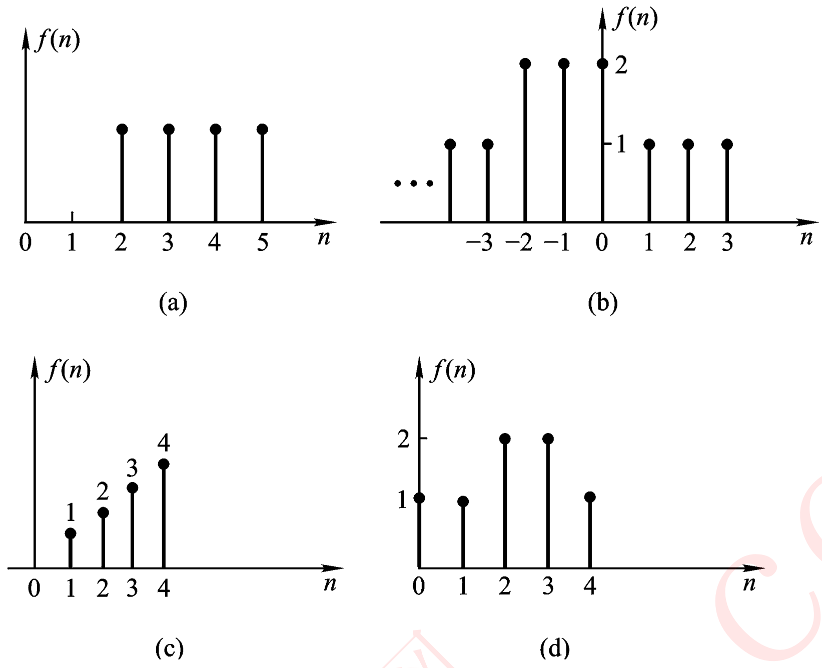


图 p7-2

7-3 设有差分方程

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)$$

起始状态 $y(-1)=-\frac{1}{2}$, $y(-2)=\frac{5}{4}$。试求系统的零输入响应。

解 系统的特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

其特征根为

$$\lambda_1=-1, \quad \lambda_2=-2$$

则零输入响应的形式为

$$\begin{aligned} y_{zi}(n) &= K_1\lambda_1^n+K_2\lambda_2^n \\ &= K_1(-1)^n+K_2(-2)^n \end{aligned}$$

