华中科技大学

硕士学位论文

散热结构拓扑优化

姓名：李朕

申请学位级别：硕士

专业：机械电子工程

指导教师：熊蔡华

20080501

摘 要

拓扑优化方法在连续体结构、MEMS 机构和散热结构等结构优化设计方面得到了广泛应用。拓扑优化至今仍是结构优化中最具挑战性的研究领域。本文针对散热结构拓扑优化问题，提出了改进的密度惩罚法，并进行了理论和数值实验研究。

文中首先介绍了原始密度惩罚法基本理论，研究了密度惩罚法中的材料模型和有限元热传导模型。接着讨论了拓扑优化中温度场的有限元求解格式及二维和三维单元导热矩阵的构造方法，对如何选择插值函数、确定形函数待定系数以及构建物理矩阵进行了深入的研究。运用密度惩罚法和热传导分析模型研究了散热结构拓扑优化模型。随后针对散热结构拓扑优化中普遍存在的数值不稳定性问题进行了讨论，并研究了消除数值不稳定性的方法。

接下来提出了改进的密度惩罚法模型，研究了拓扑优化中各向异性导热材料拓扑优化与方向角优化问题，提出了基于温度梯度的方向角优化准则算法。研究了含各向异性导热材料区域温度场有限元求解模型和数值算法。通过引入旋转矩阵研究了材料角度对拓扑优化目标函数的影响。

最后研究了散热结构拓扑优化设计的数值算法和处理技巧，并开发了三维散热结构拓扑优化和各向异性导热材料拓扑-角度混合优化的计算程序，针对一系列典型的散热结构拓扑优化算例进行了数值实验。

关键词： 拓扑优化 散热结构 SIMP 各向异性材料

Abstract

Topology optimization has been widely used in continuum structures, MEMS and heat radiation structures design. Topology optimization is one of the most challenging tasks in structural design. In this thesis, a modified density penalization method has been proposed. Numerical study has been carried out to investigate the efficiency of this method.

First, a fundamental theory of SIMP method is introduced in this thesis. Moreover, the material model and finite element method (FEM) in density penalization method are discussed. Key steps of 2-dimenation and 3-dimenation element matrix formulation, including interpolating function selection and determination of the coefficients of shape function are implemented. The SIMP method and the heat conduction analyze model are integrated to formulate topology optimization model of heat radiation structures. Then numerical instability in topology optimization methods such as checkerboards, mesh-dependence and local minima are discussed and corresponding methods to avoid those problems are listed in the study.

A modified density penalization model is also proposed and the issue of anisotropic material in heat conduction structure topology optimization is studied. Besides, a criteria method based on temperature gradient for the optimization of material orientation is proposed.

Finally, a computer program for topological optimization of heat conduction structures is developed using SIMP. Furthermore, numerical experiments for a series of representative examples are implemented, which shows that this method is feasible and effective.

Keywords: Topological Optimization, Heat Radiation Structures, SIMP, anisotropic material

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：李朕

日期：2008 年 5 月 24 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权华中科技大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本论文属于 保密□，在______年解密后适用本授权书。
不保密☑。

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：李朕　　指导教师签名：熊蔡华

日期：2008 年 5 月 24 日　　日期：2008 年 5 月 24 日

1 绪论

1.1 课题的来源

本学位论文得到以下项目的联合资助：

国家自然科学基金重点项目“机电表面功能结构及相关热物理问题的基础研究”（批准号： 50436010）

国家重点基础研究发展计划（973）项目“数字化制造基础研究”。（批准号：2005CB724100）

1.2 课题的目的和意义

随着微电子领域对产品性能的无限追求，芯片集成度不断提高，带来致命的高热流密度问题，电子器件的冷却问题越来越突出。英特尔公司负责芯片设计的首席执行官帕特-盖尔欣格曾指出，如果芯片耗能和散热的问题得不到解决，到 2005 年芯片上集成了 2 亿个晶体管时，就会热得像“核反应堆”，2010 年时会达到火箭发射时高温气体喷射的水平，而到 2015 年就会与太阳的表面一样热。目前面积 $2cm^2$ 芯片上的功耗可达 125W。为了解决散热问题，芯片制造商在发布新一代产品的时候不约而同的采用巨型的风冷散热器，甚至用水冷系统进行散热[1]。但是在量产型号中，由于风冷系统可靠性高，成本低廉等优点，仍然是处理器散热的首选。除了微电子领域，在化工等领域同样存在高热流密度问题。随着现代制造技术的不断进步，有效散热空间日趋减小，许多场合散热空间是封闭或半封闭的，要求散热系统能在短时间内通过极高的热流密度。因此，具有高热流密度机电器件功能结构表面散热问题已成为工程热物理、机械等学科急待解决的关键科学和技术问题。

本论文旨在根据复杂表面结构的热功能需求，优化热功能结构的拓扑和形状，为微电子及化工等领域强化传热结构的优化设计提供理论依据。

本论文提出了改进的密度惩罚法。提出了基于温度梯度的材料方向角优化准则算法，解决了各向异性导热材料拓扑与角度混合优化问题。运用该方法开展了大量的数值实验，取得了较好的效果，对散热结构的优化设计具有较好的指导意义。

1.3 拓扑优化基本描述

由于人类掌握的资源有限，最大化地利用现有原材料一直是人们追求的目标，也是许多研究领域不变的话题。早期的产品设计并没有涉及优化的概念，而是依赖设计人员的经验进行设计。在设计过程中，通过简单地试算和调整有时可以得到局部最优的结果。但是设计余量往往留得过大，造成了浪费。在六十年代末随着计算机技术的发展，尺度优化已经应用于工程结构的优化设计中，该方法得到了 A. Miele、E.J.Haug 和 J.Taylor 等人的发展[2]。随着有限元技术逐渐成熟，七十年代形状优化蓬勃发展。进入八十年代，伴随着小型化高性能计算机的出现和数值计算方法走向成熟，拓扑优化进入了活跃发展时期。

从工程设计的角度看，结构优化设计大致有三个层次：拓扑优化、形状优化、尺寸优化，其中拓扑优化是结构设计的核心。

结构拓扑优化的研究始于桁架结构优化。Maxwell 早在 1854 年就进行了应力约束下最小桁架的基本拓扑分析[3]。在随后的一百年间受理论和工具的限制，拓扑优化发展缓慢。直到 20 世纪 60 年代随着计算技术的发展，Dom 等人把数值方法引入到该领域，拓扑优化的研究才重新活跃起来[4]。

由于受到理论限制，因此早期的结构优化研究主要是针对设计域形状和拓扑固定的尺寸优化问题展开的。后来随着结构边界优化问题的提出，形状优化方法应运而生[3]。当今在航空和汽车制造业，尺寸和形状优化技术已经广泛用于结构和零部件设计。形状优化方法也常用于电磁、电化学和声学零件的设计。目前已有许多成功的算法可以处理形状优化问题[5]。然而，采用边界优化等形状优化方法进行产品设计，设计质量依赖于人为给定的初始设计。如果初始拓扑和边界条件定义不当，得到的设计结果往往不能令人满意。采用拓扑优化可以避免这个问题。Bendsøe[3] 对拓扑优化理论进行了开创性研究，实现了拓扑优化与形状优化的结合，为高效高质量的快速原型设计提供了一个非常有效的理论工具。

结构拓扑优化包括离散结构拓扑优化和连续体结构拓扑优化两大类。目前国内外研究主要针对连续体结构。因为离散结构优化问题的目标函数和约束条件不连续、不可微，可行域退化为不连通的集合。普通的求解方法难以处理这类优化问题。经过近 30 年的发展，连续体结构优化基本理论已经比较成熟，目前正向工程热物理、光学和 MEMS 等多学科交叉领域发展。

拓扑优化按模型不同可以分为两大类：微结构法和宏观法。

微结构法又称为材料法，把材料看作有限个微小单元的集合，以不同的材料分布代表拓扑，主要代表是均匀化方法和密度惩罚法模型。

宏观法又叫几何法，主要包括进化法、泡泡法和近年来发展迅速的水平集拓扑优化方法。几何法用设计域中的圆和孔等基本几何元素代表拓扑，比如进化法中采用移动的边界来表示结构的变化，水平集方法采用移动的零水平集界面来描述拓扑结构。

1.4 国内外发展现状

尽管结构拓扑优化设计难度大，但它所带来的潜在经济效益却是尺寸优化和形状优化难以达到的。因此，许多学者致力于拓扑优化的研究。目前研究较多的结构拓扑优化方法主要有均匀化方法、变密度法、进化法和水平集方法。

均匀化方法

复合材料的大量应用降低了产品制造成本，但是也增加了产品设计的复杂性。均匀化方法（homogenization）通过构造等价的微结构材料模型来描述复合材料，以微结构单胞的几何尺寸及方位角为设计变量，把拓扑优化问题转化为数学规划问题，再通过某种优化算法得到使结构的某种性能指标达到最优时设计区域各处的材料分布，从而得到最优的拓扑结构。该方法为复合材料产品设计提供了一个很好的工具。均匀化方法的理论基础产生于上世纪 70 年代末。利用 Bensous—san 等人发展起来的基于摄动理论的周期性结构分析方法，Bendsøe[3]建立了材料微结构尺寸与材料宏观弹性特性之间的关系，提出了均匀化拓扑优化方法。由于均匀化方法具有较严谨的数学基础，因而已成为拓扑优化研究中的重要方法。国内大连理工大学刘书田和程耿东等[6]在复合材料弹性刚度张量预测、热膨胀系数张量预测、导热系数张量预测、局部应力和位移分布分析等方面开展了均匀化方法的应用研究。

目前，均匀化方法已能成功处理多工况的二维、三维连续体结构拓扑优化问题。

变密度法

另一种基于微结构法的拓扑优化方法是以固体各向同性材料惩罚模型(SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization)为代表的变密度法。该模型假设材料为各向

同性材料，仅以密度为设计变量，不需要引入细微结构和附加的均匀化过程。程序实现简单，计算效率高[7]。Sigmund[7]发表了一个简练的拓扑优化程序，引起了拓扑优化研究者的广泛兴趣。从中派生出了许多优化程序用于解决不同领域中的拓扑优化问题，例如柔性体结构优化、光学通路优化等。

进化法

Xie 和 Steven[8, 9]提出了渐进结构优化方法（ESO：Evolutionary Structural Optimizatio）。ESO 的基本思想很简单，即通过逐步去除设计域中无效或低效材料获得最优结构的一种结构优化方法。该方法在最小柔顺性设计、特定自振频率等拓扑优化设计中获得了极大成功。该算法通用性好，不仅能解决尺寸优化，还可同时实现形状与拓扑优化。ESO 法的局限在于删除的材料不能被恢复，而双向渐进结构法(BESO：Bi—Directional Evolutionary Structural Optimization)弥补了 ESO 法的不足。BESO 法在优化过程中既可以删除材料单元，又可以添加材料单元 [10]。Young[11]成功地把双向渐进结构法应用到三维拓扑结构优化中。

水平集方法

Osher 和 Sethian 提出了水平集方法(Level Set Method)[12]，该方法可以有效描述界面运动问题。Wiegmann[13]首先把水平集方法应用到弹性体结构的边界设计中，采用移动的边界来表示设计空间中材料的增加或删除。随后 Allair 等[14]把经典的形状灵敏度算法结合到水平集方法中，实现了水平集方法在弹性体结构拓扑与形状构优化的整合。Wang 等[15]提出了结构的向量水平集表示方法。Seung-Hyun Ha[16, 17]等将水平集方法应用于热传导问题的形状和拓扑优化，取得了较好效果。国内也在水平集拓扑优化领域展开了广泛的研究。大连理工大学梅玉林[18]提出了改进的水平集拓扑优化算法，该算法适用于一般目标函数、多材料、多约束和多载荷工况的结构拓扑优。贾海朋[19]基于进化算法的思想提出了 ESO 插孔的水平集拓扑优化算法，解决了水平集方法对任意结构、任意初始边界的拓扑优化问题。庄春刚[20]研究了基于水平集方法的多载荷散热结构拓扑优化问题。华中科技大学蒋良杰[21]在 SIMP 法和水平集方法散热结构拓扑优化设计方面展开了研究，开发了 MATLAB 和 FEMLAB 下的拓扑优化计算程序。

结构优化中的优化算法

结构优化问题的解决最终归结为求解数学优化问题。为了提高优化的经济性，需要选择时间复杂度与空间复杂度都相对较低的优化算法。对于所有优化问题都可归结为在给定条件(例如约束条件)下求目标函数的最优值问题。实际工程优化问题中，优化问题的约束条件和目标函数不仅是非线性的，而且通常是隐式函数，直接求解非常困难，所以优化算法的选用至关重要。对于不同层次的优化问题需要选用不同的优化算法。目前在拓扑优化中运用较多的优化算法有 OC 法(Optimality Criteria)、SLP 法(Sequential Linear Programming)和 MMA 法(Method of Moving Asymptotes)等。

OC 法是基于直觉的准则法，把数学中最优解应满足的 Kuhn-Tucker 条件作为最优结构应满足的准则。用优化准则来更新设计变量和拉格朗日乘子[3]。采用准则法不需要计算目标函数的梯度等额外信息，所以计算量不大。在一般情况下，所需迭代次数少，目标函数收敛较快。但其缺点也明显，首先它只能保证特定情况和参数下解的收敛性；其次由于采用准则法获得的结果仅仅是人们所“期望”看到的结果，所以不能保证获得最优解；最后对不同类型的约束、变量、目标函数需导出不同的优化准则，通用性差。

MMA 法即移动渐进线法，最早由 Svanberg[22] 提出。MMA 法用一显式的线性凸函数来近似代替隐式的目标和约束函数。由事先确定的左、右渐进点和原函数在各点的导数符号来确定每一步迭代的近似函数。当左、右渐进点分别趋近负无穷大和正无穷大时，MMA 法就等同于用 SLP 近似。该方法的优点在于它是全局收敛的，所以 MMA 法能从理论上保证解的存在性，另外 MMA 法对初值不敏感，迭代过程稳定。缺点是计算效率较低。

SLP 法即序列线性规划法。该法通用性好，但收敛速度慢，对初值敏感。数学规划法是以规划论为基础，理论严谨，适用面广，且收敛性有保证。但由于计算量大，对拓扑优化这一类含多个变量的优化问题不适合。20 世纪 70 年代中期以后，结构优化设计中的规划法吸收了准则法的优点，根据力学特性进行了某些改进，如显式逼近、变量连接、选择有效约束、引入倒数变量、采用对偶求解技术等，使计算效率得到了显著提高。

其它一些新兴的优化算法也逐渐引起了拓扑优化研究者的兴趣。比如遗传算法（GA：Genetic Algorithms）、粒子群算法（PSO：Particle Swarm Optimization）和模拟退火算法等。遗传算法属于半随机算法，它具有自适应性，不需要描述问题的全

部特点，搜索过程不受优化函数的连续性约束，也不需要导数等额外信息。但这种方法存在结构分析重复次数过多、收敛速度慢等缺点，不适合求解大规模的工程优化问题[23]。粒子群算法在图像识别中体现出极高的效率，但在拓扑优化中的应用还有待研究。

1.5 结构优化进展实例

下面简要介绍国内外结构优化设计方法应用的一些实例，他们所开展的研究工作对本论文有很好的借鉴意义：

由丹麦技术大学（Technical University of Denmark）机械工程学院 Ole Sigmund，Martin Bendsøe 等人领导的研究队伍很早就在拓扑优化方面展开了研究。早在上世纪 90 年代初期，该学院就在与丹麦政府合作的一个小型卫星支架优化项目中实现了多约束下的三维结构拓扑优化。

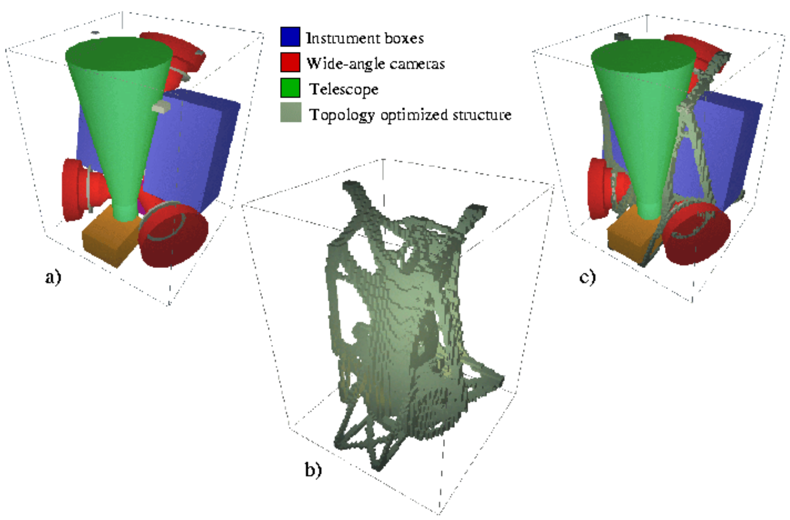


图 1.1 小型卫星支撑结构优化

图 1.1 a）为支架的设计要求，需要在 60x60x80cm 的空间中安置 4 台摄像机、望远镜头、推进器、电池和电子通信设备等，设备总重量小于 80kg，支撑结构的总重量限制为 12kg 并需在卫星发射时能承受数 G 的加速度。整个设计域为 288000 个立方体有限单元。最终优化结果如图 1.1 b）所示。

