

---

河海大学

毕业设计（论文）

空间相似变换在点云配准中的应用

专业年级 06 级测绘工程

学 号 06044235

姓 名 郭建明

指导教师 陈建华

评 阅 人 郑德华

二〇一〇年六月

中国 南京



# 河海大学

## 本科毕业设计（论文）任务书

### I、毕业设计（论文）题目：

空间相似变换在点云配准中的应用

### II、毕业设计（论文）工作内容（从综合运用知识、研究方案的设计、研究方法和手段的运用、应用文献资料、数据分析处理、图纸质量、技术或观点创新等方面详细说明）：

三维激光扫描技术能够快速、精确、无接触地获取复杂物体表面的三维信息(点云),进而完成三维实体重建。不同视点所获点云坐标由于误差积累等原因,往往不能很好匹配,需要后期配准。传统上使用 ICP 点云配准算法。由空间相似变换进行不同视点的点云配准,其参数几何意义明确,也便于可靠性及误差分析。本课题的研究,要求学生针对具体问题制定研究计划、总结研究成果,在研究过程中,学会用科学的方法分析问题、解决问题。

#### 要求：

- 1、了解 ICP 点云配准算法
- 2、Trimble 三维激光扫描仪的应用
- 3、熟悉空间相似变换及间接平差理论
- 4、熟练掌握 VB/VC 程序设计
- 5、通过实验检测应用空间相似变换进行点云配准的效果,并进行可靠性分析



## III、进度安排：

1. 收集阅读参考资料	1 周
2. 熟悉 Trimble 三维激光扫描仪	1-2 周
3. 空间相似变换及间接平差理论分析	2-3 周
4. 空间相似变换在点云配准中的应用	2-3 周
5. 撰写毕业论文及答辩	2-3 周

## IV、主要参考资料：

1. 《工程测量学》 水利水电出版社
2. 相关论文

指导教师： 陈建华 ， 2010 年 6 月 1 日

学生姓名： 郭建明 ， 专业年级： 06 级测绘工程



## 摘要

近几十年来,计算机图形学得到了迅速发展。随着计算机图形学的发展,一些相关技术也相继出现或在原有基础上有了长足的进步。虚拟现实、数字城市、数字博物馆、逆向工程等新名词相继出现并开始进入应用阶段。这些技术都不可或缺的需要进行三维几何建模,而传统的 AutoCAD、3D Max、MAYA 等建模工具已经逐渐不能胜任人们对复杂曲面物体的建模需要,由此三维激光扫描技术应运而生。

为了得到物体真实的三维模型,人们需要获得三维物体表面的真实数据。但是,由于受到测量设备和环境的限制,物体表面完整测量数据的获得往往需要通过多次测量完成。因此,在得到点云数据之后,为了得到三维模型的原始曲面,必须要将不同角度,不同位置扫描得到的大容量三维空间数据点集转换到一个统一的坐标系中,该技术称之为数据缝合,即三维点云数据的配准。

点云配准实际上相当于数学上的映射问题,即找到相邻两个点云数据的一一对应关系,或者说要找到一个合适的变换关系,将一个坐标系统下的点云转换到另外一个坐标系统中。

本文在总结国内外学者研究成果的基础上,着重研究了三维激光扫描数据的空间配准问题,地面三维激光数据配准方法大致分为基于特征的数据配准和迭代法数据配准:ICP(Iterative Closest Point)算法是点云配准的常用算法,他同视角点云中的对应点对的映射关系,采用最小二乘坐标转换矩阵,迭代求解直到满足精度要求。一般来说,这种方法精度比较高但是对应的速度也较慢。本文提出了一种新的利用空间相似变换进行不同视点的点云配准,其参数几何意义明确,也便于可靠性及误差分析。空间相似变换是近来刚刚发展并得到应用的点云配准的方法,利用空间相似变换可以确定立体模型在地面坐标系中的正确方位和比例尺归化因子。本文主要涉及三维激光扫描数据点云的配准,并重点介绍空间相似变换在点云配准中的应用。

**关键词:** 三维激光扫描; ICP配准; 空间相似变换; 点云配准



## Abstract

In recent decades, computer graphics have developed rapidly. With the development of computer graphics, some related technologies have emerged, or has made substantial progress based on the original. Virtual reality, digital city, digital museum, reverse engineering and other new terms have emerged and begun to enter the application stage. These technologies are essential to the needs of three-dimensional geometric modeling, but traditional AutoCAD, 3D Max, MAYA and other modeling tools have been increasingly incompetent people need for complex surface modeling of objects, thus three-dimensional laser scanning technology came into being.

In order to obtain the real three-dimensional model of the objects, people need to get the real data on the surface of three-dimensional. However, due to measurement equipment and environmental constraints, the full surface measurement data obtained through multiple measurements are completed. Therefore, in the point cloud data obtained after the three-dimensional model in order to get the original surface, must be to different angles and different positions scanned by the large-capacity three-dimensional data points converted to a common coordinate system, the technology known as data suture, or three-dimensional point cloud data registration.

Point cloud registration in fact equivalent to the mapping of mathematical problems, that two adjacent point cloud data to find the corresponding relationship, or to find a suitable transformation between a coordinate system conversion to another point cloud a coordinate system.

This review describes the basis of academic research, and focused on the spatial three-dimensional laser scan data registration problems, ground-dimensional laser data registration method can be divided into feature-based iterative method of data registration and data registration: ICP (Iterative Closest Point) algorithm is commonly used point cloud registration



algorithm, his view point cloud with the corresponding point on the mapping, using the least square coordinate transformation matrix, iterative solution until you meet the required precision. In general, this approach corresponds to high precision and speed, but slower. This paper presents a new similarity transformation space for different point of view of point cloud registration, a clear geometric meaning of its parameters, but also easy to reliability and error analysis. Space similarity transformation is just recently developed and applied to point cloud registration method, the use of space can determine the three-dimensional model similar transformation on the ground coordinate system in the correct orientation and scale factor naturalization. This article mainly deals with three-dimensional laser scan data point cloud registration, and highlights the similar transformation in the point cloud space registration application.

Key words: 3D laser scanning; ICP Registration; space similarity transformation ; point cloud Registration

---

# 目录

第一章 绪论.....	1
1.1 三维激光扫描技术及其应用 .....	1
1.2 三维激光扫描技术特点 .....	2
1.3 点云数据配准的意义 .....	4
1.4 点云数据配准算法的研究进展 .....	6
第二章 研究现状及原理.....	9
2.1 ICP 算法在点云配准中的应用.....	9
2.2 空间相似变换在点云配准中的应用 .....	13
2.2.1 基于矩阵论的空间相似变换 .....	13
2.2.2 基于空间向量的空间相似变换 .....	15
第三章 应用与实验.....	21
3.1 数据的获取 .....	21
3.2 间接平差原理 .....	22
3.3 利用已知对应同名点求转换参数 .....	24
3.4 点云的配准 .....	29
第四章 总结与展望.....	31
4.1 实验后的结论 .....	31
4.2 展望 .....	31
参考文献.....	32
致 谢.....	34
附录一 英文翻译.....	35
附录二.....	47



# 第一章 绪论

## 1.1 三维激光扫描技术及其应用

长久以来,由于受到科学技术发展的限制,人们所能够得到并对之进行处理的绝大多数是二维的数据。然而,随着现代信息技术的飞速发展以及图形应用领域的不断扩大,如何将现实世界的立体信息快速的转换为计算机可以处理的数据称为人类追求的目标。1965年, L. Robert在其论文“三维物体的机器感知”中指出利用计算机视觉技术获取物体三维信息的可能性,这标志着三维信息获取技术新纪元的到来<sup>[9]</sup>。之后,科研人员相继提出了立体视觉、结构光等方法,并得到了实际应用。随着电子技术的飞速发展,三维激光扫描仪的出现为三维空间信息获取提供了更便捷的手段。

在现有的数据采集技术中,三维激光扫描(LiDAR)技术以其独特的优势,向人们展示了复杂曲面三维信息获取、三维重建、逆向工程、虚拟地理环境等方面广阔的应用场景。通过三维激光扫描,可快速、方便地将真实世界的立体信号转化为计算机上可直接处理的数字信号,为真实世界的数字化提供了一种以往其他任何技术无法比拟的手段。

三维扫描仪是针对三维信息领域的发展而开发的计算机输入信息的前端设备。利用该设备只需要对任意实际物体进行扫描,即可在电脑上得到实物的三维图像和物体的真实色彩。Cyberware公司研制出了世界上最早的三维扫描仪并将其商品化,投入使用,进入90年代后,三维扫描技术已体现出广阔的应用前景和强大的生命力。目前,国外有几十家高科技公司开展了对三维扫描技术的研究并形成了自己的产品。这些设备使用与各种不同大小的物体,根据应用背景的不同,精度、速度也有很大的区别。其扫描原理也有很多种,基本上可以分为接触式和非接触式两大类。接触式的扫描对于被扫描物体本身可能造成损害,也不适用于柔软物体的测量,因此现在的主流扫描设备都是非接触式的。

三维扫描技术能获得物体表面点的三维坐标信息,属于一种立体测量技术。与传统测量技术相比,该技术能完成对复杂物体的测量,而且精度高、速度快、



能大幅节约时间和成本，因而在下述领域的应用中体现出重要价值：

### (1) 文化遗产的精密数字化保护与重建

中国是历史文明古国，在历经上下五千年的人类文明历史后，留下了无数的文化遗产。现在这些文化遗产随着时间流逝和国家现代化的过程，正濒临消失。因此近些年来全国文物保护的呼声越来越响，国内也有很多文化遗产如故宫、长城、布达拉宫等被列为世界文化遗产。文物保护一般有两个方面：一方面是文物现状的资料保存；另一方面是文物的修缮或者重建，这些修缮或重建应该在保持文物原有风格的基础上进行，这就要求必须详细记录文物现状。利用激光扫描技术可以详细记录文物的外形和表面纹理信息<sup>[12]</sup>。

### (2) 重要工程的竣工验收与精密数字化

对于大型且结构复杂的建筑结构，通常需要对建筑构件进行安装定位，对结构的整体变形或局部施工质量作检验，确定实际建筑是否与设计要求吻合。三维激光扫描技术能够完成这些工作，同时还能记录建筑物的三维信息作为建筑物的历史资料

### (3) 建筑物的精密变形监测

传统的变形监测多是基于测量仪器的逐点监测。利用三维激光扫描技术，可以将监测对象的整体模型构建出来，通过定期对比模型的方法来全方位的反映监测对象各处的形变。

## 1.2 三维激光扫描技术特点

三维激光扫描技术是近年来刚刚发展起来并正在逐步走向成熟的一项三维数据获取技术。通过该技术可真正实现直接从实物进行快速的逆向三维数据采集及模型重构。它的出现和发展为空间三维信息的获取提供了全新的技术手段，为信息数字化发展提供了必要的生存条件。激光测量技术出现于上世纪80年代，由于激光具有单色性、方向性、相干性和高亮度等优异性能，使其在精度、速度、易操作性等方面表现出巨大的优势，引发了现代测量技术的一场革命。该技术具有如下一些特点<sup>[13]</sup>：

(1) 数据获取速度快，实时性强：激光扫描测量能够快速获取大面积目标



空间信息。常用的地面三维激光扫描仪的扫描点采集速度可达每秒数千点以上，某些型号的扫描仪采集速度高达每秒数十万点。可实时的测定尸体表面立体信息。

(2) 非接触性：采用完全非接触的方式进行扫描测量，不需要反射棱镜，无需对扫描目标物体进行任何表面处理便可采集物体表面的矢量化三维坐标数据，快速实现原型重构，并能色彩还原。可以用于解决危险复杂目标、环境及工作人员难以到达的情况，且在光线昏暗甚至黑夜是均可作业。具有传统测量方式难以完成的技术优势<sup>[9]</sup>。

(3) 主动性强，能全天候工作：地面三维激光扫描技术采用主动发射激光，通过探测器自身发射的激光脉冲回射信号来描述目标信息，从而实现不受扫描环境的时间及空间的约束。

(4) 高密度、高精度：激光扫描能够快速、高精度的获取海量点云数据，实现对扫描目标的高精度三维数据采集，从而达到高分辨率的目的。

(5) 全数字化特征、兼容性好：系统扫描获取的数字距离信号具有全数字化特征，易于自动化显示输出，可靠性好。用户界面有好的后处理软件具有很好的点云处理、建模处理能力，能够达到与其他软件相兼容、共享和互操作。

(6) 与数码相机、GPS系统集成使用：新型扫描系统继承了GPS接收机和数码相机等高精度定位装置，系统外置（或内置）的数码相机的使用增强了彩色信息的采集，对信息的获取更加全面。GPS定位系统的使用，进一步提高了测量数据的准确性。