由起始状态 $y(-1)$和 $y(-2)$导出起始值 $y(0)$和 $y(1)$

$$n=0 \text{ 时}，y(0)=-3y(-1)-2y(-2)=1.5-2.5=-1$$

$$n=1 \text{ 时}，y(1)=-3y(0)-2y(-1)=3+1=4$$

从而有

$$\begin{cases} y_{zi}(0)=K_1+K_2=-1 \\ y_{zi}(1)=-K_1-2K_2=4 \end{cases}$$

解得

$$K_1 = 2, \quad K_2 = -3$$

故

$$y_{zi}(n) = 2(-1)^n - 3(-2)^n, \quad n \geq 0$$

7-4 设有离散系统的差分方程为

$$y(n) + 4y(n-1) + 3y(n-2) = 4f(n) + f(n-1)$$

试画出其时域模拟图。

解 原方程可以写为

$$y(n) = -4y(n-1) - 3y(n-2) + 4f(n) + f(n-1)$$

从而可得时域模拟图 p7-4，图中 D 为单位延时（位移）器。

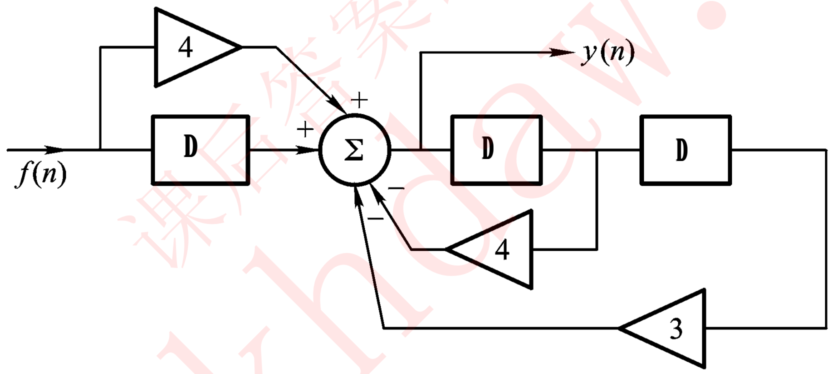
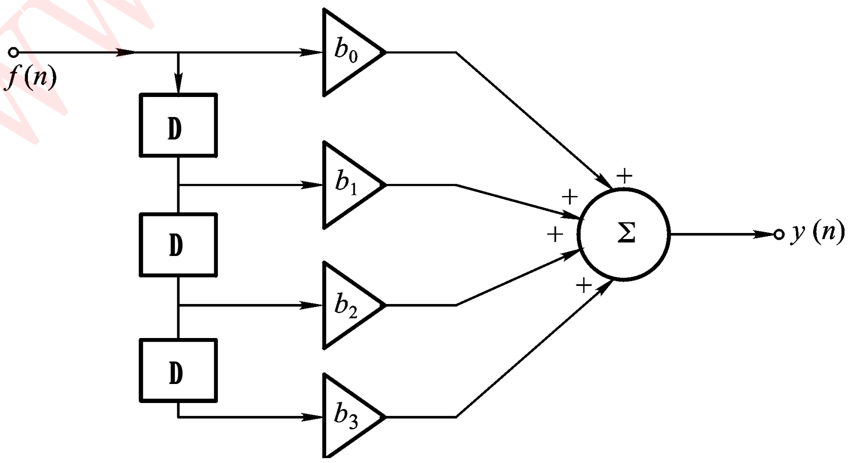


图 p7-4

7-5 如图所示为工程上常用的数字处理系统，是列出其差分方程。

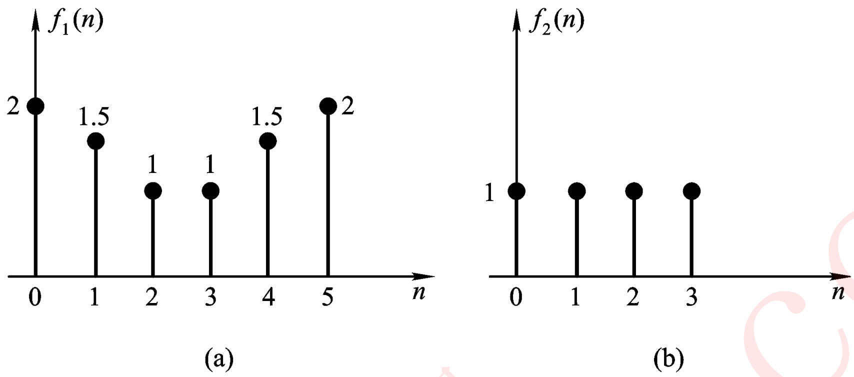


题 7-5 图

解　由图可得差分方程

$$y(n)=b_0 f(n)+b_1 f(n-1)+b_2 f(n-2)+b_3 f(n-3)$$

7-6　设有序列 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$，如图 7-6 所示，试用二种方法求二者的卷积。



题 7-6 图

解　方法一：用“乘法”

			2	1.5	1	1	1.5	2
×					1	1	1	1
			2	1.5	1	1	1.5	2
		2	1.5	1	1	1.5	2	
	2	1.5	1	1	1.5	2		
2	1.5	1	1	1.5	2			
2	3.5	4.5	5.5	5	5.5	4.5	3.5	2

即有

$$f_1(n)*f_2(n)=\{\underset{\uparrow}{2},\ 3.5,\ 4.5,\ 5.5,\ 5,\ 5.5,\ 4.5,\ 3.5,\ 2\}$$

方法二：用单位序列表示各函数后卷积。因为

$$f_1(n)=2\delta(n)+1.5\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+1.5\delta(n-4)+2\delta(n-5)$$

$$f_2(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

则

$$+5\delta(n-4)+5.5\delta(n-5)+4.5\delta(n-6)$$

7-7　设有一阶系统为

$$y(n)-0.8y(n-1)=f(n)$$

试求单位响应 $h(n)$和阶跃响应 $s(n)$，并画出 $s(n)$的图形。

解 由方程知特征根$\lambda=0.8$，故

$$h(n)=\lambda^n\varepsilon(n)=0.8^n\varepsilon(n)$$

阶跃响应为

$$s(n)=h(n)*\varepsilon(n)=\frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8}=5(1-0.8^{n+1})\varepsilon(n)$$