另一个典型的优化算例是三维桥梁的优化算例，如图 1.2。

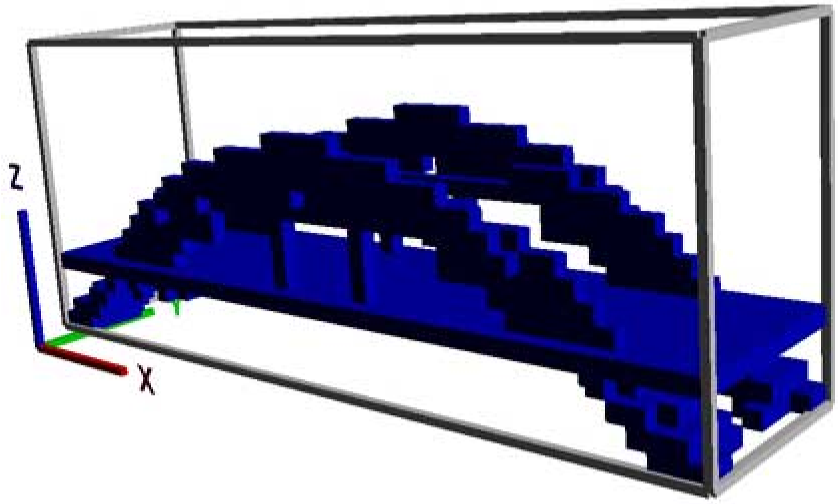


图 1.2 三维桥梁

从文献和例子来看，目前结构拓扑优化设计已经取得了广泛的理论研究成果，比如上述卫星支架优化项目和三维桥梁优化项目。在应用方面也取得了一定成果，目前已经出现了一些成熟的拓扑优化商业软件。但在散热结构优化方面的研究还比较滞后，远远不能满足复杂的工程需求。大部分研究还停留在数值实验阶段。需要跳出这一局限，为散热结构的工程设计提供高效的设计方法。本论文的散热结构拓扑优化正是在这种背景下提出的。主要解决三维散热结构拓扑优化和面向各向异性材料的拓扑-方向角混合优化问题。在本文第二章和第三章给出了详细的介绍。

1.6 本文研究内容与章节安排

本文针对散热结构的拓扑优化问题，利用密度惩罚法进行了理论和数值实验研究。提出了改进的密度惩罚法，适用于各向异性材料拓扑-角度混合优化。利用 MATLAB 开发了二维和三维散热结构拓扑优化的数值算法和计算程序。全文内容具体安排如下：

第一章为绪论，阐述了课题来源和项目研究的背景和意义，并详细介绍了拓扑优化问题的描述和各种拓扑优化方法的研究现状。

第二章首先介绍了拓扑优化的数学模型和基于 SIMP 模型的密度惩罚法理论。在此基础上分析了密度惩罚法散热结构拓扑优化模型，为后续的数值实验建立了理论基础。

第三章研究了拓扑优化中各向异性导热材料方向角优化问题，提出了改进的密

度惩罚法模型，建立了拓扑和方向角混合优化模型。提出了基于温度梯度的方向角优化准则算法。

第四章研究了散热结构拓扑优化设计的数值算法和处理技巧，并在 MATLAB 中进行了三维散热结构拓扑优化和各向异性导热材料拓扑优化的几种典型算例的数值实验。

第五章总结全文，并对下一步研究工作重点进行了分析和展望。

2 密度惩罚法拓扑优化理论

拓扑一词最早源于希腊词“topos”，意思是地点、空间或区域。拓扑学研究区域中物体的变形，比如四边形、八面体在空间中的形变。拓扑区域的定义为：$\Re^3$所有子集(包括线和点的集合)。拓扑优化研究的问题是寻找$\Re^3$中最优拓扑使目标函数(刚度、自振频率等）最小。从数学的观点来讲，所有的拓扑变形都可以视为变换或是映射。规定拓扑的变换和逆变换都是具有唯一性的连续变换。这就为拓扑优化解的连续性提供了保证。

研究拓扑优化问题离不开形状优化的讨论。在拓扑学中，区域的变形和大小并不影响拓扑，而区域的增减对拓扑产生影响。联系到工程设计中，设计的总体布置往往比其设计尺寸更能决定设计的优劣。所以，单纯的形状优化很难使设计达到最优。在产品的早期设计阶段引入拓扑优化是提高设计质量非常有效的手段。从另一个方面来讲，单纯的拓扑优化仅仅在设计域上生成一些孔洞，这些含有孔洞的拓扑对设计者而言不具有实用意义，因此拓扑优化需要结合形状优化生成有意义的产品形状。Qing[24] 结合形状优化和拓扑优化，研究了热传导结构优化问题。Zhou[25]使用商业拓扑优化代码研究了形状、拓扑和尺寸三者优化的整合问题。Zhou 提出的方法在优化问题中可以组合不同设计变量，为设计者提供了极大的自由度。Rafael[26]等学者开发了 ANSYS 下的拓扑优化算法，并利用该代码成功进行了马达转子的优化。近二十年来，随着计算机运算速度和存储能力的提高以及有限元等分析工具的成熟，采用计算机求解拓扑优化问题逐渐成为一个热门领域。

2.1 优化模型

由于拓扑优化的复杂性，只有少量的问题可以用解析的方法人工进行求解。为了满足工程中的复杂要求，需要借助计算机用数值方法求解拓扑优化问题。因此解决拓扑优化的挑战首先在于如何在计算机中用离散模型描述拓扑；其次是如何建立一个可供计算机求解的优化模型。正如绪论中所述，材料法假设结构的宏观特性由微尺度的单胞结构（类似自然界中组成材料的分子和原子）特性来决定。这种方法虽然可以提供自然界中所有材料的精确数学描述，然而它表示一个普通零件所需要

的存储空间和计算量已经大大超出了现有计算机的能力，因而必须用简化的材料数学模型及有限个变量来描述拓扑结构。微结构法的思想就是把拓扑优化转化为有限个参数的尺度优化（sizing problem）问题。

2.1.1 材料模型

基于材料微结构的拓扑优化起源于均匀化方法。均匀化方法中材料模型分为两大类：一种是多层材料模型，另一种是含有孔洞的微结构。前者的均匀化方程可以通过解析的方法求解，而后者的单胞模型只能用数值方法求解。为了方便计算机求解拓扑优化问题，一般选择第二种模型。

先考虑二维均匀化模型。设计域属于欧拉空间（$\Omega \subset \Re^2$），其中的材料单元微结构特性可以由对称矩阵$E_{ij}(a,b,\theta)$来描述。

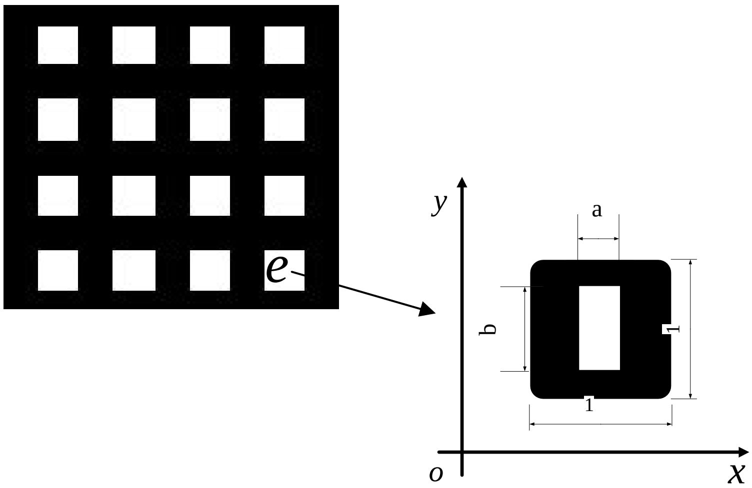


图 2.1 均匀化方法材料模型

a和b分别表示第e个单元材料在x和y方向的尺度。以上是最早的微结构材料描述方法。在 SIMP 法中简化了材料模型，仅用密度x一个变量来表示单元材料性质，把优化问题归结为固定域上的 0-1 整数规划问题。对单元e，密度x_e取 0 代表没有材料，取 1 代表有材料。有材料的区域对结构的刚度有贡献，而无材料的区域为空白区域（即不存在结构，不传递力）。采用这样的处理可以在把原问题转化为一个固定设计域上的优化问题。从而避免了由于结构变化导致的网格重新划分和设计变量改变的繁琐过程。SIMP 法中的材料模型可以用密度函数来表示[3]：

$$E(x) = \rho(x)^p E_0 \qquad p > 1 \tag{2.1}$$

其中 $\rho(x)\ x\in\Omega$ ，$0\le\rho(x)\le 1$ 是密度函数，E_0 是给定的固体材料弹性模量。密度函数上的指数 p 是惩罚因子。因为拓扑优化关心的是材料的有无，所以密度函数选择离散函数(2.2)式：

$$\rho\left(x\right)=\begin{cases}1 & if \quad x\in\Omega_s \\ 0 & if\ x\in\Omega/\Omega_s\end{cases} \tag{2.2}$$

Bendsøe 在研究中发现，如果直接采用(2.2)式的离散密度函数，不引入含中间密度的复合材料，无法保证拓扑优化中解的存在性。为了得到可行解，需要对原问题进行一定的调整。通过引入密度处于 0 和 1 之间的复合材料把密度函数 $\rho\left(x\right)$ 松弛化为一个连续函数，再通过加上惩罚因子使占有相同容量的中间密度材料比原有材料的刚度低。在优化过程中 $\rho\left(x\right)$ 向 0 或 1 趋近减少密度中间值。

图 2.2 表示不同惩罚因子下的材料密度函数曲线。从上到下依次是 $p=1$ 到 5 的密度变化曲线。从图上可以看出，惩罚因子越大，中间密度越趋向于 $\rho=0$ （空洞）。通过这样的处理使连续变量优化结果趋近于离散变量优化结果。但是过大的惩罚因子会使拓扑优化求解过程出现震荡，所以 p 值需要小心选择。

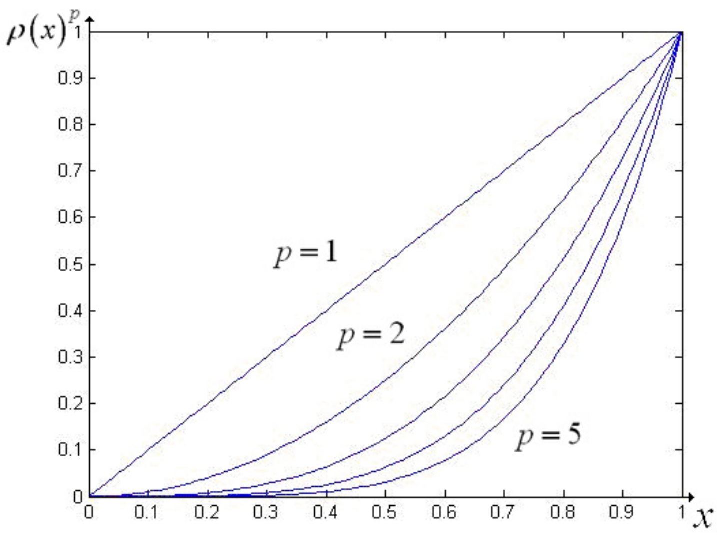


图 2.2 不同惩罚因子 p 下的密度函数曲线

SIMP 法的最大问题是，设计结果不仅仅显式的依赖于惩罚因子 p ，而且还受到有限元网格的影响。只有通过增加约束等方法来改良函数性态才能获得最优解。Sigmund 和 Petersson[27]研究了存在于拓扑优化中的数值不稳定性问题，并介绍了多种解决方法。对拓扑优化中数值不稳定性的研究放在第本章第二节。

由于 SIMP 法具有思想简单，易于实现等优点，它的应用范围从单纯的弹性体结构拓扑优化拓展到了其它领域，例如 MEMS、导电、传热和特征频率等领域。本文主要研究基于热传导的拓扑优化问题。

在传热学中，材料的性质用导热率λ来描述。将(2.1)式中的弹性模量替换成热传导系数就建立了材料导热率与密度间的函数关系：

$$\lambda(x) = \rho(x)^p \lambda_0 \tag{2.3}$$

式中λ_0是给定的导热率。(2.3)式表示了 SIMP 法导热材料数学模型。该模型简单，因此局限也大，只能描述各向同性材料。在下一章中，结合均匀化方法中的部分理论，提出了改进的密度惩罚法模型，使该模型适用于各向异性材料的拓扑优化。

2.1.2 热传导模型

许多与时间无关的物理系统，即稳态系统中的物理问题都可以用椭圆偏微分方程来描述。比如弹性体结构拓扑优化求解的物理问题是弹性力学问题，本质上是求解一个拉普拉斯方程。正如第一章所述，通过改变边界条件和载荷，弹性力学拓扑优化模型可以扩展到其它研究领域中，如导电、热应力、热传导等问题的拓扑优化中。因为它们的本质都是求解类似的偏微分方程。在研究热传导结构的拓扑优化问题之前，首先研究热传导模型。

热传导过程满足傅立叶定律：

$$\mathbf{q} = -\lambda \mathrm{grad} T \tag{2.4}$$

$\mathbf{q}$为热流密度矢量，grad$T$是空间某点的温度梯度向量，λ是热传导系数。对于一维导热问题，直接对(2.4)式积分即可求出热量Q。对于多维热传导问题，其热传导控制方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}) + q_v = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.5}$$

c_p是导热材料的比热容$J/(kg \cdot K)$，ρ代表材料密度 kg/m^3，λ_x，λ_y，λ_z分别是材料沿 x，y，z 方向的导热系数$W/(m \bullet K)$，q_v为物体的内热源强度W/kg

热传导问题的边界条件有三类：

第一类 Dirichlet 边界条件，给定边界Γ_1上的温度值：

$$T(x，y，z，t)=\overline{T}(t) \tag{2.6}$$

第二类 Neumann 边界条件，给定边界Γ_2上的热流密度：

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{n}_x+\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{n}_y+\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{n}_y=q(t) \tag{2.7}$$

第三类边界条件为Γ_3上的混合边界条件：

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{n}_x+\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{n}_y+\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{n}_y=\overline{h}(T_\infty-T) \tag{2.8}$$

图 2.3 表示Γ_1和Γ_2作为边界条件的热传导区域Ω：

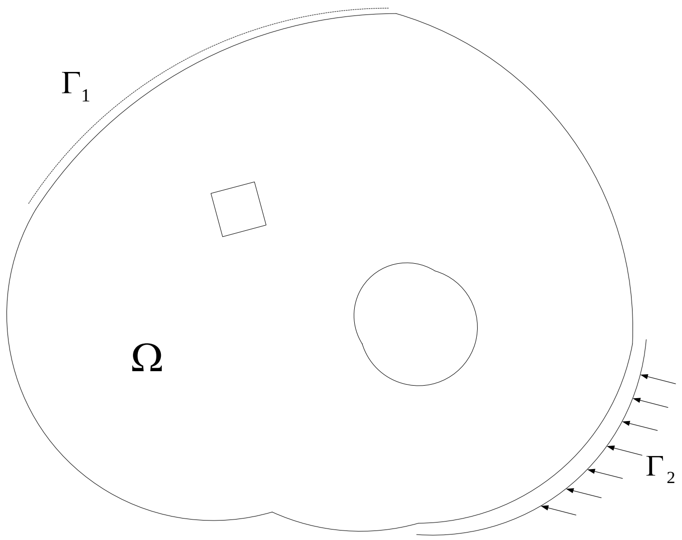


图 2.3 热传导区域示意图

对于稳态热传导，温度对时间的变化率为 0：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=0 \tag{2.9}$$

由于各向同性导热材料各个方向导热率相同$\lambda_x=\lambda_y=\lambda_z=\lambda$，故公式(2.5)可以简化为：

$$\lambda(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2})+q_v=0 \tag{2.10}$$

如果给定问题的初始条件：

$$T(x,\ y,\ z,\ t)=\overline{T}_0\left(x,\ y,\ z\right) \tag{2.11}$$

对于二维稳态热传导，在满足边界条件(2.6)~(2.8)以及初始条件(2.11)式的温度场使以下泛函I取极小值，即：

$$\min_{T\in\left\{\begin{matrix}BC(\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)\\ IC(T_0)\end{matrix}\right.} \quad I=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\lambda_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\lambda_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2-2q_vT\right]\mathrm{d}\Omega \tag{2.12}$$

通过变分求解就可以求出设计域中的温度场。离散化(2.12)式，设计域Ω即被划分为e个单元。为了方便网格划分选择矩形网格，每个单元被划分为由四个节点组成的正方形。单元可以表示为图 2.4 的形式：

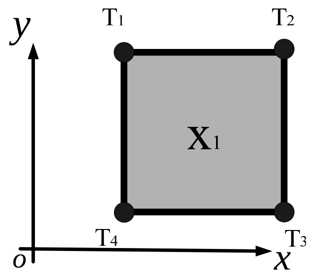


图 2.4 单元形式以及节点编号

要形成单元刚度矩阵，首先要选择单元插值函数。4 节点单元可以选择双线性插值函数。通过插值函数，在节点温度已知的情况下，单元内任意点的温度可以表示成节点温度的插值形式：

$$T_e\left(x,y\right)=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy=f\left(x,y\right)\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\} \tag{2.13}$$

在节点处有：

$$T\left(x_i,y_i\right)=T_i \quad (i=1,2,...,4) \tag{2.14}$$

把T_1到T_4代入(2.13)式中得到：

$$\left\{\mathbf{t_e}\right\}=\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1 & x_1y_1\\1 & x_2 & y_2 & x_2y_2\\1 & x_3 & y_3 & x_3y_3\\1 & x_4 & y_4 & x_4y_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}=\left[\mathrm{A}\right]\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\} \tag{2.15}$$

通过(2.15)式可以求解出(2.13)中的待定系数$\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\}$：

$$\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\}=\left[\mathrm{A}\right]^{-1}\left\{\mathbf{t_e}\right\} \tag{2.16}$$

把温度插值函数由(2.13)的坐标形式重写为节点温度的形式得到：

$$T_e(x,y)=\left[\boldsymbol{f}(x,y)\right]\left[\mathbf{A}\right]^{-1}\left[\mathbf{t}_e\right]=\left[\boldsymbol{N}(x,y)\right]\left[\mathbf{t}_e\right] \tag{2.17}$$

$N(x,y)$ 称为单元形函数。

温度沿 x 和 y 方向的导数可以表示为：

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial T}{\partial x}\\ \dfrac{\partial T}{\partial y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a_0+a_1x+a_2y+a_3xy\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(a_0+a_1x+a_2y+a_3xy\right)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & y\\ 0 & 0 & 1 & x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}=\left[C\right]\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\} \tag{2.18}$$

将(2.16)式代入(2.18)式，得到：

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial T}{\partial x}\\ \dfrac{\partial T}{\partial y}\end{Bmatrix}=\left[\mathbf{C}\right]\left[\mathbf{A}\right]^{-1}\left\{\mathbf{t}_e\right\}=\left[\boldsymbol{B}\right]\left\{\mathbf{t}_e\right\} \tag{2.19}$$

