

《电磁场与电磁波》自测试题

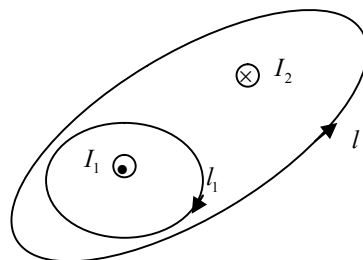
1. 介电常数为 ε 的均匀线性介质中, 电荷的分布为 $\rho(\vec{r})$, 则空间任一点 $\nabla \cdot \vec{E} =$ _____, $\nabla \cdot \vec{D} =$ _____。

2. ρ/ε ; ρ

1. 线电流 I_1 与 I_2 垂直穿过纸面, 如图所示。已知 $I_1 = 1A$, 试问

$\oint_{l_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} =$ _____;

若 $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$, 则 $I_2 =$ _____。



2. -1 ; $1A$

1. 镜像法是用等效的_____代替原来场问题的边界, 该方法的理论依据是_____。

2. 镜像电荷; 唯一性定理

1. 在导电媒质中, 电磁波的相速随频率改变的现象称为_____, 这样的媒质又称为_____。

2. 色散; 色散媒质

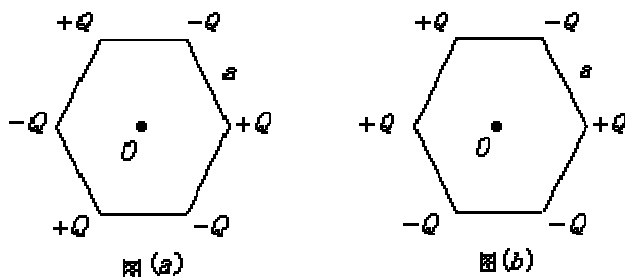
1. 已知自由空间一均匀平面波, 其磁场强度为 $\vec{H} = \vec{e}_y H_0 \cos(\omega t + \beta x)$, 则电场强度的方向为_____, 能流密度的方向为_____。

2. $\vec{e}_z$; $-\vec{e}_x$

1. 传输线的工作状态有_____, _____, _____三种, 其中_____状态不传递电磁能量。

2. 行波; 驻波; 混合波; 驻波

1. 真空中有一边长为 a 的正六角形, 六个顶点都放有点电荷。则在图示两种情形下, 在六角形中心点处的场强大小为图 a 中 $E =$ _____; 图 b 中 $E =$ _____。



2. 0 ; $\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$

1. 平行板空气电容器中, 电位 $\varphi = ax^2 + bx + cy^2 + dz^2 + 5$ (其中 a, b, c 与 d 为常数), 则电场强度 $\vec{E} =$ _____, 电荷体密度 $\rho =$ _____。

2. $-\left[(2ax+b)\vec{e}_x + 2cye_y + 2dze_z\right]$; $-(2a+2c+2d)\epsilon_0$

1. 在静电场中, 位于原点处的电荷场中的电场强度 $\mathbf{E}$ 线是一族以原点为中心的_____线, 等位线为一族_____。

2. 射 ; 同心圆

1. 损耗媒质中的平面波, 其传播系数 γ 可表示为_____的复数形式, 其中表 示衰减的为_____。

2. $\beta - j\alpha$; α

1. 在无损耗传输线上, 任一点的输入功率都 _____, 并且等于_____ 所得到的 功率。

2. 相同; 负载

1. 在静电场中, 线性介质是指介质的参数不随_____ 而改变, 各向 同性的线性介质是指介质的特性不随_____ 而变化的线性介质。

2. 场量的量值变化; 场的方向变化

1. 对于只有 $(n+1)$ 个带电导体的静电场系统, 取其中的一个导体为参考点, 其静电能量可表示成

$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k \varphi_k$, 这里 k 号导体上的电位 φ_k 是指_____的电荷在 k 号导体上引起的电位, 因此计算的结果表示的是静电场的_____ 能量的总和。

2. 所有带电导体; 自有和互有

1. 请用国际单位制填写下列物理量的单位 磁场力 $\mathbf{F}$ _____, 磁导率 μ _____。

2. N ; H/m

1. 分离变量法在解三维偏微分方程 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ 时, 其第一步是令 $\varphi(x, y, z) =$ _____, 代入方程后将得到_____ 个 _____ 方程。

2. $X(x)Y(y)Z(z)$; 3, 常微分。

1. 用差分法时求解以位函数为待求量的边值问题, 用 _____ 阶有限差分近似表示 x_0 处的 $d\varphi/dx$, 设 $h = \Delta x$, 则正确的差分格式是 _____。

2. 一; $\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_0 - h)}{h}$

1. 在电导率 $\gamma = 10^3 \text{ S/m}$ 、介电常数 $\epsilon = 6\epsilon_0$ 的导电媒质中, 已知电场强度 $\mathbf{E} = 2 \times 10^{-5} \sin(10^8 \pi t)$, 则在 $t = 2.5 \times 10^{-9} \text{ s}$ 时刻, 媒质中的传导电流密度 $\mathbf{J}_c =$ _____、位移电流密度 $\mathbf{J}_d =$ _____

($\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$)

2. $1.41 \times 10^{-2} A/m^2$; $2.36 \times 10^{-7} A/m^2$

1. 终端开路的无损传输线上, 距离终端 _____ 处为电流波的波腹; 距离终端 _____ 处为电流波的波节。

2. $\frac{n\lambda}{4} \quad n=1, 3, 5, \dots$; $\frac{n\lambda}{2} \quad n=0, 1, 2, \dots$

1. 镜像法的理论根据是_____。镜像法的基本思想是用集中 的镜像电荷代替 _____ 的分布。

2. 场的唯一性定理 ; 未知电荷

1. 请采用国际单位制填写下列物理量的单位 电感 L _____, 磁通 Φ _____。

2. $H; Wb$

1. 静态场中第一类边值问题是已知整个边界上 _____, 其数学表达式 为 _____。

2. 位函数的值; $\phi_s = f(s)$

1. 坡印廷矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 它的方向表示 _____ 的传输方向, 它的大小 表示单位时间通过与能流方向相垂直的 _____ 电磁能量。

2. 电磁能量; 单位面积的

1. 损耗媒质中其电场强度振幅和磁场强度振幅以 _____, 因子随 z 增大而 _____。

2. $e^{-\alpha z}$; 减小

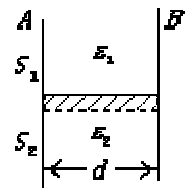
1. 所谓均匀平面波是指等相位面为 _____, 且在等相位面上各点的场强 _____ 的电磁波。

2. 平面; 相等

1. 设媒质 1 介电常数 ϵ_1 与媒质 2 (介电常数为 ϵ_2) 分界面上存在自由电荷面密度 σ , 试用电位函数 ϕ 写出其分界面上的边界条件 _____ 和 _____。

2. $\phi_1 = \phi_2; \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma$

1. 图示填有两层介质的平行板电容器, 设两极板上半部分的面积 为 S_1 , 下半部分的面积为 S_2 , 板间距离为 d , 两层介质的介电常数分别为 ϵ_1 与 ϵ_2 。介质分界面垂直于两极板。若忽略端部的边缘效应, 则此平行板电容器的电容应为 _____。



2. $\frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$

1. 用以处理不同的物理场的类比法, 是指当描述场的数学方式具有相似的 _____ 和相似的 _____,

则它们的解答在形式上必完全相似，因而在理论计算时，可以把某一种场的分析计算结果，推广到另一种场中去。

2. 微分方程；边界条件

1. 电荷分布在有限区域的无界静电场问题中，对场域无穷远处 ($r \rightarrow \infty$) 的边界条件可表示为_____，即位函数 φ 在无限远处的取值为_____。

2. $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi =$ 有限值；0

1. 损耗媒质中的平面波，其电场强度 $E = e^{-\alpha z} E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}$ ，其中 α 称为_____， β 称为_____。

2. 衰减系数；相位系数

1. 在自由空间中，均匀平面波等相位面的传播速度等于_____，电磁波能量传播速度等于_____。

2. 光速；光速

1. 均匀平面波的电场和磁场除了与时间有关外，对于空间的坐标，仅与_____的坐标有关。均匀平面波的等相位面和_____方向垂直。

2. 传播方向；传播

1. 在无限大真空中，一个点电荷所受其余多个点电荷对它的作用力，可根据_____定律和_____原理求得。

2. 库仑；叠加

1. 真空中一半径为 a 的圆球形空间内，分布有体密度为 ρ 的均匀电荷，则圆球内任一点的电场强度

$\vec{E}_1 =$ _____ $\vec{e}_r (r < a)$ ；圆球外任一点的电场强度 $\vec{E}_2 =$ _____ $\vec{e}_r (r > a)$ 。

2. $\rho r / 3\epsilon_0$ ； $\rho a^2 / 3\epsilon_0 r^2$ ；

1. 镜像法的关键是要确定镜像电荷的个数、_____和_____。

2. 位置；大小

1. 一均匀平面波由空气垂直入射到良导体表面，则其场量衰减为表面值的 $1/e$ 时的传播距离称为该导体的_____，其值等于_____，(设传播系数 $\Gamma = \alpha + j\beta$)。

2. 透入深度 (趋肤深度)； $1/\alpha$

1. 电磁波发生全反射的条件是，波从_____，且入射角应不小于_____。

2. 光密媒质进入光疏媒质；临界角

1. 若媒质 1 为完纯介质，媒质 2 为理想导体。一平面波由媒质 1 入射至媒质 2，在分界面上，电场强度的反射波分量和入射波分量的量值_____；相位_____，(填相等或相反)。2. 相等；相反

1. 设空气中传播的均匀平面波，其磁场为 $H = e^{-\alpha z} 4 \times 10^6 \cos(10^8 \pi t - \beta y + \pi/4)$ A/m，则该平面波的传播

方向为_____，该波的频率为_____。

2. $\vec{e}_y$; $5 \times 10^6 \text{ Hz}$

1. 已知铜的电导率 $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ，相对磁导率 $\mu_r = 1$ ，相对介质电常数 $\epsilon_r = 1$ ，对于频率为 $f = 1 \text{ MHz}$ 的电磁波在铜中的透入深度为_____，若频率提高，则透入深度将变_____。

2. $66 \mu\text{m}$; 小

1. 一右旋圆极化波，电场振幅为 E_0 ，角频率为 ω ，相位系数为 β ，沿 $\vec{e}_z$ 传播，则其电场强度 $\vec{E}$ 的瞬时表示为_____，磁场强度 $\vec{H}$ 的瞬时表示为_____。

2. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \vec{e}_x + E_0 \sin(\omega t - \beta z) \vec{e}_y$; $\vec{H} = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \beta z) \vec{e}_y + \frac{E_0}{Z} \sin(\omega t - \beta z) \vec{e}_x$

1. 设一空气中传播的均匀平面波，已知其电场强度为 $\vec{E} = \vec{e}_y E_0 \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z)$ ，则该平面波的磁场强度 $\vec{H} =$ _____；波长为_____。

2. $-\vec{e}_x \frac{1}{120\pi} E_0 \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z)$; 1m

1. 在电导率 $\gamma = 10^5 \text{ S/m}$ 、介电常数 $\epsilon = 6\epsilon_0$ 的导电媒质中，已知电场强度 $\vec{E} = 2 \times 10^{-5} \sin(10^8 \pi t) \vec{e}_x$ ，则在 $t = 2.5 \times 10^{-9} \text{ s}$ 时刻，媒质中的传导电流密度 $\vec{J}_c =$ _____、位移电流密度 $\vec{J}_d =$ _____

_____ ($\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$)

2. $1.414 \times 10^{-2} \text{ A/m}^2$; $2.36 \times 10^{-7} \text{ A/m}^2$

1. 在分别位于 $x = 0$ 和 $x = a$ 处的两块无限大的理想导体平板之间的空气中，时变电磁场的磁场强度

$\vec{H} = \vec{e}_y H_0 \cos(\omega t - \beta z) \text{ A/m}$ 则两导体表面上的电流密度分别为 $\vec{J}_s|_{x=0} =$ _____ 和 $\vec{J}_s|_{x=a} =$ _____。

