

探究课本习题 培养发散思维

刘晓东

(浙江湖州吴兴高级中学 313000)

1 问题背景

问题(人教版数学必修 1, 第 27 页第 9 题): 一个圆柱形容器的底面直径是 d cm, 现在以 v cm^3/s 的速度向容器内注入某种溶液. 求容器内溶液的高度 x cm 与注入溶液的时间 t s 之间的函数解析式, 并写出函数的定义域和值域.

应该说这是一道难度不大的题目, 但学生出现的问题较多, 主要集中在字母所表示含义的理解上以及字母运算的能力上. 教材中的每一个题目都是编者智慧的结晶, 为充分发挥这道习题的教育功能, 我采用延时性讲评的策略, 重点是放在对习题的挖掘和对知识网络的构建上.

2 启动思考的多向性, 培养发散思维能力

2.1 转化发散, 培养思维的逻辑性

发散 1 x 是 t 的什么函数? 它的图象怎样?

解 因为 $x = \frac{4v}{\pi d^2} t$, 定义域为 $[0, \frac{h\pi d^2}{4v}]$, 值域是 $[0, h]$,

所以 x 是 t 的一次函数, 其图象如图 1 所示.

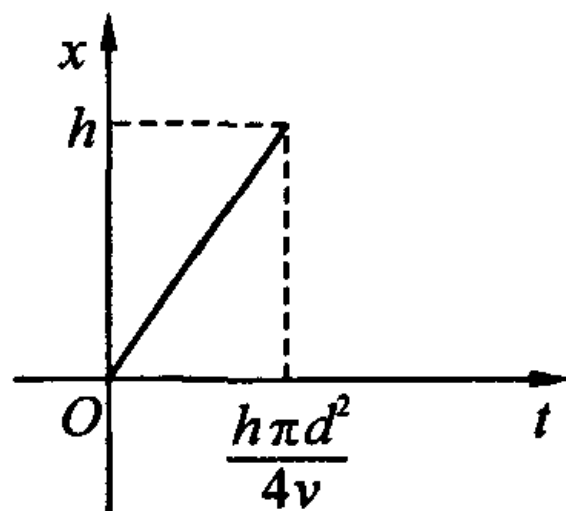


图 1

转化发散是通过保持

原命题的实质而变换其形式的一种发散思维. 通过转化发散, 能够使学生的思维遵循逻辑规律, 从而培养学生的逻辑性.

2.2 阶梯发散, 培养思维的灵活性

发散 2 (1998 年全国卷) 向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如图 2 所示, 那么水瓶的形状是 ().