$\left[\mathbf{B}\right]$为单元的几何矩阵。

将(2.19)式代入(2.12)式，并求变分极值$\dfrac{\partial I}{\partial \mathbf{t}_e}=0$，得到单元温度的求解公式：

$$\boldsymbol{K}_e \bullet \mathbf{t}_e=\boldsymbol{Q}_e \tag{2.20}$$

其中 K_e 为单元导热矩阵：

$$\boldsymbol{K}_e=\int_\Omega\left[\lambda_x\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)+\lambda_y\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}\Omega \tag{2.21}$$

将 K_e 写成矩阵的形式：

$$\boldsymbol{K}_e=\int_\Omega \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega \tag{2.22}$$

$\left[\boldsymbol{\lambda}\right]$为单元热导率矩阵：

$$\left[\boldsymbol{\lambda}\right]=\begin{bmatrix}\lambda_x & 0\\ 0 & \lambda_y\end{bmatrix} \tag{2.23}$$

把(2.22)式的面积分转化为二次积分得到单元导热矩阵的完整形式：

$$\boldsymbol{K}_e=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_2}^{y_4}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}\mathbf{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.24}$$

把单元导热矩阵和右端载荷向量叠加以后得到求解温度场的有限元格式：

$$K\mathbf{T}=\mathbf{Q} \tag{2.25}$$

式中$[K]=\sum_{e=1}^{N}[K_e]$是组装后的总体传热矩阵，$[\mathrm{T}]=\sum_{e=1}^{N}[\mathbf{t}_e]$为叠加的总体节点温度向量，$[Q]=\sum_{e=1}^{N}[Q_e]$为叠加后的总体右端向量。

(2.25)式是一个代数方程，给定初始以及边界条件后，利用计算机可以方便地求解出设计域的温度场。

三维散热结构拓扑优化中的单元传热矩阵构建与二维的类似，采用正 6 面体单元，每个单元具有 8 节点，节点排列顺序见图 2.5。

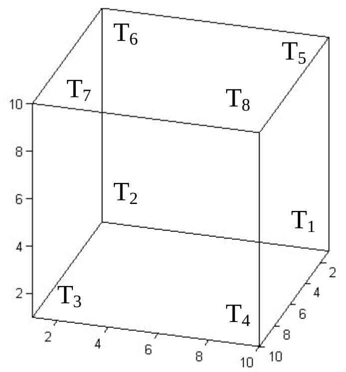


图 2.5 正 8 面体单元节点排列

对三维正 6 面体 8 节点单元，选择(2.26)式的插值函数：

$$T_e(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7xyz=f(x,y,z)\{\boldsymbol{\alpha}\} \tag{2.26}$$

将 8 个节点坐标代入(2.26)式得到：

$$\{\mathbf{t_e}\}=\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\\T_6\\T_7\\T_8\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1y_1z_1\\1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2y_2z_2\\1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3y_3z_3\\1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4y_4z_4\\1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5y_5z_5\\1 & x_6 & y_6 & z_6 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6y_6z_6\\1 & x_7 & y_7 & z_7 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7y_7z_7\\1 & x_8 & y_8 & z_8 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8y_8z_8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\end{Bmatrix}=[\mathrm{A}]\{\boldsymbol{\alpha}\} \tag{2.27}$$

通过(2.15)式可以求解出(2.27)中的待定系数$\{\boldsymbol{\alpha}\}$。

温度沿 x、y 和 z 方向导数可以表示为：

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz + a_6 yz + a_7 xyz\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz + a_6 yz + a_7 xyz\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz + a_6 yz + a_7 xyz\right) \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & y & z & 0 & yz \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 0 & z & xz \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{Bmatrix} = [C]\{\boldsymbol{\alpha}\} \tag{2.28}$$

(2.24)式中的单元导热矩阵变为三阶矩阵：

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

将(2.22)的体积分化为三次积分：

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{z_1}^{z_4}\int_{x_1}^{x_6}\int_{y_1}^{y_8} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{B} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2.30}$$

通过以上推导，得到了拓扑优化中三维温度场的求解算法。在第 3 章中还将介绍含各向异性导热材料区域中的温度场有限元求解算法。

2.1.3 密度法优化模型

最早引入拓扑优化研究的是弹性体结构最小化柔度问题。经过近三十年的发展，此类优化问题的研究已经非常成熟。一些公司把此类拓扑优化模块整合到了商业软件中。如 Altair 公司在 Hyperworks 中提供了 Optistruct 拓扑优化软件包。

弹性体结构拓扑优化的数学模型可以表示为(2.31)式的形式：

$$\begin{cases} Minimize: C(x)=\int_{\partial\Omega} f \bullet u dx \\ s.t.: \int\limits_{\Omega} \chi(x)dx = V \end{cases} \tag{2.31}$$

其中 f 为力载荷，u 为位移。目标函数 $C(x)$ 为结构的平均柔度。约束 $\int_{\Omega}\chi(x)dx = V$ 代表体积限制。优化的目标是在设计域中给定材料体积约束下，寻找最合适的材料分布使得目标函数值最小。

为了方便用数值方法求解优化问题，需要把设计域离散成含 n 个单元的区域：

$$\begin{cases} Minimize: C(x_{1,...,}x_n) \\ s.t.: \sum_{e=1}^{n} x_e = V, x \in \{0,1\}^n \end{cases} \tag{2.32}$$

若 $V \in \{1,...,n\}$，对于集合 $x \in \{0,1\}^n$，满足 $\int_{\Omega}\chi(x)dx = V$ 非空，则(2.31)式有解[28]，但不能保证解的唯一性。式(2.32)是密度法拓扑优化的一般格式，引入带惩罚因子的密度函数(2.1)后得到 SIMP 模型如 (2.33)式：

$$\begin{cases} Minimize: C(x_1^p{}_{,...,}x_n^p) \\ s.t.: \sum_{e=1}^{n} x_e = V, x \in \{0,1\}^n \end{cases} \tag{2.33}$$

拓扑优化中选择合适的目标函数是问题的第一步，也是最为关键的一步。弹性体结构优化中通常选择结构的柔度作为目标函数。散热结构研究的物理问题与弹性体结构存在一定的相似性，目标函数可以通过类似的推导得到。Dems[29, 30]研究了边界问题中瞬态温度场的灵敏度分析问题，为散热结构拓扑优化提供了理论依据。其思想可以推广到热传导结构的拓扑优化中。一般散热器的设计目标是要在给定的散热空间中保证工作器件的正常运行，即最高温度最小。但是以最高温度点作为设计变量的函数，具有不连续性（最高温度点所在的点的空间位置会随着设计变量的变化而改变）。这会对求解造成困难[19]。可根据程新广[31, 32]提出的最小热传递势容耗散原理定义一个性态良好的目标函数。对于稳态热传导问题，传入区域的热量为：

$$\overline{Q} = \int_{\Omega} q d\Omega + \int_{s} q_n ds \tag{2.34}$$

从(2.34)式可知，热量由两部分组成。$\int_{\Omega} q d\Omega$ 代表区域 Ω 内的热源产生的热量；$\int_{s} q_n ds$ 项代表从边界 S 出入区域的热量。在非稳态对流情况下，将各点温度与热流密

度的乘积积分称为散热弱度：

$$C=\int_{\Omega}qTd\Omega+\int_{s}q_{n}Tds \tag{2.35}$$

在实体内部和边界上传入的热量一定的条件下，温度越低，则散热弱度越小，整个设计域上的平均温度越低。根据傅立叶定律把q的表达式代入(2.35)式，得到：

$$C=\int_{s}(-K_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_{i}}n_{i}+hT_{j})Tds+\int_{\Omega}K_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_{i}}\frac{\partial T}{\partial x_{j}}d\Omega \tag{2.36}$$

在对流换热边界上：

$$-K_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_{i}}n_{i}=(T-T_{f}) \tag{2.37}$$

把(2.37)式代入(2.36)式得到：

$$C=\int_{s}hT^{2}ds+\int_{\Omega}K_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_{i}}\frac{\partial T}{\partial x_{j}}d\Omega \tag{2.38}$$

对于稳态情况，不考虑对流边界，将(2.38)式的前一项去掉得到：

$$C=\int_{\Omega}K_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_{i}}\frac{\partial T}{\partial x_{j}}d\Omega \tag{2.39}$$

(2.39)式也叫做热量传递势容，它的量纲是焦耳 • 开尔文（J·K），它代表了物体向周围介质导热的能力。随着热量从高温传向低温，热量传递中势容存在耗散，当其热量传递势容耗散为最小时，热量传递效率最高。散热结构拓扑优化的目标就是使势容耗散最小。经过离散化处理后，(2.39)式可以化成：

$$C=\sum_{e=1}^{n}T_{e}^{T}K_{e}(x)T_{e} \tag{2.40}$$

散热结构的离散模型如下：

$$\begin{cases} Minimize: C=T^{t}KT=\sum_{e=1}^{n}(x_{e})^{p}\mathbf{t}_{e}^{T}k_{e}\mathbf{t}_{e} \\ Subjectto: \sum_{e=1}^{n}V_{e}x_{e}=V_{0} \\ \qquad KT=Q \end{cases} \tag{2.41}$$

通过(2.41)式，可以方便的用计算机求解二维或三维的拓扑优化问题。根据

Sigmund[7]的计算程序，我们开发了 MATLAB 环境下的三维散热结构拓扑优化的数值算法程序。在第四章将会给出具体的数值算例。

2.1.4 求解方法

获得优化模型后需要选择合适的求解方法。通过插值模型，把拓扑优化转化为了一个离散尺度优化问题。但与传统的尺度优化问题相比，拓扑优化的变量规模常常很大。所以优化方法的效率是首要考虑的问题。因此一般不采用线性规划等方法，而较多采用准则法。对于如下的连续体结构单载荷优化问题：

$$\begin{cases} Minimize: C(T) \\ s.t.: K_e = x^p K_0 \\ \qquad \int_\Omega x_e = V \qquad 0 < x_{\min} \le x \le 1 \end{cases} \tag{2.42}$$

$x_{\min}$ 为人工设置的密度下限，目的是为了防止求解平衡方程的时候出现数值奇异现象。对(2.42)式的直接求解较困难，因为它中间存在一个不等式约束。为了求解这样的问题，自然需要引入拉格朗日乘子，把原问题转化为：

$$I\left(\lambda\right) = C\left(T\right) + \lambda_1 \int_\Omega (x-1)dx + \lambda^+ \left(\int_\Omega x_e dx - V\right) + \lambda^- \int_\Omega (x_{\min} - x)dx \tag{2.43}$$

如果存在一个正的拉格朗日乘子使得问题能满足原来的体积约束，则问题(2.43)和(2.42)同解。对问题施加适当的边界条件就可以得到唯一解。为了求最优解，对(2.43)式求设计变量 x 的偏导数，并令它等于零得到：

$$\frac{\partial I\left(\lambda\right)}{\partial x} = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \tag{2.44}$$

设置转换条件为：

$$\lambda^+ \ge 0，\ \lambda^- \ge 0，\ \lambda^-\left(x_{\min} - x\right) = 0，\ \lambda^+\left(x - 1\right) = 0 \tag{2.45}$$

对于中间密度 $x_{\min} \le x \le 1$，把(2.41)式代入到(2.44)式中，可以写为：

$$p(x_i)^{p-1} \mathbf{t}_e^T k_e \mathbf{t}_e = \lambda_1 \tag{2.46}$$

(2.46)式表示对于中间密度材料，灵敏度与 λ_1 恒等，得到最小化散热弱度的固定迭代格式[33]：

$$x_i^{new} = \begin{cases} \max(x_{\min}, x_i - m), & if \quad x_i B_i^{\eta} \le \max(x_{\min}, x_i - m); \\ x_i B_i^{\eta}, & if \quad \max(x_{\min}, x_i - m) \le x_i B_i^{\eta} < \min(1, x_i + m); \\ \min(1, x_i + m), & if \quad \min(1, x_i + m) \le x_i B_i^{\eta}; \end{cases} \tag{2.47}$$

x_i 代表第 i 次迭代过程中的密度变量，B_i^{η} 的表达式如下

$$B_i^{\eta} = \frac{p(x_i)^{p-1}\mathbf{t}_e^T k_e \mathbf{t}_e}{\lambda_1} \tag{2.48}$$

根据(2.46)式，对于每一个局部点来说最优条件使 $B_i^{\eta} = 1$。在每一次迭代中(2.47)式对灵敏度值大于 λ_1（$B_i^{\eta} > 1$）的单元增加材料，小于 λ_1 的单元减少材料，最终达到最优条件。这个迭代格式在求解大规模拓扑优化问题时体现出了极高的效率。

2.2 数值不稳定性

在拓扑优化中，经常遇到数值不稳定性的问题。早在上世纪 90 年代 Chandrashekhar[34]就对有限元模型选择对拓扑优化稳定性的影响进行了研究。拓扑优化中的数值不稳定性主要表现为棋盘格式、网格依赖性和局部最优问题。这些问题同样会出现在散热结构的拓扑优化过程中。我们对此进行了一些研究。

2.2.1 数值不稳定性的表现

拓扑优化中首要的问题就是解的存在性问题。因为拓扑优化在一般情况下不容易得到全局最优解，甚至在大多数情况下无法获得可行解。因为对(2.41)式所表示的优化问题，在不改变容积 V 的情况下在设计域中引入更多的孔洞，目标函数 $C(x)$ 就会越小。如果不加以限制，当设计域的单元越多的时候，开孔就会越多越细，在有限的网格划分下无法得到一个最优解。这种现象在拓扑优化中也叫做网格依赖性[27]。

在拓扑优化中几种主要的数值不稳定表现如下：

(1) 棋盘格式。即固体和孔洞交错出现的格式，如图 2.6 所示；

(2) 网格依赖。对同一问题采用不同网格划分会得到不同的优化结果；

(3) 局部最优。采用不同参数时对同一优化问题会得到不同结果。

（a）

（b）

图 2. 6 棋盘格式

Jog 和 Haber[34]和 Sigmund 和 Petersson 研究了拓扑优化中数值不稳定的主要原因，他发现在低次单元构造的有限元网格中，棋盘的刚度值比现实中的值高，所以有限元求解过程中含有棋盘的结构比不含棋盘的刚度值高，容易被算法保留下来。这种一类问题被 Sigmund[27]归结为有限元求解过程中的收敛性问题。他主要研究了在二维拓扑优化中的棋盘格式和网格依赖性等问题。他在研究中发现采用 8 节点等高次单元可以消除数值不稳定性。在三维拓扑优化问题中，数值不稳定性更加突出。普遍采用的六面体 8 节点单元也存在刚度不精确的问题，如果采用高次节点如 24 节点单元，计算量和内存消耗成指数级增长，计算成本过高，所以需要寻找替代方法来解决这个问题。

2.2.2 消除数值不稳定性的方法

为了解决拓扑优化中的数值不稳定性问题和解的存在性问题，主要有两大类方法可供选择：

(1) 松弛化

从原理上讲，松弛法通过扩大了原问题的设计空间来搜索可行解。典型的例子就是 SIMP 法。它通过引入对称的半正定的弹性模量，把 0-1 问题转化为连续变量优化问题。使原问题中的弹性势能和密度之间建立起一种线性关系。这就给原问题的变量限定了一个有效边界。这个方法如今已经广泛用于各个领域的拓扑优化中，只要问题中的目标函数与 ρ 为线性关系，SIMP 法都适用。所以松弛化在线性散热结构拓扑优化中也是适用的。

(2) 增加约束

与松弛化相反，增加约束缩小了原问题的设计空间。通过引入额外的约束把原问题限制在一个可行域中，问题总能达到可行解。周长约束、梯度约束法都属于这一类方法。

一般来说，很难通过建立一个良好的迭代格式来直接得到最优解。要获得 0-1 拓扑优化问题的可行解，需要人为引入一些约束。主要的人工约束有如下四种[27]：周长约束、全局梯度约束、局部梯度约束和独立于网格的灵敏度过滤。前三种方法已经从理论上证明了它们能保证拓扑优化中解的存在性。第四种方法是基于启发式的算法。

周长约束能有效消除网格依赖性和棋盘格式。但是需要识别拓扑结构的边界，在二维中计算量还不大。转化为三维拓扑优化后周长约束变为表面积约束，三维拓扑结构的表面积计算复杂。并且约束值选择不当时可能会把最优解排除在解空间之外，所以周长约束应用较少，仅进行了一些理论性探索。

梯度约束法假设密度变量 x 连续，并允许中间变量的存在。通过约束局部或是全局梯度，保证了解的存在性。对密度的局部梯度约束如公式(2.49)。

$$\left|\frac{\partial\rho}{\partial x_e}\right| \le g \qquad (e=1,2) \tag{2.49}$$

通过局部梯度约束可以消除棋盘格式等数值不稳定性现象，因为棋盘格式的密度梯度非常大。但是采用这种方法对原优化问题引入了额外的 $2n$ 个约束，会大大增加运算时间。

拓扑优化中的灵敏度过滤算法源自于图像处理中的滤波技术。它是消除拓扑优化中数值不稳定性最经济有效的方法。

(2.50)式的过滤器通过对第 e 个单元的灵敏度和其周围的单元灵敏度进行加权平均以防密度的突变。虽然这个方法是完全启发式的算法，但是其优化结果与局部梯度约束产生的效果很类似，运算量却很小。

$$\frac{\partial C}{\partial X_e} = (X_e)^{-1}\frac{1}{\sum_{f=1}^{N}\hat{H}_f}\sum_{f=1}^{N}\hat{H}_f\, X_f\,\frac{\partial C}{\partial X_f} \tag{2.50}$$

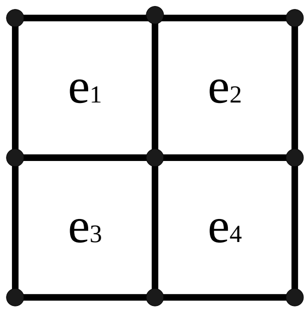
(2.50)式中的权重因子 $\hat{H}_f$ 的表达式如下：

$$\hat{H}_f = r_{\min} - dist(k,i), \{i \in N \mid dist(k,i) \le r_{\min}\} \tag{2.51}$$