$s(n)$的图形如图 p7-7 所示。

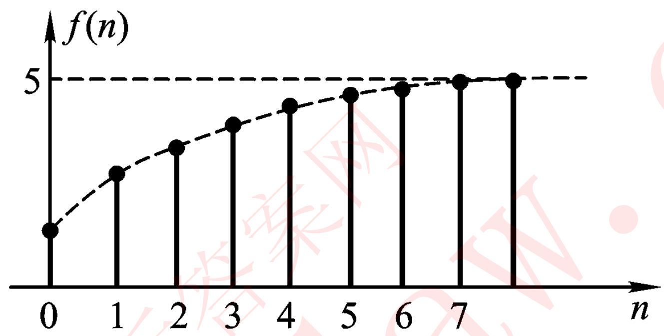


图 p7-7

7-8 设离散系统的单位响应$h(n)=(\frac{1}{2})^n\varepsilon(n)$，输入信号$f(n)=2^n$，试求零状态响应 $y(n)$。

解 由给定的$f(n)$和 $h(n)$，得

$$y(n)=f(n)*h(n)=\sum^{\infty}f(n-k)h(k)$$

$$=\sum^{\infty}2^{n-k}(\frac{1}{2})^k=2^n\sum^{\infty}(\frac{1}{6})^k$$

因为

$$\sum^{\infty}a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},\quad |a|<1$$

故得

$$y(n)=\frac{6}{5}\cdot2^n\varepsilon(n)-\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^n\varepsilon(n)$$

7-9 试证明

$$\lambda_1^n\varepsilon(n)*\lambda_2^n\varepsilon(n)=\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_1^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}$$

证明

$$\lambda_1^n \varepsilon(n) * \lambda_2^n \varepsilon(n) = \sum^{n} \lambda_1^{n-k} \cdot \lambda_2^k = \lambda_1^n \sum^{n} \lambda_1^{-k} \lambda_2^k$$

$$= \lambda_1^n \sum^{n} (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k = \lambda_1^n \cdot \frac{1-(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{n+1}}{1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$= \lambda_1^n \cdot \frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1^{n}(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

7-10 已知系统的单位响应，

$$h(n) = a^n \varepsilon(n) \qquad (0 < a < 1)$$

输入信号 $f(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-6)$，求系统的零状态响应。

解

$$y(n) = f(n) * h(n) = [\varepsilon(n) - \varepsilon(n-6)] * a^n \varepsilon(n)$$

因为

$$\varepsilon(n) * a^n \varepsilon(n) = \sum^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \cdot \varepsilon(n)$$

利用时延性质，则

$$\varepsilon(n-6) * a^n \varepsilon(n) = \frac{1-a^{n+1-6}}{1-a} \cdot \varepsilon(n-6)$$

所以得

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \cdot \varepsilon(n) - \frac{1-a^{n-5}}{1-a} \cdot \varepsilon(n-6)$$

第 8 章习题解析

8-1 求下列离散信号的 Z 变换，并注明收敛域。

(a) $\delta(n-2)$

(b) $a^{n}\varepsilon(n)$

(c) $0.5^{n-1}\varepsilon(n-1)$

(d) $(0.5^{n}+0.25^{n})\varepsilon(n)$

解 (a) $F(z)=z^{-2}$，　$0<|z|\le\infty$

(b) $F(z)=\sum^{\infty}a^{-n}\cdot z^{-n}=\sum^{\infty}(az)^{-n}$

$$=\frac{1}{1-(az)^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{a}},\quad |z|>\frac{1}{a}$$

(c) $F(z)=\sum^{\infty}0.5^{n-1}\cdot z^{-n}=\sum^{\infty}2\cdot(\frac{1}{2z})^{n}$

$$=\frac{1}{z-\frac{1}{2}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

(d) $F(z)=\sum^{\infty}0.5^{n}\cdot z^{-n}+\sum^{\infty}0.25^{n}\cdot z^{-n}$

$$=\frac{z}{z-0.5}+\frac{z}{z-0.25},\quad |z|>0.5$$

8-2 求下列 $F(z)$的反变换$f(n)$。

(a) $F(z)=\dfrac{1-0.5z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$

(b) $F(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{z^{-1}+2}$

(c) $F(z)=\dfrac{2z}{(z-1)(z-2)}$

(d) $F(z)=\dfrac{3z^{2}+z}{(z-0.2)(z+0.4)}$

(e) $F(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z-1)^{2}}$

解 (a) 因为

$$F(z)=\frac{z^2-0.5z}{\text{[illegible]}}$$

故

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z-0.5}{\text{[illegible]}}=\frac{K_1}{\text{[illegible]}}+\frac{K_2}{\text{[illegible]}}$$