2. $\vec{e}_z \cos(\omega t - \beta z)$; $-\vec{e}_z \cos(\omega t - \beta z)$

1. 麦克斯韦方程组中的 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ 和 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 表明不仅_____要产生电场，而且随时间变化的_____也要产生电场。

2. 电荷；磁场

1. 时变电磁场中，根据方程_____，可定义矢量位 $\vec{A}$ 使 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，再根据方程_____，

可定义标量位 φ , 使 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$2. \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0; \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

1. 无源真空中, 时变电磁场的磁场强度 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 满足的波动方程为_____ ; 正弦电磁场 (角频率为 ω) 的磁场强度复矢量 (即相量) $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 满足的亥姆霍兹方程为_____。

$$2. \nabla^2 \bar{\mathbf{H}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = 0; \nabla^2 \bar{\mathbf{H}} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \bar{\mathbf{H}} = 0$$

1. 在介电常数为 ϵ , 磁导率为 μ_0 、电导率为零的无损耗均匀媒质中, 已知位移电流密度复矢量 (即相量) $\mathbf{J}_d = \mathbf{e}_x 2e^{-j\beta z} \text{ A/m}^2$, 那么媒质中电场强度复矢量 (即相量) $\mathbf{E} =$ _____ ; 磁场强度复矢量 (即相量) $\mathbf{H} =$ _____。

$$2. \mathbf{e}_x \frac{2}{j\omega\epsilon} e^{-j\beta z} \text{ V/m}; \mathbf{e}_y \frac{\beta}{j\omega^2 \mu_0 \epsilon} e^{-j\beta z} \text{ A/m}$$

1. 在电导率 $\gamma = 4 \text{ S/m}$ 和介电常数 $\epsilon = \epsilon_0$ 的均匀媒质中, 已知电磁场的电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(2\pi f t) \text{ V/m}$, 则当频率 $f =$ _____ 且时间 $t =$ _____ , 媒质中位移电流

密度的大小与传导电流密度的大小相等。(注: $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$)

$$2. 7.2 \times 10^{10} \text{ Hz}; \frac{10^{-9}}{72} (n + \frac{1}{8}), n = 0, 1, 2, \dots$$

1. 半径为 a 的圆形线圈放在磁感应强度 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x (3t^2 + 2t)$ 的磁场中, 且 $\mathbf{B}$ 与线圈平面垂直, 则线圈上的感应电动势 $\mathcal{E} =$ _____ , 感应电场的方向为_____。

$$2. 2\pi(3t+1)a^2; \bar{\mathbf{e}}_\phi$$

1. 真空中, 正弦电磁场的电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{z}, t)$ 和磁场强度 $\mathbf{H}(\mathbf{z}, t)$ 分别为

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{e}_x E_0 \sin(\beta z) \cos(\omega t)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{e}_y \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos(\beta z) \sin(\omega t)$$

那么, 坡印廷矢量 $\mathbf{S}(z, t) =$ _____。

平均坡印廷矢量 $\mathbf{S}_{\text{av}} =$ _____。

2. $\bar{e}_z \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \sin(\beta z) \sin(2\omega t); \quad 0$

1. 两个载流线圈的自感分别为 L_1 和 L_2 ，互感为 M ，分别通有电流 I_1 和 I_2 ，则该系统的自有能为_____，互有能为_____。

2. $\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2; \quad M I_1 I_2$

1. 在恒定磁场中，若令磁矢位 $\mathbf{A}$ 的散度等于零，则可以得到 $\mathbf{A}$ 所满足的微分方程_____。但若 $\mathbf{A}$ 的散度不为零，还能得到同样的微分方程吗？_____。

2. $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$; 不能

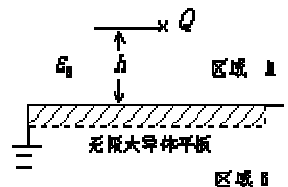
1. 在平行平面场中， $\mathbf{B}$ 线与等 $\mathbf{A}$ 线相互_____（填写垂直、重合或有一定的夹角）

1. 恒定磁场中不同媒质分界面处， $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{B}$ 满足的边界条件是_____，_____或_____，_____。

2. $H_{1t} - H_{2t} = J_s$; $B_{1n} - B_{2n} = 0$; $\bar{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s$; $\bar{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0$;

7、试题关键字镜像法

1. 图示点电荷 Q 与无限大接地导体平板的静电场问题中，为了应用镜像法求解区域 A 中的电场，基于唯一性定理，在确定镜像法求解时，是根据边界条件（用电位表示）和_____。



2. $\varphi_A = \varphi_B = 0$; $\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_A}{\partial n} = \sigma$

1. 镜像法的关键是要确定镜像电荷的大小、_____和_____。

2. 位置; 个数

1. 根据场的唯一性定理在静态场的边值问题中，只要满足给定的_____条件，则泊松方程或拉普拉斯方程的解是_____。

2. 边界; 唯一的

1. 以位函数 φ 为待求量的边值问题中，设 $f(s)$ 为边界点 s 的点函数，则所谓第一类边值问题是指给定 $\varphi =$ _____。

2. $f(s)$;

1. 分离变量法用于求解拉普拉斯方程时,具体步骤是1、先假定待求的_____由_____的乘积所组成。2、把假定的函数代入_____,使原来的_____方程转换为两个或三个常微分方程。解这些方程,并利用给定的边界条件决定其中待定常数和函数后,最终即可解得待求的位函数。

2. 位函数; 两个或三个各自仅含有一个坐标变量的; 拉氏方程; 偏微分;

1. 静态场中第一类边值问题是已知整个边界上 _____, 其数学表达式为_____。

2. 位函数的值; $\varphi|_s = f(s)$

1. 以位函数 φ 为待求量的边值问题中, 设 $f(s)$ 为边界点 s 的点函数, 则所谓第二类边值问题是指给定式 _____。

2. $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f(s)$

1. 镜像法的理论根据是 _____。镜像法的基本思想是用集中的镜像电荷代替 _____ 的分布。

2. 场的唯一性定理; 求知电荷

1. 电源以外恒定电流场基本方程的积分形式是_____, 它说明恒定电流场的传导电流是_____。

2. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$; 连续的

1. 电通密度(电位移)矢量的定义式为 $\vec{D} =$ _____; 若在各向同性的线性电介质 ϵ 中, 则电通密度 $\vec{D}$ 与电场强度 $\vec{E}$ 的关系又可表示为 $\vec{D} =$ _____。

2. $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$; $\epsilon \vec{E}$

1. 介电常数的电导率分别为 ϵ_1, ϵ_2 及 γ_1, γ_2 的两种导电媒质的交界面, 如已知媒质 2 中电流密度的法向分量 J_{2n} , 则分界面上的电荷面密度 $\sigma =$ _____, 要电荷面密度为零, 必须满足 _____ 条件。

2. $J_{2n} \frac{\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1}{\gamma_1 \gamma_2}$; $\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}$

1. 写出下列两种情况下, 介电常数为 ϵ 的均匀无界媒质中电场强度的量值随距离的变化规律 (1) 带电金属球(带电荷量为 Q) $E =$ _____; (2) 无限长线电荷(电荷线密度为 τ) $E =$ _____。

2. $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$; $\tau/2\pi\epsilon r$

1. 真空中一半径为 a 的球壳, 均匀分布电荷 Q , 壳内任一点的电场强度 $E_1 =$ _____ $e_r (r < a)$; 壳外任一点的电场强度 $E_2 =$ _____ $e_r (r > a)$ 。

2. 0; $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$

1. 电偶极子是指_____，写出表征其特征的物理量电偶极矩的数学表达式_____。

2. 两个相距一定距离的等量异号的电荷； $\vec{p} = q\vec{l}$

1. 矢量场中 $\vec{A}$ 围绕某一点 P 作一闭合曲面 S，则矢量 $\vec{A}$ 穿过闭合曲面 S 的通量为_____；若 $\Phi > 0$ ，则流出 S 面的通量_____ 流入的通量，即通量由 S 面向外_____，说明 S 面内有_____。

2. $\phi = \iiint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ ；大于；扩散；正源

1. 矢量场的散度在直角坐标下的表示形式为_____，它的结果为一_____场。

2. $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ ；标量

1. 散度定理的表达式为_____；斯托克斯定理的表达式为_____。

2. $\iiint_S \vec{A} d\vec{s} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} \cdot d\vec{v}$ ； $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$

1. 标量场的梯度是一_____场，表示某一点处标量场的_____。

2. 矢量；变化率

1. 研究一个矢量场，必须研究它的_____和_____，才能确定该矢量场的性质，这即是_____。

2. 散度；旋度；亥姆霍兹定理

1. 标量场的梯度的方向为_____；数值为_____。

2. 指向标量增加率最大的方向或是等值面的法线方向；该方向上标量的增加率

1. 真空中两个点电荷之间的作用力（_____）

A. 若此两个点电荷位置是固定的，则不受其他电荷的引入而改变

B. 若此两个点电荷位置是固定的，则受其他电荷的引入而改变

C. 无论固定与不固定，都不受其他电荷的引入而改变

2. A

1. 真空中有三个点电荷 a 、 b 、 c 。 a 带电荷量 $+Q_1$ ， b 带电荷量 $-Q_2$ ，且 $Q_1 > Q_2$ 。要使每个点电荷所受的电场力都为零，则（_____）

A. c 电荷位于 a 、 b 电荷连线的延长线上，一定与 $+Q_1$ 同号，且电荷量一定大于 Q_2

B. c 电荷可位于连线的任何处，可正、可负，电荷量可为任意大小

C. c 电荷应位于 a 、 b 电荷连线的延长线上，电荷量可正、可负，且电荷量一定要大于 Q_1

2. A

1. 如图所示两个载流线圈, 所受的电流力使两线圈间的距离
()



A. 扩大; B. 缩小; C. 不变

2. A

1. 电流是电荷运动形成的, 面电流密度可以表示成 ()

A. $\mathbf{J} = \tau \mathbf{v}$; B. $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{v}$; C. $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$

2. B

1. 在导波系统中, 存在 TEM 波的条件是

A. $\gamma^2 + k^2 > 0$; B. $\gamma^2 + k^2 < 0$; C. $\gamma^2 + k^2 = 0$

2. C

1. 两个载流线圈的自感分别为 L_1 和 L_2 , 互感为 M 。分别通有电流 I_1 和 I_2 , 则系统的储能为 ()

A. $W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$

B. $W_m = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + M I_1 I_2)$

C. $W_m = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + 2 M I_1 I_2)$

2. C

1. 用有限差分近似表示 x_0 处的 $d\varphi/dx$, 设 $h = \Delta x$, 则不正确的式子是 ()

A. $\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_0 - h)}{h}$; B. $\frac{\varphi(x_0 + h/2) - \varphi(x_0 - h/2)}{h}$; C. $\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0 - h)}{h}$

2. C

1. 损耗媒质中的电磁波, 其传播速度随媒质电导率 γ 的增大而 ()

A. 不变; B. 减小; C. 增大

2. B

1. 在无损耗媒质中, 电磁波的相速度与波的频率 ()

A. 成正比; B. 成反比; C. 无关

2. C

1. 同轴线、传输线 ()

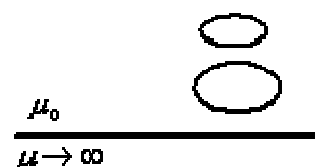
- A. 只能传输 TEM 波
 B. 只能传输 TE 波和 TM 波
 C. 既能传输 TEM 波，又能传输 TE 波和 TM 波

2. C

7、试题关键字自感、互感

1. 两线圈的自感分别为 L_{01} 和 L_{02} ，互感为 L_M ，若在 线圈下方放置一无限大铁磁平板，如图所示，则（ ）

- A. L_{01} 、 L_{02} 增加， L_M 减小
 B. L_{01} 、 L_{02} 和 L_M 均增加
 C. L_{01} 、 L_{02} 不变， L_M 增加



2. B

1. 两个极化方向相互垂直的线极化波叠加，当振幅相等，相位差为 $\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，将形成（ ）

- A. 线极化波； B. 圆极化波； C. 椭圆极化波

2. B

1. 均匀平面波由介质1垂直入射到理想导体表面时，产生全反射，入射波与反射波叠加将形成驻波，其电场强度和磁场的波节位置（ ）

- A. 相同； B. 相差 $\lambda/4$ ； C. 相差 $\lambda/2$

2. B

1. 已知一导电媒质中平面电磁波的电场强度表示为 $\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - 8.89z)$ ，则该导电媒质可视为（ ）