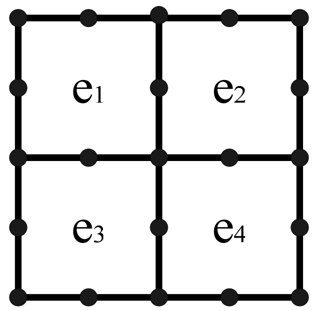
$dist(k,i)$ 定义为 i,k 两个单元中心点之间的距离，在过滤半径 $r_{\min}$ 外 $\hat{H}_f$ 的值为零。$r_{\min}=1.2$ 表示结构中杆件的最小半径不小于单元半径的 1.2 倍。所以为了获得更好的网格无关性，过滤半径的取值应该随着网格密度的增加和单元数的增多适当增加[35]。

使用这个方法的最大问题是到目前为止解的存在性还未得到证明，即无法证明用(2.50)式进行灵敏度过滤得到的优化结构是否是原问题的最优解。但是它不需要对原优化问题引入额外的约束，程序易于实现，效率也很高，所以应用最广泛。

前面提到，拓扑优化中的数值不稳定性主要是由于有限元模型不良造成的。为了消除数值不稳定性，可以使用 8 节点等高次单元，如图 2.7（b）。缺点是增加了问题的时间和空间复杂度。这在三维拓扑优化问题中更加突出，从一阶单元扩展到二阶单元，单元节点从 8 个增加到 24 个。当求解的问题规模稍大，整个设计域上的有限元计算量变得非常大。从计算的经济性上来讲，使用灵敏度过滤能更好的消除数值不稳定性。从后面的算例可以看出，在平面问题中使用同样的灵敏度过滤算法，8 节点的单元与 4 节点单元得到的优化结果差别非常细微。



（a）4节点单元



（b）8节点单元

图 2.7 低阶与高阶单元

由于我们的优化程序是采用 MATLAB 的 M 语言开发的，如果要改良有限元模型，程序的计算量增加很大。随着商业有限元软件扩展能力的提高。采用 ANSYS 的 APDL 等扩展语言，可以把拓扑优化整合到商业有限元软件中，利用有限元软件中成熟的分析模块进行有限元分析这个过程，将大大扩充拓扑优化的范围。

除了(2.50)式，其它一些图像处理中常用的过滤算法也在拓扑优化中表现出了各自的优点。(2.52)式是维纳滤波（wiener）的过滤算法。这种算法采用低通滤波对灰度图像中的噪声点进行处理，这些噪声点可以看作是拓扑优化中灵敏度或是密度发

生突变的地方，进行过滤后消除了突变。采用维纳滤波的算例将放在第 4 章。

$$b(n_1,n_2)=\mu+\frac{\sigma^2-\nu^2}{\sigma^2}(a(n_1,n_2)-\mu) \tag{2.52}$$

ν^2 是噪声的阈值，为一个可调参数，μ 和 σ^2 的表达式如(2.53)式所示：

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{1}{NM}\sum_{n_1,n_2\in\eta}a(n_1,n_2)\\ \sigma^2&=\frac{1}{NM}\sum_{n_1,n_2\in\eta}a^2(n_1,n_2)-\mu^2\end{aligned} \tag{2.53}$$

前两种滤波方法都是线性滤波算法。非线性滤波算法在灵敏度过滤中体现出了独特的特点。中值过滤是一个非线性滤波算子，用于去除图像中的“椒盐”噪声。它的优点在于去除噪声的同时能保留边界，这对于拓扑优化中的灵敏度过滤很有有利。在数值实验中，该灵敏度过滤算法在消除拓扑优化中数值不稳定性的同时保留了清晰的结构边界。

在三维散热结构拓扑优化的数值实验中，我们同样发现了类似的数值不稳定问题，并且比在二维结构优化中更突出。我们把二维图像处理中的过滤技术应用到了三维散热结构拓扑优化中，得出了较为有效的结果。然而三维散热结构拓扑优化中的数值稳定性还需要做进行进一步研究。

2.3 本章小结

本章对材料模型、热传导模型和密度法拓扑优化模型等散热结构拓扑优化基本理论进行了研究，并对不同优化方法进行了比较。随后研究了拓扑优化中的数值不稳定性问题。提出的数学模型具有数学表达式简洁，物理意义明确，便于数值计算和编程实现等优点。

3 改进的密度惩罚法散热结构拓扑优化模型

随着材料科学的发展，新型材料具有不同于传统材料的显著特性。特别是在结构中一些非各向同性材料的应用对结构优化提出了新的要求。典型的例子就是玻璃钢这一种各向异性材料在航空、风力发电系统等高科技领域得到了广泛应用。其新的材料特性对传统的设计和优化理论提出了挑战。拓扑优化作为一种重要的快速原型设计手段也同样面临着理论的突破。在散热控制中，厂商为了减小产品中多个热源间的相互干扰开发了各向异性导热材料。对此散热结构优化问题同样面临着新的挑战。

不同于前文把工程优化问题分为尺度、形状和拓扑优化的传统分类法，对各向异性材料的拓扑优化，还需考虑材料的方向角优化问题[36]。Pedersen[37]研究了密度惩罚法在非线性各向异性材料拓扑优化中的应用，对本章的研究提供了很好的启发。针对散热结构中的拓扑优化问题，提出了改进的密度惩罚法模型。该模型能同时解决拓扑与角度优化问题。

3.1 数学模型

SIMP 法只适用于各向同性材料。实际上，当今工程中使用的一些材料已具有各向异性的特性。比如玻璃纤维制品。玻璃纤维-聚酯复合材料在沿纤维方向的弹性模量比垂直纤维方向的弹性模量高 5 倍以上。类似的，为了减小电子产品中多个芯片发热的相互影响，GrafTech 公司开发了各向异性导热材料，该材料在某方向上的导热率远大于其它方向。该材料已用于手机和笔记本等高集成度的电子产品中，对散热器布局提出高了要求。

普遍的热传导控制方程满足拉普拉斯方程，各向异性材料稳态热传导控制方程为：

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q_v = 0 \tag{3.1}$$

其中导热率 $\lambda_x \neq \lambda_y \neq \lambda_z$。对于这样的材料模型，材料布局优化必须考虑方向。因为其方向角θ会影响到结构的散热特性。为此在拓扑优化中引入材料方向角θ作为设计变量。于是拓扑优化转化为含密度x和方向角θ两种变量的优化问题。其数学模型可以表示为：

$$\begin{cases} Minimize: C(x,\theta) \\ s.t.: \int_{\Omega} \rho(x)dx = V \end{cases} \tag{3.2}$$

式(3.2)中的θ为一个无约束的变量，而密度仍然受到体积约束。

在密度模型中引入角度变量后，导热材料模型变为如下形式：

$$\lambda(x,\theta) = \rho(x)^p \lambda_0\left(\theta\right) \tag{3.3}$$

将(3.3)式离散化，得到单元的刚度矩阵形式：

$$k_e(x_e,\theta_e) = \rho(x_e)^p k\left(\theta_e\right) \tag{3.4}$$

把设计域划分成含有 N 个单元的有限元网格。模型中含有x_i和θ_i $\left(i=1,2,...,N\right)$共 2N 个设计变量。将材料模型(3.4)式代入(2.41)式，则原优化问题可转化为如下的离散格式：

$$\begin{cases} Minimize: C = T^t KT = \sum_{e=1}^{n} (x_e)^p \mathbf{t}_e^T k_e\left(\theta_e\right)\mathbf{t}_e \\ Subjectto: \sum_{e=1}^{n} V_e x_e = V \\ \qquad KT = Q \end{cases} \tag{3.5}$$

其中的$k_e\left(\theta_e\right)$表示按θ_e旋转后的第 e 个单元导热矩阵。(3.5)式描述了一个更加通用的优化模型，它同时考虑了材料的导热率和方向的变化。本文第二章中提出的各向同性材料模型可以看作是此模型不考虑方向角的特例。单元模型见图 3.1 所示。

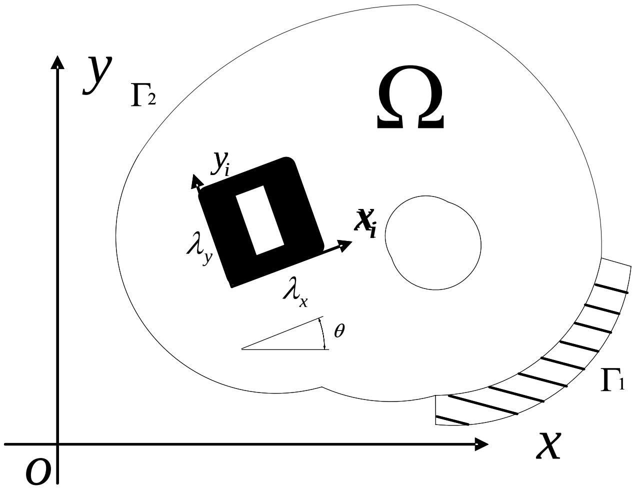


图 3.1 单元的材料方向角

图 3.1 中表示的黑色单元为导热区域Ω中的第 e 个单元，x 表示单元的密度。θ 表示单元的局部坐标系在全局坐标系中的旋转角度。λ_x 和 λ_x 分别表示预先给定的材料在 x 和 y 方向的导热率。

3.2 优化准则

在上一节我们讨论了改进的密度惩罚法数学模型，这个模型含有密度 ρ 和方向角 θ 两个设计变量。第二章详细讨论过的密度优化准则法可以直接应用于这一节的优化模型。方向角 θ 的优化准则法在这一节进行讨论。

受到 Qing[38]把弹性体结构优化理论引入散热结构优化的启发。我们自然想到在材料方向角优化问题中如何借鉴弹性体结构的方向角优化方法。而前者已经有许多学者进行了研究，它本身就是均匀化方法中的一个重要组成部分。Thomsen[39]使用均匀化方法对复合材刚度最大化拓扑优化问题进行了研究。在复合材料模型中引入了弹性模量与方向角作为变量。对材料的异弹性轴的方向角提出了一种全局优化准则法。目前常用的弹性体结构材料方向角优化准则主要有如下两种：

主应变法（Pederson 方法）

主应变法假设应变不随着方向角的改变而变化，结构柔度对材料方向角的灵敏度如下：

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(\varepsilon_e^T K \varepsilon_e) \tag{3.6}$$

其中 $\varepsilon_e^T K \varepsilon_e$ 代表第 e 个单胞中储存的应变能。最后赋予材料的轴线与主应变的轴线重合，能给予系统稳态的能量密度。

主应力法

把主应力方向作为最优材料方向的思想由 Suzuki 和 Kikuchi 提出[40]，他们的思想是在一个恒定的应力场中，把主应力的方向作为材料的方向角可以获得最大的结构刚度。在主应力法中，假设主应力不随方向角的改变而变化，则结构柔度对方向角的灵敏度可表示成如下形式：

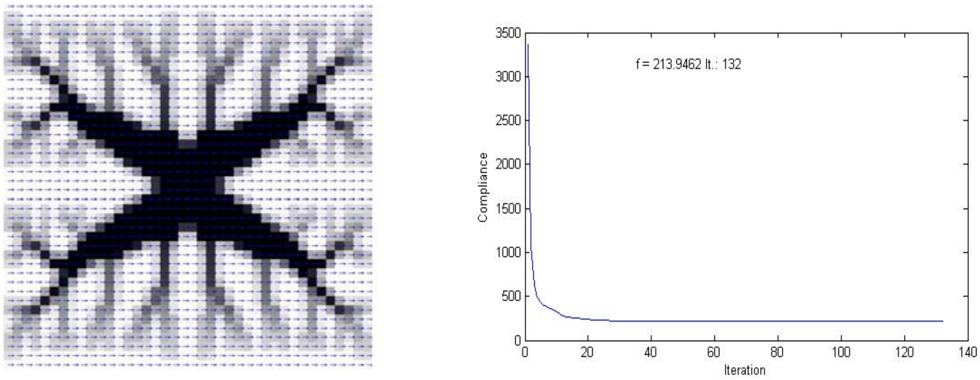
$$\frac{\partial C}{\partial \theta_e} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(\sigma_e^T S \sigma_e) \tag{3.7}$$

(3.7)式中应变能 $\sigma_e^T S \sigma_e$ 可以表示成应变与柔度矩阵的乘积形式。求解(3.7)式，可以得出与主应变方向角一致的方向角。

从数值实验中发现，主应力法比较适合于运动学系统拓扑优化，如 MEMS 系统；应变法多用于静态系统，例如柔性体结构优化。但是两种方法都存在局限。因为在两种方法中，目标函数都是方向角的隐式函数，并假设系统的应变能不随材料方向角的改变而变化，但实际上它会随着方向角的变化而变化。

为了在散热结构拓扑优化中引入材料方向角，可以参考弹性体结构的材料方向角优化方法。但是由于两种物理问题本质有区别。弹性体结构的应力场是一个向量场，而温度不象应力和应变具有方向性，因此散热结构的温度场是标量场。所以无论是主应力法还是主应变法都无法直接推广到散热结构的方向角优化中去。为了把方向角优化引入到传热学领域，需要寻找替代方法。

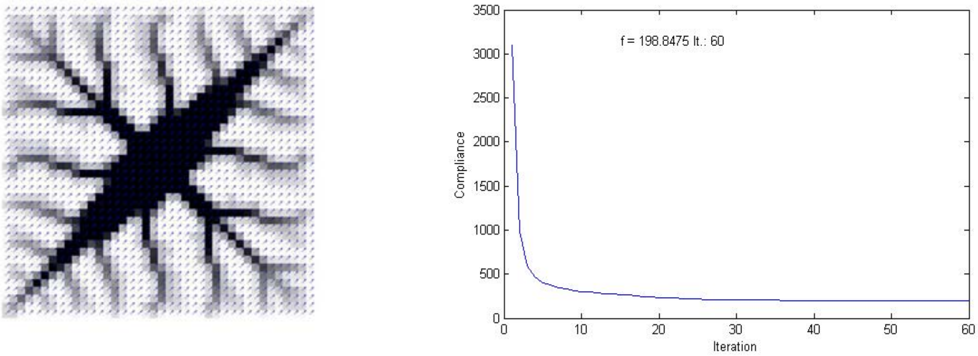
下面根据温度场导出散热结构的方向角优化准则。为了研究各向异性材料的方向角改变时对优化过程产生的影响，我们进行了一个简单的数值实验。先考虑最简单的情况，即所有单元具有相同的方向角的情况。针对同一设计域，对相同边界条件和载荷下的拓扑优化问题进行研究，方向角分别选取 0 和 $\pi/4$。



（a） （b）

图 3.2 方向角为 0 的各向异性材料拓扑优化

当所有单元方向角为 0 的时候，优化程序经过 132 次迭代后得到如图 3.2（a）所示的拓扑形状，目标函数值为 213.9462。



（a） （b）

图 3.3 方向角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的各向异性材料拓扑优化

在相同条件下，当材料的方向角为 $\pi/4$ 的时候，经过 60 次迭代后得到如图 3.3（a）所示的拓扑形状，目标函数值为 198.38475。从以上比较可以看出，同一各向异性导热材料模型在方向角不同时，不仅仅影响目标函数的收敛结果，而且对收敛速度也有很大影响。为此，有必要引入材料方向角 θ 作为设计变量。这样的模型对深入研究热结构拓扑优化问题中的材料模型、改进优化结果是非常有意义的。

为了简化问题，假设在优化中密度和方向角互不耦合，在每一次迭代中密度和方向角共用有限元分析的结果，两类变量根据各自的优化准则交替进行迭代演化。

问题的关键在于如何对设计变量 θ 进行迭代更新才能得到最优的材料方向角。在各向异性材料中，材料单胞的方向角是一个非常重要的无约束设计变量。而单胞的

密度则是一个受全局容积约束的设计变量。对于含有方向角的目标函数(3.8)式：

$$C\left(x,\theta\right)=\int_{\Omega}K_{ij}\left(\theta\right)\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}d\Omega \tag{3.8}$$

为了获得最优的方向角，需要将目标函数对θ求偏导：

$$\frac{\partial C\left(x,\theta\right)}{\partial\theta}=-\int_{\Omega}\left[\frac{\partial K_{ij}\left(\theta\right)}{\partial\theta}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}+K_{ij}\left(\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right]\mathrm{d}\Omega \tag{3.9}$$

假设稳态的温度场与角度无关，令(3.9)式等于 0，得到最优化方向角的条件：

$$\frac{\partial C\left(x,\theta\right)}{\partial\theta}=-\int_{\Omega}\frac{\partial K_{ij}\left(\theta\right)}{\partial\theta}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{3.10}$$

对于单个单元，可以把(3.10)写为：

$$\frac{\partial C\left(x,\theta\right)}{\partial\theta_e}=-\int_{\Omega_e}\frac{\partial K_{ij}\left(\theta\right)}{\partial\theta_e}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}\mathrm{d}\Omega_e=0 \tag{3.11}$$

其中Ω_e表示第e个单元的设计域。

如果网格划分的足够细，则可以假设在每个单元中的散热弱度是恒定的。因而有：

$$\frac{\partial C\left(x,\theta\right)}{\partial\theta_e}=-\mathbf{t}_e\frac{\partial K_{ij}\left(\theta\right)}{\partial\theta_e}\mathbf{t}_e\mathrm{A}_e=0 \tag{3.12}$$

式中A_e是把(3.11)式积分完成后得到的单元面积，在我们的例子中，单元大小是一定的，单元面积是一个常数。

$$\frac{\partial C}{\partial\theta_e}=-\mathbf{t}_e\frac{\partial}{\partial\theta}(K\left(\theta\right)\mathbf{t}_e)^T=0 \tag{3.13}$$