解得

$$K_1=4，K_2=-3$$

进而

$$F(z)=\frac{4z}{\text{[illegible]}}-\frac{3z}{\text{[illegible]}}$$

所以

$$f(n)=[4(-\frac{1}{2})^n-3(-\frac{1}{4})^n]\varepsilon(n)$$

(b) $F(z)=\frac{z-2}{\text{[illegible]}}=\frac{z}{\text{[illegible]}}-\frac{2}{\text{[illegible]}}=\frac{z}{\text{[illegible]}}-\frac{2}{\text{[illegible]}}$

所以

$$f(n)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n\varepsilon(n)-(-\frac{1}{2})^{n-1}\varepsilon(n-1)$$

(c) 由于

$$F(z)=\frac{2z}{(z-1)(z-2)}$$

故

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{(z-1)(z-2)}=\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{z-2}$$

解得

$$K_1=-2，K_2=2$$

进而

$$F(z)=\frac{-2z}{z-1}+\frac{2z}{z-2}$$

所以

$$f(n)=-2\varepsilon(n)+2(2)^n\varepsilon(n)=2(2^n-1)\varepsilon(n)$$

(d) 由于

$$F(z)=\frac{3z^2+z}{(z-0.2)(z+0.4)}$$

故

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{3z+1}{(z-0.2)(z+0.4)}=\frac{K_1}{z-0.2}+\frac{K_2}{z+0.4}$$

解得

$$K_1=\frac{8}{3},\qquad K_2=\frac{1}{3}$$

故有

$$F(z)=\frac{\frac{8}{3}z}{z-0.2}+\frac{\frac{1}{3}z}{z+0.4}$$

所以

$$f(n)=[\frac{8}{3}(0.2)^n+\frac{1}{3}(-0.4)^n]\varepsilon(n)$$

(e) 由于

$$F(z)=\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}$$

故

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{K_1}{z-2}+\frac{K_{11}}{(z-1)^2}+\frac{K_{12}}{z-1}$$

解得

$$K_1=1,\quad K_{11}=-1,\quad K_{12}=-1$$

从而有

$$F(z)=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}$$

故得

$$f(n)=(2^n-n-1)\varepsilon(n)$$

8-3 试用 z 变换的性质求以下序列的 z 变换。

(a) $f(n)=(n-3)\varepsilon(n-3)$

(b) $f(n)=\varepsilon(n)-\varepsilon(n-N)$

解 (a) 由时延性质，有

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}\cdot z^{-3}=\frac{1}{z^2(z-1)^2}$$

(b) $F(z)=\frac{z}{z-1}-z^{-N}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z}{z-1}(1-z^{-N})$

8-4 试证明初值定理

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

证明　因为

$$F(z)=\sum^{\infty}f(n)z^{-n}=f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\cdots$$

当 z→∞时，则上式右边除 $f(0)$外均为零，故

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

8-5　试用卷和定理证明以下关系：

(a)　$f(n)*\delta(n-m)=f(n-m)$

(b)　$\varepsilon(n)*\varepsilon(n)=(n+1)\varepsilon(n)$

证明　(a) 因由卷和定理

$$f(n)*\delta(n-m)\leftrightarrow F(z)\cdot z^{-m}$$

而

$$f(n-m)\leftrightarrow z^{-m}F(z)$$

故得

$$f(n)*\delta(n-m)=f(n-m)$$

(b) 因为

$$\varepsilon(n)*\varepsilon(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{(z-1)^2}$$

而

$$(n+1)\varepsilon(n)=n\varepsilon(n)+\varepsilon(n)\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{(z-1)^2}$$

所以

$$\varepsilon(n)*\varepsilon(n)=(n+1)\varepsilon(n)$$

8-6　已知 $\varepsilon(n)*\varepsilon(n)=(n+1)\varepsilon(n)$，试求 $n\varepsilon(n)$ 的 Z 变换。

解　因由卷和定理

$$\varepsilon(n)*\varepsilon(n)\leftrightarrow\frac{z^2}{(z-1)^2}$$

而

$$n\varepsilon(n)=(n+1)\varepsilon(n)-\varepsilon(n)$$

所以

$$n\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

8-7 已知因果序列的 Z 变换为 $F(z)$，试分别求下列原序列的初值 $f(0)$。

(1) $F(z) = \dfrac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$

(2) $F(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

解 (1) $F(z) = \dfrac{1}{1-0.25z^{-2}} = \dfrac{z^2}{z^2-0.25}$

所以

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = 1$$

(2) $F(z) = \dfrac{z}{z^2-1.5z+0.5}$

所以

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = 0$$

8-8 已知系统的差分方程、输入和初始状态如下，试用 Z 变换法求系统的完全响应。

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = f(n) - \frac{1}{2}f(n-1)$$