解 如图 2, 取水深 $h = \frac{H}{2}$ 时, 注水量 $V =$

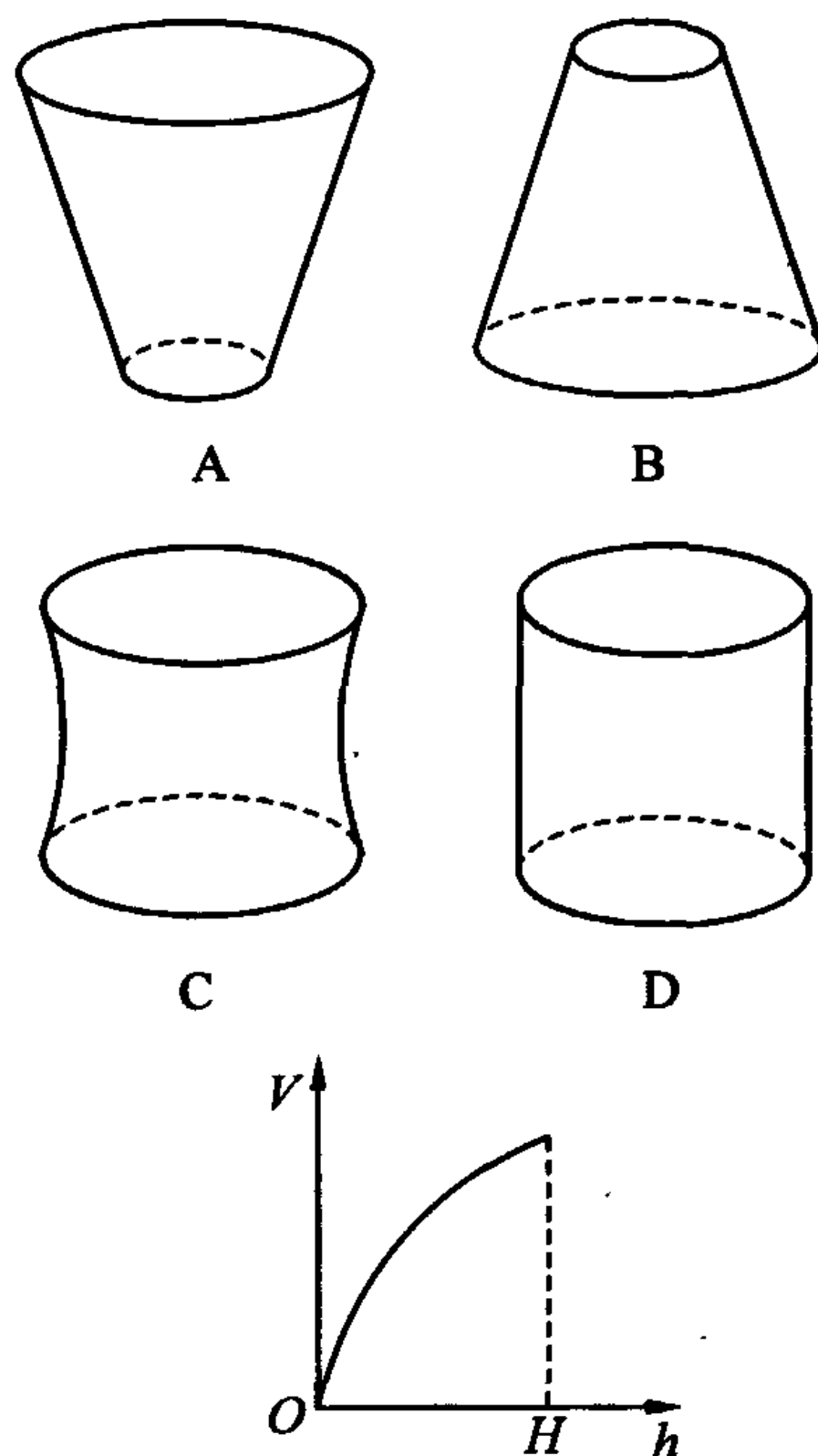


图 2

$V' > \frac{V_0}{2}$, 即水深至一半时, 实际注水量大于水瓶总水量一半. A 中 $V' < \frac{V_0}{2}$, C、D 中 $V' = \frac{V_0}{2}$, 故排除 A、C、D, 选 B.

另外, 我们也可以根据图象的变化速度, 很容易判断出应选 B.

引导学生运用已有的经验、知识、方法去探索 and 发现, 从而获得新知, 这对学生而言是一个知识再创造的过程. 阶梯发散是解题能力或方法逐步深入的一种发散思维. 思维的灵活性是要求我们能够根据客观条件的发展与变化, 及时地改变先前预定的方案、方法, 去寻找新的解题途径. 发散 2 是在相同的背景下, 通过对问题设置方式的阶梯发散, 给问题赋予新的内涵, 要求由水瓶的形状识别函数原型, 这是典型的数形结合问题, “只想

不算”有利于克服死记硬背,可使学生的思维活跃起来,有利于思维灵活性的培养.

2.3 构造发散,培养思维的独立性

发散3 向高为 H 的水瓶中注水,注满为止. 如果水瓶的形状如图3所示,那么注水量 v 与水深 h 的比 $\frac{v}{h}$ 与水深 h 的函数图象大致是()