最优方向角满足(3.13)式的偏微分方程。但对(3.13)直接求解比较困难，为此提出基于温度梯度的角度优化准则算法。根据热流公式(3.14)式：

$$q=-\lambda\nabla t \tag{3.14}$$

要使通过单元的热流最大，则材料的方向要与温度梯度的方向一致。因此，我们可以得到如下的启发式迭代准则：材料方向角与温度场梯度方向重合的时候，系统散热效果最好，如公式(3.15)所示：

$$\theta=-\lambda\nabla t \tag{3.15}$$

在第 4 章的数值算例中，我们将对该优化准则法进行数值实验，证明提出的准则能有效降低目标函数值，提高散热结构的散热效能。

得到了最优材料方向角，就可以根据角度更新单元刚度矩阵。根据 Hassani[41] 提出的二维弹性体结构拓扑优化的材料模型可以导出散热结构的材料模型。

$$K = K(\lambda_x, \lambda_y, \theta) \tag{3.16}$$

λ_x，λ_y 和 θ 分别表示材料导热率和方向角。

材料单元热导率矩阵可以表示如下：

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_2}^{y_4} \mathbf{B}^T \mathbf{R}(\theta_e)^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{R}(\theta_e) \mathrm{B} dxdy \tag{3.17}$$

对材料单元的旋转可由下式完成：

$$[\boldsymbol{\lambda}_R] = \mathbf{R}(\theta)^T [\boldsymbol{\lambda}] \mathbf{R}(\theta) \tag{3.18}$$

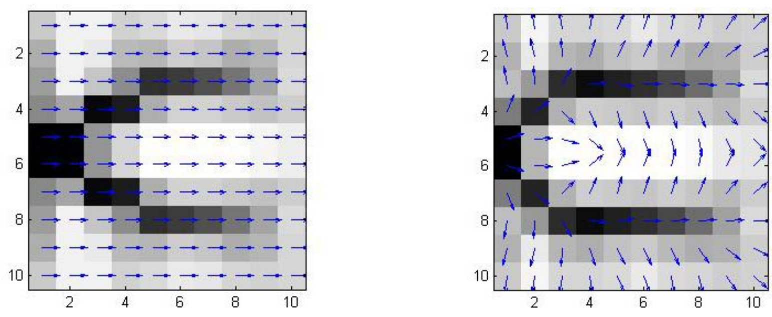
$\boldsymbol{\lambda}_R$ 是旋转后的导热矩阵，$R(\theta)$ 为一通用的坐标旋转矩阵。

二维旋转矩阵的基本表达式为：

$$[\mathbf{R}(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

θ 为单元局部坐标系在全局坐标系中的轴偏转角，其法向为 $\vec{n}$。当 $\vec{n}=\overrightarrow{\nabla \mathrm{T}}$ 的时候，即材料的热导率最大的方向顺应梯度方向时，热流传导效率最高，散热效果最好。反之当材料热导率小的方向与温度梯度重合时，将造成更大的热阻，影响热传导效率。

若利用有限元方法求解出各向异性导热材料区域的温度场，进而根据温度场进行设计变量（包括密度与角度）的迭代更新，则最终就可以完成拓扑与角度的混合优化过程。优化算例比较见图 3.4。



(a)目标函数值 5.9673　　(b)目标函数值 4.5216

图 3.4 不含方向角变量的优化和带方向角优化的对比

图 3.4（a）为单纯的各向异性材料拓扑优化结果，所有单元角度都设为 0。图 3.4（b）为拓扑与角度混合优化的结果。以上两个优化算例中的边界条件与载荷相同。从图中可以看出，加入方向角优化后，目标函数比单纯的拓扑优化下降了 1/4 左右。可见我们提出的优化准则对降低目标函数值、提升散热效果有显著影响。

3.3 多材料模型

随着密度法拓扑优化理论的发展，除了 SIMP 法之外还发展起来了一些其它的材料密度插值模型。这些插值模型对特定的问题都具有理论上或是计算上的优势。如 Thomsen[39]采用均匀化方法研究了拓扑结构中包含两种材料的优化问题。他采用二阶的复合材料模型，能有效处理设计域中两种材料的分布问题。Poulsen[42]使用小波函数构造了密度函数，用空间中该点的频率来表示密度，取得了一些研究成果。Stolpe[43]提出了一种针对最小化柔度优化问题的多材料插值函数模型。在这些新兴的插值模型中最著名的是 Hashin-Shtrikman bounds 模型。

Hashin-Shtrikman bounds 模型是针对两相材料的，它利用给定的几种材料来构造复合材料，使材料的杨氏模量和泊松比都随密度改变。而 SIMP 模型中泊松比是固定的，只有杨氏模量随密度改变。所以 Hashin-Shtrikman bounds 模型对材料的描述比 SIMP 法更准确。根据这个模型对于含有两种材料的区域，单元的弹性模量可以用(3.20)式表示：

$$E_{ij}(x_e) = x_e^p E_{ij}^1 + (1 - x_e)^p E_{ij}^2 \tag{3.20}$$

E_{ij}^1 和 E_{ij}^2 分别表示两种材料的弹性模量。这个模型在两相材料拓扑优化中取得了一定成功。但缺点是当两种材料的杨氏模量接近但是泊松比不同的时候会产生一些奇怪的结果。而且由此模型得到的灵敏度是一个非线性函数，在拓扑优化迭代过程中会产生不稳定性，所以为了避开其缺点，可以采用权重法来调整两种材料的比例。

在弹性体结构优化中，空白区域不传递力，其密度设为 0，单一材料模型就可以完整描述设计域中的材料。而在含有各向异性材料的热结构拓扑优化中，使用多材料模型非常必要。按照第一节的模型，有材料的区域导热，空白的区域同样传递热量，不过其热阻要大得多。假设两种材料分别为铜和空气，铜的导热率为 $398W/(m \bullet k)$ 是空气（$0.0259W/(m \bullet k)$）的一万五千倍，铜作为散热结构的材料，周围分布着空气。

在优化过程中，空白区域视为各向同性绝热材料（如空气）。因此，结构中就会存在两种材料，一种是作为设计材料的各向异性导热材料，另一种为各向同性的大热阻材料。材料模型选择(3.20)式的模型，也可以采用(3.21)式的模型。

$$k_e = \begin{cases} k_1^R & if \quad x_e > \rho_L \\ k_2 & if \quad x_e \le \rho_L \end{cases} \tag{3.21}$$

当单元密度 x_e 大于给定密度值 ρ_L 时，单元刚度矩阵为公式(3.21)中的旋转后的材料导热矩阵 k^R。当 x_e 小于 ρ_L 时，单元刚度矩阵选择各向同性材料导热矩阵。式(3.21)的优点在于节省计算量，当密度小于 ρ_L 时，单元不用计算旋转后的单元刚度矩阵。因此在节省计算量方面具有明显优势。但这个模型使目标函数不连续，灵敏度也不连续，特别是当 ρ_L 选择不当时，目标函数会出现剧烈震荡，甚至不收敛。为此可以采用 Qing[38]在 拓扑优化中使用的模型：

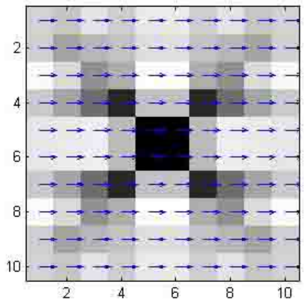
$$k_e = (1-\rho_e)k_1^R + \rho_e k_2 \tag{3.22}$$

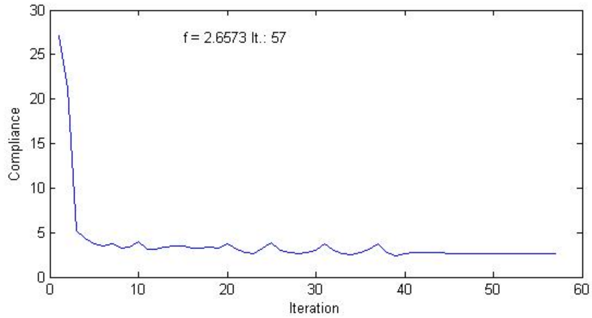
(3.22)式是线性插值模型。其稳定性比(3.21)高，但缺点是计算量比较大，需要计算所有单元旋转后的刚度矩阵。

考虑多材料模型时，插值函数的选择非常重要。如果插值函数选择不当，得到的最优拓扑结构中就可能存在大量具有数学意义却没有真实物理含义的材料。插值函数还会对目标函数的收敛性造成影响。

3.4 数值不稳定性

直接引入材料的方向角变量并采用两种材料模型后，目标函数收敛过程中发生了较大的震荡，对收敛性造成了影响。收敛情况如图 3.5（b）所示，在收敛过程后期，目标函数值出现了比较大的震荡。





（a）　　　　　　　　　　　　（b）

图 3.5 迭代过程中的目标函数收敛性

震荡主要是插值函数引起的。使用多相材料模型后，改变了插值函数，目标函数的连续性和灵敏度的性质也发生了改变，求解过程中难以到达解空间。对于公式(3.20)的材料插值模型，目标函数变为：

$$Minimize: C = T^t KT = \sum_{e=1}^{n} \mathbf{t}_e^T \left(x_e^p k_e^1 \left(\theta_e\right) + (1-x_e)^p k_e^2 \right) \mathbf{t}_e \tag{3.23}$$

假设材料的刚度矩阵与密度变量无关，对目标函数求密度 x 的偏导，得到如下的灵敏度：

$$\frac{\partial C(X)}{\partial x} = -\sum_{e=1}^{n} \mathbf{t}_e^T [p \bullet x_e^{(p-1)} k_e^1 (\theta) - p(1-x_e)^{(p-1)} k_e^2] \mathbf{t}_e \tag{3.24}$$

采用(3.24)式的灵敏度公式，优化过程中会出现剧烈震荡。当采用(3.21)式的材料模型时，由于刚度矩阵不是根据密度连续变化的，所以灵敏度不连续不可微，为了避免由于灵敏度不连续引入的扰动。目标函数的灵敏度可采用原始灵敏度：

$$\frac{\partial C(X)}{\partial x} = -\sum_{e=1}^{n} p \bullet x_e^{(p-1)} T_e^T [k_e^1 (\theta)] T_e \tag{3.25}$$

当 ρ_L 取较小值，即各向异性材料占优的时候，(3.25)式可近似看作目标函数的灵敏度，这样函数收敛性能得到保证。方向角优化中的数值不稳定性比单纯的密度优化在原理和表现上都要复杂得多，需要进一步研究。

3.5 本章小结

本章提出了改进的密度惩罚法模型，研究了该模型在各向异性材料散热结构拓

扑优化中的应用。提出了材料方向角优化的准则算法，并研究了其中的收敛性问题。该方法能同时对拓扑和角度进行混合优化，对降低目标函数值产生了很好的效果，但是数值稳定性还有待于提高。

4 SIMP 法在散热结构拓扑优化中的应用

这一章中，我们首先叙述算法的具体实现过程，然后进行数值实验并对实验结果进行了分析。

34.1 算法实现

在前面两章，我们讨论了散热结果拓扑优化的数学模型。在这一章我们讨论如何在 MATLAB 下实现算法。

在 MATLAB 环境下，我们参考 Sigmund[7]编程实现了散热结构拓扑优化算法，算法流程如图 4.1 所示：

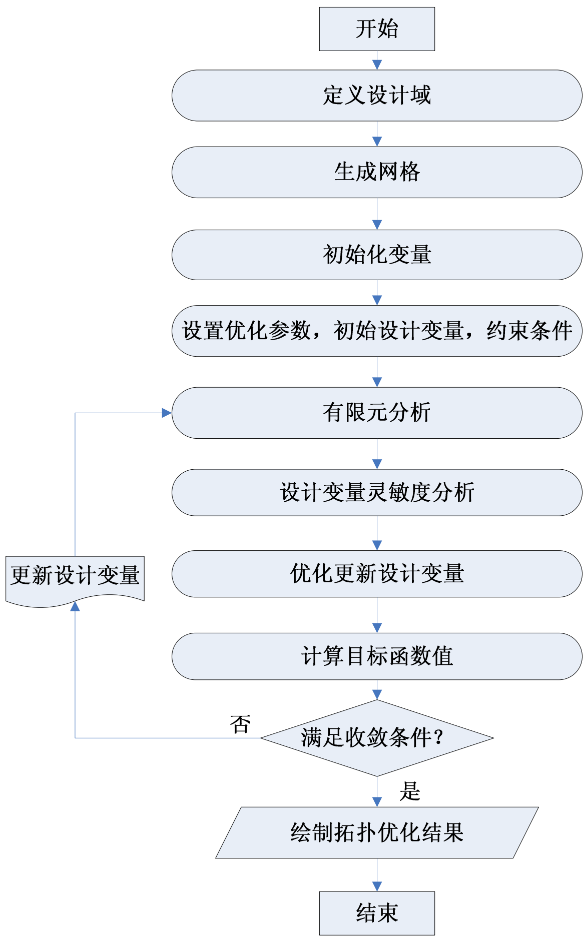


图 4. 1 拓扑优化流程

(1) 定义设计域。为了方便计算，设计域选择矩形区域（二维）或是立方体（三维）。通过改变单元数量与单元尺度，整个设计域的尺度可以调整。

(2) 生成有限元网格，对设计区域进行离散化。在二维算例中选择 4 节点矩形单元，三维算例采用了正 6 面体单元。

(3) 初始化设计变量（如密度 x 和方向角 θ），为了减少迭代次数和避免局部最优，选择一个中间值作为密度 x 的初始值，选择 0 为方向角 θ 初始值。

(4) 设置优化参数，初始设计变量。根据要解决的具体问题，定义边界条件。

(5) 根据有限元模型，建立单元导热矩阵，组装总体刚度矩阵和右端载荷向量。根据边界条件和整体导热矩阵，进行有限元分析，得到整个设计域上的温度场分布。

(6) 根据温度场，计算目标函数值的灵敏度值。

(7) 更新设计变量，由于设计变量受到体积约束的拉格朗日乘子的影响，为此，首先更新密度变量，随后计算每个单元中心的温度梯度，更新角度变量。

(8) 计算目标函数值，根据每个单元的目标函数值计算总体目标函数值。

(9) 检查目标函数是否已达到收敛条件，如果满足条件就继续下一步，如果没有的话返回第（5）步。

(10) 后处理，根据更新后的设计变量（x，θ）生成可视化的图像。

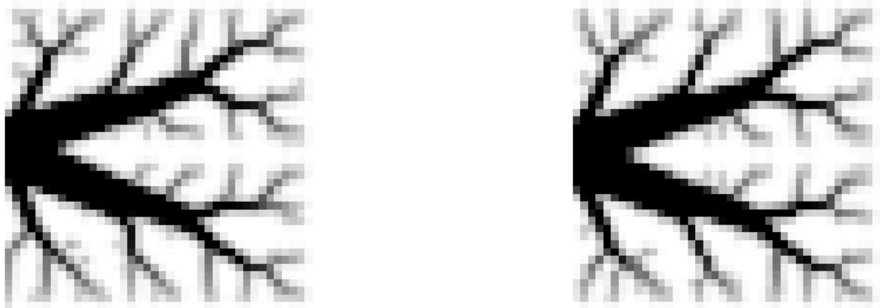
程序使用 MATLAB 语言编制。二维优化程序由一个程序构成，包含一个主函数和 4 个主要的子函数，分别实现密度和角度的更新、灵敏度过滤和单元刚度矩阵的构建。三维拓扑优化程序由一个主函数和一个外部函数组成，外部函数主要用于后处理，显示三维拓扑形状。

4.2 二维拓扑优化数值算例

为了验证算法的有效性，使用拓扑优化程序进行了多种典型散热结构的拓扑优化数值实验。下面对典型数值试验结果进行分析。

首先以二维的例子来比较高阶与低阶单元对优化结果的影响。体积约束定为 0.3，传热系数选择 $1W/(m^2 \bullet K)$ 的假想材料。设计域划分为 1600 个单元。每个单元含 4 个节点，整个设计域含有 6400 个节点。优化过程共经历 154 次迭代后达到收敛条件，耗时 101.6 秒。而采用 8 节点单元，同样划分为 1600 个单元，则设计域上共有 12800 个节点。优化过程共经历了 106 次迭代，总共耗时 135.4s。可见，采用高

阶单元，由于其数值上更稳定，收敛过程比较平稳，经历的迭代次数更少，但是花费的计算时间比较长。而采用低阶的单元的优化过程在迭代后期出现了一些震荡，影响了目标函数的收敛速度。因此经历了更多次数的迭代才获得最优解，但是整体计算时间更短。从图 4.2 的最终的优化结果上来看，采用高阶的有限单元得到的拓扑和低阶的并没有太大差别，其中的数值不稳定性也可以通过其他更加经济的方式加以限制。使用高次单元，潜在的有限元计算量过大，限制了问题的求解规模。这在三维拓扑优化中更加突出。综合效率算法效率与计算成本，在所有算例中均采用了低次单元。



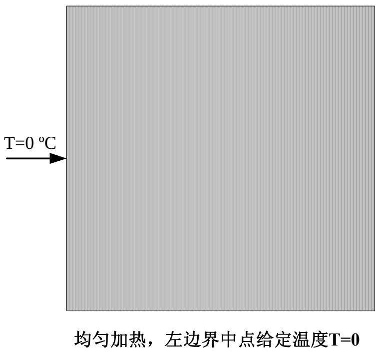
（a）4节点　　　　（b）8节点

图 4.2 不同单元优化结果对比

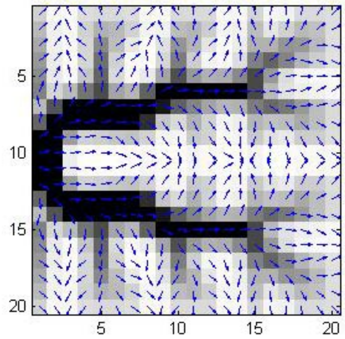
4.2.1 二维散热模型 1

散热模型 1 体现了拓扑形状与角度混合优化策略的效果。单元采用 4 节点的矩形单元，设定最优结构的体积占设计域总体积的 30%。材料选择传热系数 $\lambda_x = 5W/(m^2 \times K), \lambda_y = 1W/(m^2 \times K)$ 的假想材料。为了保证求解过程不发生数值奇异性，设定材料的密度下限为 $0.001\left(kg/m^3\right)$。材料的插值模型采用(3.21)式并设定 $\rho_L = 0.1kg/m^3$。ρ_L 选择较小值，使设计域中大部分充满各向异性材料以提高计算稳定性。设计域为正方形，转化为离散的有限元模型后含有 400 个单元。每个单元内部的材料特性是唯一的，由单元的密度和角度决定。