$f(n) = \varepsilon(n)$, $y(-1) = 1$。

解 对方程取 Z 变换，有

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) - 0.5 = F(z) - 0.5z^{-1}F(z)$$

即

$$(1-0.5z^{-1})Y(z) = (1-0.5z^{-1})\frac{z}{z-1} + 0.5$$

故

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{0.5z}{z-0.5}$$

所以

$$y(n) = \varepsilon(n) + 0.5(0.5)^n$$

8-9 设系统差分方程为

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = f(n)$$

起始状态 $y(-1)=3$，$y(-2)=2$，当 $f(n)=z\varepsilon(n)$时，求系统的响应 $y(n)$。

解 对差分方程取 z 变换，得

$$Y(z)-5[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+6[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)]=F(z)$$

即

$$Y(z)-5z^{-1}Y(z)-15+6z^{-2}Y(z)+18z^{-1}+12=\frac{2z}{z-1}$$

从而有

$$Y(z)=\frac{\frac{2z}{z-1}-18z^{-1}+3}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}$$

$$=\frac{5z^3-21z^2+18z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

故

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{z-2}+\frac{K_3}{z-3}$$

解得

$$K_1=1,\quad K_2=4,\quad K_3=0$$

则有

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{4z}{z-2}$$

得全响应

$$y(n)=\varepsilon(n)+4(2)^n\varepsilon(n)$$

8-10 设一系统的输入 $f(n)=\delta(n)-4\delta(n-1)+2\delta(n-2)$，系统函数

$$H(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

试求系统的零状态响应。

解 因为

$$H(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)}$$

所以

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z}{(z-0.5)(z-1)}=\frac{K_1}{z-0.5}+\frac{K_2}{z-1}$$

解得

$$K_1=-1,\quad K_2=2$$

故

$$H(z)=\frac{-z}{z-0.5}+\frac{2z}{z-1}$$

得

$$h(n)=-(0.5)^n+2\varepsilon(n)$$

所以

$$\begin{aligned}y(n)&=h(n)*f(n)\\&=[-(0.5)^n+2\varepsilon(n)]*[\delta(n)-4\delta(n-1)+2\delta(n-2)]\\&=4\delta(n)-2\varepsilon(n)-(0.5)^n\varepsilon(n)\end{aligned}$$

8-11 设有系统方程

$$y(n)-0.2y(n-1)+0.8y(n-2)=f(n)+2f(n-1)$$

试画出其 Z 域的模拟框图。

解 在零状态下对方程取 z 变换，得

$$Y(z)-0.2z^{-1}Y(z)+0.8z^{-2}Y(z)=F(z)+2z^{-1}F(z)$$

即

$$(1-0.2z^{-1}+0.8z^{-2})Y(z)=(1+2z^{-1})F(z)$$

故有

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{1+2z^{-1}}{1-0.2z^{-1}+0.8z^{-2}}$$

由此可以画出模拟图如图 p8-11 所示。

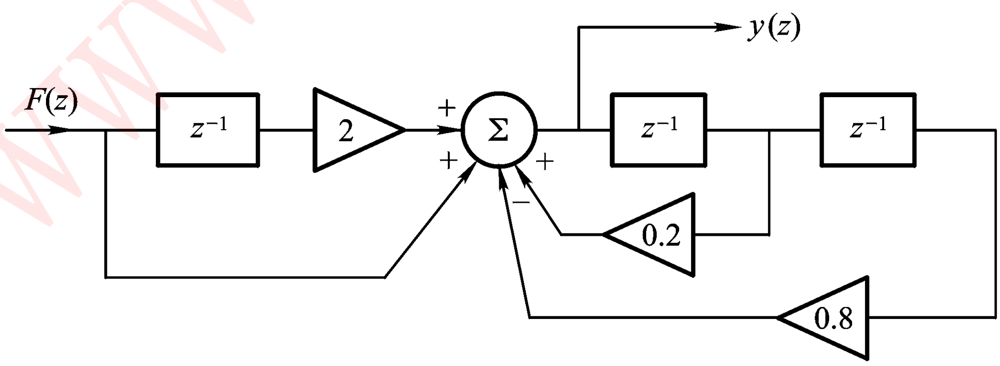
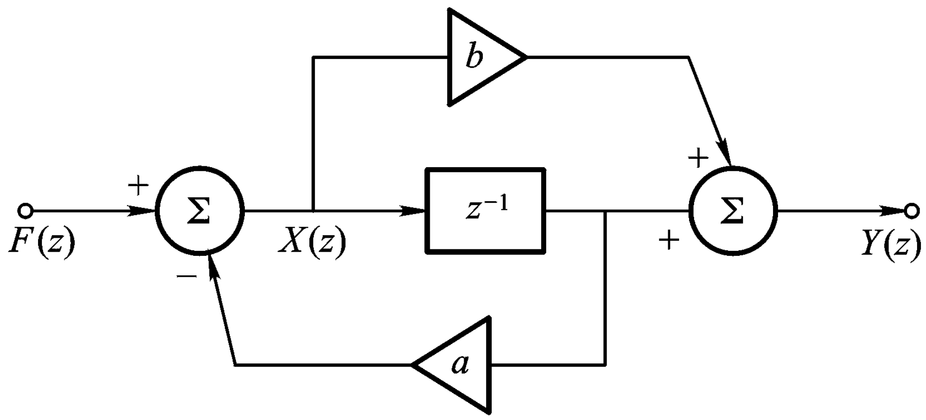