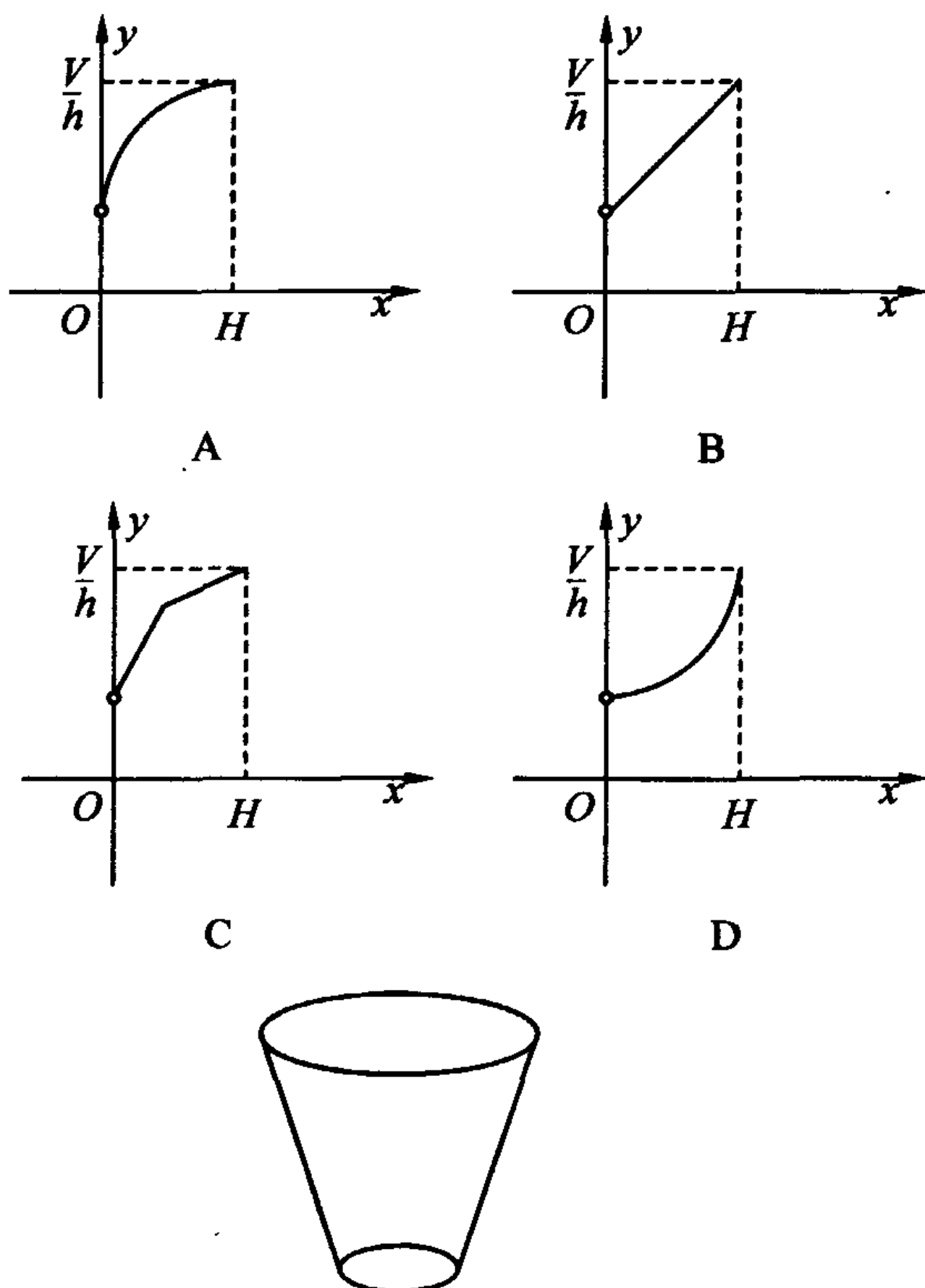


图3

解 由于容器的形状是一个圆台,所以函数(或函数分段式中的一段)不可能是一次函数,故排除B、C,比较A、D只需大致确定函数的解析式即可. 设容器上、下底半径分别是 R , r , 水深为 h 时的水面半径是 x ,

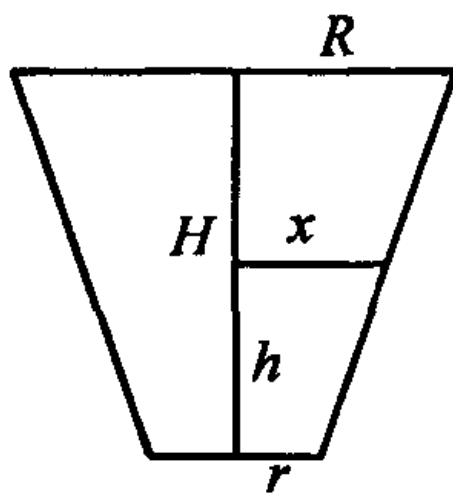


图4

则从图4中可得 $x = \frac{R-r}{H}h + r$. 设 $a = \frac{R-r}{H}$, 则可求得

$$\begin{aligned}\frac{v}{h} &= \frac{\pi}{3}(x^2 + rh + r^2) \\ &= \frac{\pi}{3}(a^2 h^2 + 3arh + 3r^2)\end{aligned}$$

故知图象是开口向上的抛物线的一部分,故选D.

发散3 是在发散2的基础上构造出新的问题,虽然问题背景相似,但构造出来的新问题,思维量显然加大. 构造发散是通过逻辑思维和丰富的联想,恰当地构造出某些元素,使原模型以一种新的面貌出现. 发散3正是通过构造发散来培养学生善于独立地提出问题和解决问题的能力,使学生的思维在原有的基础上有一个新的飞跃,从而加强思维独立性的形成.

2.4 创造发散,培养思维的批判性

思维的批判性是思维活动中独立分析和批判的程度,它主要表现为自己有独立见解,敢于怀疑,有较高辨误能力,它是思维的较高层次. 古人云“学贵有疑”,疑就是一种批判精神,思维的批判性是创造性思维的一个重要特征.