- A. 良导体； B. 非良导体； C. 不能判定

2. A

1. 已知一均匀平面波以相位系数 30 rad/m 在空气中沿 x 轴方向传播，则该平面波的频率为（ ）

- A. 300 MHz ； B. 900 MHz ； C. $\frac{45}{\pi} \times 10^2 \text{ MHz}$

2. C

1. 已知电磁波的电场强度为 $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x \cos(\omega t - \beta z) - \vec{e}_y \sin(\omega t - \beta z)$ ，则该电磁波为（ ）

- A. 左旋圆极化波； B. 右旋圆极化波； C. 线椭圆极化波

2. A

1. 均匀平面波从一种本征阻抗（波阻抗）为 Z_1 的无损耗媒质垂直入射至另一种本征阻抗为 Z_2 的无损耗媒质的平面上，若 $Z_1 > Z_2$ ，则两种媒质中功率的时间平均值 P_{av} 的关系为（ ）

- A. $P_{av1} = P_{av2}$; B. $P_{av1} > P_{av2}$; C. $P_{av1} < P_{av2}$

2. A

1. 已知一均匀平面波的电场强度振幅为 40 V/m ，当 $t=0$ 时，原点处的 $\mathbf{E}$ 达到最大值且取向为 $\mathbf{e}_x$ ，该平面波以相位系数 30 rad/m 在空气中沿 $-\mathbf{e}_z$ 方向传播，则其电场强度 $\mathbf{E}$ 可表示为（ ）

- A. $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 40 \cos(90 \times 10^8 t - 30x) \text{ V/m}$; B. $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 40 \cos(90 \times 10^8 t + 30x) \text{ V/m}$

- C. $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 40 \cos(\frac{45}{\pi} \times 10^8 t - 30x) \text{ V/m}$

2. B

1. 若介质1为完纯介质，其介电常数 $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ ，磁导率 $\mu_1 = \mu_0$ ，电导率 $\gamma_1 = 0$ ；介质2为空气。平面电磁波由介质1向分界平面上斜入射，入射波电场强度与入射面平行，若入射角 $\theta = \pi/4$ ，则介质2（空气）中折射波的折射角 θ' 为（ ）

- A. $\pi/4$; B. $\pi/2$; C. $\pi/3$

2. B

1. 一金属圆线圈在均匀磁场中运动，以下几种情况中，能产生感应电流的是（ ）

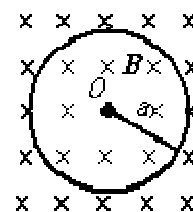
- A. 线圈沿垂直于磁场的方向平行移动
B. 线圈以自身某一直径为轴转动，转轴与磁场方向平行
C. 线圈以自身某一直径为轴转动，转轴与磁场方向垂直

2. C

1. 如图所示，半径为 a 的圆线圈处于变化的均匀磁场中，线圈平面与 $\mathbf{B}$ 垂直。已知

$\mathbf{B} = 3t^2 + 2t + 1$ ，则线圈中感应电场强度 $\mathbf{E}_i$ 的大小和方向为（ ）

- A. $2\pi(3t+1)a^2$ ，逆时针方向
B. $(3t+1)a$ 顺时针方向
C. $(3t+1)a$ 逆时针方向



2. C

1. 已知正弦电磁场的电场强度矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0[\mathbf{e}_x \cos(\omega t - \beta y) - \mathbf{e}_z \sin(\omega t - \beta y)]$

则电场强度复矢量（即相量）为（ ）

A. $\mathbf{E} = -E_0 (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_z) e^{-jy}$,

B. $\mathbf{E} = E_0 (\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_z) e^{-jy}$

C. $\mathbf{E} = E_0 (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_z) e^{-jy}$

2. B

1. 已知无源真空中, 正弦电磁场的复矢量 (即相量 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$)

其中 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{B}_0$ 是常矢量, 那么一定有 ()

A. $\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 = 0$ 和 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0 = 0$

B. $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 = 0$; C. $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0$

2. C

1. 对于载有时变电流的长直螺线管中的坡印廷矢量 $\mathbf{S}$, 下列陈述中, 正确的是 ()

A. 无论电流增大或减小, $\mathbf{S}$ 都向内

B. 无论电流增大或减小, $\mathbf{S}$ 都向外

C. 当电流增大, $\mathbf{S}$ 向内; 当电流减小时, $\mathbf{S}$ 向外

2. B

1. 比较位移电流与传导电流, 下列陈述中, 不正确的是 ()

A. 位移电流与传导电流一样, 也是电荷的定向运动

B. 位移电流与传导电流一样, 也能产生涡旋磁场

C. 位移电流与传导电不同, 它不产生焦耳热损耗

2. A

1. 已知在电导率 $\gamma = 4.0 \text{ S/m}$ 、介电常数 $\epsilon = 80 \epsilon_0$ 的海水中, 电场强度 $\mathbf{E} = 20 \sin(10^9 \pi t) \text{ V/m}$, 则位移

电流密度为 () ($\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$) :

A. $\mathbf{J}_d = 80 \sin(10^9 \pi t) \text{ A/m}^2$

B. $\mathbf{J}_d = 2 \times 10^{10} \cos(10^9 \pi t) \text{ A/m}^2$

C. $\mathbf{J}_d = \frac{400}{9} \cos(10^9 \pi t) \text{ A/m}^2$

2. C

1. 自由空间中, 正弦电磁场的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 分别为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 150 \sin(\omega t - \beta z) \text{ V/m}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_y 0.4 \sin(\omega t - \beta z) \text{ A/m},$$

那么, 通过 $z=0$ 平面内边长为0.3 m 和0.15 m 的方形面积的平均功率为 ()

- A. 2.7 W ; B. 135 W ; C. 5.4 W

2. B

1. 导电媒质中, 已知电场强度 $\mathbf{E} = E_0 \sin \omega t$, 则媒质中位移电流密度 $\mathbf{J}_d$ 的相位与传导电流密度 $\mathbf{J}_c$ 的相位 ()

- A. 相差 $\frac{\pi}{2}$; B. 相差 $\frac{\pi}{4}$; C. 相同

2. A

1. 两块平行放置载有相反方向电流线密度 $K_0 \mathbf{e}_z$ 与 $K_0 (-\mathbf{e}_z)$ 的无限大薄板, 板间距离为 d , 这时 ()

A. 两板间磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为零。 ($-\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2}$)

B. 两外侧的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为零。 ($y > \frac{d}{2}, y < -\frac{d}{2}$)

C. 板间与两侧的 $\mathbf{B}$ 都为零

2. B

1. 若要增大两线圈之间的互感, 可以采用以下措施 ()

- A. 增加两线圈的匝数
B. 增加两线圈的电流
C. 增加其中一个线圈的电流

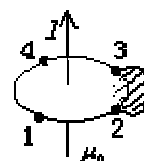
2. A

1. 在无限长电流 I 附近有一块铁磁物质, 现取积分路径 1234, 它部分地经过铁磁物质, 则在以下诸式中, 正确的是 ()

A. $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$

B. $\int_{23} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{3412} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$

C. $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_m)$



(注: I_m 与回路 ℓ 链结的铁磁物质被磁化后等效的磁化电流)

2. C

1. 若两个线圈之间插入一块铁板，则（ ）

A. 两线圈的自感均变小

B. 两线圈的自感不变

C. 两线圈的自感均变大

2. C

1. 下列矢量哪个可能是磁感应强度 $\mathbf{B}$ ，式中 a 为常数（ ）

A. $\mathbf{B} = ax\mathbf{e}_x$

B. $\mathbf{B} = a(x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y)$

C. $\mathbf{B} = a\rho\mathbf{e}_\rho$

2. B

1

1. 根据恒定磁场中磁感应强度 $\mathbf{B}$ 、磁场强度 $\mathbf{H}$ 与磁化强度 $\mathbf{M}$ 的定义可知，在各向同性媒质中：（ ）

A. $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 的方向一定一致， $\mathbf{M}$ 的方向可能与 $\mathbf{H}$ 一致，也可能与 $\mathbf{H}$ 相反

B. $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{M}$ 的方向可能与 $\mathbf{H}$ 一致，也可能与 $\mathbf{H}$ 相反

C. 磁场强度的方向总是使外磁场加强。

2. A

1. 设半径为 a 的接地导体球外空气中有一点电荷 Q ，距球心的距离为 $d(d > a)$ ，如图所示。现拆除接地线，再把点电荷 Q 移至足够远处，可略去点电荷 Q 对导体球的影响。若以无穷远处为电位参考点，则此时导体球的电位（ ）

A. $\varphi = 0$

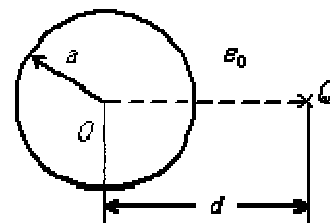
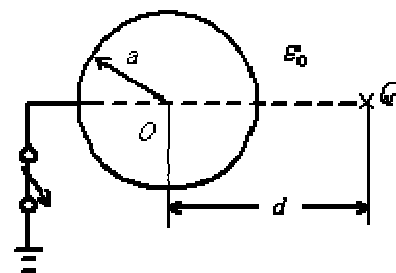
B. $\varphi = -\frac{\frac{a}{d}Q}{4\pi\epsilon_0 a}$

C. $\varphi = \frac{\frac{a}{d}Q}{4\pi\epsilon_0 a}$

2. B

1. 图示一点电荷 Q 与一半径为 a 、不接地导体球的球心相距为 $d(d > a)$ ，则导体球的电位 φ （ ）

A. 一定为零



B. 可能与点电荷 q 的大小、位置有关

C. 仅与点电荷 q 的大小、位置有关

2. B

1. 以位函数 φ 为待求量的边值问题中, 设 $f(s)$ 、 $f_1(s)$ 、 $f_2(s)$ 都为边界点 s 的点函数, 则所谓第二类边值问题是指给定 ()

A. $\varphi = f(s)$; B. $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f_1(s)$

C. $\varphi + f_1(s) \frac{\partial \varphi}{\partial n} = f_2(s)$ $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 为 φ 在边界上的法向导数值

2. B

1. 以位函数 φ 为待求量边值问题中, 设 $f(s)$ 、 $f_1(s)$ 、 $f_2(s)$ 都为边界点 s 的点函数, 则所谓第一类边值问题是指给定 ()

A. $\varphi = f(s)$; B. $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f_1(s)$

C. $\varphi + f_1(s) \frac{\partial \varphi}{\partial n} = f_2(s)$ $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 为 φ 在边界上的法向导数值

2. A

1. 静电场中电位为零处的电场强度 ()

A. 一定为零; B. 一定不为零; C. 不能确定

2. C

1. 电源以外恒定电流场基本方程的微分形式说明它是 ()

A. 有散无旋场; B. 无散无旋场; C. 无散有旋场

2. B

1. 恒定电流场中, 不同导电媒质交界面上自由电荷面密度 $\sigma = 0$ 的条件是 ()

A. $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$; B. $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$; C. $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} < \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

2. A

1. 试确定静电场表达式 $\mathbf{E} = 3ye_1 + (3x - 2z)e_2 - (cy + z)e_3$ 中, 常数 c 的值是 ()

A. $c = 2$; B. $c = 3$; C. $c = -2$

2. A

1. 已知电场中一闭合面上的电通密度, (电移位) D 的通量不等于零, 则意味着该面内 ()

A. 一定存在自由电荷; B. 一定存在自由电荷; C. 不能确定

2. A

1. 下列表达式成立的是 ()

A、 $\oint_S \vec{A} d\vec{s} = \iiint_V \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{v}$; B、 $\nabla \square \nabla u = 0$; C、 $\nabla \square \nabla \times u = 0$; D、 $\nabla \times \nabla \square u = 0$

2. C

1. 关于距离矢量 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, 下面表示正确的为 ()

A、 $\nabla \frac{1}{R} = \frac{\vec{R}}{R^2}$; B、 $\nabla R = \nabla' R$; C、 $\nabla \frac{1}{R} = \nabla' \frac{1}{R}$; D、 $\nabla' \frac{1}{R} = \frac{\vec{R}}{R^3}$