图 p8-11

8-12 如题 8-12 图所示 z 域框图，试写出其差分方程。



题 8-12 图

解　由图可得

$$Y(z)=\frac{b+z^{-1}}{1+az^{-1}}F(z)$$

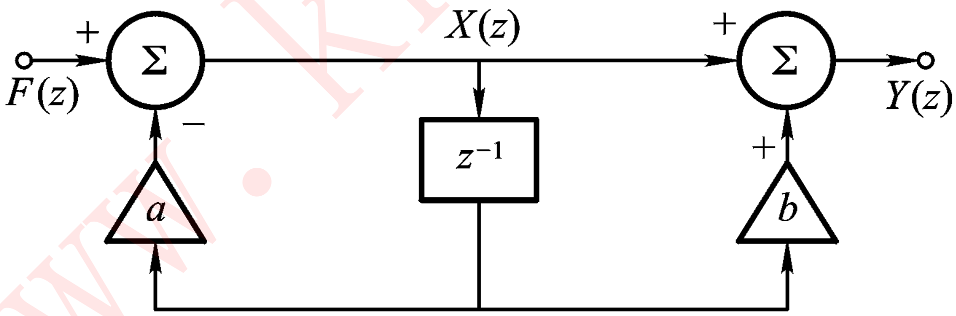
故有

$$(1+az^{-1})Y(z)=(b+z^{-1})F(z)$$

所以

$$y(n)+ay(n-1)=bf(n)+f(n-1)$$

8-13　如题 8-13 图所示 z 域框图，是写出其差分方程。



题 8-13 图

解　由图可得

$$X(z)=\frac{1}{1+az^{-1}}F(z)$$

$$Y(z)=(1+bz^{-1})X(z)$$

故有

$$Y(z)=\frac{1+bz^{-1}}{1+az^{-1}}F(z)$$

即

$$(1+az^{-1})Y(z)=(1+bz^{-1})F(z)$$

从而有差分方程

$$y(n)+ay(n-1)=f(n)+bf(n-1)$$

8-14 对于题 8-12 和 8-13，试分别写出系统函数 $H(z)$。

解 对于题 8-12，因

$$X(z)=F(z)-az^{-1}X(z)$$

$$F(z)=(1+az^{-1})X(z)$$

而 $Y(z)=bX(z)+z^{-1}X(z)=(b+z^{-1})X(z)$

故

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{b+z^{-1}}{1+az^{-1}}$$

对于题 8-13，因

$$X(z)=\frac{1}{1+az^{-1}}F(z)$$

$$Y(z)=(1+bz^{-1})X(z)$$

故

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{1+bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$