发散4 (2006年江西文科卷)某地一天内的气温 $Q(t)$ (单位: $^{\circ}\text{C}$) 与时刻 t (单位: 时) 之间的关系如图5所示,令 $C(t)$ 表示时间段 $[0, t]$ 内的温差(即时间段 $[0, t]$ 内最高温度与最低温度的差). $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示,则正确的图象大致是().

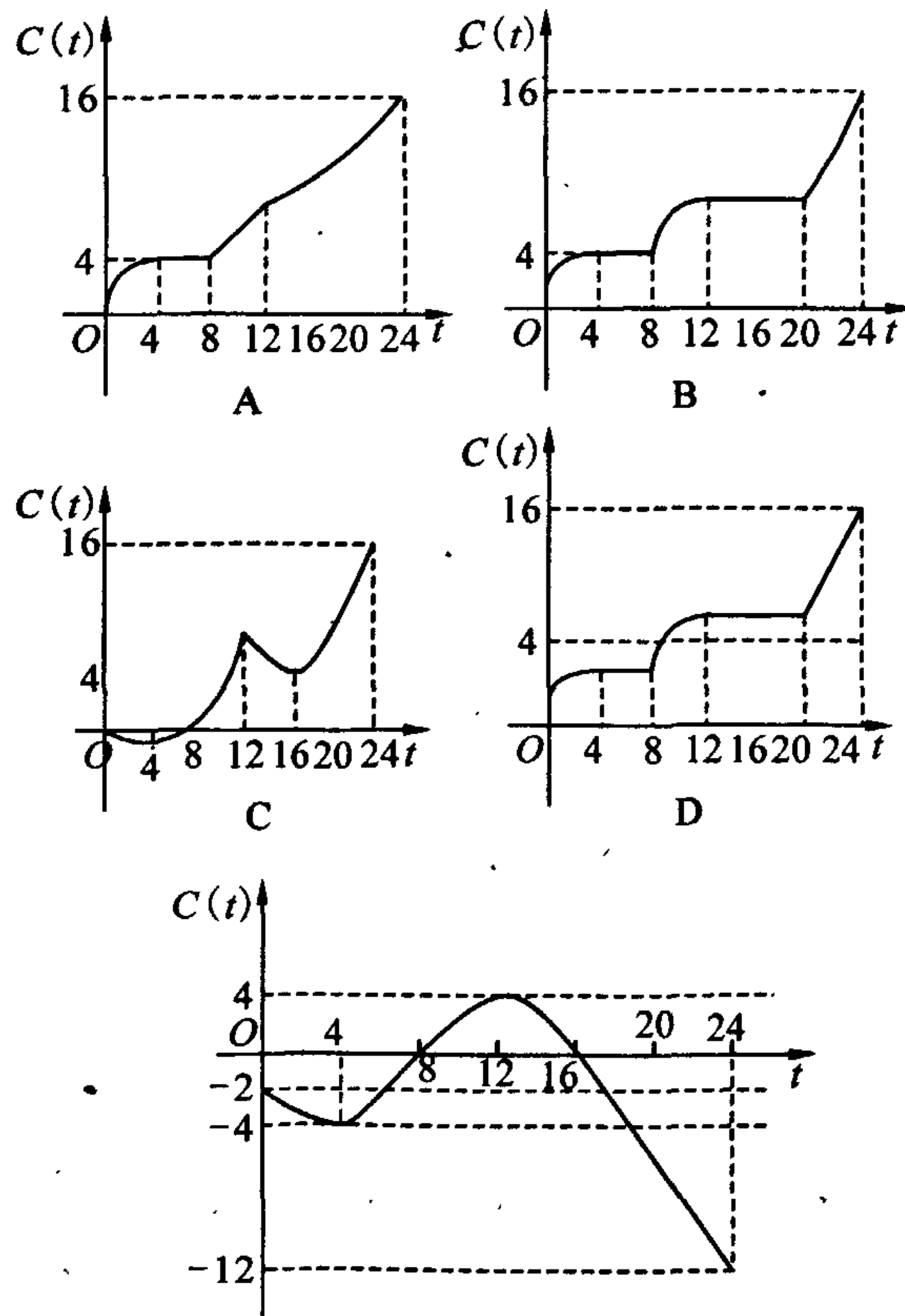


图5

此题选自一本教辅资料,由于编者的疏忽,将选项 D 的图画错,从而造成此题无解. 在教学中,我有意识地设置了这个“陷阱”,指导学生进行辨别和纠正,并从网上查找正确图象,进行比较和辨析,进而培养学生思维的批判性. 创造发散是克服思维定势,不按常规思维解题的发散思维. 发散 4 就是利用创造发散,使学生形成自己的独立见解,敢于怀疑,有较强的辨别能力,从而促进思维批判性的形成.