2. D

1. 下面表述正确的为 ()

- A. 矢量场的散度仍为一矢量场;
B. 标量场的梯度结果为一标量;
C. 矢量场的旋度结果为一标量场;
D. 标量场的梯度结果为一矢量

2. D

1. 矢量场的散度在直角坐标下的表示形式为 ()

A. $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$; B. $\frac{\partial A_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{e}_z$;

C. $\frac{\partial A}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_z$; D. $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}$

2. A

2. A

1. 斯托克斯定理的表达式为 ()

A. $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iiint_s (\nabla \cdot \vec{A}) \cdot d\vec{s}$; B. $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iiint_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$;

$$C. \oint_L \vec{A} \times d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s};$$

$$D. \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \cdot \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

2. B

1. 下面关于亥姆霍兹定理的描述，正确的是（ ）

- A. 研究一个矢量场，必须研究它的散度和旋度，才能确定该矢量场的性质。
- B. 研究一个矢量场，只要研究它的散度就可确定该矢量场的性质。
- C. 研究一个矢量场，只要研究它的旋度就可确定该矢量场的性质。

2. A

1. 带电球体（带电荷量为 Q ）球外任一点的场强（ ）

- A. 大小为 $Q/4\pi\epsilon_0 r$;
- B. 与电量的大小成反比
- C. 与电量的大小成正比
- D. 与距离成正比

2. C

1. 下列关于电场（力）线表述正确的是（ ）

- A. 由正的自由电荷出发，终止于负的自由电荷;
- B. 由正电荷出发，终止于负电荷;
- C. 正电荷逆着电场线运动，负电荷顺着电场线运动

2. B

1. 下列关于电位移线表述正确的是（ ）

- A. 由正的自由电荷出发，终止于负的自由电荷;
- B. 由正电荷出发，终止于负电荷;
- C. 正电荷逆着电位移线运动，负电荷顺着电位移线运动

2. A

1. 电位移表达式 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ （ ）

- A. 在各种媒质中适用;
- B. 在各向异性的介质中适用;
- C. 在各向同性的、线性的均匀的介质中适用;

2. C

1. 电位移表达式 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}$ （ ）

- A. 在各种媒质中适用;

B. 只在各向异性的介质中适用;

C. 只在各向同性的、线性的均匀的介质中适用;

2. A

1. 磁场强度表达式 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ()

A. 在各种磁介质中适用;

B. 只在各向异性的磁介质中适用;

C. 只在各向同性的、线性的均匀的磁介质中适用;

2. C

1. 磁感应强度表达式 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ ()

A. 在各种磁介质中适用;

B. 只在各向异性的磁介质中适用;

C. 只在各向同性的、线性的均匀的磁介质中适用;

2. A

1. 电源以外恒定电流场基本方程的积分形式是 ()

A. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

B. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \oint \vec{J} \times d\vec{S} = 0$

C. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = -dq/dt$

2. A

1. 写出非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式, 并简要说明其物理意义。

2. 答非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式为 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \cdot \vec{D} = \rho$, (3

分) (表明了电磁场和它们的源之间的全部关系除了真实电流外, 变化的电场(位移电流)也是磁场的源; 除电荷外, 变化的磁场也是电场的源。

1. 写出时变电磁场在 1 为理想导体与 2 为理想介质分界面时的边界条件。

2. 时变场的一般边界条件 $D_{2n} = \sigma, E_{2t} = 0, H_{2t} = J_s, B_{2n} = 0$ 。(或矢量式 $\vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \sigma, \vec{n} \times \vec{E}_2 = 0, \vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_s, \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = 0$)

1. 写出矢量位、动态矢量位与动态标量位的表达式, 并简要说明库仑规范与洛伦兹规范的意义。

2. 答矢量位 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \nabla \cdot \vec{A} = 0$; 动态矢量位 $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 或 $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$ 。库仑规范与洛伦兹规范

的作用都是限制 $\vec{A}$ 的散度, 从而使 $\vec{A}$ 的取值具有唯一性; 库仑规范用在静态场, 洛伦兹规范用在时变场。

1. 简述穿过闭合曲面的通量及其物理定义

2. $\phi = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ 是矢量 A 穿过闭合曲面 S 的通量或发散量。若 $\Phi > 0$, 流出 S 面的通量大于流入的通量,

即通量由 S 面向外扩散, 说明 S 面内有正源若 $\Phi < 0$, 则流入 S 面的通量大于流出的通量, 即通量向 S 面内汇集, 说明 S 面内有负源。若 $\Phi = 0$, 则流入 S 面的通量等于流出的通量, 说明 S 面内无源。

1. 证明位置矢量 $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$ 的散度, 并由此说明矢量场的散度与坐标的选择无关。

2. 证明在直角坐标系里计算 $\nabla \cdot \vec{r}(\vec{r})$, 则有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{r}(\vec{r}) &= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3\end{aligned}$$

若在球坐标系里计算, 则

$$\nabla \cdot \vec{r}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = 3 \text{ 由此说明了矢量场的散度与坐标的选择无关。}$$

1. 在直角坐标系证明 $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$

2.

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned}&= (\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \cdot [\vec{e}_x (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \vec{e}_y (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \vec{e}_z (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) = 0\end{aligned}$$

1. 简述亥姆霍兹定理并举例说明。

2. 亥姆霍兹定理研究一个矢量场, 必须研究它的散度和旋度, 才能确定该矢量场的性质。 例静电场

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum q_0 \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \quad \text{有源}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{无旋}$$

1. 已知 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, 证明 $\nabla R = -\nabla' R = \frac{R'}{R} = \vec{e}_R$ 。

2. 证明

$$\begin{aligned}\nabla R &= \vec{e}_x \frac{\partial R}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial R}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial R}{\partial z} = \vec{e}_x \frac{x - x'}{R} + \vec{e}_y \frac{y - y'}{R} + \vec{e}_z \frac{z - z'}{R} \\ \nabla' R &= \dots\dots = -\nabla R\end{aligned}$$

1. 试写出一般电流连续性方程的积分与微分形式, 恒定电流的呢?

2. 一般电流 $\oiint \vec{J} \cdot d\vec{S} = -dq/dt$, $\nabla \cdot \vec{J} = -\partial \rho / \partial t$;

恒定电流 $\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \nabla \cdot \vec{J} = 0$

1. 试写出静电场基本方程的积分与微分形式。

2. 答静电场基本方程的

积分形式 $\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q, \oiint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

微分形式 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \nabla \times \vec{E} = 0$

1. 试写出静电场基本方程的微分形式，并说明其物理意义。

2. 静电场基本方程微分形式 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \nabla \times \vec{E} = 0$ ，说明激发静电场的源是空间电荷的分布（或是激发静电场的源是电荷的分布）。

1. 试说明导体处于静电平衡时特性。

2. 答导体处于静电平衡时特性有

①导体内 $\vec{E} = 0$ ；

②导体是等位体（导体表面是等位面）；

③导体内无电荷，电荷分布在导体的表面（孤立导体，曲率）；

④导体表面附近电场强度垂直于表面，且 $\vec{E} = \sigma \vec{n} / \epsilon_0$ 。

1. 试写出两种介质分界面静电场的边界条件。

2. 答在界面上D的法向量连续 $D_{1n} = D_{2n}$ 或 $(\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_2 = \vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1)$ ；E的切向分量连续 $E_{1t} = E_{2t}$ 或 $(\vec{n}_1 \times \vec{E}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{E}_2)$

1. 试写出1为理想导体，二为理想介质分界面静电场的边界条件。

2. 在界面上D的法向量 $D_{2n} = \sigma$ 或 $(\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_2 = \sigma)$ ；E的切向分量 $E_{2t} = 0$ 或 $(\vec{n}_1 \times \vec{E}_2 = 0)$

1. 试写出电位函数 ϕ 表示的两种介质分界面静电场的边界条件。

2. 答电位函数 ϕ 表示的两种介质分界面静电场的边界条件为 $\phi_1 = \phi_2, \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$

1. 试推导静电场的泊松方程。

2. 解由 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ，其中 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{E} = -\nabla \phi$ ，

$$\therefore \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \epsilon \vec{E} \quad \epsilon \text{ 为常数}$$

$$\therefore \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{泊松方程}$$

1. 简述唯一性定理，并说明其物理意义

2. 对于某一空间区域V，边界面为s， ϕ 满足

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{或} \quad \nabla^2 \phi = 0,$$

给定 $\rho(\vec{r})$ 、 $\phi|_s$ 或 $\frac{\partial \phi}{\partial n}|_s$ （对导体给定 q ）

则解是唯一的。只要满足唯一性定理中的条件，解是唯一的，可以用能想到的最简便的方法求解（直接求解法、镜像法、分离变量法……），还可以由经验先写出试探解，只要满足给定的边界条件，也是唯一解。不满足唯一

性定理中的条件无解或有多解。

1. 试写出恒定电场的边界条件。

2. 答恒定电场的边界条件为 $\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0$, $\vec{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

1. 分离变量法的基本步骤有哪些?

2. 答具体步骤是 1、先假定待求的位函数由两个或三个各自仅含有一个坐标变量的乘积所组成。2、把假定的函数代入拉氏方程, 使原来的偏微分方程转换为两个或三个常微分方程。解这些方程, 并利用给定的边界条件决定其中待定常数和函数后, 最终即可解得待求的位函数。

1. 叙述什么是镜像法? 其关键和理论依据各是什么?

2. 答镜像法是用等效的镜像电荷代替原来场问题的边界, 其关键是确定镜像电荷的大小和位置, 理论依据是唯一性定理。

7、 试题关键字恒定磁场的基本方程

1. 试写出真空中恒定磁场的基本方程的积分与微分形式, 并说明其物理意义。

2. 答真空中恒定磁场的基本方程的积分与微分形式分别为

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

说明恒定磁场是一个无散有旋场, 电流是激发恒定磁场的源。

1. 试写出恒定磁场的边界条件, 并说明其物理意义。

2. 答: 恒定磁场的边界条件为: $\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$, $\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$, 说明磁场在不同的边界条件下磁场强度的切向分量是不连续的, 但是磁感应强度的法向分量是连续。

1. 由麦克斯韦方程组出发, 导出点电荷的电场强度公式和泊松方程。

2. 解 点电荷 q 产生的电场满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \text{ 和 } \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

由 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ 得 $\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{D} d\tau = \int_{\tau} \rho d\tau$

据散度定理, 上式即为 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$

利用球对称性, $\vec{D} = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi r^2}$

故得点电荷的电场表示式 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$

由于 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，可取 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ ，则得

$$\nabla \times \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = -\epsilon \nabla \cdot \nabla \varphi = -\epsilon \nabla^2 \varphi = \rho$$

即得泊松方程 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

1. 写出麦克斯韦方程组（在静止媒质中）的积分形式与微分形式。

2.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oiint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

1. 试写媒质 1 为理想介质 2 为理想导体分界面时变场的边界条件。

2. 答边界条件为

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad \text{或} \quad \vec{n} \times \vec{E}_1 = 0$$

$$\vec{H}_{1t} = \vec{J}_s \quad \text{或} \quad \vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s$$

$$B_{1n} = B_{2n} = 0 \quad \text{或} \quad \vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 0$$

$$D_{1n} = \rho_s \quad \text{或} \quad \vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \rho_s$$

1. 试写出理想介质在无源区的麦克斯韦方程组的复数形式。

2. 答

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

1. 试写出波的极化方式的分类，并说明它们各自有什么样的特点。

2. 答波的极化方式的分为圆极化，直线极化，椭圆极化三种。

圆极化的特点 $E_{xm} = E_{ym}$ ，且 E_{xm}, E_{ym} 的相位差为 $\pm \frac{\pi}{2}$ ，

直线极化的特点 E_{xm}, E_{ym} 的相位差为相位相差 $0, \pi$ ，

椭圆极化的特点 $E_{xm} \neq E_{ym}$ ，且 E_{xm}, E_{ym} 的相位差为 $\pm \frac{\pi}{2}$ 或 $0, \pi$ ，