(7) 适应性强：一般常用的激光扫描设备对于目标环境及工作环境的依赖性都很小，且其体积小、防水、防辐射、防震动、防潮等特性，有利于进行各种场景或野外环境的操作。

但该技术仍有很多不足之处，简单归纳如下：

- (1) 扫描仪是个黑箱系统，难以检校；以其昂贵，市场定位为高档设备。
- (2) 扫描数据后处理时间可达数据采集所需时间的10倍，扫描易，处理难。
- (3) 扫描数据拼接软件不完善，各厂家自成一体，互不兼容；缺乏标准化思考，缺乏实用而价格相对便宜的软件；考古学家、文物保护人员、建筑学家较难进一步使用三维建模成果开展专业研究工作。



- (4) 三维建模有一定的主观性，非专业人士常受到虚拟动画的视觉迷惑，忽视了三维模型的可测量和科学性。

### 1.3 点云数据配准的意义

在计算机中对客观环境进行真实的三维重建，一直以来都是计算机视觉、机器人学以及计算机图形学所研究的热门领域之一。近年来，随着激光扫描技术的发展以及其成本的逐渐降低，快速高效地获取真实场景的高精度三维数据成为可能。利用这些数据，可以重建出具有准确几何信息、甚至照片级真实感的三维模型。利用三维激光扫描技术进行三维重建，主要需解决如下几个问题：

**(1) 数据获取：**指对场景的三维数据的获取，这一步主要由激光扫描仪来完成。为了高效而高质量的获取一个大型场景的完整的三维数据，在数据获取方面还存在很多问题，比如扫描试点的规划、扫描仪和扫描分辨率的选择、扫描数据的格式及表示等等。

**(2) 点云数据的配准：**这是数据获取后所要做的第一项工作，是后续工作的基础和前提，因此是非常重要的一个环节。

**(3) 点云数据的融合与表面重建：**当多视点点云数据配准到同一坐标系后，其重合的部分必然会有两层数据，造成数据的冗余和不一致，需要进行数据融合。另外，由激光扫描得到的点云数据一般都是离散的三维点，数据量大、存在冗余，与实际应用的要求仍有一定差距。常用的解决方法是对点云进行三角剖分以重建表面，三角剖分得到的三角网模型可以很好的逼近实物<sup>[9]</sup>。

**(4) 纹理映射：**经过前述过程对实体进行了数字化，并获得了精确的数字几何模型。但为了体现模型表面的属性及特征，需要将拍到的实体的一系列彩色照片准确映射到几何模型上，即模型的无变形纹理映射。

因此，基于三维激光扫描技术进行实体空间数据获取和三维重建一般应该采用如下流程：

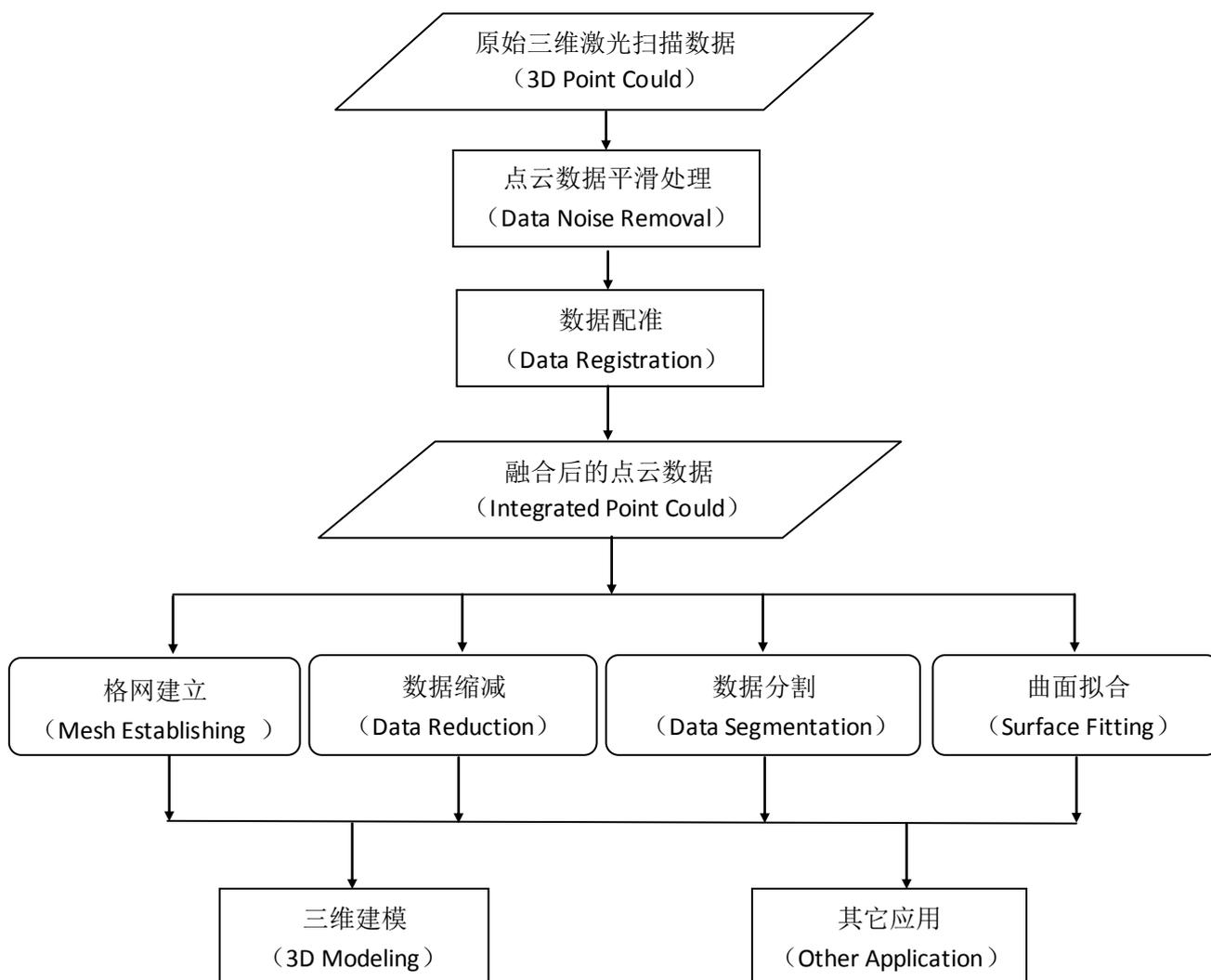


图 1.1 三维激光扫描数据的处理流程图

从上述流程可以看出，作为利用点云数据场景三维重建系统的一部分，研究点云配准的重要性和意义主要体现在以下几个方面：

(1) 三维激光扫描系统虽然具有精度高、作业速度快等数据获取的能力，使空间目标的采集不再困难，但其数据处理却成为它广泛应用的瓶颈，大力发展三维激光扫描的数据处理技术是三维建模的关键问题。

(2) 为了得到物体真实的三维模型，人们需要获得三维物体表面的真实数据。但是，由于受到测量设备和环境的限制，物体表面完整测量数据的获得往往需要通过多次测量完成。点云(三维数据)就是使用各种三维数据采集仪采集得到的密集数据，它记录了有限体表面在离散点上的各种物理参量。三维曲面的重建



就是依据这种密集的点云数据来恢复原始曲面,进而实现三维模型的真实重现的目的

(3) 通常的三维激光扫描系统一次只能得到物体的一个侧面的点云数据,要得到地物完整的形状信息,须采用多测站多视角扫描。由于不同位置进行扫描时坐标系不同,需要将多测站下的扫描的三维数据进行拼合,将其转换到同一坐标系下并进行数据融合,才能获得物体表面的完整的形状信息。这种三维坐标系的统一和点云融合过程就是数据配准。点云配准是点云数据获取后的第一步处理,也是所有后续处理的基础。因此,配准的精度将直接关系到建模精度。

## 1.4 点云数据配准算法的研究进展

### 1.4.1 国内外研究进展

数据的配准是一个宽泛的概念,早期主要应用在图像处理中。据文献记载,国外在六十年代就在图像配准领域进行了相关的研究,但是直到八十年代后才开始引起广泛的关注(刘松涛,2007)

常见的图像配准方法有机遇图像灰度的方法(王小睿,1997;A.Averbuch,2002)和基于图像特征(钮永胜,1999;周鹏,2002;李秀秀等,2008)的方法。基于图像灰度的配准方法,通常直接利用整幅图像的灰度信息,建立两幅图像之间的相似性度量,然后采用某种搜索方法寻找使相似性度量值最大或最小的变换模型的参数值。这种方法能提高估计的精度,但计算量很大,速度较慢。而基于图像特征的配准方法是目前采用最多的,它主要的优点是提取了图像的显著特征,大大压缩了图像的信息量,计算量小,但这种方法对特征提取和特征匹配的误差更敏感。基于图像特征的配准方法包括特征提取、特征匹配、选取变换模型及求取参数、坐标变换与插值四个组成部分(倪国强,2004)。现在图像配准已广泛应用于遥感图像处理、医学图像分析、目标变化监测、目标识别等领域中。

二十世纪八十年代中期,由于三维激光扫描系统的应用,国外很多学者开始对三维激光扫描数据的空间配准进行了研究。1986年,Faugeras和Hebert用四元素概念进行了配准方法的研究,提出了点集与点集间的匹配方法(Faugeras,1986)。1987年,Horn和Arun等人同样用四元素法提出了点集对点集配准的方法PSTPS(Point Set to Point Set Registration),这种点集与点集坐标系匹配算



法通过实践证明是一个解决复杂配准问题的关键方法<sup>[10]</sup>。1992年,计算机视觉研究者Besl和Mckay介绍了一种高层次的基于自由形态曲面的配准方法,也就是迭代最近点法。

上述数据配准的算法多是只包括两个站点间坐标系的统一,主要应用在工业产品的模具和制造产业中。随着长距离三维激光扫描系统的发展成熟,为城市建模提供了更先进的数据采集手段。这是针对地理场景的数据配准有了新的特点,本文根据三维激光扫描数据的特点,把点云数据的空间配准分为两个阶段,分别是三维坐标系的统一和数据融合。

多站扫描结果之间点云的配准,实际上是将两个或两个以上坐标系中的海量三维空间数据点集转换到同一坐标系统的数学计算过程。一般这种变换关系可以用一个 $3 \times 3$ 的旋转矩阵 $R$ 和一个三维平移向量 $T$ 来描述,数据配准的任务就是求出 $(R, T)$

Vorady (1997)介绍了一种转台定位法:将测量物体放在旋转台上,通过测量物体和转台同步旋转,调整物体的测量位置,设法测得各个不同角度的数据,然后可以从转台上读取相应旋转角来求得旋转矩阵,这种情况没有平移量;此外,还可固定测量物体,通过关节是扫描系统机械臂的空间运动来记录测量的空间位置变换。这两种方法都需要读取测量设备的刻度进行坐标变换,对测量人员和测量设备的要求较高,而且定位精度不易保证(吴敏等,2003)。显然,这两种方法都不适合于长距离激光扫描仪获得的地理场景数据的空间配准。

一般而言,为了求出 $R$ 和 $T$ ,需要在多测站点云中找出若干组对应的特征或同名点。就算法而言,对于数据配准问题,一直以来存在两种策略。一种是上世纪就是年代初提出的著名的迭代最近点(Iterative Closest Point, ICP)算法,另一列方法是利用离散的特征进行匹配的方法。两者的主要区别在于用于配准的点云数量级的不同,ICP算法可看做是把某一点集中的所有点当做同名点进行计算。

针对上述各种形式的点云数据,在20世纪80年代中期,很多学者对其配准进行了大量研究。1987年,Horn、Arun等人用四元素法提出点集对点集配准方法。这种点集与点集坐标系匹配算法通过实践证明是一个解决复杂配准问题的关键方法。1992年,计算机视觉研究者Besl和Mckay介绍了一种高层次的基于自由形



态曲面的配准方法，也称为迭代最近点法ICP（Iterative Closest Point），并在此基础上产生了许多变种算法。ICP主要用于解决基于自由形态曲面的配准问题。但ICP算法对两个点云相对的初始位置要求比较高，点云之间初始位置不能相差太大，并且要求两个匹配点集中的一个点集是另外一个点集的子集。当条件不满足，或相差太大时，会影响ICP的收敛方向，这将导致算法的精确度和收敛速度受到影响，甚至还有可能陷入局部最优解，因而配准结果也是不可靠的。