2.5 综合发散,形成理性思维

综合发散是通过知识点之间的联系进行发散. 通过综合发散,能使学生的思维透过纷繁复杂的表面现象去深入钻研问题,发现问题的本质,从而全面地考察问题,从事物的多种的联系和关系中去认识事物,达到培养思维的深刻性和广阔性的目的.

发散 5 (2006 年重庆卷)如图 6 所示,单位圆中弧 AB 的长为 x , $f(x)$ 表示弧 AB 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍,则函数 $y=f(x)$ 的图象是().

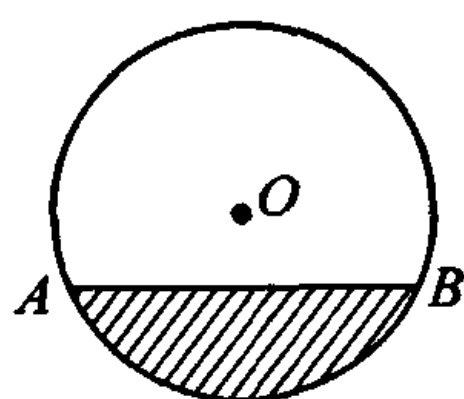
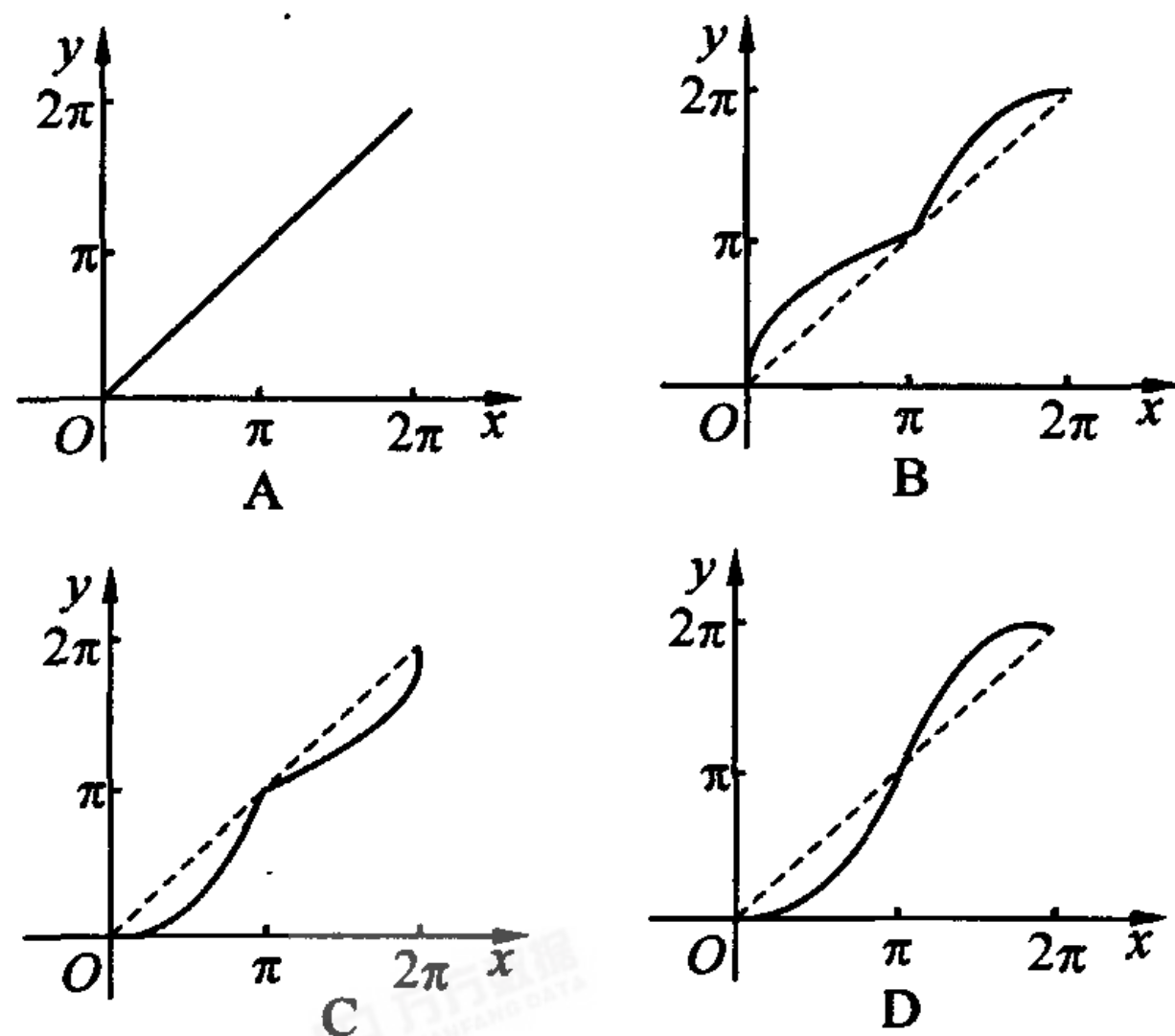


图 6

解 根据圆的性质,深刻理解函数的单调性,我们不难判断应该选 D.

