





原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何他人个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本论文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律责任由本人承担。

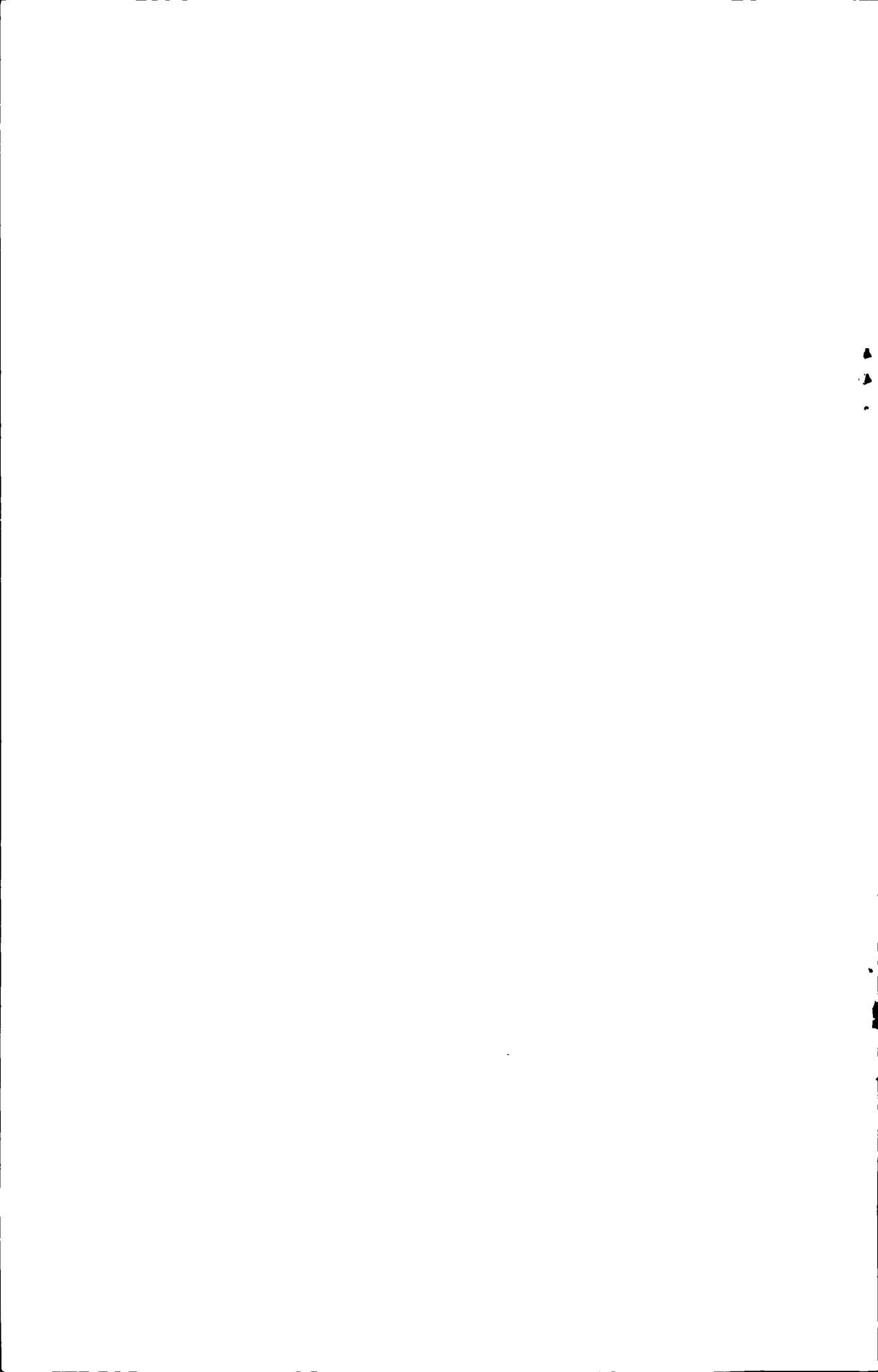
论文作者签名： 李旭 日期： 2010.5.25

关于学位论文使用授权的声明

本人完全了解山东大学有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留或向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权山东大学可以将本学位论文全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