算例 1 中载荷固定在设计域的左端中心点，如图 4.3（a），每个节点设置热流 $q = 0.01\left(W/m^2\right)$。优化结果见图 4.3（b）。



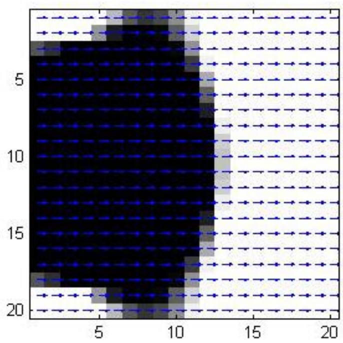
(a) 初始化设置



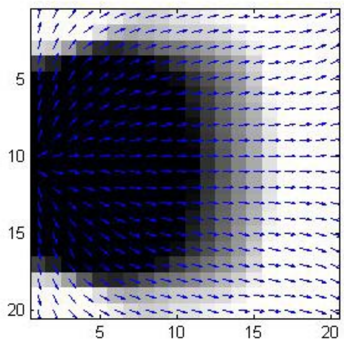
(b) 优化结果

图 4.3 散热模型 1

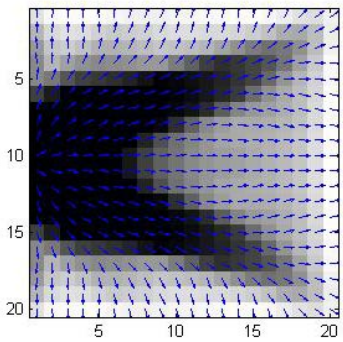
图 4.4 是算例 1 的拓扑优化演化过程中的关键步骤。



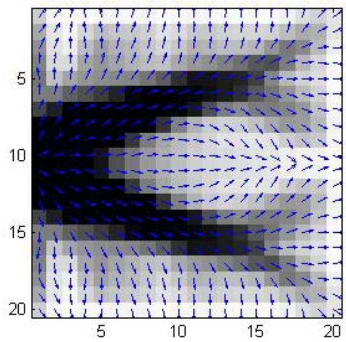
（a）



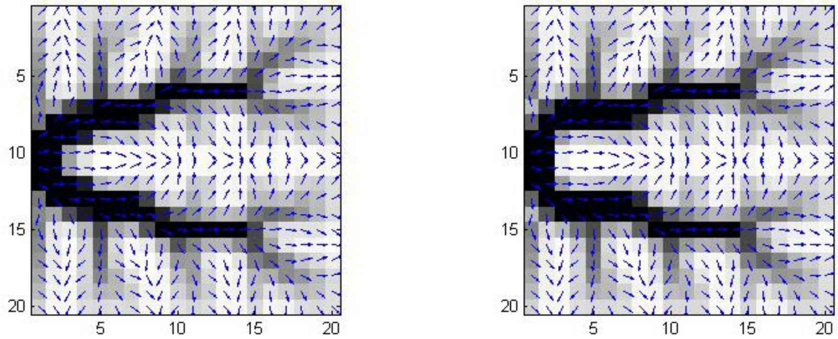
(b)



(c)



(d)

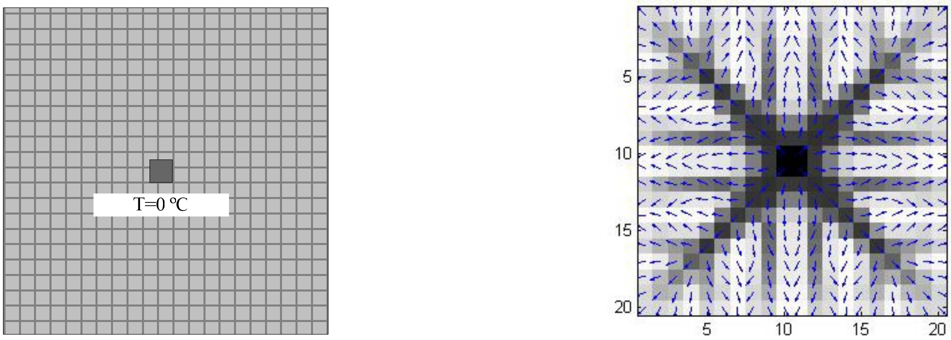


（e） (f)

图 4. 4 散热模型 1 演化过程

4.2.2 二维散热模型 2

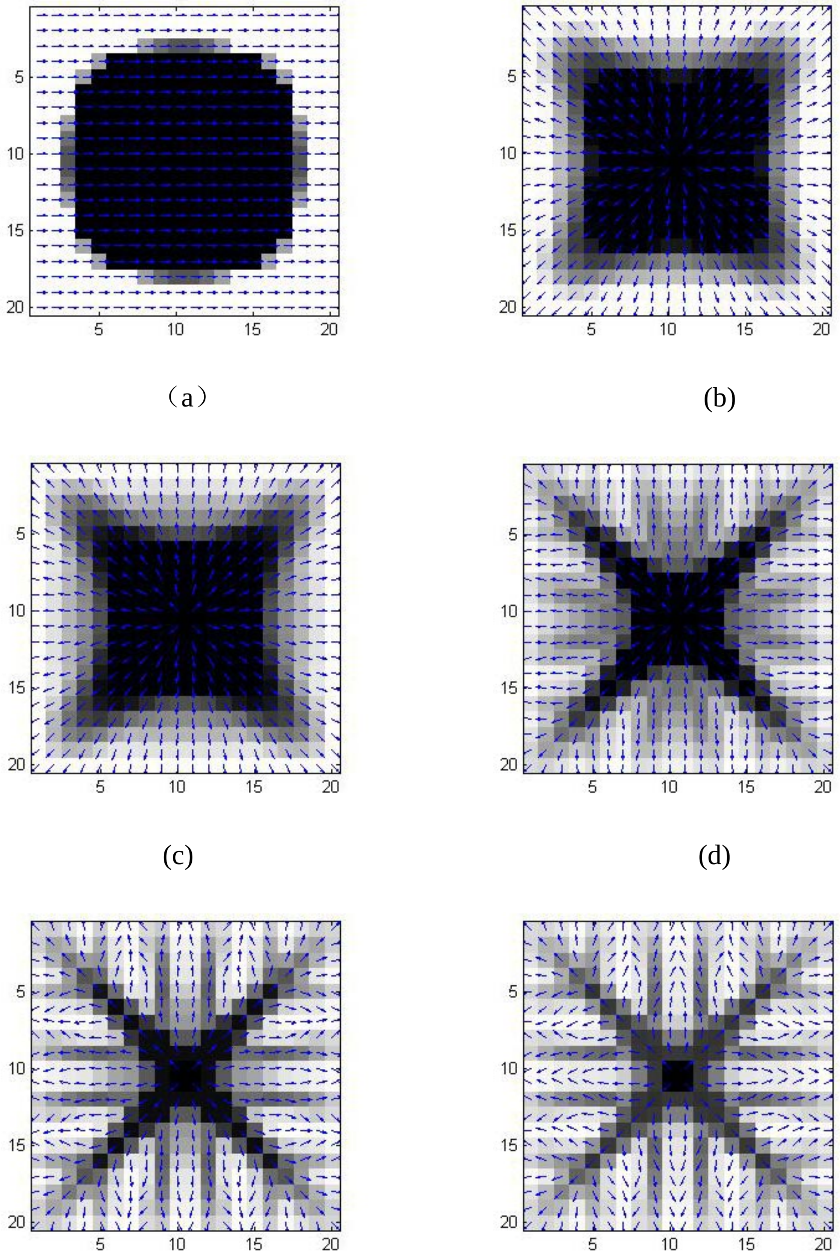
算例 2 的设计域单元划分与算例 1 相同。但边界条件的设置不同。载荷固定设计域的中心点处。



(a) 初始化设置 (b) 优化结果

图 4. 5 散热模型 2

图 4.6 是算例 2 拓扑优化演化过程中的关键步骤。

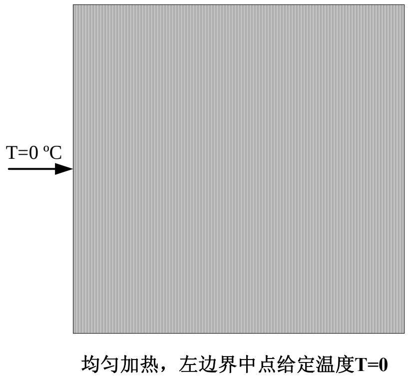


（a） (b) (c) (d) （e） (f)

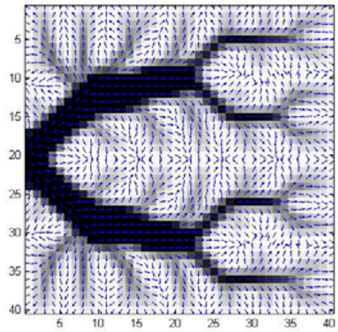
图 4.6 散热模型 2 演化过程

4.2.3 二维散热模型 3

扩大设计域到为 1600 个单元，固定左端$T=0^{\circ}\mathrm{C}$。选择载荷在左端中点处。



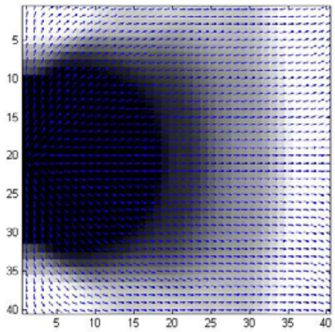
（a）初始化设置



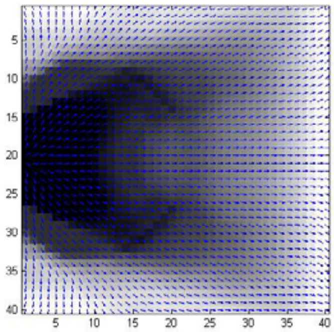
（b）优化结果

图 4.7 散热模型 2

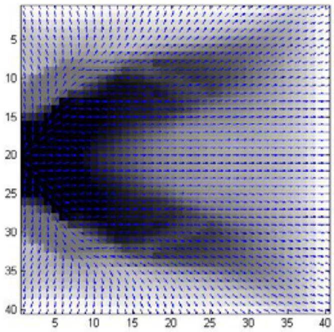
图 4.8 是算例 3 拓扑优化演化过程中的关键步骤。



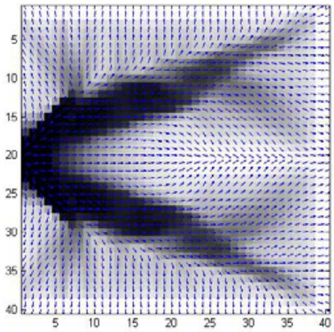
（a）



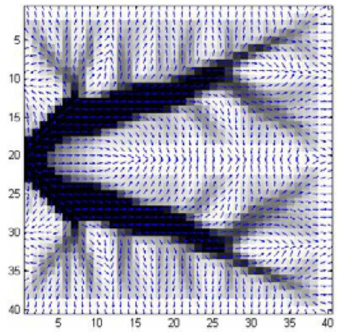
(b)



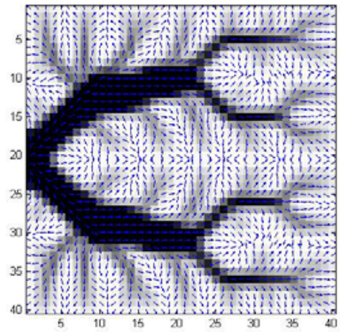
(c)



(d)



（e）

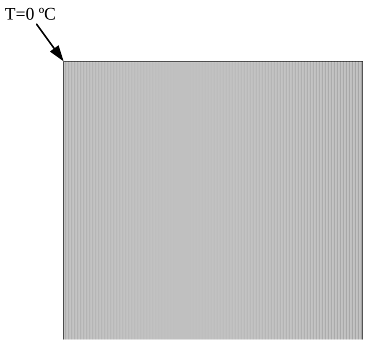


(f)

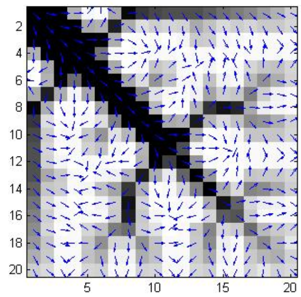
图 4.8 散热模型 3 演化过程

4.2.4 二维散热模型 4

扩大设计域到 1600 个单元，固定一个顶点 $T=0^{\circ}C$ ºC 选择载荷在左端中点处。



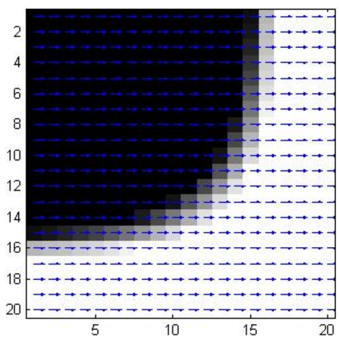
（a）初始化设置



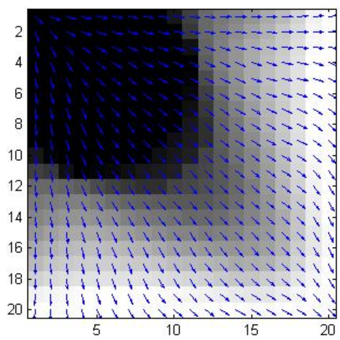
（b）优化结果

图 4.9 散热模型 2

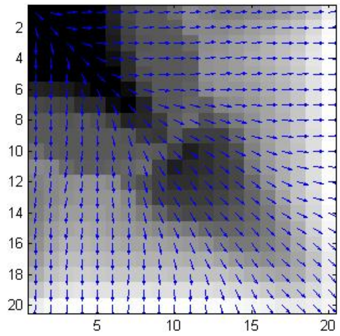
图 4.10 是算例 4 拓扑优化演化过程中的关键步骤。



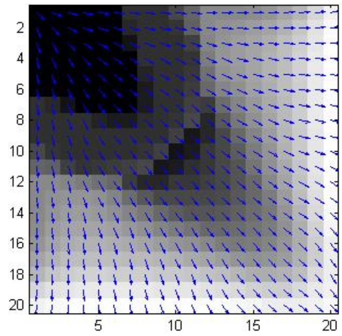
（a）



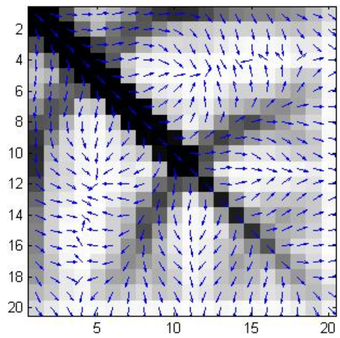
(b)



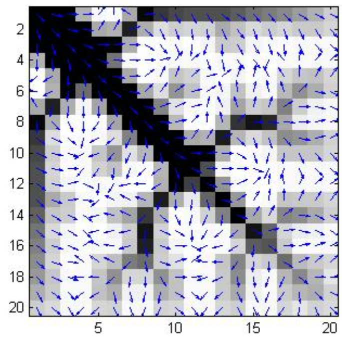
(c)



(d)



（e）



(f)

图 4.10 散热模型 3 演化过程

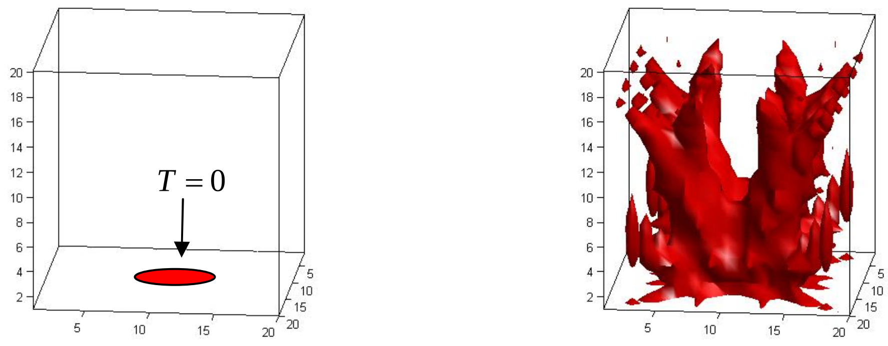
从优化结果看，在优化算法中引入材料方向角变量后，目标函数值下降明显，这意味着拓扑结构散热能力显著提高。

4.3 三维拓扑优化数值算例

接下来是三维散热结构拓扑优化算例。采用密度惩罚法模型，设定最优结构体积为设计域总体积的 30%。灵敏度过滤采用(2.51)式的三维形式，选择过滤半径为 1.2 个单胞尺寸。材料传热系数为 $\lambda = 1W/(m^2 \times K)$ 的假想材料。设定材料的密度下限为 0.001 $\left(kg/m^3\right)$。设计域为正六面体，转化为有限元模型后含有 8000 个单元。每个单元内部的材料导热特性是唯一的，由单元的密度决定。为了计算的经济性，每个单元采用 8 节点的低阶单元。

4.3.1 三维散热模型 1

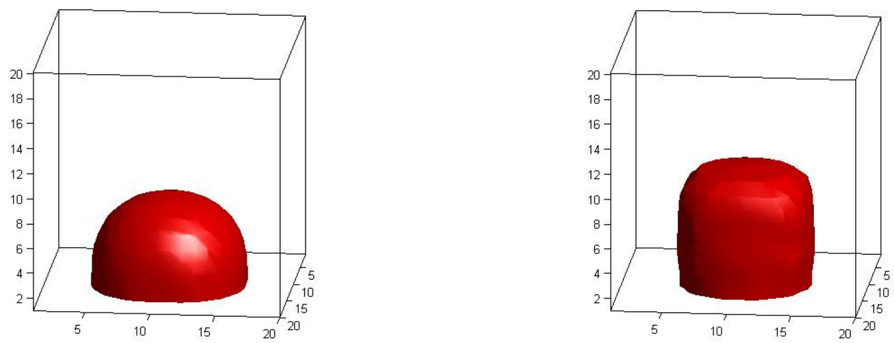
算例 1 中边界条件设置如图 4.11（a）所示，xy 平面中心处设置 $T=0^{\circ}\mathrm{C}$，其余单元的各个节点均匀加热 $q=0.01W/m^{2}\cdot K$。