1. 能流密度矢量（坡印廷矢量） $\vec{S}$ 是怎样定义的？坡印廷定理是怎样描述的？

2. 答能流密度矢量（坡印廷矢量） $\vec{S}$ 定义为单位时间内穿过与能量流动方向垂直的单位截面的能量。坡印廷定

理的表达式为 $-\oint_s (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}(W_e + W_m) + P_r$ 或

$-\oint_s (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_v (\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2) d\tau + \int_v \gamma E^2 d\tau$ ，反映了电磁场中能量的守恒和转换关系。

1. 试简要说明导电媒质中的电磁波具有什么样的性质？（设媒质无限大）

2. 答导电媒质中的电磁波性质有电场和磁场垂直；振幅沿传播方向衰减；

电场和磁场不同相；以平面波形式传播。

1. 写出一般情况下时变电磁场的边界条件

2. 时变场的一般边界条件 $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$ 、 $E_{1t} = E_{2t}$ 、 $H_{1t} - H_{2t} = J_s$ 、 $B_{1n} = B_{2n}$ 。（写成矢量式

$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$ 、 $\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$ 、 $\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$ 、 $\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ 一样给 5 分)

1. 写出非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式，并简要说明其物理意义。

2. 答非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式为 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 、 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 、 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 、 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ （表

明了电磁场和它们的源之间的全部关系除了真实电流外，变化的电场（位移电流）也是磁场的源；除电荷外，变化的磁场也是电场的源。

1. 写出时变电磁场在 1 为理想导体与 2 为理想介质分界面时的边界条件

2. 时变场的一般边界条件 $D_{2n} = \sigma$ 、 $E_{2t} = 0$ 、 $H_{2t} = J_s$ 、 $B_{2n} = 0$ 。（写成矢量式 $\vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \sigma$ 、 $\vec{n} \times \vec{E}_2 = 0$ 、

$\vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_s$ 、 $\vec{n} \cdot \vec{B}_2 = 0$ 一样给 5 分)

1. 写出矢量位、动态矢量位与动态标量位的表达式，并简要说明库仑规范与洛伦兹规范的意义。

2. 答矢量位 $\vec{A} = \nabla \times \vec{A}, \nabla \cdot \vec{A} = 0$; 动态矢量位 $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 或 $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$ 。库仑规范与洛伦兹规范

的作用都是限制 $\vec{A}$ 的散度, 从而使 $\vec{A}$ 的取值具有唯一性; 库仑规范用在静态场, 洛伦兹规范用在时变场。

1. 真空中有一导体球 A , 内有两个介质为空气的球形空腔 B 和 C 。其中心处分别放置点电荷 Q_1 和 Q_2 , 试求空间的电场分布。

2. 对于 A 球内除 B, C 空腔以外的地区, 由导体的性质可知其内场强为零。对 A 球之外, 由于在 A 球表面均匀分布 $Q_1 + Q_2$ 的电荷, 所以 A 球以外区域

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{方向均沿球的径向})$$

对于 A 内的 B, C 空腔内, 由于导体的屏蔽作用则

$$E_B = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \quad (r_1 \text{ 为 } B \text{ 内的点到 } B \text{ 球心的距离})$$

$$E_C = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \quad (r_2 \text{ 为 } C \text{ 内的点到 } C \text{ 球心的距离})$$

1. 如图所示, 有一线密度 $J_s = K_0 e_z$ 的无限大电流薄片置于 $y=0$ 平面上, 周围媒质为空气。试求场中各点的磁感应强度。

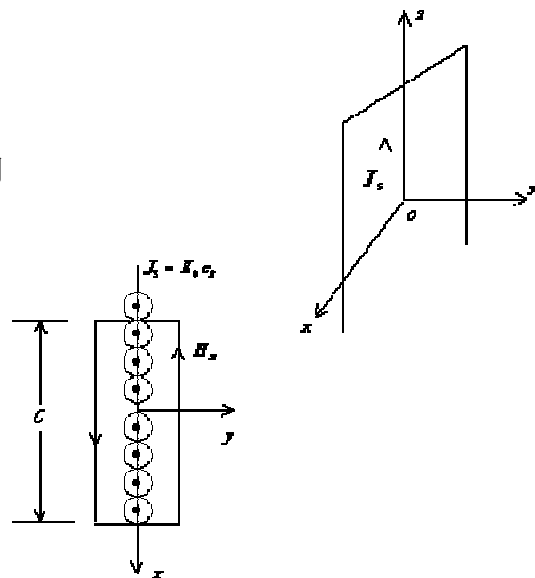
2. 根据安培环路定律, 在面电流两侧作一对称的环路。则

由

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

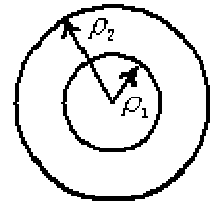
$$2H_x C = K_0 C$$

$$H_x = \frac{1}{2} K_0$$



$$\mathbf{B}_z = \begin{cases} \frac{\mu_0 K_0}{2} (-\mathbf{e}_z) & y > 0 \\ \frac{\mu_0 K_0}{2} (\mathbf{e}_z) & y < 0 \end{cases}$$

1. 已知同轴电缆的内外半径分别为 ρ_1 和 ρ_2 ，其间媒质的磁导率为 μ_0 ，且电缆长度 $L \gg \rho_2$ ，忽略端部效应，求电缆单位长度的外自感。



2. 设电缆带有电流 I

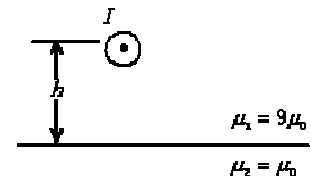
则

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi \quad \rho_1 < \rho < \rho_2$$

$$\psi_m = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$L = \frac{\psi_m}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

1. 在附图所示媒质中，有一载流为 I 的长直导线，导线到媒质分界面的距离为 h 。试求载流导线单位长度受到的作用力。



2. 镜像电流

$$I' = \frac{\mu_0 - 9\mu_0}{\mu_0 + 9\mu_0} I = -\frac{4}{5} I$$

镜像电流在导线处产生的 $\mathbf{B}$ 值为

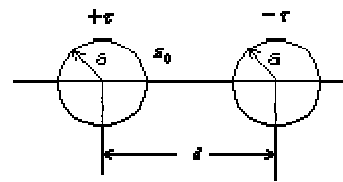
$$B = \frac{I' 9\mu_0}{2\pi \cdot 2h}$$

单位长度导线受到的作用力

$$F = IB = -1.8 \frac{\mu_0 I^2}{\pi h}$$

力的方向使导线远离媒质的交界面。

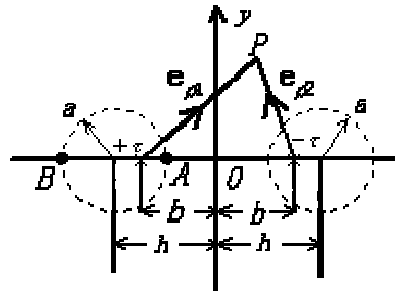
1. 图示空气中有两根半径均为 a ，其轴线间距离为 d ($d > 2a$) 的平行长直圆柱导体，设它们单位长度上所带的电荷量分别为 $+\tau$ 和 $-\tau$ ，若忽略端部的边缘效应，试求



- (1) 圆柱导体外任意点 P 的电场强度 $\mathbf{E}$ 的电位 φ 的表达式；
- (2) 圆柱导体面上的电荷面密度 $\sigma_{\max}$ 与 $\sigma_{\min}$ 值。

2.

$$(1) \quad b = \sqrt{h^2 - a^2}, \quad h = \frac{d}{2}$$



$$\mathbf{E}_s = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho_1} \mathbf{e}_{\rho_1} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho_2} \mathbf{e}_{\rho_2}$$

以 y 轴为电位参考点，则

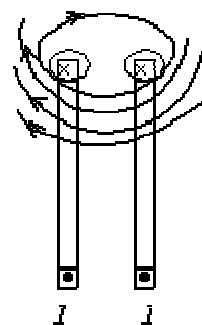
$$\varphi_s = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$(2) \quad \sigma_{\max} = D_{\max} = \epsilon_0 E_{\max} = \epsilon_0 E_A = \frac{\tau}{2\pi} \left[\frac{1}{b-h+a} + \frac{1}{b+h-a} \right]$$

$$\sigma_{\min} = D_{\min} = \epsilon_0 E_{\min} = \epsilon_0 E_B = \frac{\tau}{2\pi} \left[\frac{1}{a+h-b} - \frac{1}{b+h+a} \right]$$

1. 有两平行放置的线圈，载有相同方向的电流，请定性画出场中的磁感应强度分布 ($\mathbf{B}$ 线)。

2. $\mathbf{B}$ 线上、下对称。



1. 已知真空中二均匀平面波的电场强度分别为: $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_0 e^{j\varphi_x}$ 和 $\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_y E_0 e^{j\varphi_y}$ 求合成波电场强度的瞬时表示式及极化方式。

2.

$$\because \beta = \frac{\omega}{c}$$

$$\therefore \omega = \beta c$$

得

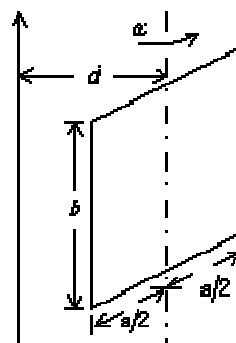
$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_0 \cos(\beta c t + \beta z) - \vec{e}_y E_0 \sin(\beta c t + \beta z)$$

合成波为右旋圆极化波。

1. 长直导线中载有电流 I ，其近旁有一矩形线框，尺寸与相互位置如图所示。设 $t=0$ 时，线框与直导线共面 $t>0$ 时，线框以均匀角速度 ω 绕平行于直导线的对称轴旋转，求线框中的感应电动势。

2. 长直载流导线产生的磁场强度

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$



t 时刻穿过线框的磁通

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \\ &= \frac{\mu_0 I b}{4\pi} \ln \frac{d^2 + (\frac{a}{2})^2 + ad \cos \omega t}{d^2 + (\frac{a}{2})^2 - ad \cos \omega t} \end{aligned}$$

感应电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= - \frac{d\Phi}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I a b \omega}{2\pi} \frac{[(\frac{a}{2})^2 + d^2] \sin \omega t}{[(\frac{a}{2})^2 + d^2]^2 - (ad \cos \omega t)^2} \end{aligned}$$

参考方向 $t=0$ 时为顺时针方向。

1. 无源的真空中, 已知时变电磁场磁场强度的瞬时矢量为

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x 0.1 \cos(15\pi y) \sin(6\pi \times 10^9 t - \beta x) \text{ A/m}$$

试求(1) β 的值; (2) 电场强度瞬时矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 和复矢量(即相量) $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。

2. (1)

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{H} = -[\beta^2 + (15\pi)^2] \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -(6\pi \times 10^9)^2 \mathbf{H}$$

由

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

得

$$(15\pi)^2 + \beta^2 = \frac{(6\pi \times 10^9)^2}{(3 \times 10^8)^2}$$

故得

$$\beta_x = 5\sqrt{7}\pi \text{ rad/s}$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \nabla \times \mathbf{H} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{H} d\tau \\ &= \mathbf{e}_x 9\pi \sin(15\pi y) \cos(6\pi \times 10^9 t - 5\sqrt{7}\pi x) \\ &\quad + \mathbf{e}_z 3\sqrt{7}\pi \cos(15\pi y) \sin(6\pi \times 10^9 t - 5\sqrt{7}\pi x) \text{ V/m} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_x 9\pi \sin(15\pi y) e^{-j5\sqrt{7}\pi x} - \mathbf{e}_z 3\sqrt{7}\pi \cos(15\pi y) e^{j5\sqrt{7}\pi x} \end{aligned}$$

1. 证明任一沿 $\mathbf{e}_z$ 传播的线极化波可分解为两个振幅相等, 旋转方向相反的圆极化波 的叠加。

2. 证明 设线极化波

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z) &= \mathbf{e}_x E_0 e^{-j\beta z} \\ &= \mathbf{E}_1(z) + \mathbf{E}_2(z) \end{aligned}$$

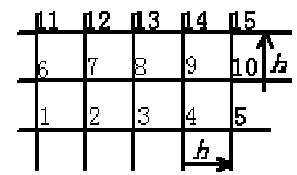
其中:

$$\mathbf{E}_1(z) = \frac{E_0}{2} (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{E}_2(z) = \frac{E_0}{2} (\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y) e^{-j\beta z}$$