#### 1.4.2 当前研究中的缺陷与不足

综上所述，三维数据空间配准方法已经有了很大的发展，然而由于扫描物体的复杂性，大多数的配准方法都有其自身的局限性，主要表现在：

- (1) 传统逆向工程单个物体上用到的配准方法在地理场景配准应用上具有较大的限制，无论是转台定位法还是回转配准法都无法直接应用在地理场景扫描中；
- (2) 采用平面或其他特征作为数据配准的方法还不成熟，主要表现在：不同视图中的特征往往不一致，甚至同一个特征在其它视图被分割程序多特征或者消失，同时该方法带来的集合图形之间的布尔运算将涉及到许多CAD种目前尚未解决的或解决不甚圆满的难题，如曲面的拼接、求交、延拓和过渡等；
- (3) 各种ICP及改进算法的最大问题在于其算法的复杂性，两个测站的配准就会需要极大的计算量，不适合以大量测站为特征的地理场景的三维激光扫描数据的快速配准；
- (4) 现有的研究多集中在两站测量数据的坐标系统一过程中，对于多测站的数据配准和数据融合的研究比较缺乏。

因此，针对中场距离扫描系统采集到的地理场景数据的空间配准，有必要采取更加合理的方法进行配准研究，解决三维建模过程中数据统一的问题。



## 第二章 研究现状及原理

在无法预知点云数据间的相互关系式，迭代算法的有效性得到了质疑，这是基于几何特征的配准算法就显示了明显的优势，这种算法根据点云或者曲面的特征来寻找特征相似区域，在此基础上，通过最小化目标函数的方法来提高配准的精确性，这种方法配准效率较高，并且对于如局部重叠的点云数据，适用性较好。

基于特征的配准能有效地计算出点云间的对应性，而迭代算法能够得到精确地配准效果，因此，在实际应用中，配准算法往往以基于几何特征的配准作为预配准，以迭代配准作为精确配准。这样，既解决了迭代算法收敛的不确定性，又减少了迭代过程的配准时间。

本文作者在深入学习了江刚武、潘国荣等人的文献中提出的基于矩阵论的空间相似变换以及基于空间向量的空间相似变换的基础上，利用matlab实现了旋转矩阵和平移参数的计算，并且编程实现了空间三维坐标转换，针对乒乓球的点云数据进行了数据配准的试验，取得了较好的配准效果。下面介绍一下这种空间相似变换模型，并简要的介绍一下目前应用最为广泛的ICP点云配准算法的原理。

### 2.1 ICP 算法在点云配准中的应用

点云配准有手动配准、依赖仪器的配准和自动配准。通常我们所说的点云配准技术即是指最后一种。点云自动配准技术是通过一定的算法或者统计学规律，利用计算机计算两片点云之间的错位，从而达到把两片点云自动配准的效果。目前采用的自动配准技术一般分为初始配准和精确配准两步，初始配准是为了缩小点云之间的旋转和平移错位以提高精确配准的效率和趋向，精确配准则是为了使两个点云之间的配准误差达到最小<sup>[8]</sup>。

精确配准一般采用ICP (iterative closest point) 算法。但传统的ICP算法计算效率不高，因此国内外许多研究者都为改进ICP算法做出了努力。下面介绍几种常见的ICP配准的方法：

#### 2.1.1 点云初始配准



为了缩小点云之间的旋转和平移错位，使得精确配准不致趋向错误的方向，需要进行点云初始配准。本文采用点云主方向贴合法实现自动初始配准，具有方便快捷精确的效果。

每个点云都存在一个空间上的主方向，这个主方向可由计算点云中所有点的特征向量得到，根据特征向量还可以得到与主方向垂直的两个此方向。由此可建立一个以点云重心为原点，点云主方向以及次方向为坐标轴的一个参考坐标系。这样，对于相似度大的两个点云，只要把两个参考坐标系调整到一致，即可以实现点云配准。对于差异较大的点云，通过这种方式，也可以达到缩小点云之间错位的目的。

由于主方向具有正反两个方向，因此可能出现配准后两个点云正好相差 $180^\circ$ 的情况，所以配准后还需测试是否出现这种情况。本文通过计算两个点云的包围盒来测试两点云是否重合。设 $V_R$ （下角R代表reference）为参考点云包围的体积， $V_T$ （下角T代表target）为目标点云包围的体积， $V_i$ 为参考点云和目标点云包围相交得到的包围的体积。则包围和重合系数为： $f = (V_i * V_i) / (V_R * V_T)$

(1)

如果 $f > T$ ,  $T$ 为设定阈值, 则两点云大致重合。否则两点云不重合, 反转参考坐标系的X轴或Y轴再次测试。如果4种可能性都测试过, 并且没有任何一个 $f$ 大于 $T$ , 则说明两点云差异较大, 去 $f$ 最大的那种即可。

算法流程说明如下：

- (1) 读取参考点云和目标点云；
- (2) 分别粗略选取两片点云可以重叠部分；
- (3) 分别用雅克比法计算选取区域的特征向量和特征值, 按特征值从大到小排列特征向量为 $EV_0$ ,  $EV_1$ ,  $EV_2$ ；
- (4) 分别计算点云重心 $C$ , 以 $C$ 为原点, 以 $EV_0$ 为X轴,  $EV_1$ 为Y轴,  $EV_0 \times EV_1$ 为Z轴, 建立参考坐标系；
- (5) 由两个坐标系计算得到坐标变换矩阵；



- (6) 根据坐标变换矩阵变换目标点云坐标;
- (7) 测试变换后点云和参考点云是否大致重合  
合, 不重合则反转目标点云X 轴或Y 轴, 跳到步骤5;
- (8) 点云重合, 结束。

### 2.1.2 点云精确配准

为了尽可能配准两个点云使它们之间的误差最小, 还需在初始配准的基础上进行自动精确配准。本文采用基于特征点的ICP算法进行精确配准, 该算法可以有效提高计算速度, 对于海量数据点云效果十分显著, 可以有效缩短原ICP算法的计算时间。在研究ICP算法之前, 必须先了解其中所使用的一个关键算法, 即对应点集配准算法(corresponding point set registration)。

#### 对应点集配准的单位四元数法

对应点集配准算法的目标在于寻找最小二乘逼近的坐标变换矩阵, 对于互相对应的两个点集, 可以采用单位四元数法[ 1 ]得到。

若目标点集P对应于参考点集X, 对应点集应满足以下条件:

- (1) P中点的个数 $N_P$  和X中点的个数 $N_X$  相等, 即 $N_P = N_X$  ;
- (2) 对于P中每一个点 $p_i$  都应该对应于X中具有相同下标 $i$ 的 $x_i$  , 即 $p_i = x_i$ 。

设旋转变换向量为单位四元数  $q_R = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ , 其中  $q_0 \geq 0$ , 并且

$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ , 可得3\*3旋转矩阵  $R(q_R)$ 。设平移变换向量为  $q_T = [q_4, q_5, q_6]^T$ , 可得完全坐标变换向量  $q = [q_R | q_T]^T$ 。则求对应点集间的最佳坐标变换向量问题可转化为求q使得函数:

$$f(q) = \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} \|x_i - R(q_R)p_i - q_T\|^2 \quad (3-1-1)$$

最小化的问题。

算法流程如下:

- (1) 得到对应点集P和X;
- (2) 计算目标点集P 的重心和参考点集X的重心:

$$u_p = \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} P_i, u_x = \frac{1}{N_X} \sum_{i=1}^{N_X} X_i \quad (3-1-2)$$

- (3) 由点集P和X构造协方差矩阵:



$$\begin{aligned}\sum_{P,X} &= \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} [(p_i - u_p)(x_i - u_x)^T] \\ &= \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} [p_i x_i^T] - u_p u_x^T\end{aligned}\quad (3-1-3)$$

(4) 由协方差矩阵构造4 × 4对称矩阵:

$$Q(\sum_{P,X}) = \begin{pmatrix} \text{tr}(\sum_{P,X}) & \Delta^T \\ \Delta & \sum_{P,X} + \sum_{P,X}^T - \text{tr}(\sum_{P,X}) I_3 \end{pmatrix} \quad (3-3-4)$$

其中,  $I_3$ 是3 × 3的单位矩阵,  $\text{tr}(\sum_{P,X})$ 是矩阵 $\sum_{P,X}$ 的迹,

$$\Delta = [A_{23}, A_{31}, A_{12}]^T, A_{i,j} = (\sum_{P,X} - \sum_{P,X}^T)_{i,j};$$

(5) 计算 $Q(\sum_{P,X})$ 的特征值和特征向量, 其最大特征值对应的特征向量即为最佳旋转向量 $q_R = [q_0 q_1 q_2 q_3]^T$ ;

(6) 计算最佳平移向量 $q_T = u_x - R(q_R)u_p$  (3-1-5), 其中:

$$R(q_R) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (3-1-6)$$

(7) 得到完全坐标变换向量 $q = [q_R | q_T]^T = [q_0 q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6]^T$ , 求得最小均方误差 $d_{ms} = f(q)$ ;

(8) 结束

把这种对应点集配准算法记为 $(q, d_{ms}) = Q(P, X)$ . 并用 $q(P)$ 表示P根据坐标变换向量 $q$ 变换后的点云。

### 2.1.3 改进的ICP算法

ICP算法是当前应用最广的点云配准算法。ICP算法虽然基本能够满足点云配准在精度上的要求, 但算法本身计算效率不高, 花费时间太多, 特别是对于实际测量中的海量数据无法直接使用。因此需要对其进行改进, 提高计算效率。

ICP算法的时间代价是 $O(N_P N_X)$ 。在实际测量中, 当数据量很大时(例如几十



万甚至几百万个点), 所花费的时间将是惊人的。如果能够减少时间代价到  $O(N_p)$ , 并且同时保证配准精度的话, 就能应用于实际测量的模型之中。由于ICP算法中主要是求最近点集, 算法花费时间比较多, 如果能够把这个步骤的时间代价减少到  $O(N_p)$ , 即可达到目的。

- (1) 得到目标点云P (含有  $N_p$  个点) 和参考云X (含有  $N_x$  个点);
- (2) 根据点的曲率特征, 在P 中寻找n个特征点 ( n为常数, 例如n = 1 000), 得到特征点集F;
- (3) 初始化:  $F_0 = F, q_0 = [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T, k=0$ ;
- (4) 利用 k-d tree 寻找F在X中的最近点Y:  $Y_k = C(F_k, X)$
- (5) 计算坐标变换向量和误差:  $(q_k, d_k) = Q(F_0, Y_k)$
- (6) 特征点集坐标变换:  $F_{k+1} = q_k(F_0)$ ;
- (7) 判断误差是否收敛, 如果  $d_k - d_{k+1} < \tau$ ,  $\tau$  为设定值且  $\tau > 0$ , 则收敛, 否则跳到步骤4;
- (8) 误差收敛于 $\tau$ , 目标点云坐标变换:  $P' = q_k(P)$ ;
- (9) 结束。

## 2.2 空间相似变换在点云配准中的应用

在摄影测量学里, 为了确定立体模型在地面坐标系中的正确方位和比例尺归化因子, 一般采用空间相似变换的方法。正确求解空间相似变换中的各项参数, 需要一定数量的控制点, 这里至少需要三个点才能求出转换参数, 下面介绍两种利用空间相似变换求取转换参数的原理和方法<sup>[2]</sup>:

### 2.2.1 基于矩阵论的空间相似变换

设有两个空间直角坐标系分别为O-XYZ和O-X'Y'Z', 其坐标系原点不一致, 存在三个平移参数  $\Delta X$ 、 $\Delta Y$ 、 $\Delta Z$ ; 它们间的坐标轴也相互不平行, 存在三个旋转参数  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\varepsilon_z$ 。同一点A 在两个坐标系中的坐标分别为(X,Y,Z) 和(X',Y',Z')。

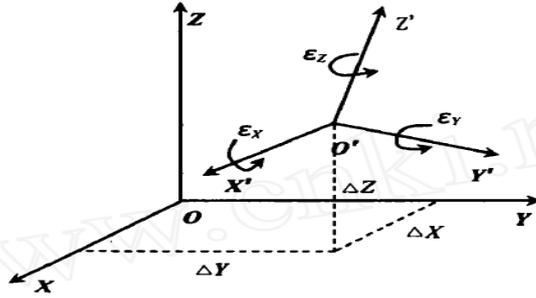


图1 两个不同的空间直角坐标系

显然，这两个坐标系通过坐标轴的平移和旋转可取的已知，坐标系的转换关系如下，3D 空间下，设两个不同坐标系间的对应点坐标分别为 $X, Y, Z$ 和 $X', Y', Z'$ ，则两者的转换可用公式表示为<sup>[3]</sup>：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \lambda R \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \quad (3-2-1)$$