发散 6

(2006 年江西卷)

某地一年的气温 $Q(t)$ (单位: $^{\circ}\text{C}$) 与时间 t (月份) 之间的关系如图 7 所示,已知该年的平均气温为 10°C ,令 $G(t)$ 表示时间段

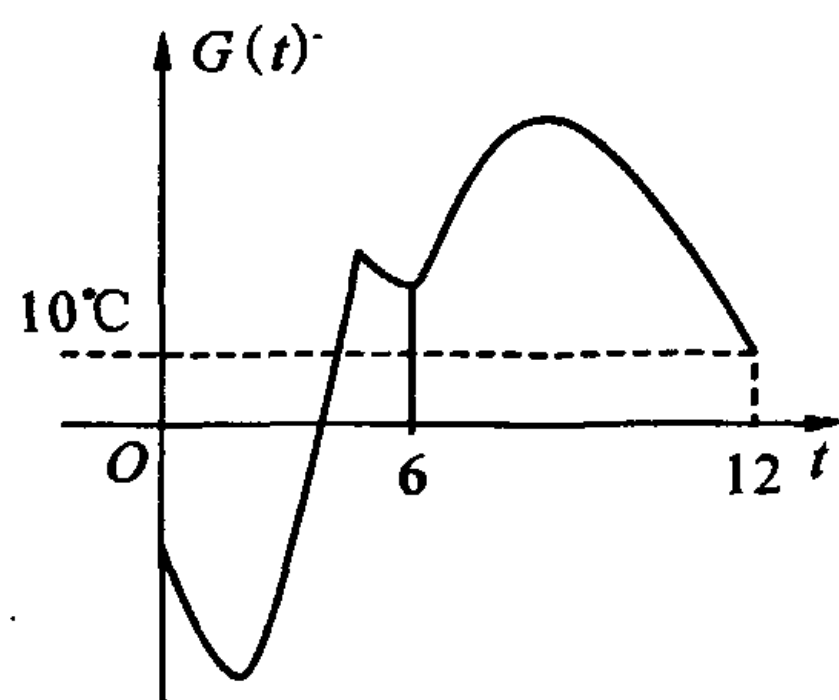
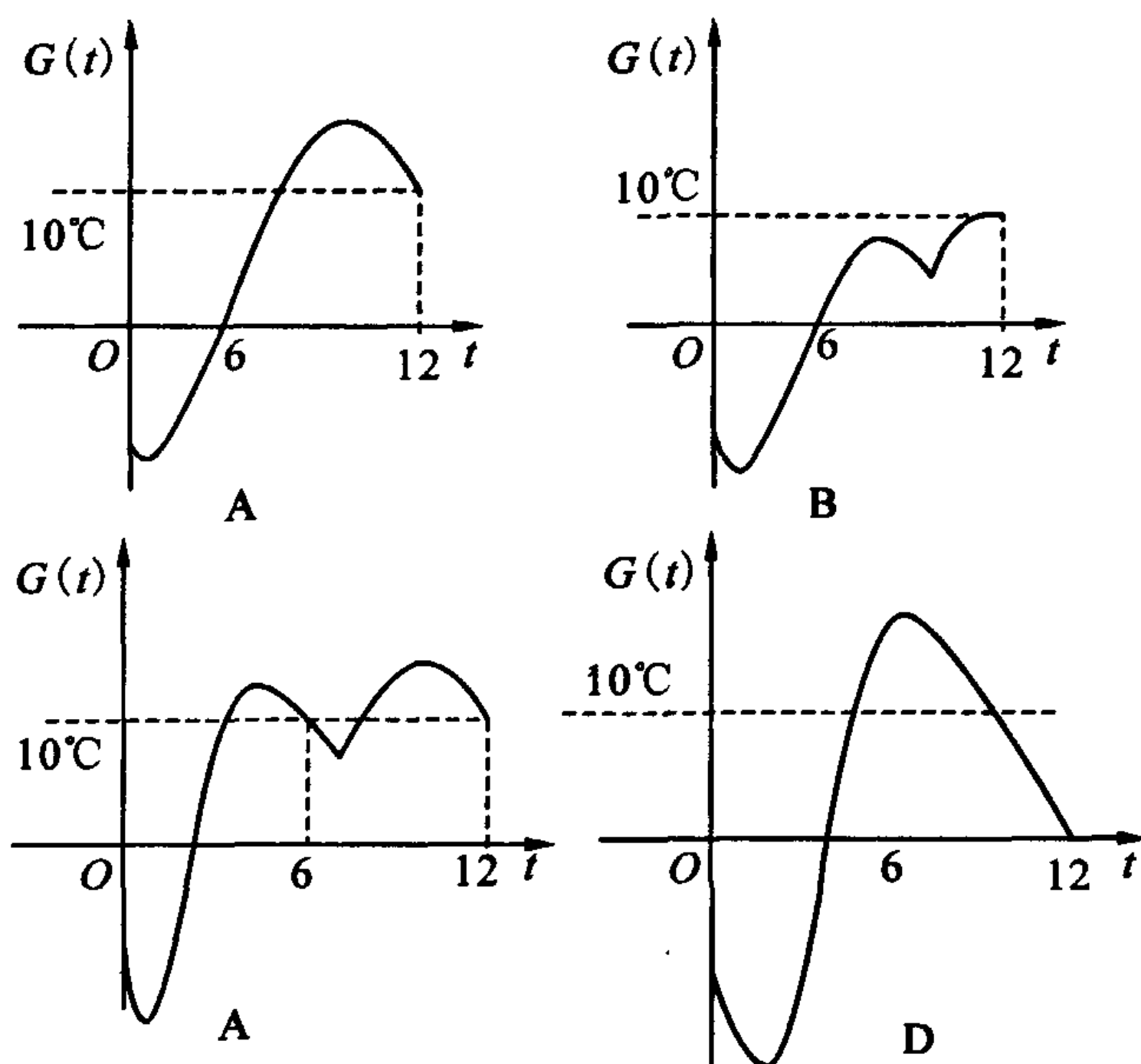