$\mathbf{E}_1(z)$ 和 $\mathbf{E}_2(z)$ 分别是振幅为 $\frac{E_0}{2}$ 的右旋和左旋圆极化波。

1. 用有限差分法计算场域中电位, 试列出图示正方形网格中内点7的拉普拉斯方程的差分格式和内点9的泊松方程的差分格式。



2.

$$\varphi_7 = \frac{1}{4} (\varphi_2 + \varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{12})$$

$$-4\varphi_9 + \varphi_4 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{14} = h^2 \left(-\frac{\rho_9}{\varepsilon} \right)$$

1. 无源真空中, 已知时变电磁场的磁场强度 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 为:

$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x A_1 \sin(4x) \cos(\omega t - \beta y) + \mathbf{e}_z A_2 \cos(4x) \sin(\omega t - \beta y)$ A/m, 其中 A_1 、 A_2 为常数, 求位移电流密度 $\mathbf{J}_d$ 。

2. 因为 $\mathbf{J} = 0$

由

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

得

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{e}_x}{\partial} & \frac{\mathbf{e}_y}{\partial} & \frac{\mathbf{e}_z}{\partial} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 \sin(4x) \cos(\omega t - \beta y) & 0 & A_2 \cos(4x) \sin(\omega t - \beta y) \end{bmatrix}$$

$$= -\mathbf{e}_x A_1 \beta \cos(4x) \cos(\omega t - \beta y) + \mathbf{e}_y 4 A_1 \sin(4x) \sin(\omega t - \beta y) \\ - \mathbf{e}_z A_2 \beta \sin(4x) \sin(\omega t - \beta y) \text{ A/m}^2$$

1. 利用直角坐标系证明 $\nabla \times (f\vec{G}) = f\nabla \times \vec{G} + (\nabla f) \times \vec{G}$

2. 证明左边 $= \nabla \cdot (f\vec{A}) = \nabla \cdot (fA_x \vec{e}_x + fA_y \vec{e}_y + fA_z \vec{e}_z) \quad (= \frac{\partial(fA_x)\vec{e}_x}{\partial x} + \frac{\partial(fA_y)\vec{e}_y}{\partial y} + \frac{\partial(fA_z)\vec{e}_z}{\partial z})$

$$= f \frac{\partial(A_x)\vec{e}_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial(f)\vec{e}_x}{\partial x} + f \frac{\partial(A_y)\vec{e}_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial(f)\vec{e}_y}{\partial y} \\ + f \frac{\partial(A_z)\vec{e}_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial(f)\vec{e}_z}{\partial z} \\ = [f \frac{\partial(A_x)\vec{e}_x}{\partial x} + f \frac{\partial(A_y)\vec{e}_y}{\partial y} + f \frac{\partial(A_z)\vec{e}_z}{\partial z}] + [A_x \frac{\partial(f)\vec{e}_x}{\partial x} \\ A_y \frac{\partial(f)\vec{e}_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial(f)\vec{e}_z}{\partial z}] \quad = \text{右边} \\ = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f$$

1. 在自由空间传播的均匀平面波的电场强度复矢量为

$$\vec{E} = \vec{a}_x \times 10^{-4} e^{-j20\pi z} + \vec{a}_y \times 10^{-4} e^{-j(20\pi z - \frac{\pi}{2})} \text{ (V/m)}$$

求 (1) 平面波的传播方向;

(2) 频率;

(3) 波的极化方式;

(4) 磁场强度;

(5) 电磁波的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av}$ 。

2. 解 (1) 平面波的传播方向为 + z 方向

(2) 频率为 $f = k_0 \frac{c}{2\pi} = 3 \times 10^9 \text{ Hz}$

(3) 波的极化方式因为 $E_{xm} = E_{ym} = 10^{-4}$, $\varphi_x - \varphi_y = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, 故为左旋圆极化。

(4) 磁场强度

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \bar{a}_z \times \bar{E} = \frac{1}{\eta_0} (\bar{a}_z \times \bar{a}_x 10^{-4} + j \bar{a}_z \times \bar{a}_y 10^{-4}) e^{-j20\pi z} \\ &= \frac{1}{\eta_0} (\bar{a}_y 10^{-4} - j \bar{a}_x 10^{-4}) e^{-j20\pi z}\end{aligned}$$

(5) 平均功率坡印廷矢量

$$\begin{aligned}\bar{S}_{av} &= \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{E} \times \bar{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[(\bar{a}_x 10^{-4} + j \bar{a}_y 10^{-4}) e^{-j20\pi z} \\ &\times \frac{1}{\eta_0} (\bar{a}_y 10^{-4} - j \bar{a}_x 10^{-4}) e^{j20\pi z}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(10^{-4})^2}{\eta_0} + \frac{(10^{-4})^2}{\eta_0} \right] \bar{a}_z \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{120\pi} [2 \times 10^{-8}] \bar{a}_z \\ &= 0.265 \times 10^{-10} \bar{a}_z (\text{W} / \text{m}^2)\end{aligned}$$

1. 1 求矢量 $\bar{A} = \bar{e}_x x + \bar{e}_y x^2 + \bar{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴相重合。再求 $\nabla \times \bar{A}$ 对此回路所包围的曲面积分，验证斯托克斯定理。

2. 解

$$\oint_C \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int_0^2 x dx - \int_0^2 x dx + \int_0^2 2^2 dy - \int_0^2 0 dy = 8$$

又

$$\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x^2 & y^2 z \end{vmatrix} = \bar{e}_x 2yz + \bar{e}_z 2x$$

所以

$$\int_S \nabla \times \bar{A} \cdot d\bar{S} = \int_0^2 \int_0^2 (\bar{e}_x 2yz + \bar{e}_z 2x) \cdot \bar{e}_z dx dy = 8$$

故有

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 8 = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

1. 同轴线内外半径分别为 a 和 b ，填充的介质 $\gamma \neq 0$ ，具有漏电现象，同轴线外加电压 U ，求

- (1) 漏电介质内的 φ ；
- (2) 漏电介质内的 $\vec{E}$ 、 $\vec{J}$ ；
- (3) 单位长度上的漏电电导。

2. 解 (1) 电位所满足的拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

由边界条件 $r = a, \varphi = U; r = b, \varphi = 0$ 所得解为

$$\varphi(r) = \left[\frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \right] \ln \frac{b}{r}$$

$$(2) \text{ 电场强度变量为 } \vec{E}(r) = -\vec{e}_r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{U}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_r,$$

$$\text{则漏电媒质的电流密度为 } \vec{J} = \gamma \vec{E}(r) = \frac{\gamma U}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{e}_r$$

$$(3) \text{ 单位长度的漏电流为 } I_0 = 2\pi r \cdot \frac{\gamma U}{r \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\gamma U}{\ln \frac{b}{a}} \vec{e}_r$$

$$\text{单位长度的漏电电导为 } G_0 = \frac{I_0}{U} = \frac{2\pi\gamma}{\ln \frac{b}{a}}$$

1. 空气中传播的均匀平面波电场为 $\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ ，已知电磁波沿 z 轴传播，频率为 f 。求

- (1) 磁场 $\vec{H}$ ；
- (2) 波长 λ ；
- (3) 能流密度 $\vec{S}$ 和平均能流密度 $\vec{S}_{av}$ ；
- (4) 能量密度 W 。

2. 解

$$(1) \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{e}_x E_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$= \bar{e}_y \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}}$$

$$(2) \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$(3) \bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \bar{e}_x E_0 e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}} \times \bar{e}_y E_0 e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{e}_z \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 e^{-2j\bar{k} \cdot \bar{r}} \\ &= \bar{e}_z \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(2\pi ft - kz) \end{aligned}$$

$$\bar{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{E} \times \bar{H}^*) = \bar{e}_z \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$$

$$(4) W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

1. 平行板电容器的长、宽分别为 a 和 b ，极板间距离为 d 。电容器的一半厚度 ($0 \leq d/2$) 用介电常数为 ϵ 的电介质填充，

- (1) 板上外加电压 U_0 ，求板上的自由电荷面密度、束缚电荷；
- (2) 若已知板上的自由电荷总量为 Q ，求此时极板间电压和束缚电荷；
- (3) 求电容器的电容量。

2. (1) 设介质中的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E$ ，空气中的电场为 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$ 。由 $D = D_0$ ，有

$$\epsilon E = \epsilon_0 E_0$$

又由于

$$E \frac{d}{2} + E_0 \frac{d}{2} = -U_0$$

由以上两式解得

$$E = -\frac{2\epsilon_0 U_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}$$

$$E_0 = -\frac{2\epsilon U_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}$$

故下极板的自由电荷面密度为

$$\sigma_{\text{下}} = \varepsilon E = -\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

上极板的自由电荷面密度为

$$\sigma_{\text{上}} = -\varepsilon_0 E_0 = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

电介质中的极化强度

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

故下表面上的束缚电荷面密度为

$$\sigma_{p\text{下}} = -\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P} = \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

上表面上的束缚电荷面密度为

$$\sigma_{p\text{上}} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P} = -\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

(2) 由

$$\sigma = \frac{Q}{ab} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon U}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

得到

$$U = \frac{(\varepsilon + \varepsilon_0)dQ}{2\varepsilon_0\varepsilon ab}$$

故

$$\sigma_{p\text{下}} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{\varepsilon ab}$$

(3) 电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon ab}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

1. 频率为 100MHz 的正弦均匀平面波在各向同性的均匀理想介质中沿 $(+z)$ 方向传播, 介质的特性参

数为 $\epsilon_r = 4$ 、 $\mu_r = 1$, $\gamma = 0$ 。设电场沿 x 方向, 即 $\vec{E} = \vec{e}_x E_x$; 当 $t = 0$, $z = \frac{1}{8}m$ 时, 电场等于其振

幅值 $10^{-4}V/m$ 。试求

(1) $\vec{H}(z,t)$ 和 $\vec{E}(z,t)$;

(2) 波的传播速度;

(3) 平均波印廷矢量。

2. 解以余弦形式写出电场强度表示式

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \vec{e}_x E_x(z,t) \\ &= \vec{e}_x E_m \cos(\omega t - kz + \psi_{xE})\end{aligned}$$

把数据代入 $E_m = 10^{-4}V/m$

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi f\sqrt{4\mu_0\epsilon_0} = \frac{4\pi}{3}\text{rad}/m$$

$$\psi_{xE} = kz = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

则

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \vec{e}_x 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6}) V/m \\ \vec{H}(z,t) &= \vec{e}_y \frac{E_x}{\eta} = \vec{e}_y \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}} 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6}) \\ &= \vec{e}_y \frac{1}{60\pi} 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6}) A/m\end{aligned}$$

(2) 波的传播速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{3 \times 10^8}{2} = 1.5 \times 10^8 m/s$$

(3) 平均坡印廷矢量为 $S_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{e}_x 10^{-4} e^{-j(\frac{4\pi}{3}z - \frac{\pi}{6})} \times \vec{e}_y \frac{10^{-4}}{60\pi} e^{j(\frac{4\pi}{3}z - \frac{\pi}{6})}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{e}_z \frac{(10^{-4})^2}{60\pi}] \\
&= \bar{e}_z \frac{10^{-8}}{120\pi} W / m^2
\end{aligned}$$

1. 在由 $r=5$ 、 $z=0$ 和 $z=4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_r r^2 + \mathbf{e}_z 2z$ 验证散度定理。

2. 解 在圆柱坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 3r + 2$$

所以

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^5 (3r+2)r dr = 1200\pi$$

又

$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S (\mathbf{e}_r r^2 + \mathbf{e}_z 2z) \cdot (\mathbf{e}_r dS_r + \mathbf{e}_\phi dS_\phi + \mathbf{e}_z dS_z) \\
&= \int_0^4 \int_0^{2\pi} 5^2 \times 5 d\phi dz + \int_0^5 \int_0^{2\pi} 2 \times 4r dr d\phi = 1200\pi
\end{aligned}$$

故有

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = 1200\pi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

1. 计算矢量 $\mathbf{r}$ 对一个球心在 origin、半径为 a 的球表面的积分，并求 $\nabla \cdot \mathbf{r}$ 对球体积的积分。

2. 解

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r dS = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi a a^2 \sin \theta d\theta = 4\pi a^3$$