其中， $\Delta X, \Delta Y$  和  $\Delta Z$  均为平移参数； $\lambda$  为比例因子； $R$ 为正交旋转矩阵：

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos(\varepsilon_Y) \cos(\varepsilon_Z), r_{12} = -\cos(\varepsilon_Y) \sin(\varepsilon_Z), r_{13} = -\sin\varepsilon_Y, \\ r_{21} &= \cos(\varepsilon_X) \sin(\varepsilon_Z) - \sin(\varepsilon_X) \sin\varepsilon_Y \cos(\varepsilon_Z), r_{22} = \cos(\varepsilon_X) \cos(\varepsilon_Z) + \sin(\varepsilon_X) \sin\varepsilon_Y \sin(\varepsilon_Z) \\ r_{23} &= -\sin(\varepsilon_X) \cos(\varepsilon_Z), r_{31} = \sin(\varepsilon_X) \sin(\varepsilon_Z) + \cos(\varepsilon_X) \sin\varepsilon_Y \cos(\varepsilon_Z), \\ r_{32} &= \sin(\varepsilon_X) \cos(\varepsilon_Z) - \cos(\varepsilon_X) \sin\varepsilon_Y \sin(\varepsilon_Z), r_{33} = \cos(\varepsilon_X) \cos(\varepsilon_Y), \end{aligned}$$

其中， $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$ 和 $\varepsilon_Z$ 分别为绕 $X, Y$ 和 $Z$ 轴旋转的旋转角度参数。

在 $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \lambda, \varphi, \omega$ 和 $\kappa$  7个参数已知的情况下，利用式(1)，可以方便地进行两个坐标系下的坐标转换。但大多数情况下，7个参数的值需要根据一系列控制点在两个坐标系下的坐标值利用式(1)反算得到，因此，首先要对式(1)利用泰勒级数展开，使其线性化。

在 $\varphi = \omega = \kappa = 0, \lambda = 1$ 处，对式(1)线性化并化简，得观测方程：



$$\begin{bmatrix} X - X' \\ Y - Y' \\ Z - Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X' & 0 & -Z' & -Y' \\ 0 & 1 & 0 & Y' & -Z' & 0 & X' \\ 0 & 0 & 1 & Z' & Y & X' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ d\lambda \\ d\phi \\ d\omega \\ d\kappa \end{bmatrix} \quad (3-2-2)$$

将上式写成误差方程式：

$$V = AX - L \quad (3-2-3)$$

其中

$$V = [V_X \quad V_Y \quad V_Z]^T$$

A为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X' & 0 & -Z' & -Y' \\ 0 & 1 & 0 & Y' & -Z' & 0 & X' \\ 0 & 0 & 1 & Z' & Y & X' & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = [d\Delta X \quad d\Delta Y \quad d\Delta Z \quad d\lambda \quad d\phi \quad d\omega \quad d\kappa]$$

$$L = [\delta_X, \delta_Y, \delta_Z]^T$$

在空间相似变换的具体计算过程中，由于采用了线性化公式，所以必须有一个迭代的过程，另外，在（1）式中有7个未知数，至少需要7个起始数据、列出7个独立的方程才能答解。因此至少需要3个相同的控制点（两个坐标系中的公共点），采用间接平差法即可求出坐标转换参数<sup>[3]</sup>。（见第三章第二节间接平差原理）

## 2.2.2 基于空间向量的空间相似变换

### （一）空间直角坐标转换关系

如图所示，设存在有两个空间直角坐标系  $o-xyz$  和  $O-XYZ$ 。

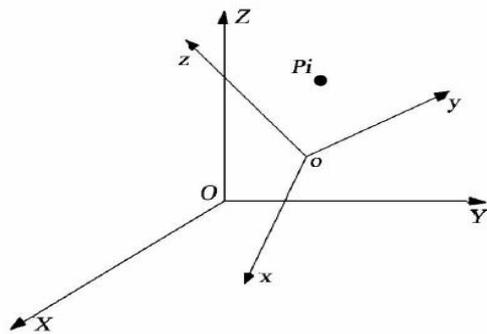


图1 空间直角坐标转换关系

上述两个坐标系的原点  $o$  和  $O$  不重合，存在坐标平移；坐标轴也不平行，对应坐标轴之间存在旋转角；且两个坐标系的尺度也不相同，存在坐标缩放。若空间有  $n$  个点 ( $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  点)， $P_i$  点在  $o$ - $xyz$  坐标系中的坐标为  $(x_i, y_i, z_i)$ ，在  $O$ - $XYZ$  坐标系中的坐标为  $(X_i, Y_i, Z_i)$ ，两套坐标之间的关系为(1)：

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda R_X R_Y R_Z \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3-2-3)$$

式中， $X_0$ 、 $Y_0$ 、 $Z_0$  为平移参数， $\lambda$  为尺度参数， $R_X$ 、 $R_Y$ 、 $R_Z$  分别为绕3个坐标轴产生的旋转矩阵，可分别表示为：

$$\left\{ \begin{array}{l} R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ R_Y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \\ R_Z = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3-2-4)$$

式(2)中， $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  分别为绕  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴的旋转角<sup>[5]</sup> (亦称欧拉角)。一般令



$R=R_x R_y R_z$ ，或者直接称  $R$  为旋转矩阵。

## (二) 尺度参数的解算

尺度参数相对比较容易解算，基本原理是通过坐标反算，求解相应距离，在通过相应距离的比较得出尺度参数。设  $d_{ij}$  为  $P_i$ 、 $P_j$  两点在  $o-xyz$  坐标系下的距离， $D_{ij}$  为相应点在  $O-XYZ$  坐标系下的距离，其计算公式为：

$$\begin{cases} D_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2} \\ d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \end{cases} \quad (3-2-5)$$

则尺度参数的计算公式为：

$$\lambda = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{D_{ij}}{d_{ij}}, \quad (3-2-6)$$

式中  $n$  为点的个数。

## (三) 旋转矩阵的解算模型

旋转矩阵  $R$  的解算是建立三维基准转换模型的难点，旋转矩阵  $R$  的 9 个元素亦可称为  $o-xyz$  坐标系的三个坐标轴在坐标系  $O-XYZ$  下的方向余弦<sup>[9]</sup>。9 个元素中仅有 3 个是独立参数，其余 6 个参数皆可从这 3 个参数推到得出<sup>[7]</sup>。

从空间几何的角度出发，现取空间中的两个点  $P_i$  和  $P_{i+1}$ ，这两个点构成空间向量  $r$ ，为了表达清楚，把在  $o-xyz$  和  $O-XYZ$  坐标系下的向量分别称为  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$ 。取向量的单位化，令  $V_1=r_1/|r_1|$ ， $V_2=r_2/|r_2|$ ，则由式 (3-2-3) 可得： $V_2=\lambda R V_1$ 。

由旋转理论的旋转变换关系罗德里格 (Rodrigues) 等式可知，空间必然存在一个由向量  $\mathbf{u}=(u_x, u_y, u_z)$  构成的关系矩阵  $S$ ，其中  $S$  是反对称矩阵，设其结构为：



$$S = \begin{pmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3-2-7)$$

矩阵  $S$  满足条件:  $V_2 - V_1 = S(V_1 + V_2)$ ,  $V_2 = RV_1$  根据几何与线性代数知识, 将  $V_2 = RV_1$  带入  $V_2 - V_1 = S(V_1 + V_2)$ , 可以求得矩阵  $S$  与旋转矩阵  $R$  之间存在的关系为:

$$R = (I + S)(I - S)^{-1} \quad (3-2-8)$$

但  $S$  矩阵为反向对称矩阵, 无法直接求出旋转向量<sup>[1]</sup>。显然, 要想解算出旋转向量至少需要两组向量, 即至少已知3组点的坐标。据上述思路, 可首先把空间的  $n$  组点转换为  $n-1$  组向量:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  (在  $o-xyz$  坐标系下);  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$  (在  $O-XYZ$  坐标系下)。其计算可依照:  $a_1 = P_1P_2/|P_1P_2|$ ,  $a_2 = P_1P_3/|P_1P_3|$ ,  $a_3 = P_2P_3/|P_2P_3|$ ,  $\dots$ ,  $a_{n-1} = P_1P_n/|P_1P_n|$ 。

为表述方便, 令  $A_i = b_i - a_i$ ,  $L_i = b_i + a_i$ , 则矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{iz} & -A_{iy} \\ -A_{iz} & 0 & A_{ix} \\ A_{iy} & -A_{ix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ix} \\ L_{iy} \\ L_{iz} \end{bmatrix} \quad (3-2-9)$$

式中,  $(A_{ix}, A_{iy}, A_{iz})$  为向量  $A$  的分量,  $(L_{ix}, L_{iy}, L_{iz})$  为向量  $L_i$  的分量。

$n-1$  组向量 ( $n$  组点) 共可以列出  $(n-1)*3$  组方程, 将其简写为  $\begin{matrix} \mathbf{A} \\ (3n-3)*3 \end{matrix} \mathbf{u} = \begin{matrix} \mathbf{L} \\ (3n-3)*1 \end{matrix}$ 。

这就是间接平差的标准数学模型, 根据最小二乘准则求解, 有:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

得到旋转向量  $u$  后, 可直接带入式 (3-2-7) 求出  $S$  矩阵, 然后根据式 (3-2-8) 可求得旋转矩阵  $R$ 。



### (四) 位移参数的解算

解算出尺度参数和旋转矩阵后，与两个坐标系下点的坐标一起代入式 (1)，可求得多组平移参数，取其平均值作为位移参数的最终结果：

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} - \lambda R \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \right)}{n} \quad (3-2-10)$$

### (五) 坐标转换模型的精度

坐标转换模型的精度是评价坐标转换模型性能的标准，精度越高，则说明转换模型性质越优良。令  $o$ -xyz 坐标系中的坐标为观测值， $0$ -XYZ 坐标系中的坐标设为无误差，则可以列出误差方程

$$\begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{Y_1} \\ V_{Z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - T, \quad \begin{bmatrix} V_{X_2} \\ V_{Y_2} \\ V_{Z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - T$$

$$\begin{bmatrix} V_{X_3} \\ V_{Y_3} \\ V_{Z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} - T, \quad \begin{bmatrix} V_{X_4} \\ V_{Y_4} \\ V_{Z_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} - T$$

根据最小二乘原理可得其中误差应该满足  $V^T P V = \min$ ，单位权方差的计

算式是  $V^T P V$  除以自由度即  $\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{r} = \frac{V^T P V}{n-t} = \frac{V^T P V}{12-6} = \frac{V^T P V}{6}$

$$\text{中误差的值为 } \sigma_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-t}} = \sqrt{\frac{V^T P V}{12-6}} = \sqrt{\frac{V^T P V}{6}} \quad (3-2-11)$$

$\sigma_0$  表示坐标转换的中误差， $\sigma_0$  越大，其模型精度越低；反之，模型精度越高。



**(六) 小结：**从基于空间向量的角度出发，提出了一种适用于任意角度的三维基准转换模型，该模型十分简单，过程明了，不需要复杂的运算过程；且其理论依据充分，算法严谨。

通过模拟算例对该模型与基于矩阵论的空间相似变换进行了比较，结果证明：该算法具有计算准确、精度高的特点；而且也证明了其效率比基于矩阵论的空间相似变换算法要高，其运算时间只有后者的三分之一，时间证明该模型具有较强的可行性和实用性。所以本次用基于空间向量的空间相似变换来处理实验中点云的配准。

## 第三章 应用与实验

### 3.1 数据的获取

#### 3.1.1 Trimble GX 三维激光扫描仪器

Trimble GX 3D 扫描仪是先进的测量与空间成像传感器，它使用高速激光和摄像技术捕获坐标和图像信息。功能强大的 Trimble GX 3D 扫描仪及其支持系统可增强您今天的竞争力，并打开通往新的商机的大门。其主要特点有：

- (1)空间成像全面解决方案，工作流程平滑易用
- (2)Trimble SureScan 专利技术，可实现快速智能扫描
- (3)实时获取色彩逼真的影像，使扫描目标既准确又真实
- (4)与 Trimble TSC2 控制器配合进行远程操作，有效整合测量结果



本次点云配准数据的获取就是通过 Trimble GX 三维激光扫描仪对乒乓球进行扫描后得到的，下面是经过拟合后的精确的乒乓球球心坐标：

控制点	坐标	X	Y	Z
测站 1	A	-1.619	-1.956	-0.023
	B	-2.362	-1.061	-0.006
	C	-2.579	-1.621	-0.094
	D	-2.188	-2.152	-0.13
测站 2	A	-2.689	0.701	-0.028
	B	-3.702	0.136	-0.011
	C	-3.191	-0.18	-0.098
	D	-2.599	0.105	-0.135
测站 3	A	1.796	-2.951	-0.026
	B	1.861	-1.791	-0.009
	C	1.321	-2.053	-0.097
	D	1.245	-2.707	-0.133



### 3.2 间接平差原理

间接平差法（参数平差法）是通过选定  $t$  个与观测值有一定关系的独立未知量作为参数，将每个观测值都分别表达成这  $t$  个参数的函数，建立函数模型，按最小二乘原理，用求自由极值的方法解出参数的最或然值，从而求得各观测值的平差值<sup>[19]</sup>。