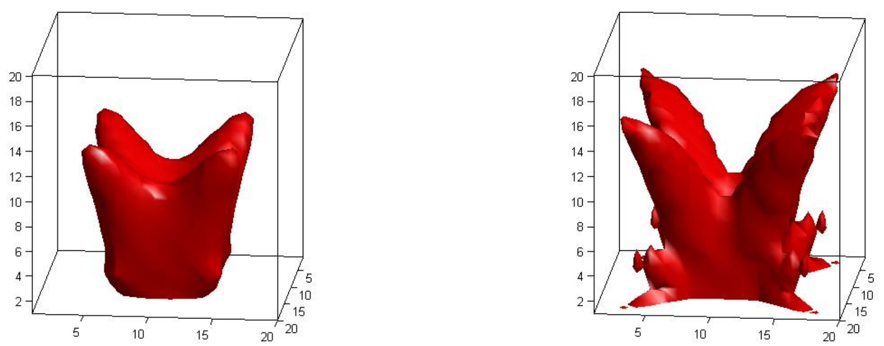
（a）初始化设置　　　　（b）优化结果

图 4.11 三维散热模型 1

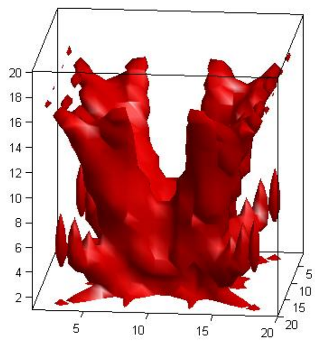
算例 1 优化过程的关键步骤见图 4.12：

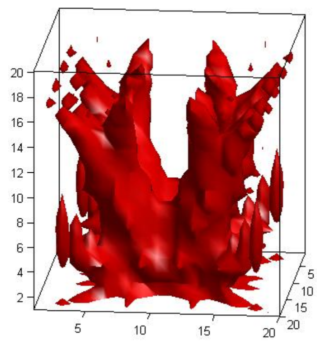


（a）　　　　(b)



(c) (d)



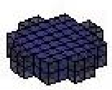


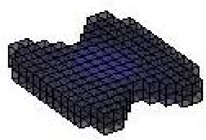
(e) (f)

图 4.12　三维散热拓扑优化演化过程

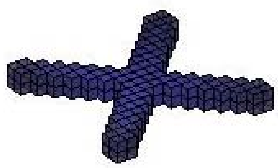
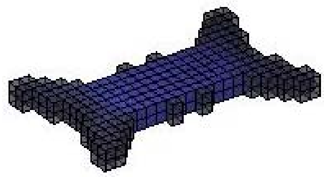
4.3.2 三维散热模型 2

为了比较不同材料模型对拓扑优化的影响，我们在相同边界条件和载荷作用下，分别采用各向同性材料模型和各向异性材料模型完成拓扑优化。图 4.13（a1）到（a6）中的优化采用各向同性材料 $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_x = 1W/m^2 \cdot K$，图 4.13（b1）到（b6）中的优化采用各向异性材料，$\lambda_x = 51W/m^2 \cdot K, \lambda_y = \lambda_x = 1W/m^2 \cdot K$。求解域划分为 1800 个单元，中心加载。优化过程的关键步骤：

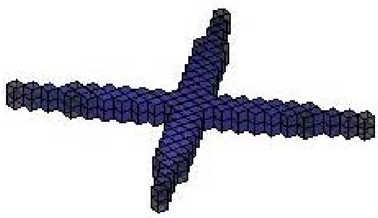
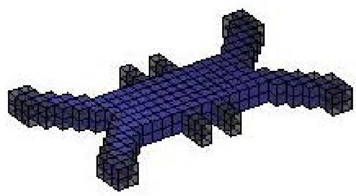




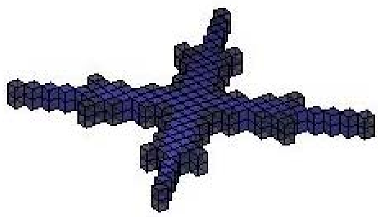
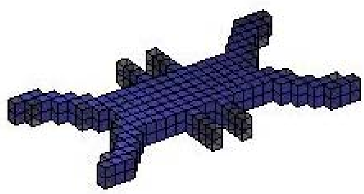
(a1) （b1）

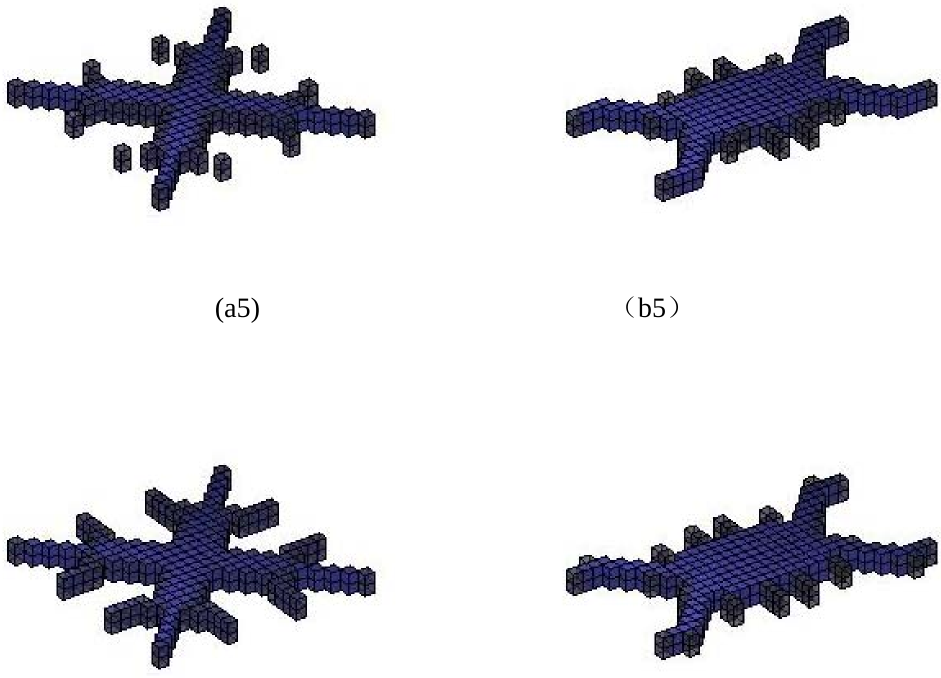
(a2)　　　　　　（b2）

(a3)　　　　　　（b3）

(a4)　　　　　　（b4）



(a5)　　（b5）

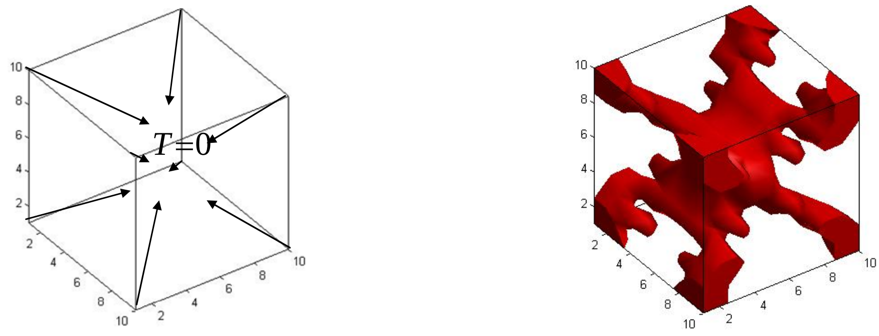
(a6)　　（b6）

图 4.13 各向同性与各向异性材料拓扑优化对比图

从图 4.13（a6）和（b6）的最终优化结果来看，相同边界条件下，采用各向同性与各向异性材料得到的最终拓扑比较类似，中心点周围呈现多个分支，两者形状存在差异，这些差异出现的根本原因在于材料导热特性不同，对温度场产生不同的影响。各向异性材料在导热率大的 x 方向上温度更低，使材料在 x 方向上分布多，导致出现了不同形状的结构。

4.3.3 三维散热模型 3

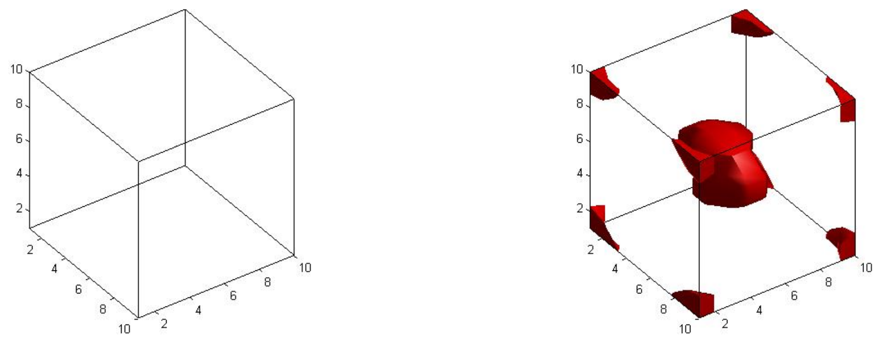
对各向异性材料散热模型，设计域划分为 1000 个单元。热载荷加在正六面体中心，边界采用自然对流，各个方向的热导率为 $\lambda_x = 10, \lambda_y = \lambda_z = 1$。



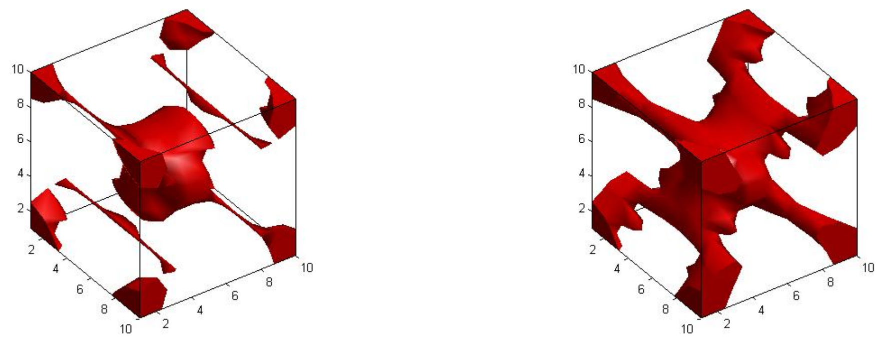
(a) 初始化设置　　　　　　　　　　　(b) 优化结果

图 4.14 三维散热模型 3

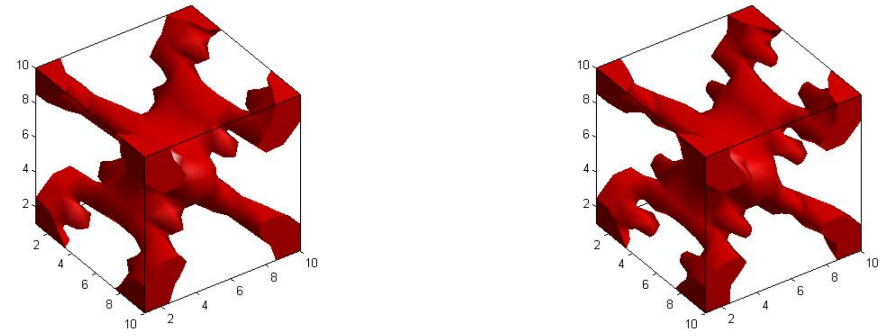
三维散热模型 3 拓扑优化的演化过程见图 4.15：



（a）　　　　　　　　　　　　　　　(b)



(c)　　　　　　　　　　　　　　　　(d)



(e) (f)

图 4.15 三维各向异性材料散热拓扑优化算例 3

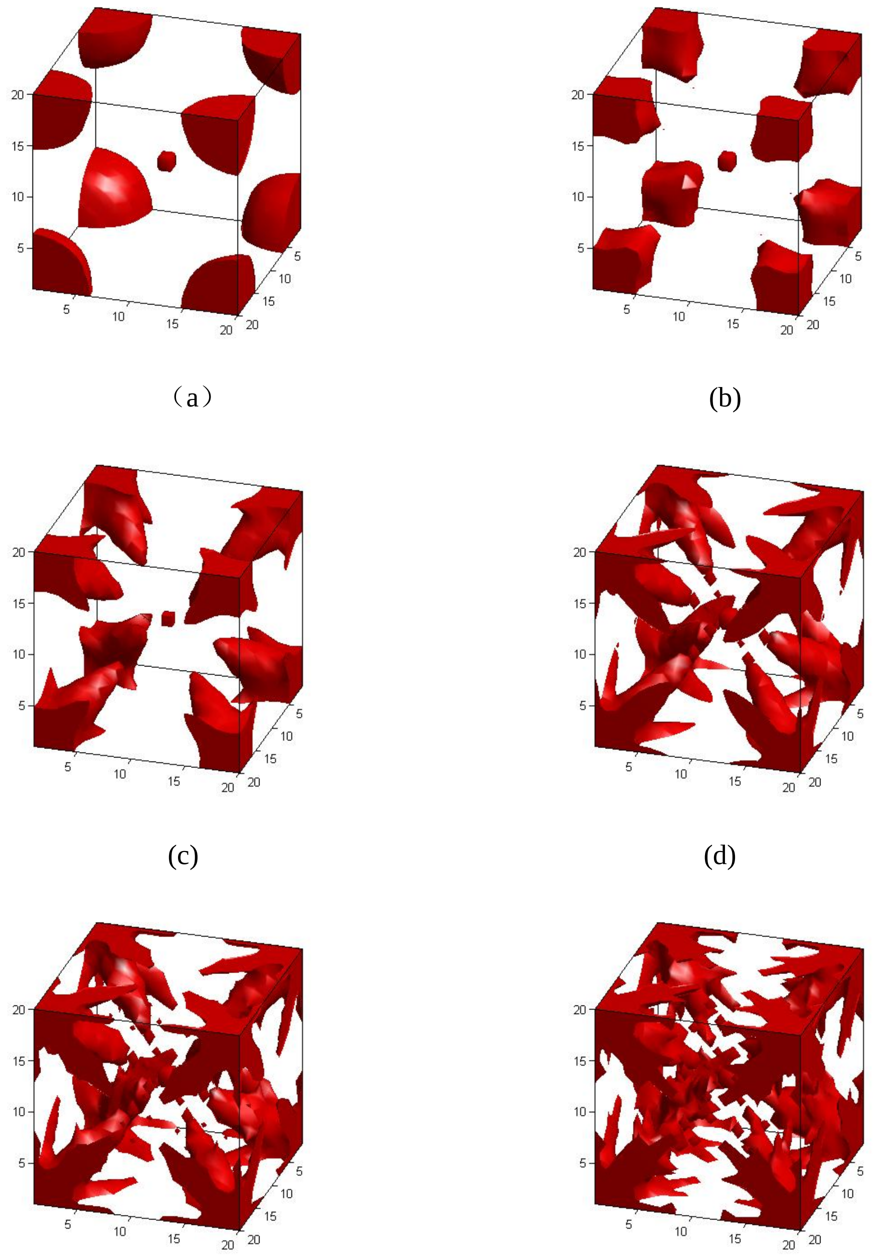
4.3.4 三维散热模型 4

模型 4 体现了固定多点温度时优化结果。设置八个顶点温度为 $T=0°C$，各向同性材料：

(a) 初始化设置 (b) 优化结果

图 4.16 三维散热模型 4

三维散热模型 4 的具体演化过程见下图：



（a） (b)

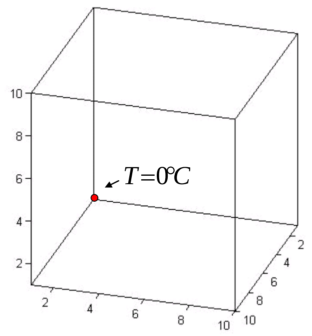
(c) (d)

(e) (f)

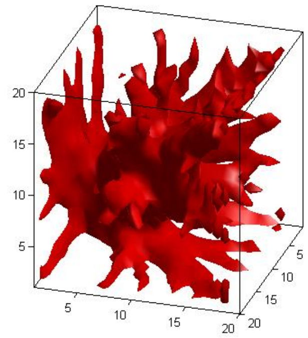
图 4.17 三维各向异性材料散热拓扑优化算例 4

4.3.5 三维散热模型 5

模型 5 的载荷加在原点，并且$T = 0°C$，整个材料边界上采用自然对流，各向同性材料：



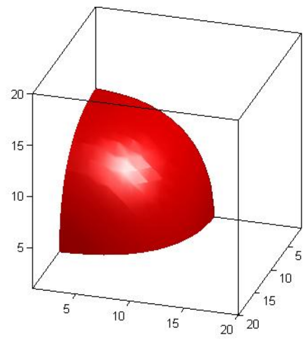
（a）初始化设置



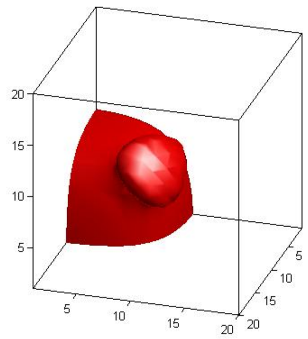
（b）优化结果

图 4.18 三维散热模型 5

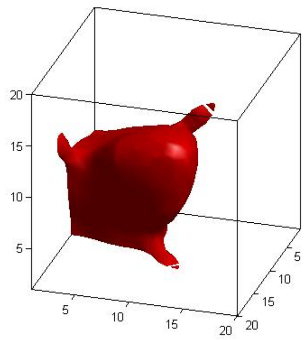
三维散热模型 5 的具体演化过程见图 4.19：



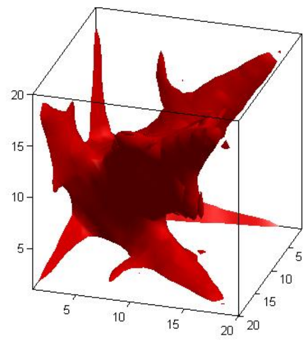
（a）



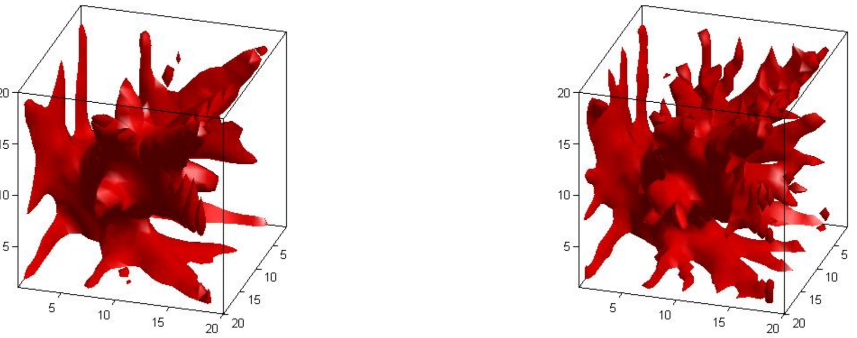
(b)