图 7

$[0, t]$ 的平均气温, $G(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示,则正确的应该是().



解 结合平均数的定义用排除法求解,故选

A.

3. 培养化归意识,构建知识网络

我们不妨根据题目的前提、条件和结论建立树型链.

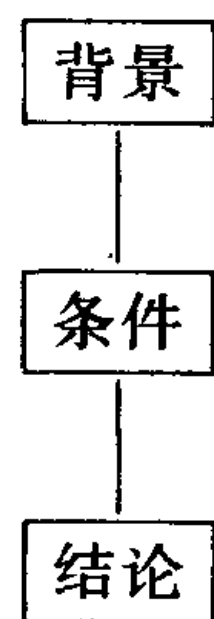


图 8 发散前的链图

显然,发散后的链图要丰富、充实得多,它给我们以足够的空间,任我们去发挥、去想象、去思维,从而形成知识网络.

(下转 44 页)

省的课改的确需要高考来引领. 因此, 一份试题评价必须要从考试性质和社会责任两个方面去审视.

4.2 二面角“超纲”与“超标”之看法

理科第18题中考查了二面角, 其实是相当简单的问题, “考”与“不考”其实关系不大. 从有些老师最近发表的观点来看, 总是把这个问题上“纲”上“标”来做文章. 如果是这样, 本人也要发表自己的看法: 依他们观点《说明》要依据《课标》和《考纲》来制定的, 也就是说《说明》是《课标》和《考纲》依据地方特色的“具体化”, 更切合当地实际情况. 因此, 它是命题的主要依据, 即《考纲》与《说明》发生冲突的地方以《说明》为准. 在“二面角”的问题上《考纲》没具体说是“考”还是“不考”, 但《说明》列举的样题中“求二面角的正切值”, 说明了《说明》的制定者是认为可以考“二面角”的. 因此, 如果《说明》是《课标》和《考纲》依据地方特色的“具体化”, 那么, 在试题中有“二面角”问题不仅没“超纲”, 更没有“超标”. 然而他们却说考“二面角”是“超纲”又“超标”, 这让人不禁要问: 当初在《说明》中列举的“二面角”样题是工作上“疏忽”, 还是有意“忽悠”考生呢?

4.3 《课标》、数学的“标”与“本”之看法

从他们对理科第12题, 文理第20题, 理科第21题(文科第19题)的评价来看, 他们对《课标》理解程度和对数学的认识仅仅停留在表面的“标”上, 认识远远未达到本质的“本”上.

理科第12题的确是沿袭了“割补思想”的“陈题”, 但在《课标》下, 立体几何增加了“三视图”, 强化了“识图”知识和组合体的体积、面积计算, 而是不提“正棱柱(锥)”、“直棱柱(锥)”的定义, 显然命题者恰恰注意到了《课标》的变化, 作为最

后一道选择题, 既考查了学生的能力, 又能较好地体现了区分度.