#### 3.2.1 间接平差一般原理

设平差问题中有  $n$  个观测值  $L$ ，已知其协因数阵  $Q = P^{-1}$ ，必要观测数为  $t$ ，选定  $t$  个独立参数  $\hat{X}$ ，其近似值为  $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$ ，观测值  $L$  与改正数  $V$  之和  $\hat{L} = L + V$ ，称为观测量的平差值。按具体平差问题，可列出  $n$  个平差值方程为

$$L_i + v_i = a_i \hat{X}_1 + b_i \hat{X}_2 + \dots + t_i \hat{X}_t + d_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (4-2-1)$$

令

$$\begin{aligned} L &= [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]^T \\ V &= [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n]^T \\ \hat{X} &= [\hat{X}_1 \quad \hat{X}_2 \quad \dots \quad \hat{X}_t]^T \\ d &= [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n]^T \\ B &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & t_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则平差值方程的矩阵形式为

$$L + V = B\hat{X} + d \quad (4-2-2)$$

令

$$\begin{aligned} \hat{X} &= X^0 + \hat{x} \\ l &= L - (BX^0 + d) \end{aligned}$$

式中  $X^0$  为参数的充分近似值，于是可得误差方程式为

$$V = B\hat{x} - l \quad (4-2-3)$$



按最小二乘原理，上式的  $\hat{x}$  必须满足  $V^T PV = \min$  的要求，因为  $t$  个参数为独立量，故可按数学上求函数自由极值的方法，得

$$\frac{\partial V^T PV}{\partial \hat{x}} = 2V^T P \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} = V^T PB = 0$$

转置后得

$$B^T PV = 0$$

以上所得的两式中的待求量是  $n$  个  $V$  和  $t$  个  $\hat{x}$ ，而方程个数也是  $n+t$  个，有唯一解，称此两式为间接平差的基础方程。

解此基础方程，一般是将 (4-1-13) 式代入 (4-1-14) 式，以便先消去  $V$ ，得

$$B^T PB\hat{x} - B^T Pl = 0 \quad (4-2-4)$$

令

$$N_{t,t} = B^T PB, \quad W_{t,1} = B^T Pl$$

上式可简写成

$$N_{bb}\hat{x} - W = 0 \quad (4-2-5)$$

式中系数阵  $N_{bb}$  为满秩矩阵，即  $R(N_{bb}) = t$ ， $\hat{x}$  有唯一解，上式称为间接平差的法方程。解之，得

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1}W$$

或

$$\hat{x} = (B^T PB)^{-1} B^T Pl$$

将求出的  $\hat{x}$  代入误差方程 (4-1-13)，即可求得改正数  $V$ ，从而平差结果为

$$\hat{L} = L + V, \quad \hat{X} = X^0 + \hat{x} \quad (4-2-6)$$

特别地，当  $P$  为对角阵时，即观测值之间相互独立，则法方程 (4-1-16) 的纯量形式为

$$\left. \begin{aligned} [paa]\hat{x}_1 + [pab]\hat{x}_2 + \cdots + [pat]\hat{x}_t &= [pal] \\ [pab]\hat{x}_1 + [pbb]\hat{x}_2 + \cdots + [pbt]\hat{x}_t &= [pbl] \\ &\dots\dots\dots \\ [pat]\hat{x}_1 + [pbt]\hat{x}_2 + \cdots + [ptt]\hat{x}_t &= [ptl] \end{aligned} \right\}$$

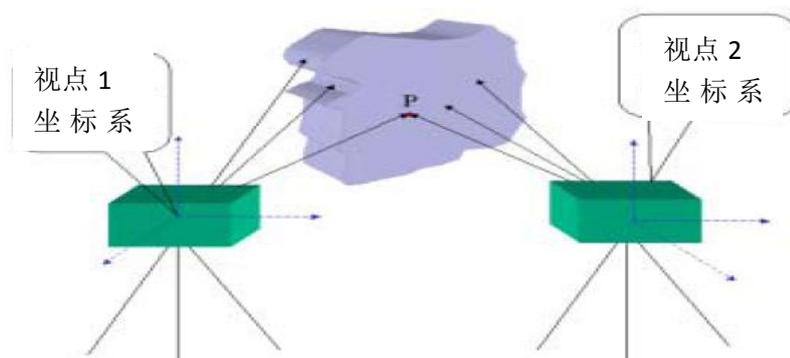
### 3.2.2 按间接平差法求平差值的计算步骤

1. 根据平差问题的性质，选择  $t$  个独立量作为参数；
2. 将每一个观测量的平差值分别表达成所选参数的函数，若函数非线性要将其线性化，列出误差方程（4-1-3）；
3. 由误差方程系数  $B$  和自由项  $l$  组成法方程（4-1-5），法方程个数等于参数的个数  $t$ ；
4. 解算法方程，求出参数  $\hat{x}$ ，计算参数的平差值  $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$ ；
5. 由误差方程计算  $V$ ，求出观测量平差值  $\hat{L} = L + V$ ；
6. 评定精度。

### 3.3 利用已知对应同名点求转换参数

通常的三维扫描系统一次只能获得扫描物体的一个侧面的点云数据，而获得一个物体完整的形状信息，一般要从多个角度进行多次扫描，每次扫描都要建立一个独立坐标系，然后将多次扫描所得的多幅点云转换到同一坐标系中，这一阶段工作就称为点云数据的配准。

根据基于空间向量的空间相似变换，可知要求出7个转换参数，但是在本次试验中，由于不同测站下的扫描点云数据没有缩放关系，所以比例因子  $\lambda = 1$ 。所以本实验中只要求出旋转参数  $R$  和平移参数  $T$  就能够确定两个坐标之间的转换关系，既可以对点云数据进行配准。





如图所示，设在视点1和视点2分别对同一物体进行了扫描测量，其各自的扫描坐标系为坐标系1和坐标系2，其对应的点云分别是点云1和点云2（这两幅点云必须具有公共部分）。要将这两幅点云放在同一个坐标系中，就要求求出一个坐标系与另一个坐标系之间的旋转参数  $R$  和平移参数  $T$ 。假设将点云2换算到点云1的坐标系中，则物体表面上的任一点  $p$  的三维坐标满足如下关系：

$$\begin{bmatrix} X_P^1 \\ Y_P^1 \\ Z_P^1 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_P^2 \\ Y_P^2 \\ Z_P^2 \end{bmatrix} + T \quad (4-3-1)$$

其中， $X_p^1$ 、 $Y_p^1$ 、 $Z_p^1$  分别为点P在坐标系1下的坐标值； $X_p^2$ 、 $Y_p^2$ 、 $Z_p^2$  分别为P点在坐标系2下的坐标值。

要想将点云 2 换算到点云 1，关键是求出旋转参数  $R$  和平移参数  $T$

### 3.3.1 根据对应同名点求旋转参数 $R$

根据原理中的（3-2-9）式可以求出

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4.164e-005 & -1.2563896 \\ 4.164e-005 & 0 & 0.2345714 \\ 1.2563896 & -0.2345714 & 0 \\ 0 & -0.00078856 & -1.1954601 \\ 0.00078856 & 0 & -0.44797 \\ 1.1954601 & 0.44797 & 0 \\ 0 & -0.0002661 & -0.6529145 \\ 0.0002661 & 0 & -1.0778953 \\ 0.6529145 & 1.0778953 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -1.5119266 \\ 0.2822818 \\ 0.0292678 \\ -1.4357722 \\ -0.5381127 \\ -0.13852986 \\ -0.7838647 \\ -1.2942237 \\ -0.3498363 \end{bmatrix}$$

由于  $\begin{matrix} A^* & u \\ 9*3 & 3*1 \end{matrix} = \begin{matrix} L \\ 9*1 \end{matrix}$ ，这是间接平差的标准数学模型，由上面所讲的间接平差原理

结合最小二乘法可得： $u = (A^T P A)^{-1} A^T P L$

可得  $u = \begin{bmatrix} -0.0214115610679175 \\ -0.300364883209825 \\ 1.20177826576775 \end{bmatrix}$ ，将  $u$  带入原理中的（3-2-7）式可以求得

S 值：



这里用 `matlab` 求解坐标转换的六个参数：下面是 `matlab` 输入的代码：（每次输完都回车）

```
>>format long g
>>A=[0, -4.164e-005, -1.2563896;4.164e-005, 0, 0.2345714;1.2563896,
-0.2345714, 0;0, -0.00078856, -1.1954601;0.00078856, 0, -0.44797;1.1954601
, 0.44797, 0;0, -0.0002661, -0.6529145;0.0002661, 0, -1.0778953;0.6529145, 1
.0778953, 0]
>>P=[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0;0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0;0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0;0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0;0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0;0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0;0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
>>L=[-1.5119266;0.2822818;0.0292678;-1.4357722;-0.5381127;-0.13
852986;-0.7838647;-1.2942237;-0.3498363]
>>u=inv(A' *P*A)*A' *P*L           (求出 u 后可以求出 S)
>>S=[0, -1.20177826576775, -0.300364883209825;1.20177826576775, 0,
-0.0214115610679175;-0.300364883209825, -0.0214115610679175, 0]
>>I=[1, 0, 0;0, 1, 0;0, 0, 1]
>>R=(I+S)*inv(I-S)                 (这就求出了旋转矩阵 R)
>>b11=[-1.619;-1.956;-0.023]
>>b22=[-2.362;-1.061;-0.006]
>>b33=[-2.579;-1.621;-0.094]
>>b44=[-2.188;-2.152;-0.13]
>>a11=[-2.689;0.701;-0.028]
>>a22=[-3.702;0.136;-0.011]
>>a33=[-3.191;-0.18;-0.098]
>>a44=[-2.599;0.105;-0.135]
>>T=((b11-R*a11)+(b22-R*a22)+(b33-R*a33)+(b44-R*a44))/4 (这就求
出了平移向量 T)
```



$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1.20177826576775 & -0.300364883209825 \\ 1.20177826576775 & 0 & -0.0214115610679175 \\ -0.300364883209825 & -0.0214115610679175 & 0 \end{bmatrix}$$

在 matlab 中输入  $R=(I+S)*inv(I-S)$  可得旋转矩阵 R

$$R = \begin{bmatrix} -0.210667634620646 & 0.953241880998909 & 0.2166773269934 \\ -0.943093696933436 & -0.139849148582039 & -0.301689400618091 \\ -0.257280832025563 & -0.267903213774194 & 0.928458098958533 \end{bmatrix}$$

### 3.3.2 根据给出的数据求出位移参数 T:

根据原理中的公式:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} - \lambda R \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \right)}{n}$$

代入数据可求得:  $T = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.99539413442326 \\ -4.5633296970237 \\ -0.732563740772681 \end{bmatrix}$

### 3.3.3 坐标转换模型的精度

根据 (3-2-11) 式可知  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{V^T PV}{n-t}} = \sqrt{\frac{V^T PV}{12-6}} = \sqrt{\frac{V^T PV}{6}}$ , 式中

$$V = [0.147753271503926, 0.160937695908391, 0.231532563082491, -0.273754894161293, 0.0266977317764763, -0.179242023224119, -0.063028371026062, -0.121820697896236, -0.139653079002309, 0.189029993683428, -0.0658147297886309, 0.0873625391439354]^T$$

P为单位权阵可以求得  $\sigma_0 = 0.22178$

同理同方法可以求出点云 3 到点云 1 的转换参数以及点云 3 中坐标到点云 1 中的配准程序

其 matlab 代码如下:



```

>>format long g
>>A=[0, -1.75699999999997e-005, 0.2289912; 1.75699999999997e-005, 0
, -0.69461828; -0.2289912, 0.69461828, 0; 0, 6.02999999999992e-005, 0.553130
8; -6.02999999999992e-005, 0, -0.4754378; -0.5531308, 0.4754378, 0; 0, -0.000
224399999999986, 0.719325; 0.00022439999999986, 0, -0.0306037; -0.719325,
0.0306037, 0]
>>L=[-0.58273692; 1.7676626; 0.02924373; -1.4083044; 1.2104782; -0.1
3937872; -1.8311563; 0.0780158; -0.349878]
>>P=[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 0
, 0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0; 0
, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
>>u=inv(A'*P*A)*A'*P*L
>>S=[0, -2.54548516197191, -0.220173896449773; 2.54548516197191, 0,
0.479372212540165; 0.220173896449773, -0.479372212540165, 0]
>>I=[1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1]
>>R=(I+S)*inv(I-S)
>>b11=[-1.619; -1.956; -0.023]
b22=[-2.362; -1.061; -0.006]
b33=[-2.579; -1.621; -0.094]
b44=[-2.188; -2.152; -0.13]
c11=[1.796; -2.951; -0.026]
c22=[1.861; -1.791; -0.009]
c33=[1.321; -2.053; -0.097]
c44=[1.245; -2.707; -0.133]
>>T=((b11-R*c11)+(b22-R*c22)+(b33-R*c33)+(b44-R*c44))/4