又在球坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 r) = 3$$

所以

$$\int_{\tau} \nabla \square \mathbf{r} d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a 3r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 4\pi a^3$$

1. 证明 (1) $\nabla \square \mathbf{R} = 3$; (2) $\nabla \times \mathbf{R} = 0$; (3) $\nabla(A \square \mathbf{R}) = \mathbf{A}$ 。其中 $\mathbf{R} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$, $\mathbf{A}$ 为一常矢量。

2. 解 (1)

$$\nabla \square \mathbf{R} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$(2) \quad \nabla \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) \text{ 设 } \mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$$

则

$$\mathbf{A} \square \mathbf{R} = A_x x + A_y y + A_z z$$

故

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \square \mathbf{R}) &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} (A_x x + A_y y + A_z z) + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} (A_x x + A_y y + A_z z) \\ &\quad + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (A_x x + A_y y + A_z z) \\ &= \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z = \mathbf{A} \end{aligned}$$

1. 两点电荷 $q_1 = 8\text{C}$ 位于 z 轴上 $z = 4$ 处, $q_2 = -4\text{C}$ 位于 y 轴上 $y = 4$ 处, 求 $(4, 0, 0)$ 处的电场强度。

2. 解 电荷 q_1 在 $(4, 0, 0)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|^3} = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_z 4}{(4\sqrt{2})^3}$$

电荷 q_2 在 $(4, 0, 0)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|^3} = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_y 4}{(4\sqrt{2})^3}$$

故 $(4, 0, 0)$ 处的电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z 2}{32\sqrt{2}\pi\epsilon_0}$$

1. 两平行无限长直线电流 I_1 和 I_2 ，相距为 d ，求每根导线单位长度受到的安培力 $\mathbf{F}_m$ 。
2. 解 无限长直线电流 I_1 产生的磁场为

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

直线电流 I_2 每单位长度受到的安培力为

$$\mathbf{F}_{m12} = \int_0^l I_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1 \, dz = -\mathbf{e}_{12} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

式中 $\mathbf{e}_{12}$ 是由电流 I_1 指向电流 I_2 的单位矢量。

同理可得，直线电流 I_1 每单位长度受到的安培力为

$$\mathbf{F}_{m21} = -\mathbf{F}_{m12} = \mathbf{e}_{12} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

1. 半径为 a 的球体中充满密度 $\rho(r)$ 的体电荷，已知电位移分布为

$$D_r = \begin{cases} r^3 + Ar^2 & (r \leq a) \\ \frac{a^5 + Aa^4}{r^2} & (r \geq a) \end{cases}$$

其中 A 为常数，试求电荷密度 $\rho(r)$ 。

2. 解 由 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ，有

$$\rho(r) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_r)$$

故在 $r < a$ 区域

$$\rho(r) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 (r^3 + Ar^2)] = \varepsilon_0 (5r^2 + 4Ar)$$

在 $r > a$ 区域

$$\rho(r) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 \frac{(a^5 + Aa^4)}{r^2}] = 0$$

1. 一个半径为 a 薄导体球壳内表面涂覆了一薄层绝缘膜，球内充满总电荷量为 Q 的体电荷，球壳上又另充有电荷量 Q 。已知球内部的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r (r/a)^4$ ，设球内介质为真空。计算（1）球内的电荷分布；（2）球壳

外表面的电荷面密度。

2. 解 (1) 由高斯定理的微分形式可求得球内的电荷体密度为

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \right] = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{r^4}{a^4} \right) \right] = 6\varepsilon_0 \frac{r^3}{a^4}$$

(2) 球体内的总电量 Q 为

$$Q = \int_V \rho d\tau = \int_0^a 6\varepsilon_0 \frac{r^3}{a^4} 4\pi r^2 dr = 4\pi\varepsilon_0 a^2$$

球内电荷不仅在球壳内表面上感应电荷 $-Q$ ，而且在球壳外表面上还要感应电荷 Q ，所以球壳外表面上的总电荷为 $2Q$ ，故球壳外表面上的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{2Q}{4\pi a^2} = 2\varepsilon_0$$

1. 中心位于原点，边长为 L 的电介质立方体的极化强度矢量为

$$\mathbf{P} = P_0(\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z)。$$

(1) 计算面束缚电荷密度和体束缚电荷密度；(2) 证明总的束缚电荷为零。

2. 解 (1) $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -3P_0$

$$\sigma_p(x = \frac{L}{2}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \Big|_{x=L/2} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{P} \Big|_{x=L/2} = \frac{L}{2} P_0$$

$$\sigma_p(x = -\frac{L}{2}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \Big|_{x=-L/2} = -\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{P} \Big|_{x=-L/2} = -\frac{L}{2} P_0$$

同理

$$\sigma_p(y = \frac{L}{2}) = \sigma_p(y = -\frac{L}{2}) = \sigma_p(z = \frac{L}{2}) = \sigma_p(z = -\frac{L}{2}) = \frac{L}{2} P_0$$

$$(2) \quad q_p = \int_V \rho_p d\tau + \oint_S \sigma_p dS = -3P_0 L^3 + 6L^2 \times \frac{L}{2} P_0 = 0$$

1. 一半径为 R_0 的介质球，介电常数为 $\varepsilon_r \varepsilon_0$ ，其内均匀分布自由电荷 ρ ，证明中心点的电位为

$$\frac{2\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r} \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \right) R_0^2$$

2. 解 由

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

可得到

$$4\pi r^2 D_1 = \frac{4\pi r^3}{3} \rho \quad (r < R_0)$$

$$4\pi r^2 D_2 = \frac{4\pi R_0^3}{3} \rho \quad (r > R_0)$$

即

$$D_1 = \frac{\rho r}{3}, E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_r \varepsilon_0} \quad (r < R_0)$$

$$D_2 = \frac{\rho R_0^3}{3r^2}, E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R_0)$$

故中心点的电位为

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_0^{R_0} E_1 dr + \int_{R_0}^{\infty} E_2 dr = \int_0^{R_0} \frac{\rho r}{3\varepsilon_r \varepsilon_0} dr + \int_{R_0}^{\infty} \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho R_0^2}{6\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0} = \frac{2\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r} \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \right) R_0^2 \end{aligned}$$

1. 一个半径为 R 的介质球, 介电常数为 ε , 球内的极化强度 $\mathbf{P} = \mathbf{e}_r K/r$, 其中 K 为一常数。(1) 计算束缚电荷体密度和面密度; (2) 计算自由电荷密度; (3) 计算球内、外的电场和电位分布。

2. 解 (1) 介质球内的束缚电荷体密度为

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{K}{r} \right) = -\frac{K}{r^2}$$

在 $r = R$ 的球面上, 束缚电荷面密度为

$$\sigma_p = n \cdot \mathbf{P} \Big|_{r=R} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{P} \Big|_{r=R} = \frac{K}{R}$$

(2) 由于 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 所以

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

即

$$(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{P}$$

由此可得到介质球内的自由电荷体密度为

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \rho_p = \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon - \varepsilon_0) r^2}$$

总的自由电荷量

$$q = \int \rho d\tau = \frac{\varepsilon K}{\varepsilon - \varepsilon_0} \int_0^R \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \varepsilon R K}{\varepsilon - \varepsilon_0}$$

(3) 介质球内、外的电场强度分别为

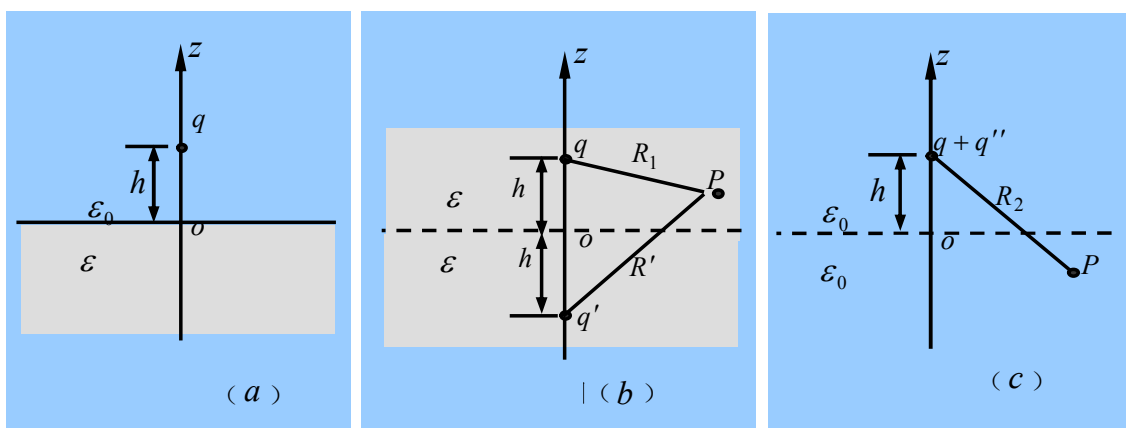
$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon - \varepsilon_0} = \mathbf{e}_r \frac{K}{(\varepsilon - \varepsilon_0) r} \quad (r < R)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \mathbf{e}_r \frac{\varepsilon R K}{\varepsilon_0 (\varepsilon - \varepsilon_0) r^2} \quad (r > R)$$

介质球内、外的电位分别为

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr \\ &= \int_r^R \frac{K}{(\varepsilon - \varepsilon_0) r} dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon R K}{\varepsilon_0 (\varepsilon - \varepsilon_0) r^2} dr \\ &= \frac{K}{\varepsilon - \varepsilon_0} \ln \frac{R}{r} + \frac{\varepsilon K}{\varepsilon_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)} \quad (r \leq R) \\ \varphi_2 &= \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{\varepsilon R K}{\varepsilon_0 (\varepsilon - \varepsilon_0) r^2} dr = \frac{\varepsilon R K}{\varepsilon_0 (\varepsilon - \varepsilon_0) r} \quad (r \geq R) \end{aligned}$$

1. 如题 (a) 图所示, 在 $z < 0$ 的下半空间是介电常数为 ε 的介质, 上半空间为空气, 距离介质平面距为 h 处有一点电荷 q 。求 (1) $z > 0$ 和 $z < 0$ 的两个半空间内的电位; (2) 介质表面上的极化电荷密度, 并证明表面上极化电荷总电量等于镜像电荷 q' 。



2. 解 (1) 在点电荷 q 的电场作用下, 介质分界面上出现极化电荷, 利用镜像电荷替代介质分界面上的极化电荷。

根据镜像法可知, 镜像电荷分布为 (如题图 (b)、(c) 所示)

$$q' = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} q, \text{ 位于 } z = -h$$

$$q'' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} q, \text{ 位于 } z = h$$

上半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q' 共同产生, 即

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R'} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} \right\} \end{aligned}$$

下半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q'' 共同产生, 即

$$\varphi_2 = \frac{q+q''}{4\pi\varepsilon R_2} = \frac{q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}$$

(2) 由于分界面上无自由电荷分布, 故极化电荷面密度为

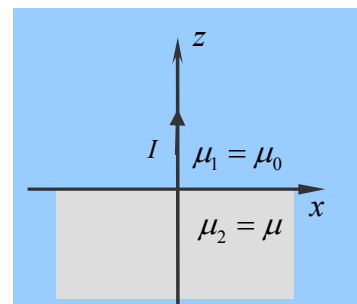
$$\begin{aligned} \sigma_p &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \Big|_{z=0} = \varepsilon_0 (E_{1z} - E_{2z}) \Big|_{z=0} \\ &= \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) h q}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)(r^2 + h^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

极化电荷总电量为

$$q_p = \int_S \sigma_p dS = \int_0^\infty \sigma_p 2\pi r dr = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) h q}{\varepsilon + \varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr$$

$$= -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)q}{\varepsilon + \varepsilon_0} = q'$$

1. 如题 5.8 所示图, 无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面, 试求 (1) 两种磁介质中的磁感应强度 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$; (2) 磁化电流分布。



2. 解 (1) 由安培环路定理, 可得

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{I}{2\pi r}$$

所以得到

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu I}{2\pi r}$$

(2) 磁介质在的磁化强度

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_2 - \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi \mu_0 r}$$

则磁化电流体密度

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r M_\phi) = \mathbf{e}_z \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi \mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = 0$$