理科第20题, 从“标”上看似乎是几何概型, 从“本”上看是离散变量的二项分布, 对“几何概型”仅仅停留在“了解”的层面上, 真正考查的重点是二项分布, 本题的“原型”应该是求 $P\left(\left|\frac{4X}{1000} - 1\right| < 0.03\right)$ 的概率, 如果不改动, 就会有相当多的学生不知道解绝对值不等式的解法. 命题者把绝对值打开为考生作了一下铺垫, 人为加宽了入口处, 体现了命题者的良苦用心, 作为压轴题有很好区分度. 本题充分体现了高考数学试题的三个特征: 一是努力体现课程改革的精神; 二是坚持了“重基础、出活题、考能力”的命题原则; 三是坚持对数学应用能力的考查. 文科第20题选取以一元二次方程有实数解为背景对古典概型和几何概型进行了考查, 第1问由判别式不小于零, 不难得出基本事件的个数和事件A的个数, 得到概率是不难的, 第2问是由离散的实数对转化成平面区域问题, 由于有第1问作为铺垫, 并且平时对此类问题训练的较多. 第2问就很容易想到区域问题来做, 于是试题的难度就降低了很多.

理科第21题(文科第19题)从“标”上来看象是分式不等式, 但从数学本质上来看是在条件 $x > -a$ (或 $x > -\frac{3}{2}$) 条件下解含参量 a 的一元二次不等式有解的条件. 这个题与常规的一元三次函数的单调性问题是同一性质的不同的表现形式, 即利用导数研究函数的性质, 其本质都是解有条件的二次不等式问题, 而不是他们所说的解分式不等式.

(上接 39 页)

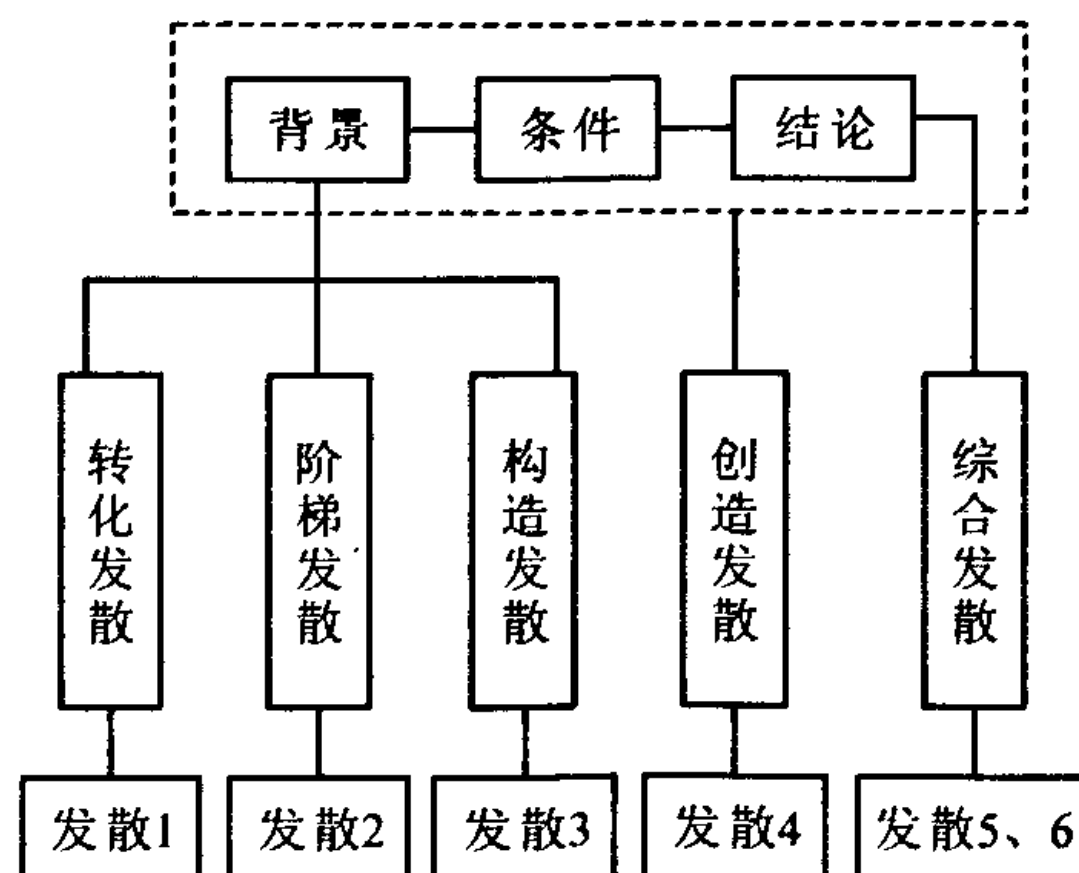


图9 发散后的链图