```

可求得：

旋转矩阵：R



$$R = \begin{bmatrix} -0.68295067241861 & -0.629031342049074 & -0.371346132015549 \\ 0.683451755060485 & -0.729696373177929 & -0.0209021882997757 \\ -0.257821794167428 & -0.268072329215302 & 0.928259203434779 \end{bmatrix},$$

以及平移参数: T

$$T = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.64336512566835 \\ -4.49555857239438 \\ -0.237452389547418 \end{bmatrix}$$

同理可以计算点云 3 到点云 1 转换的单位权中误差  $\sigma_0 = 0.664718$

### 3.4 点云的配准融合

球心坐标按参数转换到点云 1 中的坐标

点号	原坐标 (mm)			点云 2 转换后坐标(mm)			点云 3 转换后坐标(mm)		
	X1	Y1	Z1	X2	Y2	Z2	X2	Y3	Z3
1	-1.619	-1.956	-0.023	-1.767	-2.117	-0.254	-2.004	-1.114	0.0664
2	-2.362	-1.061	-0.006	-2.088	-1.088	0.173	-2.784	-1.916	-0.245
3	-2.579	-1.621	-0.094	-2.516	-1.499	0.0457	-2.218	-2.092	-0.118
4	-2.188	-2.152	-0.13	-2.377	-2.086	-0.217	-1.741	-1.667	0.0437

转换后坐标与点云 1 中球心坐标的差值

点号	点云 2 中坐标转换后与原坐标差值(mm)			点云 3 中坐标转换后与原坐标差值(mm)		
	$\Delta X1$	$\Delta Y1$	$\Delta Z1$	$\Delta X2$	$\Delta Y2$	$\Delta Z2$
1	-0.148	-0.161	-0.231	-0.385	0.842	0.0894
2	0.274	-0.027	0.179	-0.422	-0.855	-0.239
3	0.063	0.122	0.140	0.361	-0.471	-0.024
4	-0.189	0.066	-0.087	0.447	0.485	0.174

根据以上所求的中误差以及转换后坐标与原坐标之间的差值,可知所求的旋转参数和平移参数可以比较精确地实现点云的自动配准。本次试验是通过多视点获取的点云数据,多视点获取的点云数据配准可转化为依次进行的两两配准问



题，从两个视角对目标物进行扫描，其局部坐标系分别为点云 1 和点云 2，需要将两者中的三维点置于同一坐标系下，可设点云 1 的坐标系统作为公共坐标系，该坐标系下的三维点不需要做任何改变，将点云 2 中的三维坐标按照所求得的六个参数进行坐标变换，配准到点云 1 的坐标系下。

配准过程通过 Visual Basic 编程获得，其程序源代码见附录二

同理可以将点云 3 中的坐标进行坐标变换配准到点云 1 的坐标系下(同见附录二)

这样可以通过坐标的转换，将不同角度，不同位置扫描得到的大容量三维空间数据点集转换到一个统一的坐标系中，实现了点云数据的配准，能够得到乒乓球的三维模型的原始曲面。



## 第四章 总结与展望

### 4.1 实验后的结论

随着三维激光扫描技术的发展,三维激光扫描系统已经广泛应用在虚拟地理场景、文物保护、电力利用中。由于三维激光扫描数据后处理技术的发展滞后,很多研究人员投入到了后处理技术的研究中。数据配准在后处理技术中是一个重要的内容,它直接影响着建模的精度。本文针对三维扫描系统在点云配准方面存在的问题,从数据配准的概念出发并结合空间几何角度,提出了适用于地理场景的三维激光扫描数据的空间配准解决方案,围绕本论文所进行的研究工作得到的主要结论有:

(1)实现两站点云之间的空间坐标系的统一,关键在于计算出空间相似变换模型中的六个转换参数,为此要求两站点云中存在不少于三对不共线的同名点,本文实验给出的是四个乒乓球的球心坐标。

(2)本文从空间几何角度出发,利用空间向量的关系研究坐标转换,提出一种新的基于空间向量的空间相似变换配准方法。通过模拟算例和在工程中的实际应用证明:该模型不受坐标转换旋转角大小的约束,能适用于任意角度;计算结果可靠,精度较高,与现有模型相比,有着简便、效率高的特点。从基于空间向量的角度出发,提出了一种适用于任意角度的三维基准转换模型,该模型十分简单,过程明了,不需要复杂的运算过程;且其理论依据充分,算法严谨。

### 4.2 展望

利用三维激光扫描技术进行三维重建目前是一个新兴技术,目前在点云配准过程中还存在很多问题。三维激光扫描数据后处理的研究是学者研究的一个重点,本文对地理场景(乒乓球)的三维数据配准方面进行了研究,取得了一些成果,但仍有一定的局限性,需要在此基础上进一步深入探讨:

(1)本文主要研究利用空间相似变换来对点云数据进行配准,在同名点正确选择的基础上才可以达到毫米级的精度。对于点云配准的精度要求还有待提高。

(2)越来越多的三维激光扫描系统配置了高分辨率的数码相机,结合数码相机的使用,将给三维真实感建模带来极大的便利。以数码相机和扫描仪的校正配准为中介,把两幅点云配准到同一张照片上,这种方法也是数据配准的研究方向之一。



## 参考文献

- [1] 潘国荣(1, 2)、赵鹏飞(1). 基于空间向量的三维基准转换模型 大地测量与地球动力学第29卷第6期, 2009 (1) 同济大学测量与国土信息工程系, 上海 (2) 现代工程测量国家测绘局重点实验室, 上海
- [2] 江刚武, 姜挺, 龚志辉. 基于矩阵论的空间相似变换分析 测绘学院学报第19卷第3期, 2002 河南 郑州 信息工程大学
- [3] 郑德华, 岳东杰, 岳建平. 基于几何特征约束的建筑物点云配准算法 测绘学报第37卷第4期, 2008 河海大学土木工程学院, 江苏南京
- [4] 李铁军 王任享 陈 哲. 空间相似变换方程的最小二乘直接解法 解放军测绘研究所学报第22卷第2期
- [5] 程效军(1, 2), 施贵刚(3), 王峰(1), 谢瑞(1). 点云配准误差传播规律的研究 同济大学学报第37卷第12期, 2009(1) 同济大学测量与国土信息工程系, 上海(2) 同济大学现代工程测量国家测绘局重点实验室, 上海(3) 安徽建筑工业学院土木工程学院, 安徽 合肥
- [6] 张卡(1), 张道俊(2), 盛业华(1), 王培芳(2), 庞佑涛(3). 三维坐标转换的两种方法及其比较研究 数学的实践与认识第38卷第23期, 2008(1) 南京师范大学虚拟地理环境教育部重点实验室, 江苏 南京(2) 五河县刘集中学, 安徽 五河(3) 中铁大桥局集团第四工程有限公司, 江苏 南京
- [7] 董钧祥(1), 杨德宏(2). 测量坐标转换模型及其应用 昆明理工大学学报第31卷第3期, 2006(1) 云南国土资源职业学院, 云南 昆明(2) 昆明理工大学国土资源工程学院, 云南 昆明
- [8] 戴静兰(1), 陈志扬(2), 叶修梓(1). ICP算法在点云配准中的应用 中国图像图形学报第12卷第3期, 2007(1) 浙江大学计算机学院计算机图形图像实验室, 杭州(2) 浙江工业大学软件学院计算机软件研究所, 杭州
- [9] 官云兰(1) (2), 程效军(1), 张明(2), 鲁铁定(2). 三维激光扫描数据配准方法 工程勘察2008年第一期(1) 同济大学测量与国土信息工程系, 上海(2) 东华理工学院地测学院, 江西 抚州
- [10] 罗先波, 钟约先, 李仁举. 三维扫描系统中的数据配准技术 清华大学学报第



- 44卷第8期, 2004
- [11]王解先(1)(2). 七参数转换中参数之间的相关性. 大地测量与地球动力学第27卷第2期, 2007 (1) 同济大学测量与国土信息系, 上海(2) 现代工程测量国家测绘局重点实验室, 上海
- [12]高珊珊. 基于三维激光扫描仪的点云配准. 南京理工大学硕士学位论文, 2008
- [13]丁延辉. 地面三维激光数据配准研究. 测绘通报2009年第2期. 北京建筑工程学院, 北京
- [14]曾文宪, 陶本藻. 三维坐标转换的非线性模型. 武汉大学学报. 信息科学版, 2003, 28(5):566-568
- [15]姚吉利. 三维坐标转换参数直接计算的严密公式. 测绘通报, 2006, (5): 7-10
- [16]党诵诗. 矩阵论及其在测绘工的应用. 北京: 测绘出版社, 1984
- [17]陈义, 沈云中, 刘大杰. 适用于大旋转角的三维基准转换的一种简便模型. 武汉大学学报(信息科学版), 2003, 29(12): 1102-1104
- [18]王岩, 郝颖明. 空间向量法求解坐标变换. 沈阳工业学院学报, 1999, 18(1): 29-32
- [19]武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础. 武汉大学出版社, 2003
- [20] YAO Jili , XU Yufei, XIAO Wei. Applications of Lodrigues Matrix in 3D Coordinate Transformation. Geo-spatial Information Science ,10(3):173-176



## 致 谢

时光荏苒，转眼间四年的大学生活已经结束了。整整四年的学习，无论在学习上还是工作中我都获益匪浅。作为总结大学四年学习成果的毕业设计论文，是在导师陈建华的悉心指导下完成的。自从毕业设计以来，承蒙导师在学习上的关心、帮助与支持，在学术上的鼓励与教诲，使我得以顺利完成毕业设计论文。导师严谨的治学态度、深厚的学术造诣，丰富的社会阅历和对事业的忘我精神，一直深深地影响着我，指引着我今后的工作与学习。在论文出稿之际，特向陈老师致以最衷心的感谢！

感谢河海大学测量系的李浩、郑德华、岳建平、岳东杰、杨彪、李嘉、黄张裕、田林亚、兰孝奇、黄晓时等老师，在四年学习期间教授给了我各种测量的专业知识；同时感谢测量系实验室的所有老师，在我们的实验教学中悉心指导我们的实践！

感谢给予我莫大帮助的项学长，是他的督促与指导以及及时的帮助让我能够顺利的完成毕业设计。

感谢同组毕业设计的王鑫森同学，在毕业设计期间协助我完成了模拟试验，并与我分享了毕业设计需要的参考文献资料等！

感谢我的舍友吕小凡、杨凯、郭光宾、秦国成、张冠男同学在生活上的关心与帮助，四年的友谊将使我终生难忘！

感谢父母的养育之恩！多年来，他们为支持我的学业任劳任怨，奉献着他们的一切。感谢我的家人给予的关心、支持与理解！

在河海大学四年的求学生活中，测绘 06 级同学给予的帮助与关心，一起生活、学习的经历使我终生难忘！

感谢四年来河海大学对我的培养，学校不仅仅教授了我专业方面的技术，更重要的是在河海大学前辈们的耳濡目染下我懂得了做人的道理、奉献的精神以及回报父母、报效祖国的人生目标！

最后，感谢所有关心和帮助过我的亲人、老师、同学和朋友，愿他们一生平安、永远幸福！

作者水平有限，文中疏漏与不足在所难免，诚请批评斧正！

作者：**郭建明**

2010 年 6 月于南京



## 附录一 英文翻译

### 英文原文

#### **Applications of Lodrigues Matrix in 3D Coordinate Transformation**

**YAO Jili**

**XU Yufei**

**XIAO Wei**

### Abstract

Three transformation models (Bursa-Wolf, Molodensky, and WTUSM) are generally used between two data systems transformation. The linear models are used when the rotation angles are small; however, when the rotation angles get bigger, model errors will be produced. In this paper, we present a method with three main terms: (1) the traditional rotation angles  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  are substituted with  $a, b, c$  which are three respective values in the anti-symmetrical or Lodrigues matrix; (2) directly and accurately calculating the formula of seven parameters in any value of rotation angles; and (3) a corresponding adjustment model is established. This method does not use the triangle function. Instead it uses addition, subtraction, multiplication and division, and the complexity of the equation is reduced, making the calculation easy and quick.

Keywords : 3D transformation; linear model; transformation equation; Lodrigues matrix CLC number

#### Introduction

The coordinate transformation in surveying and mapping has two main tasks: coordinate datum's transformation and point's coordinate transformation between two coordinate systems. The Bursa-Wolf, Molodensky, and WTUSM models are generally used in 3D coordinate transformation<sup>[1]</sup>. The seven-parameter model of 3D coordinate transformation is improved and a nonlinear model of 3D coordinate transformation is presented in Reference [2] in the case where the rotation angles are bigger than  $50^\circ$ . In the adjustment model, the initial values of three rotation angles are zero. The first approximations of the seven parameters and model linearization are not presented. With the development of the attitude determination of movement carriers (airborne, ships and automobiles), the models are being used more widely[3-7]. Spatial position, attitude and rotation angle of the carriers are



facultative, therefore accurate determination of the transformation parameter is necessary. With the Lodrigues matrix being used widely in photogrammetry, the workload of calculation is deduced and rigorous mathematics models are established. In this paper, the Lodrigues matrix is used in 3D coordinate transformation and formulas of direct calculation of seven parameters and an adjustment model are derived. This model is rigorously, simply and rapidly proved in theory and practice, and fits 3D coordinate transformation with any angle.