8-15 已知某数字滤波器的差分方程为

$$y(n)-0.7y(n-1)+0.12y(n-2)=2f(n)-f(n-1)$$

（1）求系统函数 $H(z)$；

（2）求单位响应 $h(n)$。

解 （1）在零状态下对方程取 z 变换，得

$$(1-0.7z^{-1}+0.12z^{-2})Y(z)=2F(z)-z^{-1}F(z)$$

故系统函数

$$H(z)=\frac{2-z^{-1}}{1-0.7z^{-1}+0.12z^{-2}}=\frac{2z^2-z}{z^2-0.7z+0.12}$$

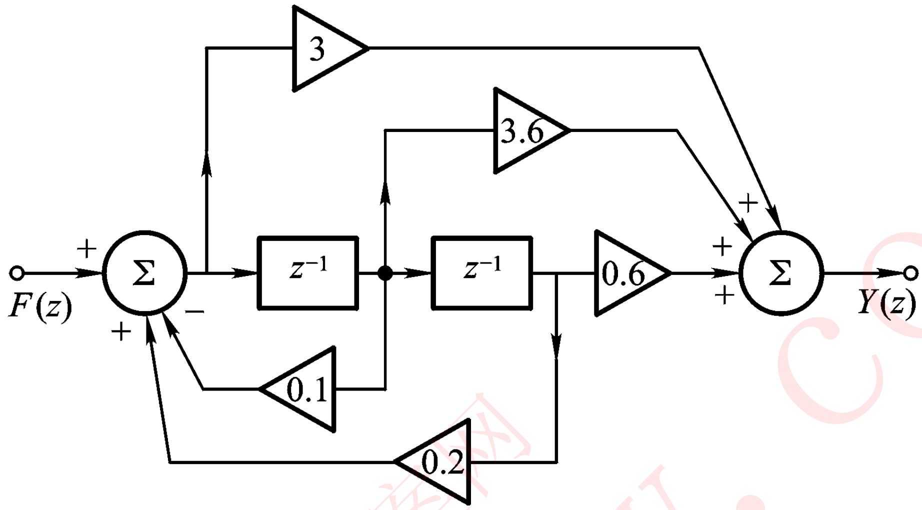
（2）由于

$$H(z)=\frac{2z^2-z}{z^2-0.7z+0.12}=\frac{4z}{z-0.3}-\frac{2z}{z-0.4}$$

故单位响应

$$h(n)=[4(0.3)^n-2(0.4)^n]\varepsilon(n)$$

8-16 如题 8-16 图所示系统，试求其系统函数 $H(z)$和单位响应 $h(n)$。



题 8-16 图

解 由模拟图可得

$$H(z)=\frac{0.6z^{-2}+3.6z^{-1}+3}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}=\frac{3z^2+3.6z+0.6}{z^2+0.1z-0.2}$$

$$=\frac{3z^2+3.6z+0.6}{(z+0.5)(z-0.4)}=K_0+\frac{K_1z}{z+0.5}+\frac{K_2z}{z-0.4}$$

可得

$$K_0=-3,\quad K_1=-1,\quad K_2=7$$

故得

$$h(n)=-3\delta(n)-(-0.5)^n\varepsilon(n)+7(0.4)^n\varepsilon(n)$$

8-17 设一阶系统为

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=f(n)$$

（1）求单位响应 $h(n)$；

（2）若系统的零状态响应为

$$y(n)=3[(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{3})^n]\varepsilon(n)$$

试求输入信号。

解　（1）对方程取 z 变换，得

$$(1-\frac{1}{2}z^{-1})Y(z)=F(z)$$

故

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

所以

$$h(n)=(\frac{1}{2})^{n}\varepsilon(n)$$

（2）由 $y(n)$ 可得 $Y(z)$

$$Y(z)=\frac{3z}{z-0.5}-\frac{3z}{z-\frac{1}{3}}$$

故有

$$F(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{0.5}{z-0.5}$$

最后输入

$$f(n)=0.5(0.5)^{n}\varepsilon(n-1)$$

8-18　设离散系统输入 $f(n)=\varepsilon(n)$ 时，零状态响应 $y(n)=2(1-0.5^{n})\varepsilon(n)$；若输入 $f(n)=0.5^{n}\varepsilon(n)$ 时，求系统的响应；该系统是否稳定？

解

$$Y(z)=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{z-0.5}$$

$$Y(z)=\frac{z}{z-1}$$

故

$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=2-\frac{2(z-1)}{z-0.5}$$

当 $f(n)=0.5^{n}\varepsilon(n)$ 时，则

$$F(z)=\frac{z}{z-0.5}$$

所以

$$Y(z)=H(z)F(z)=\frac{2z}{z-0.5}-\frac{2z(z-1)}{(z-0.5)^{2}}$$

最后得

$$y(n)=2n(0.5)^{n}\varepsilon(n)$$

8-19 设有一个二阶横向滤波器，它可对输入序列的当前值及以前的两个采样值进行平均，即

$$y(n)=\frac{1}{2}[f(n)+f(n-1)+f(n-2)]$$

问该系统是否稳定？若稳定试求其幅频特性和相频特性。

解 对方程取 z 变换，得

$$H(z)=\frac{1}{2}(1+z^{-1}+z^{-2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2+z+1}{z^2}$$