(c)



(d)

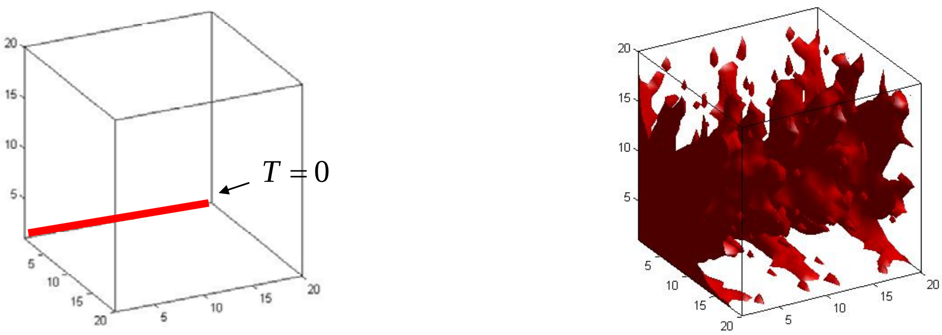


(e) (f)

图 4.19 三维各向异性材料散热拓扑优化算例 5

4.3.6 三维散热模型 6

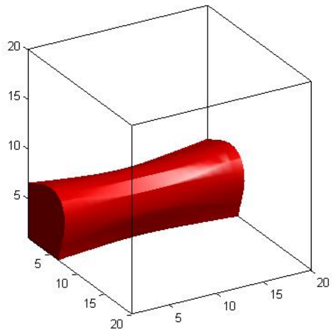
模型 6 中，固定设计域中一条边的温度为$T = 0°C$。整个材料边界上采用自然对流，各向同性材料：



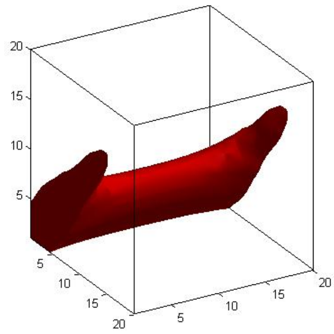
(a) 初始化设置 (b) 优化结果

图 4.20 三维散热模型 6

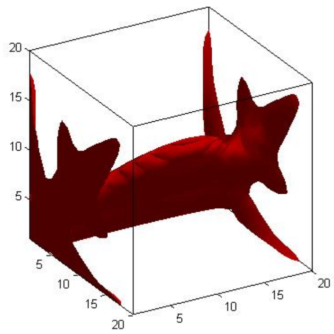
三维散热模型 6 的具体演化过程见图 4.21：



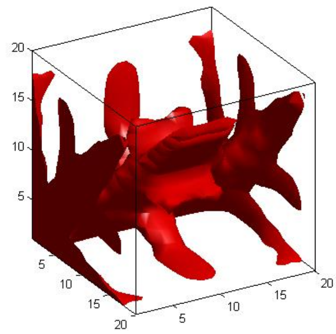
（a）



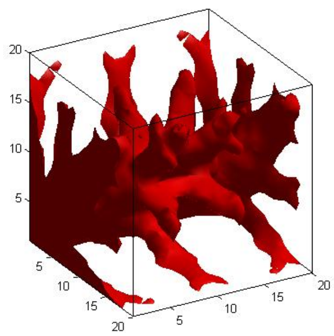
(b)



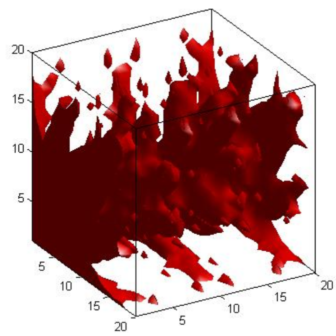
(c)



(d)



(e)



(f)

图 4.21 三维各向异性材料散热拓扑优化算例 6

从算例可以看出，采用三维模型可以处理更复杂的拓扑结构，SIMP 法在三维优化的例子中体现出了很好的健壮性。当然它也存在局限性。由于三维拓扑优化运算量巨大，耗费的时间比二维优化多。并且受到内存限制，优化问题的规模不能太大，超过 27000 个单元后在普通计算机上程序已经无法处理。使用并行计算等方法可以提高问题的求解规模。

4.4 灵敏度过滤数值算例

解决数值不稳定性有多种方法，在 SIMP 法中普遍采用源于图像处理中的滤波技术。在研究中，我们针对二维散热结构拓扑优化，使用不同的算法对原始灵敏度进行过滤处理，比较优化结果。图 4.22 是未使用任何过滤技术的拓扑优化结果，出现了类似于国际象棋棋盘的黑白交错的情况，这在实际制造中是不可取的。

图 4.22　原始优化结果

图 4.23 是采用(2.50)式的卷积过滤算法对灵敏度进行过滤后得到的优化结果。结果中的棋盘已经被消除，但是出现了一些灰度区域。这在工程实际中代表复合材料，提高了制造成本和复杂性。

图 4.23　基于卷积过滤的优化结果

图 4.24 是使用(2.52)式的维纳滤波（wiener）对灵敏度进行过滤得到的优化结果。该算法采用低通滤波对灰度图像中的噪声点进行去除处理，这些噪声点可以看作是灵敏度突变的地方。

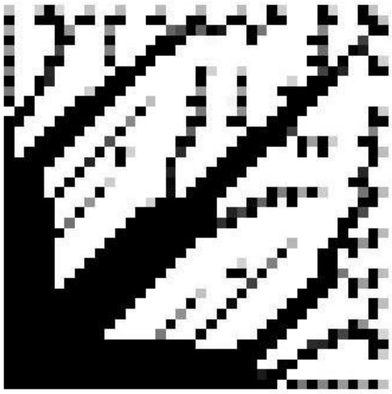


图 4.24　采用维纳滤波的优化结果

图 4.25 是采用中值过滤对灵敏过滤得到的优化结果。从结果可以看出，它消除棋盘格式的效果最好，同时也消除了复合材料，但是拓扑优化的细节损失严重。

图 4.25　中值过滤结果

从以灵敏度过滤算例可以看出，不同灵敏度过滤算法对最终结果产生很大影响。采用基于卷积的滤波和维纳滤波的最优拓扑比较接近，前者获得的最终结果中存在一定灰度区域，形状细节保留较多。后者灰度区域基本被消除，但是结构的边界不够光滑。采用非线性中值滤波获得的散热结构边界最光滑，基本上消除了所有灰度区域和棋盘格式，但是优化过程中损失了细节。具体在优化中使用何种算法，需要根据实际需求进行取舍。

4.5 本章小结

本章研究了散热结构拓扑优化设计的数值算法，在 MATLAB 中进行了二维和三维散热结构拓扑优化的几种典型优化算例的数值实验。从结果看该方法具有较好的可行性和稳定性。本文提出的方法对散热结构优化设计具有良好的指导意义。

5 总结与展望

5.1 全文总结

本文针对散热结构拓扑优化问题，利用原始密度惩罚法和改进的密度惩罚法进行了理论和数值实验研究，研究工作总结如下：

(1)对材料模型、热传导模型和密度法拓扑优化模型等散热结构拓扑优化基本理论进行了研究，并对不同优化方法进行了比较。随后研究了拓扑优化中的数值不稳定性问题。提出的数学模型具有数学表达式简洁，物理意义明确，便于数值计算和编程实现等优点。

(2)提出了改进的密度惩罚法模型，该模型适用于各向异性材料拓扑和方向角混合优化。针对材料方向角优化问题提出了基于温度梯度的优化准则算法。该算法对降低目标函数值产生了很好的效果，说明能提高散热结构的散热效能。对改进的密度惩罚法中出现的数值不稳定性问题进行了讨论，提出了解决办法。

(3)对二维和三维散热结构拓扑优化模型展开了广泛的数值实验。

5.2 展望

本文对散热结构拓扑优化的研究取得了较好的进展，但也还有许多方面需要进一步深入研究，接下来的研究工作可以从以下几个方面深入：

(1) 散热结构拓扑优化中方向角优化：这一部分研究工作仅提出了方向角优化的准则法。接下来的时间将首先集中完成解析解的推导。

(2) 非线性优化模型的研究：目前的拓扑优化研究大部分集中在线性模型方面，对于非线性优化模型的理论和实验研究还比较少，而非线性优化模型能更好的描述现实问题，可以在这一方面展开更深入的理论和实验研究。

(3) 数值不稳定性的研究：改进的密度惩罚法对数值不稳定性产生了很大影响，如何消除方向角对目标函数的扰动还需要进一步研究。

(4) 目标函数选取：目前的拓扑优化研究中，目标函数的选取集中在结构刚度最大（柔度最小）、特征频率、散热柔度最小等方面，而实际设计中还有更多样化的实际优化需求，可以提出多种类型的目标函数，进行灵敏度分析，并开展相应的实验

研究，解决更多实际的拓扑优化问题。

致　谢

论文是在熊蔡华教授的悉心指导和亲切关怀下完成的。在论文的完成过程中，熊老师严谨求实的治学态度、高深渊博的专业知识、高瞻远瞩的学术洞察力和诲人不倦的育人精神，让我深受影响并必将终身受益，尤其是在论文的修改阶段，熊老师给了我最大的帮助和无限的关怀，通过逐字逐句审阅我的论文，提出了很多宝贵的修改意见，使论文有了质的飞跃。在两年的硕士学习阶段中，熊老师为我创造了优良的学习科研环境，并提供给我许多难得的锻炼机会，可以说我所取得的点滴进步都凝聚着熊老师的心血。与熊老师相处的两年使我受益很深，他的一言一行教会了我怎样更好的做人以及对待工作和生活的积极态度，这也是我此生得到的最大的精神财富。值此论文完成之际，谨向熊老师表示我衷心的感谢和崇高的敬意！

同时，还要特别感谢实验室的熊有伦院士、丁汉教授、尹周平教授、杨文玉教授、孙容磊副教授的指导。另外，在两年的学习、工作和生活中，还得到了高发荣博士后、陈文斌博士、韩冬桂博士、王磊博士、王立成博士、叶涛博士、万小金博士、张小俭博士、崔玉定博士、杨明硕士、李刚硕士、葛黎黎硕士、李胜群硕士、毛春智硕士、谢晓亮硕士、胡文硕士、钱思硕士、李劲松硕士、侯中祥硕士、顾玉娜硕士等所有实验室同学的帮助，和他们的讨论与学习让我受益菲浅。

本文的研究工作得到了华中科技大学蒋良杰硕士的大力帮助。他所做的前期研究和收集的许多珍贵文献资料为本文的研究奠定了坚实的基础。在此对他的帮助表示感谢！

感谢赵毓豪、周小青、徐海潮、郑帮强、王英、李小伟、邹勇、卢进、彭运芳、马强、黄彬彬、张强、首中华、武青虎等我身边的朋友们。他们陪我度过了两年愉快的硕士生活。

最后要深深感谢多年来爷爷奶奶、外婆、父母、姐姐、妹妹、弟弟在生活和学业上所给予我无限的关怀和始终的支持。没有他们就没有我现在所做的一切。

谨以此文献给所有身边关心、支持和帮助过我的亲人、师长、同学和朋友！

李 朕

2008 年 5 月 22 日

参考文献

[1] 张远波. 风冷式 CPU 散热片的热分析及其优化设计:[硕士学位论文].华中科技大学: 武汉, 2006 p. 63.

[2] Pironneau, O. Optimal Shape Design for Elliptic Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol. 38. 1982: Springer. 42～66.

[3] M.P. Bendsøe, O.S. Topology Optimization- Theory, Methods and Application. 2004: Springer.

[4] 谢涛，刘静，刘军考. 结构拓扑优化综述. 机械工程师, 2006. 8.

[5] HA Eschenauer, N.O.,Topology optimization of continuum structures: A review. Applied Mechanics Reviews, 2001. 4: p. 331～390.

[6] 刘书田，程耿东. 基于均匀化理论的梯度功能材料优化设计方法. 宇航材料工艺, 1995. 6: p. 21～27.

[7] Sigmund, O.. A 99 line topology optimization code written in Matlab. Structure Multidisciplinary Optimization, 2001. 21: p. 120～127.

[8] Xie Y.M., S.G.P.. A simple Evolutionary Procedure for Structure Optimization. Computers & Structures, 1993. 49: p. 885～896.

[9] G. P. Steven, Q.L., Y. M. xie. Evolutionary topology and shape design for general physical field problems. Computational Mechanics, 2000. 26: p. 129～139.

[10] Chandrashekhar S. Jog, R.B.H.. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. 130: p. 203-226.

[11] V. Young, O.M.Q., G.P. Steven. 3D and multiple load case bi-directional evolutionary optimization (BESO). Structural Optimization, 1999. 18: p. 183～192.

[12] S Osher, J.S.. Fronts Propagating with Curvature-dependent Speed: Algorithm Based on Hamilton-Jacobi Formulations. Journal of Computational Physics, 1988. 79: p. 12～49.

[13] Sethian A., W.A. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods. Journal of Computational Physics, 2000. 163: p. 489～528.

[14] Allaire G, J.F., Toader A. A level-set method for shape optimization. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie I (Mathematique), 2002. 12(334): p. 1125～1130.

[15] Michael Yu Wang, X.W., Dongming Guo. A Level Set Method for Structural

Topology Optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003. 192: p. 227～246.

[16] Ha S. H., C.S. Topological shape optimization of heat conduction problems using level set approach. Numerical Heat Transfer Part B:Fundamentals, 2005. 48(1): p. 67～88.

[17] Cho S, H.S.H., Park C Y. Topological shape optimization of power flow problems at high frequencies using level set approach. International Journal of Solids and Structures, 2006. 43(1): p. 172～192.

[18] 梅玉林. 拓扑优化的水平集方法及其在刚性结构、柔性机构和材料设计中的应用:[博士学位论文]. 大连理工大学: 大连, 2003 p.150.

[19] 贾海朋. 结构与柔性机构拓扑优化:[博士学位论文]. 大连理工大学, 2005. p.156

[20] ChunGang Zhuang, Z.X., Han Ding. A level set method for topology optimization of heat conduction problem under multiple load cases. Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007. 196: p. 1074～1084.

[21] 蒋良杰. 连续体结构及散热结构拓扑优化:[硕士学位论文]. 华中科技大学: 武汉, 2006 p. 73.

[22] Svanberg, K.. The Method of Moving Asymptotes -A New Method for Structural Optimization. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987. 24: p. 359～373.

[23] 刘立平. 遗传算法综述. 东莞理工学院学报, 2005. 12(3): p. 48～52.

[24] Qing Li, G.P.S., Osvaldo M. Querin, Y.M. Xie. Shape and Topology Design for Heat Conduct ion by Evolutionary Structural Optimization. Heat and Mass Transfer, 1999. 42: p. 3361～3371.

[25] M. Zhou, N.P., H.L. Thomas, Y.K. Shyy. An Integrated Approach to Topology, Sizing, and Shape Optimiztion. Structural Multidiscipiline Optimization, 2004. 26: p. 308～317.

[26] Rafael Acedo Lopes, F.V.S., Emílio Carlos Nelli Silva. Topology Optimization of Three Dimensional Structures under Self-weight and Inertial Forces. in 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization. 2005. Brazil.

[27] Sigmund, J.P.. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards,mesh-dependencies and local minima. Structural Optimization, 1998. 16: p. 68～75.

[28] Rietz, A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods. Structure Multidisciplinary Optimization, 2001. 21: p. 159～163.

[29] K. Dems, B.R. Sensitivity analysis for transient heat conduction in a solid body --

Part I: External boundary modification. Structural Optimization, 1999. 17: p. 36～45.

[30] K. Dems, B.R. Sensitivity analysis for transient heat conduction in a solid body --Part II: Interface modification. Structural Optimization, 1999. 17: p. 46～54.

[31] 程新广, 李过. 基于最小热量传递势容耗散原理的导热优化. 工程热物理学报, 2003. 24(1): p. 94～96.

[32] Cheng Xin-Guang, L.Z.-x., Guo Zeng-Yuan. Heat Conduction Optimization Based on Least Dissipation Principle of Heat Transport Potential Capacity. Journal of Engineering Thermophysics, 2003. 24(1): p. 94～96.

[33] Bendsoe M P, Kijuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): p. 197～224.

[34] Chandrashekhar S. Jog, R.B.H. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. 130: p. 203～226.

[35] 罗震, 基于变密度法的连续体结构拓扑优化设计技术研究:[博士学位论文]. 华中科技大学: 武汉, 2005 p. 160.

[36] J.H. Luo, H.C.G. Optimal orientation of orthotropic materials using an energy based method. Structural Optimization, 1998. 15: p. 230～236.

[37] Pedersen, P.. Some general optimal design results using anisotropic, power law nonlinear elasticity. Structural Optimization, 1998. 15: p. 73～80.

[38] Qing Li, G.P.S., Y.M. Xie, Osvaldo M. Querin. Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields. Heat and Mass Transfer, 2004. 47: p. 5071～5083.

[39] Thomsen, J. Topology optimization of structures composed of one or two materials. Structural Optimization, 1992. 5: p. 108～115.

[40] Kikuchi, K.S.a.N.. A homogenization method for shape and topology optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991. 93: p. 291～318.

[41] B. Hassani, E.H. A review of homogenization and topology opimization II -analytical and numerical solution of homogenization equations. Computers & Structures, 1998. 69: p. 719～738.

[42] Poulsen, T.A. Topology optimization in wavelet space. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002. 53: p. 567～582.

[43] M. Stolpe, K.S. An alternative interpolation acheme for minimum compliance topology optimization. Structure Multidisciplinary Optimization, 2001. 22: p. 116～124.