### 1 Mathematics model of 3D coordinate

#### Transformation

On the basis of physics processing of coordinate transformation, there exists an equation:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} X_{T_1} \\ Y_{T_1} \\ Z_{T_1} \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_S - X_{S_1} \\ Y_S - Y_{S_1} \\ Z_S - Z_{S_1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Which can be reduced to:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_T = \lambda \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_S \quad (2)$$

The meaning of the symbols above are taken from to Reference [2],  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \lambda, \theta, \phi, \psi$  are usually called the seven parameters.

### 2 Direct calculation of seven parameters

Eq. (2) can be solved uniquely when three control points exist (i.e., common points that coordinates are known in the two systems). According to the transformation mathematical model, the value of scale factor  $\lambda$  is first computed, followed by the value of the rotation matrix and finally the three translations factor. Thus, the key problem is determining the R matrix. The constitution of the R is put forward in Reference [6]. The nine elements of R are functions of three rotation angles and three independent parameters. Let anti-symmetry matrix



$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ in which } a, b, c \text{ are independent. } \mathbf{R} \text{ consists of } \mathbf{S} :$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{M} \quad (3)$$

Eq.(3) is called the Lodrigues matrix, in which  $\Delta = 1 + a^2 + b^2 + c^2$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + a^2 - b^2 - c^2 & -2c - 2ab & -2b + 2ac \\ 2c - 2ab & 1 - a^2 + b^2 - c^2 & -2a - 2bc \\ 2b + 2ac & 2a - 2bc & 1 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix}.$$

In this paper,  $\theta, \varphi, \psi$  are substituted for  $a, b, c$ , and a set of equations of 3D coordinate transformation are established. The characteristics of the anti-symmetry matrix and Lodrigues matrix are:

- 1)  $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}, \mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}$
- 2)  $(\mathbf{I} - \mathbf{S})^T = \mathbf{I} + \mathbf{S}, (\mathbf{I} + \mathbf{S})^T = \mathbf{I} - \mathbf{S}$
- 3)  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{S})$  (4)
- 4)  $(\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}), \mathbf{S} = 2(\mathbf{I} + \mathbf{R}^T)^{-1} - \mathbf{I}$

Where is a 3×3 unit matrix.

The scale factor  $\lambda$  can be obtained by comparing the length of correspondence in the two coordinate systems, that is:

$$\lambda = 1 + m = \left( \frac{(X_{T_2} - X_{T_1})^2 + (Y_{T_2} - Y_{T_1})^2 + (Z_{T_2} - Z_{T_1})^2}{(X_{S_2} - X_{S_1})^2 + (Y_{S_2} - Y_{S_1})^2 + (Z_{S_2} - Z_{S_1})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Eq.(2) is nonlinear and can be solved uniquely when three control points exist. This is because in each point, an equation set in the form of Eq.(2) can be written and three points yield 9 equations involving 7 unknowns. After eliminating translations and substituting Eq.(4), for point 1 and 2, the combined form is:



$$\lambda(I + S) \begin{bmatrix} X_{S_2} - X_{S_1} \\ Y_{S_2} - Y_{S_1} \\ Z_{S_2} - Z_{S_1} \end{bmatrix} = (I - S) \begin{bmatrix} X_{T_2} - X_{T_1} \\ Y_{T_2} - Y_{T_1} \\ Z_{T_2} - Z_{T_1} \end{bmatrix}$$

Simplification form is given as:

$$\lambda(I + S) \begin{bmatrix} X_{S_{21}} & Y_{S_{21}} & Z_{S_{21}} \end{bmatrix}^T = (I - S) \begin{bmatrix} X_{T_{21}} & Y_{T_{21}} & Z_{T_{21}} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

extending and arranging, Eq.(6) becomes:

$$(7) \quad \begin{bmatrix} 0 & -\lambda Z_{S_{21}} - Z_{T_{21}} & -\lambda Y_{S_{21}} - Y_{T_{21}} \\ -\lambda Z_{S_{21}} - Z_{T_{21}} & 0 & \lambda X_{S_{21}} + X_{T_{21}} \\ \lambda Y_{S_{21}} + Y_{T_{21}} & \lambda X_{S_{21}} + X_{T_{21}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{T_{21}} - \lambda X_{S_{21}} \\ Y_{T_{21}} - \lambda Y_{S_{21}} \\ Z_{T_{21}} - \lambda Z_{S_{21}} \end{bmatrix}$$

Eq.(7) involves two independent equations only and cannot compute 3 unknowns. For points 1 and 3, a set of equations that are similar to Eq.(7) can be written.

$$\begin{bmatrix} 0 & -w_2 & -v_2 \\ -w_2 & 0 & u_2 \\ v_3 & u_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{T_{31}} - \lambda X_{S_{31}} \\ Y_{T_{31}} - \lambda Y_{S_{31}} \\ Z_{T_{31}} - \lambda Z_{S_{31}} \end{bmatrix}$$

Where  $u_2 = \lambda X_{S_{21}} + X_{T_{21}}; v_2 = \lambda Y_{S_{21}} + Y_{T_{21}}; w_2 = \lambda Z_{S_{21}} + Z_{T_{21}};$

$u_3 = \lambda X_{S_{31}} + X_{T_{31}}$ , Then three parameters a,b,c can be computed by the following equations.

$$(8) \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta H} \begin{bmatrix} u_2 u_3 & -u_3 v_2 & u_2 w_3 \\ u_2 v_3 & v_2 v_3 & v_2 w_2 \\ -u_3 w_2 & -v_3 w_2 & -w_2 w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{T_{31}} - \lambda X_{S_{31}} \\ Y_{T_{31}} - \lambda Y_{S_{31}} \\ Z_{T_{31}} - \lambda Z_{S_{31}} \end{bmatrix}$$

Where  $\Delta H = u_3 v_2 w_2 - u_2 v_3 w_3$ . Rotation matrix R can be computed by Eq.(3) and translations by Eq.(2).



$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} X_{T_1} \\ Y_{T_1} \\ Z_{T_1} \end{bmatrix} - \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_{S_1} \\ Y_{S_1} \\ Z_{S_1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3 Adjustment model of 3D coordinate transformation

In real measurements, for the purpose of error detection and higher accuracy, more than three common points are available and a least-squares solution can be obtained. Let  $H = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z \ \lambda \ a \ b \ c]^T$  represent vectors, by Eq.(5), Eq.(8), Eq.(9), the initial approximations of unknowns can be computed and Eq.(2) can be linearized. The linear expression is as follows:

$$\mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} dX_T \\ dY_T \\ dZ_T \end{bmatrix} + \mathbf{C}_2 \begin{bmatrix} dX_S \\ dY_S \\ dZ_S \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3 \delta \mathbf{H} - \mathbf{W} = 0 \quad (10)$$

Where  $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_T - \lambda \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_S$ ;  $\mathbf{C}_1 = -I$ ;  $\mathbf{C}_2 = \lambda \mathbf{R}$ ;  $\mathbf{C}_3$  represents the coefficient matrix of transformation parameters.

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & X_T / \lambda & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ 0 & \lambda & 0 & Y_T / \lambda & & & \\ 0 & 0 & \lambda & Z_T / \lambda & & & \end{bmatrix}$$

After developing, three coefficient matrixes are given:

$$\mathbf{A} = \lambda \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \frac{2a}{\Delta} \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + \frac{2\lambda}{\Delta} \begin{bmatrix} a & -b & c \\ -b & -a & -1 \\ c & 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \lambda \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial b} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \frac{2b}{\Delta} \begin{bmatrix} \lambda \Delta X - X_T \\ \lambda \Delta Y - Y_T \\ \lambda \Delta Z - Z_T \end{bmatrix} + \frac{2\lambda}{\Delta} \begin{bmatrix} -b & -a & -1 \\ -a & b & -c \\ 1 & -c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$



$$C = \lambda \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial c} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \frac{2c}{\Delta} \begin{bmatrix} \lambda \Delta X - X_T \\ \lambda \Delta Y - Y_T \\ \lambda \Delta Z - Z_T \end{bmatrix} + \frac{2\lambda}{\Delta} \begin{bmatrix} -c & -1 & a \\ 1 & -c & -b \\ a & -b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

The linear form of the 3D transformation model in the matrix is represented as:

$$C_1 V_T + C_2 V_S + C_3 \delta H - W = 0 \quad (11)$$

#### References

- [1] Liu Dajie, Shi Yimin, Guo Jingjun(1996) The principle and data processing of GPS[M].Shanghai: Publishing House of Tongji University (in Chinese)
- [2] Zeng Wenxian,Tao Benzao(2003) Non-linear model of 3D coordinate transformation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 28(5):566-568 (in Chinese)
- [3] Chinese Society for Geodesy Photogrammetry and Cartography (2005) Development of surveying and mapping subject blue book in China[M]. Beijing: Surveying and Mapping Publishing House (in Chinese)
- [4] Liu Genyou(2003) A new method of determining attitude with GPS: damped LAMBDA algorithm with coordinates functional constraint[J]. Science of Surveying and Mapping, 28(3): 36-38 (in Chinese)
- [5] Zhao Jianhu, Liu Jingnan, Zhou Fengnian(2000) Method in determining vessel attitude with GPS[J]. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 25(4): 353-357(in Chinese)
- [6] Li Deren, Zheng Zhaobao(1992) Analysis photogrammetry[M]. Beijing : Surveying and Mapping Publishing House (in Chinese)
- [7] Zhang Senlin(1987) Applications of rigor solving collinearity equations based on Lodrigues matrix[J]. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 12(1): 81-91(in Chinese)
- [8] Wang Zhenjie(2003) Research on the regularization solutions of ill-posed problems in geodesy[D]. Wuhan: Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences (in Chinese)



## 翻译成果

### 罗德里格矩阵在三维坐标转换中的应用

姚吉利 徐宇飞 肖薇

#### 摘要

三种转换模型（Bursa-Wolf 模型，Molodensky 模型和武测模型）普遍使用于两个数据坐标系统之间的转换。当旋转角度很小时，我们使用线性模型，然而，当旋转角度越来越大时，将会产生模型误差。在这篇文章中，我们将提出一种算法，它有三个主要条款：（1）传统的旋转角  $\theta, \phi, \psi$  使用  $a, b, c$  来替代，其中  $a, b, c$  是在反对称矩阵或 Lodrigues 矩阵中的三个各自的值。（2）直接、准确地计算出任意旋转角下七个转换参数。（3）建立了相应的调整模型，此方法不使用三角函数，而是使用加、减、乘和除法表诀，并减少了方程的复杂性，使得计算更加简单快捷。

**关键词：3D 转换；线性模型；转换方程；罗德里格数字矩阵**

#### 绪言

坐标转换在测绘工程中有两个主要任务：（1）坐标基准的转换（2）两种坐标系之间的点的坐标变换。三维坐标转换中通常使用 Bursa-Wolf 模型，Molodensky 模型以及武测模型。在使用其参数模型的三维坐标转换改进以及三维坐标变换的非线性模型时，当旋转角度大于  $50^\circ$  时参考[2]。在调整模型中三个旋转角度的初始值都是零。没有提出的七个参数和模型近似线性化。随着移动运营商（空中，船舶和汽车）的态度以及决心的发展，这种模型得到了更加广泛的应用[3-7]。载体的空间位置，姿态和旋转角度是具有兼性的，因此，准确地转换参数的确定是必要的。随着 Lodrigues 矩阵被广泛应用于摄影测量，工作量的计算的推断以及严格数学模型建立起来了。在这篇文章中，Lodrigues 矩阵是用于三维坐标转换和 7 个参数和调整模型直接计算公式。该模型严格，简单，能够迅速的在理论和实践方面得



到证实并且能够适合于三维任意旋转角度的转换。

### 三维坐标转换的数学模型

在物理坐标变换处理的基础上，存在一个公式：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} X_{T_1} \\ Y_{T_1} \\ Z_{T_1} \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_S - X_{\delta_1} \\ Y_S - Y_{\delta_1} \\ Z_S - Z_{\delta_1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

这个公式可以归结为：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_T = \lambda \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \lambda \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_S \quad (2)$$

以上这些符号的含义取自参考文献[2]，导出的  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \lambda, \theta, \varphi, \psi$  通常被称为七个参数。