因极点 $z=0$，故系统稳定。频率响应为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega T})$$

$$=\frac{1}{2}[(1+\cos\omega T+\cos 2\omega T)-\mathrm{j}(\sin\omega T+\sin 2\omega T)]$$

故

$$\left|H(e^{\mathrm{j}\omega T})\right|=\frac{1}{2}\sqrt{3+4\cos\omega T+2\cos 2\omega T}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{\sin\omega T+\sin 2\omega T}{1+\cos\omega T+\cos 2\omega T}$$

特性如图 p8-19 所示。

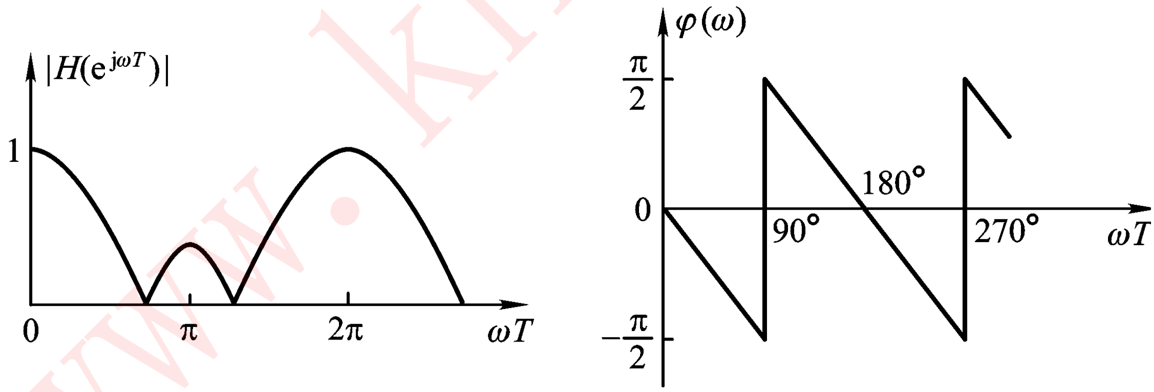


图 p8-19

8-20 设有系统函数

$$H(z)=\frac{z^2-2z+4}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}$$

试求系统的幅频特性和相频特性。

解　由系统函数可得极点

$$z_{1,2}=\frac{1}{4}\pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故系统稳定，从而可得频率响应为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})=\frac{4(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}-2+4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})}{4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}$$

$$=4\cdot\frac{(5\cos\omega T-2)-\mathrm{j}3\sin\omega T}{(5\cos\omega T-2)+\mathrm{j}3\sin\omega T}=4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

从而有

$$\left|H(e^{\mathrm{j}\omega T})\right|=4$$

$$\varphi(\omega)=-2\arctan(\frac{3\sin\omega T}{5\cos\omega T-2})$$

特性如图 p8-20 所示。

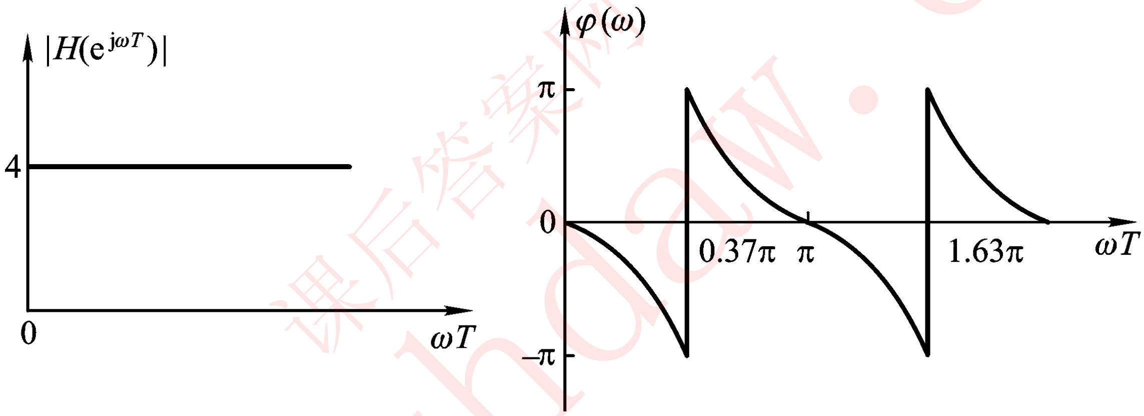


图 p8-20