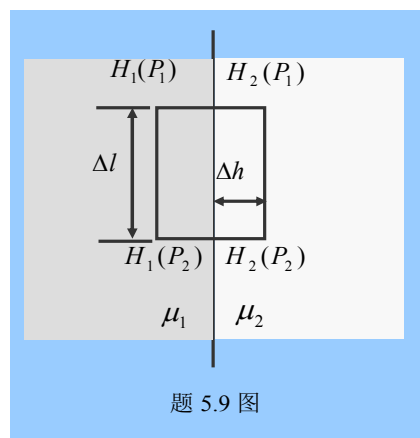
在 $r = 0$ 处, $\mathbf{B}_2$ 具有奇异性, 所以在磁介质中 $r = 0$ 处存在磁化线电流 I_m 。以 z 轴为中心、 r 为半径作一个圆形回路 C , 由安培环路定理, 有

$$I + I_m = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu I}{\mu_0}$$

故得到

$$I_m = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) I$$

在磁介质的表面上, 磁化电流面密度为



题 5.9 图

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_z \Big|_{z=0} = \mathbf{e}_r \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$$

1. 一圆柱形电容器，内导体半径为 a ，外导体内半径为 b ，长为 l 。设外加电压为 $U_0 \sin \omega t$ ，试计算电容器极板间的总位移电流，证明它等于电容器的传导电流。

2. **解** 当外加电压的频率不是很高时，圆柱形电容器两极板间的电场分布与外加直流电压时的电场分布可视为相同（准静态电场），即

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{U_0 \sin \omega t}{r \ln(b/a)}$$

故电容器两极板间的位移电流密度为

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{e}_r \varepsilon \omega \frac{U_0 \cos \omega t}{r \ln(b/a)}$$

则

$$\begin{aligned} i_d &= \int_s \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \omega U_0 \cos \omega t}{r \ln(b/a)} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r r d\phi dz \\ &= \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln(b/a)} \omega U_0 \cos \omega t = C \omega U_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

式中， $C = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln(b/a)}$ 是长为 l 的圆柱形电容器的电容。

流过电容器的传导电流为

$$i_c = C \frac{dU}{dt} = C \omega U_0 \cos \omega t$$

可见

$$i_d = i_c$$

1. 已知在空气中 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y 0.1 \sin 10\pi x \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z)$ ，求 $\mathbf{H}$ 和 β 。

(提示将 $\mathbf{E}$ 代入直角坐标中的波方程，可求得 β 。)

2. **解** 电场 $\mathbf{E}$ 应满足波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

将已知的 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_y$ 代入方程, 得

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

式中

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -0.1(10\pi)^2 \sin 10\pi x \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = 0.1 \sin 10\pi x [-\beta^2 \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z)]$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0.1 \mu_0 \varepsilon_0 \sin 10\pi x [-(6\pi \times 10^9)^2 \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z)]$$

故得

$$-(10\pi)^2 - \beta^2 + \mu_0 \varepsilon_0 (6\pi \times 10^9)^2 = 0$$

则

$$\beta = \pi \sqrt{300} = 54.41 \text{ rad/m}$$

由

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\mu_0} \left[-\mathbf{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \left[-\mathbf{e}_x 0.1\beta \sin 10\pi x \sin(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_z 0.1 \times 10\pi \cos 10\pi x \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \right] \end{aligned}$$

将上式对时间 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{1}{\mu_0 \times 6\pi \times 10^9} \left[\mathbf{e}_x 0.1\beta \sin 10\pi x \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_z \pi \cos 10\pi x \sin(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \right] \\ &= -\mathbf{e}_x 2.3 \times 10^{-4} \sin 10\pi x \cos(6\pi \times 10^9 t - 54.41z) \\ &\quad - \mathbf{e}_z 1.33 \times 10^{-4} \cos 10\pi x \sin(6\pi \times 10^9 t - 54.41z) \text{ A/m} \end{aligned}$$

1. 在自由空间中, 已知电场 $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_y 10^3 \sin(\omega t - \beta z) \text{ V/m}$, 试求磁场强度 $\mathbf{H}(z, t)$ 。

2. 解 以余弦为基准, 重新写出已知的电场表示式

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_y 10^3 \cos(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}) \text{ V/m}$$

这是一个沿+z 方向传播的均匀平面波的电场, 其初相角为 -90° 。与之相伴的磁场为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z, t) &= \frac{1}{\eta_0} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{\eta_0} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y 10^3 \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\mathbf{e}_x \frac{10^3}{120\pi} \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{e}_x 2.65 \sin(\omega t - \beta z) \text{ A/m} \end{aligned}$$

1. 均匀平面波的磁场强度 $\mathbf{H}$ 的振幅为 $\frac{1}{3\pi} \text{ A/m}$, 以相位常数 30 rad/m 在空气中沿 $-\mathbf{e}_z$ 方向传播。当 $t=0$ 和 $z=0$ 时, 若 $\mathbf{H}$ 的取向为 $-\mathbf{e}_y$, 试写出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的表示式, 并求出波的频率和波长。

2. 解 以余弦为基准, 按题意先写出磁场表示式

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e}_y \frac{1}{3\pi} \cos(\omega t + \beta z) \text{ A/m}$$

与之相伴的电场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \eta_0 [\mathbf{H} \times (-\mathbf{e}_z)] = 120\pi [-\mathbf{e}_y \frac{1}{3\pi} \cos(\omega t + \beta z) \times (-\mathbf{e}_z)] \\ &= \mathbf{e}_x 40 \cos(\omega t + \beta z) \text{ V/m} \end{aligned}$$

由 $\beta = 30 \text{ rad/m}$ 得波长 λ 和频率 f 分别为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = 0.21 \text{ m} \\ f &= \frac{v_p}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{0.21} \text{ Hz} = 1.43 \times 10^9 \text{ Hz} \\ \omega &= 2\pi f = 2\pi \times 1.43 \times 10^9 \text{ rad/s} = 9 \times 10^9 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

则磁场和电场分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{e}_y \frac{1}{3\pi} \cos(9 \times 10^9 t + 30z) \text{ A/m} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{e}_x 40 \cos(9 \times 10^9 t + 30z) \text{ V/m} \end{aligned}$$

1. 海水的电导率 $\gamma = 4 \text{ S/m}$ ，相对介电常数 $\epsilon_r = 81$ 。求频率为 10kHz、100kHz、1MHz、10MHz、100MHz、1GHz 的电磁波在海水中的波长、衰减系数和波阻抗。

2. 解 先判定海水在各频率下的属性

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon} = \frac{\gamma}{2\pi f \epsilon_r \epsilon_0} = \frac{4}{2\pi f \times 81 \epsilon_0} = \frac{8.8 \times 10^8}{f}$$

可见，当 $f \leq 10^7 \text{ Hz}$ 时，满足 $\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ，海水可视为良导体。此时

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f \mu_0 \gamma}$$

$$\eta_c \approx (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\gamma}}$$

$f=10\text{kHz}$ 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 0.126\pi = 0.396 \text{ Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.126\pi} = 15.87 \text{ m}$$

$$\eta_c = (1+j) \sqrt{\frac{\pi \times 10 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} \Omega = 0.099(1+j)\Omega$$

$f=100\text{kHz}$ 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 100 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 1.26\pi \text{ Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1.26\pi} = 5 \text{ m}$$

$$\eta_c = (1+j) \sqrt{\frac{\pi \times 100 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} = 0.314(1+j)\Omega$$

$f=1\text{MHz}$ 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 3.96 \text{ Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{3.96\pi} = 1.587 \text{ m}$$

$$\eta_c = (1+j) \sqrt{\frac{\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} = 0.99(1+j)\Omega$$

$f=10\text{MHz}$ 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 12.6 \text{ Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{12.6} = 0.5 \text{ m}$$

$$\eta_c = (1+j)\sqrt{\frac{\pi \times 10 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} = 3.14(1+j)\Omega$$

当 $f=100\text{MHz}$ 以上时, $\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1$ 不再满足, 海水属一般有损耗媒质。此时,

$$\alpha = 2\pi f \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{2\pi f \epsilon_r \epsilon_0} \right)^2} - 1 \right]}$$

$$\beta = 2\pi f \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{2\pi f \epsilon_r \epsilon_0} \right)^2} + 1 \right]}$$

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{\mu_0 / (\epsilon_r \epsilon_0)}}{\sqrt{1 - j\gamma / (2\pi f \epsilon_r \epsilon_0)}}$$

$f=100\text{MHz}$ 时

$$\alpha = 37.57 \text{ Np/m}$$

$$\beta = 42.1 \text{ rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.149 \text{ m}$$

$$\eta_c = \frac{42}{\sqrt{1 - j8.9}} \Omega = 14.05 e^{j41.8^\circ} \Omega$$

$f=1\text{GHz}$ 时

$$\alpha = 69.12 \text{ Np/m}$$

$$\beta = 203.58 \text{ rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.03 \text{ m}$$

$$\eta_0 = \frac{42}{\sqrt{1 - j0.89}} \Omega = 36.5 e^{j20.8^\circ} \Omega$$

1. 有一线极化的均匀平面波在海水 ($\epsilon_r = 80, \mu_r = 1, \gamma = 4 \text{ S/m}$) 中沿+y 方向传播, 其磁场强度在 $y=0$ 处为

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_x 0.1 \sin(10^{10} \pi t - \pi/3) \text{ A/m}$$

(1) 求衰减常数、相位常数、本征阻抗、相速、波长及透入深度; (2) 求出 $\mathbf{H}$ 的振幅为 0.01 A/m 时的位置; (3)

写出 $\mathbf{E}(y,t)$ 和 $\mathbf{H}(y,t)$ 的表示式。

$$2. \text{ 解 } (1) \quad \frac{\gamma}{\omega\epsilon} = \frac{4}{10^{10}\pi \times 80\epsilon_0} = \frac{4 \times 36\pi}{10^{10}\pi \times 80 \times 10^{-9}} = 0.18$$

可见, 在角频率 $\omega = 10^{10}\pi$ 时, 海水为一般有损耗媒质, 故

$$\begin{aligned}\alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} \\ &= 10^{10}\pi \sqrt{\frac{80\mu_0\epsilon_0}{2} [\sqrt{1 + 0.18^2} - 1]} = 83.9 \text{ Np/m} \\ \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]} \\ &= 10^{10}\pi \sqrt{\frac{80\mu_0\epsilon_0}{2} [\sqrt{1 + 0.18^2} + 1]} \approx 300\pi \text{ rad/m} \\ \eta_c &= \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - j\frac{\gamma}{\omega\epsilon}}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{80\epsilon_0}}}{\sqrt{1 - j0.18}} \\ &= \frac{42.15}{1.008e^{-j0.028\pi}} = 41.82e^{j0.028\pi} \Omega\end{aligned}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^{10}\pi}{300\pi} = 0.333 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{300\pi} = 6.67 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_c = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{83.9} = 11.92 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(2) 由 $0.01 = 0.1e^{-\alpha y}$ 即 $e^{-\alpha y} = 0.1$ 得

$$y = \frac{1}{\alpha} \ln 10 = \frac{1}{83.9} \times 2.303 = 27.4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$(3) \quad \mathbf{H}(y, t) = \mathbf{e}_x 0.1e^{-83.9y} \sin(10^{10}\pi t - 300\pi y - \frac{\pi}{3}) \text{ A/m}$$

其复数形式为

$$\mathbf{H}(y) = \mathbf{e}_x 0.1e^{-83.9y} e^{-j300\pi y} e^{-j\frac{\pi}{3}} \text{ A/m}$$

故电场的复数表示式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(y) &= \eta_c \boldsymbol{H}(y) \times \boldsymbol{e}_y = 41.82 e^{j0.028\pi} \times 0.1 e^{-83.9y} \times e^{-j(300\pi y + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y \\
&= \boldsymbol{e}_z 4.182 e^{-83.9y} e^{-j(300\pi y + \frac{\pi}{3} - 0.028\pi + \frac{\pi}{2})} \text{ V/m}
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(y, t) &= \text{Re}[\boldsymbol{E}(y) e^{j\omega t}] \\
&= \boldsymbol{e}_z 4.182 e^{-83.9y} \sin(10^{10} \pi t - 300\pi y - \frac{\pi}{3} + 0.028\pi) \text{ V/m}
\end{aligned}$$