### 七个参数的直接计算

当两坐标系有 3 对公共控制点时，7 个参数惟一确定，可直接用公式(2)解算出来(这里的公共点是指在两个坐标系中的共同点)。根据数学转换模型，首先应给计算比例因子  $\lambda$  的值，其次是旋转矩阵的求解，最后求出三个平移参数。因此关键性的问题是确定旋转矩阵  $\mathbf{R}$ ，旋转矩阵  $\mathbf{R}$  的求法已经在参考文献[6]中提出了。旋转矩阵  $\mathbf{R}$  的 9 个元素是三个旋转角度和 3 个独立参数的函数。对于反对称矩阵

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{bmatrix};$$

其中  $a, b, c$  是三个独立参数，旋转矩阵  $\mathbf{R}$  可以有  $\mathbf{S}$  求得：



$$\mathbf{R} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{M} \quad (3)$$

公式(3)称之为罗德里格矩阵, 其中  $\Delta = 1 + a^2 + b^2 + c^2$ ,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 + a^2 - b^2 - c^2 & -2c - 2ab & -2b + 2ac \\ 2c - 2ab & 1 - a^2 + b^2 - c^2 & -2a - 2bc \\ 2b + 2ac & 2a - 2bc & 1 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix}.$$

本文就是以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  代替  $\theta$ 、 $\varphi$ 、 $\psi$  来建立三维坐标转移模型的公式。反对称矩阵和罗德里格矩阵性质为:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \mathbf{S}^T = -\mathbf{S}, \mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \\ 2) \quad & (\mathbf{I} - \mathbf{S})^T = \mathbf{I} + \mathbf{S}, (\mathbf{I} + \mathbf{S})^T = \mathbf{I} - \mathbf{S} \\ 3) \quad & \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \\ 4) \quad & (\mathbf{I} + \mathbf{S})^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}), \mathbf{S} = 2(\mathbf{I} + \mathbf{R}^T)^{-1} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $\mathbf{I}$  是一个  $3 \times 3$  的单位矩阵

比例因子  $\lambda$  可以通过两个坐标系统中的共同的边长之比来获得, 即

$$\lambda = 1 + m = \left( \frac{(X_{T_2} - X_{T_1})^2 + (Y_{T_2} - Y_{T_1})^2 + (Z_{T_2} - Z_{T_1})^2}{(X_{S_2} - X_{S_1})^2 + (Y_{S_2} - Y_{S_1})^2 + (Z_{S_2} - Z_{S_1})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

公式[2]是非线性的, 当存在三个公共控制点时, 转换参数位移存在。这是因为每个点可以以公式[2]的形式列出一个方程, 三个点就可以写出九个方程其中涉及七个未知数。经过转换并将点 1 和点 2 带入公式[4], 经过消元合并后得到下述形式:

$$\lambda(\mathbf{I} + \mathbf{S}) \begin{bmatrix} X_{S_2} - X_{S_1} \\ Y_{S_2} - Y_{S_1} \\ Z_{S_2} - Z_{S_1} \end{bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \begin{bmatrix} X_{T_2} - X_{T_1} \\ Y_{T_2} - Y_{T_1} \\ Z_{T_2} - Z_{T_1} \end{bmatrix}$$



$$\text{简化后的形式是: } \lambda(I+S)\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{S_{21}} & \mathbf{Y}_{S_{21}} & \mathbf{Z}_{S_{21}} \end{bmatrix}^T = (I-S)\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{T_{21}} & \mathbf{Y}_{T_{21}} & \mathbf{Z}_{T_{21}} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

展开(6)并整理后得:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\lambda Z_{S_{21}} - Z_{T_{21}} & -\lambda Y_{S_{21}} - Y_{T_{21}} \\ -\lambda Z_{S_{21}} - Z_{T_{21}} & 0 & \lambda X_{S_{21}} + X_{T_{21}} \\ \lambda Y_{S_{21}} + Y_{T_{21}} & \lambda X_{S_{21}} + X_{T_{21}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{T_{21}} - \lambda X_{S_{21}} \\ Y_{T_{21}} - \lambda Y_{S_{21}} \\ Z_{T_{21}} - \lambda Z_{S_{21}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

(7)式仅仅涉及两个独立的方程,不能够计算出3个未知数。对于第一点和第三点一个类似与式(7)的方程式可以写成:

$$\begin{bmatrix} 0 & -w_2 & -v_2 \\ -w_2 & 0 & u_2 \\ v_3 & u_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{T_{31}} - \lambda X_{S_{31}} \\ Y_{T_{31}} - \lambda Y_{S_{31}} \\ Z_{T_{31}} - \lambda Z_{S_{31}} \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } u_2 = \lambda X_{S_{21}} + X_{T_{21}}; v_2 = \lambda Y_{S_{21}} + Y_{T_{21}}; w_2 = \lambda Z_{S_{21}} + Z_{T_{21}};$$

$u_3 = \lambda X_{S_{31}} + X_{T_{31}}$ , 这样, a, b, c 三个参数可以通过下列公式计算:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_H} \begin{bmatrix} u_2 u_3 & -u_3 v_2 & u_2 w_3 \\ u_2 v_3 & v_2 v_3 & v_2 w_2 \\ -u_3 w_2 & -v_3 w_2 & -w_2 w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{T_{31}} - \lambda X_{S_{31}} \\ Y_{T_{31}} - \lambda Y_{S_{31}} \\ Z_{T_{31}} - \lambda Z_{S_{31}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

这里  $\Delta_H = u_3 v_2 w_2 - u_2 v_3 w_3$ , 由(3)式计算出旋转矩阵后,根据式(2)可得到平移参数

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} X_{T_1} \\ Y_{T_1} \\ Z_{T_1} \end{bmatrix} - \mathbf{R} \begin{bmatrix} X_{S_1} \\ Y_{S_1} \\ Z_{S_1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3 三维坐标转换的平差模型

实用中,两坐标系中有大于3个公共点,以发现错误和提高转换参数精度,在多余观测条件下,根据最小二乘原理解算参数。选择



$H = [\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z \ \lambda \ a \ b \ c]^T$  为参数, 用 3 个公共点, 以式(5)、式(8)和式(9)计算出 7 个参数近似值, 就可以进行严密的线性比, 线性比方程如下:

$$C_1 \begin{bmatrix} dX_T \\ dY_T \\ dZ_T \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} dX_S \\ dY_S \\ dZ_S \end{bmatrix} + C_3 \delta H - W = 0 \quad (10)$$

式中  $W = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_T - \lambda \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \lambda R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_S$ ;  $C_1 = -I$ ;  $C_2 = \lambda R$ ;  $C_3$  为转换矩阵参数的系数:

$$C_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & X_T / \lambda & A & B & C \\ 0 & \lambda & 0 & Y_T / \lambda & & & \\ 0 & 0 & \lambda & Z_T / \lambda & & & \end{bmatrix}$$

经过推导可以得出 3 个系数矩阵

$$A = \lambda \frac{\partial R}{\partial a} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \frac{2a}{\Delta} \lambda R \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + \frac{2\lambda}{\Delta} \begin{bmatrix} a & -b & c \\ -b & -a & -1 \\ c & 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

$$B = \lambda \frac{\partial R}{\partial b} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \frac{2b}{\Delta} \begin{bmatrix} \lambda \Delta X - X_T \\ \lambda \Delta Y - Y_T \\ \lambda \Delta Z - Z_T \end{bmatrix} + \frac{2\lambda}{\Delta} \begin{bmatrix} -b & -a & -1 \\ -a & b & -c \\ 1 & -c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

$$C = \lambda \frac{\partial R}{\partial c} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \frac{2c}{\Delta} \begin{bmatrix} \lambda \Delta X - X_T \\ \lambda \Delta Y - Y_T \\ \lambda \Delta Z - Z_T \end{bmatrix} + \frac{2\lambda}{\Delta} \begin{bmatrix} -c & -1 & a \\ 1 & -c & -b \\ a & -b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

模型线性化形式为:

$$C_1 V_T + C_2 V_S + C_3 \delta H - W = 0 \quad (11)$$

### 参考文献

- [1] 刘大杰, 施一民, 过静珺. 全球定位系统 (GPS) 的原理与数据处理 [M].



上海:同济大学出版社, 1996

[2] 曾文宪, 陶本藻. 三维坐标转换的非线性模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2003, 28(5): 566-568

[3] 中国测绘学会. 中国测绘学科发展蓝皮书[M]. 北京: 测绘出版社, 2005

[4] 刘根友. 一种 GPS 测定姿态的新方法[J]. 测绘科学, 2003, 28(3): 36-38

[5] 赵建虎, 刘经南, 周丰年. GPS 测定船体姿态方法研究[J]. 武汉测绘科技大学学报, 2000, 25(4): 353-357

[6] 李德仁, 郑肇保. 解析摄影测量学[M]. 北京: 测绘出版社, 1992

[7] 张森林. 罗德里格矩阵在共线方程严密解法中的应用[J]. 武汉测绘科技大学学报, 1987, 12(1): 81-91

[8] 王振杰. 大地测量中不适定问题的正则化解法研究 [D]. 武汉: 中国科学院测量与地球物理研究所, 2003



## 附录二

### 点云2中坐标转换到点云1中的源代码

```
Dim l As Integer, Dim i As Integer, Dim j As Integer
Dim e() As Double, Dim f() As Double, Dim g() As Double
Dim a() As Integer, Dim b() As Double, Dim c() As Double
Dim d() As Double
Private Sub Command1_Click()
    CommonDialog1.CancelError = True
    On Error GoTo errhandler
    CommonDialog1.Flags = cd1CCRGBInit
    CommonDialog1.Filter = "数据(*.txt)|*.txt"
    CommonDialog1.FilterIndex = 1
    CommonDialog1.ShowOpen
errhandler:
End Sub
Private Sub Command2_Click()
    Open CommonDialog1.FileName For Input As #1 ' 打开文件。
    l = 1
    Do While Not EOF(1)
        ReDim Preserve a(l + 1)
        ReDim Preserve b(l + 1)
        ReDim Preserve c(l + 1)
        ReDim Preserve d(l + 1)
        Input #1, a(l), b(l), c(l), d(l) ' 读入一行数据并将其赋予某变量
        l = l + 1
    Loop
    Close
    For i = 1 To l - 1
        Picture1.Print a(i), b(i), c(i), d(i)
        Print
    Next i
End Sub
```



```

Private Sub Command3_Click()
Open "D:\点云 2to 点云 1.txt" For Output As #2
  For j = 1 To 1 - 1
  ReDim e(1)
  ReDim f(1)
  ReDim g(1)
  e(j) = (-0.210667634620646) * b(j) + 0.953241880998909 * c(j) + 0.2166773269934 *
  d(j) -2.99539413442326
  f(j) = (-0.943093696933436) * b(j) + (-0.139849148582039) * c(j) +
  (-0.301689400618091) * d(j) -4.5633296970237
  g(j) = (-0.257280832025563) * b(j) + (-0.267903213774194) * c(j) +
  0.928458098958533 * d(j) -0.732563740772681
  Print #2, e(j), f(j), g(j)
  Next j
  Close
End Sub

```

### 点云3中坐标转换到点云1中的源代码

```

Dim l As Integer, Dim i As Integer, Dim j As Integer
Dim e() As Double, Dim f() As Double, Dim g() As Double
Dim a() As Integer, Dim b() As Double
Dim c() As Double, Dim d() As Double
Private Sub Command1_Click()
  CommonDialog1.CancelError = True
  On Error GoTo errhandler
  CommonDialog1.Flags = cd1CCRGBInit
  CommonDialog1.Filter = "数据(*.txt)|*.txt"
  CommonDialog1.FilterIndex = 1
  CommonDialog1.ShowOpen
errhandler:
End Sub

Private Sub Command2_Click()
  Open CommonDialog1.FileName For Input As #1 ' 打开文件。

```



```

l = 1
Do While Not EOF(1)
    ReDim Preserve a(l + 1)
    ReDim Preserve b(l + 1)
    ReDim Preserve c(l + 1)
    ReDim Preserve d(l + 1)
    Input #1, a(l), b(l), c(l), d(l) ' (读入一行数据并将其赋予某变量)
    l = l + 1
Loop
Close
For i = 1 To l - 1
    Picture1.Print a(i), b(i), c(i), d(i)
    Print
Next i
End Sub

Private Sub Command3_Click()
Open "D:\点云 3to 点云 1.txt" For Output As #2
For j = 1 To l - 1
    ReDim e(1)
    ReDim f(1)
    ReDim g(1)
    e(j) = (-0.68295067241861) * b(j) + (-0.629031342049074) * c(j) +
(-0.371346132015549) * d(j) - 2.64336512566835
    f(j) = 0.683451755060485 * b(j) + (-0.729696373177929) * c(j) +
(-2.09021882997757E-02) * d(j) - 4.49555857239438
    g(j) = (-0.257821794167428) * b(j) + (-0.268072329215302) * c(j) +
0.928259203434779 * d(j) - 0.237452389547418
    Print #2, e(j), f(j), g(j)
Next j
Close
End Sub

```