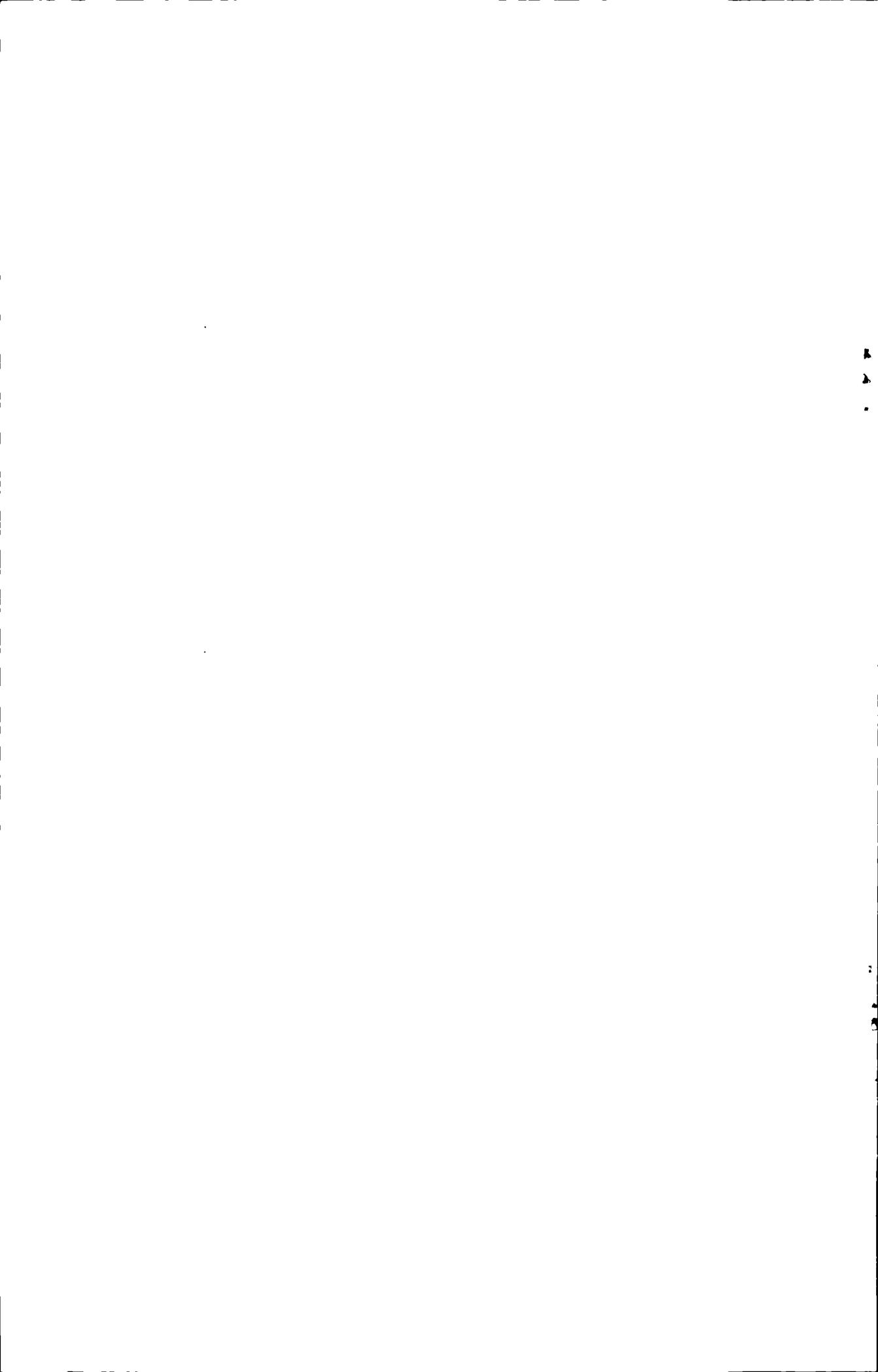
(保密的论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名： 李旭 导师签名： 张明 日期： 2010.5.25



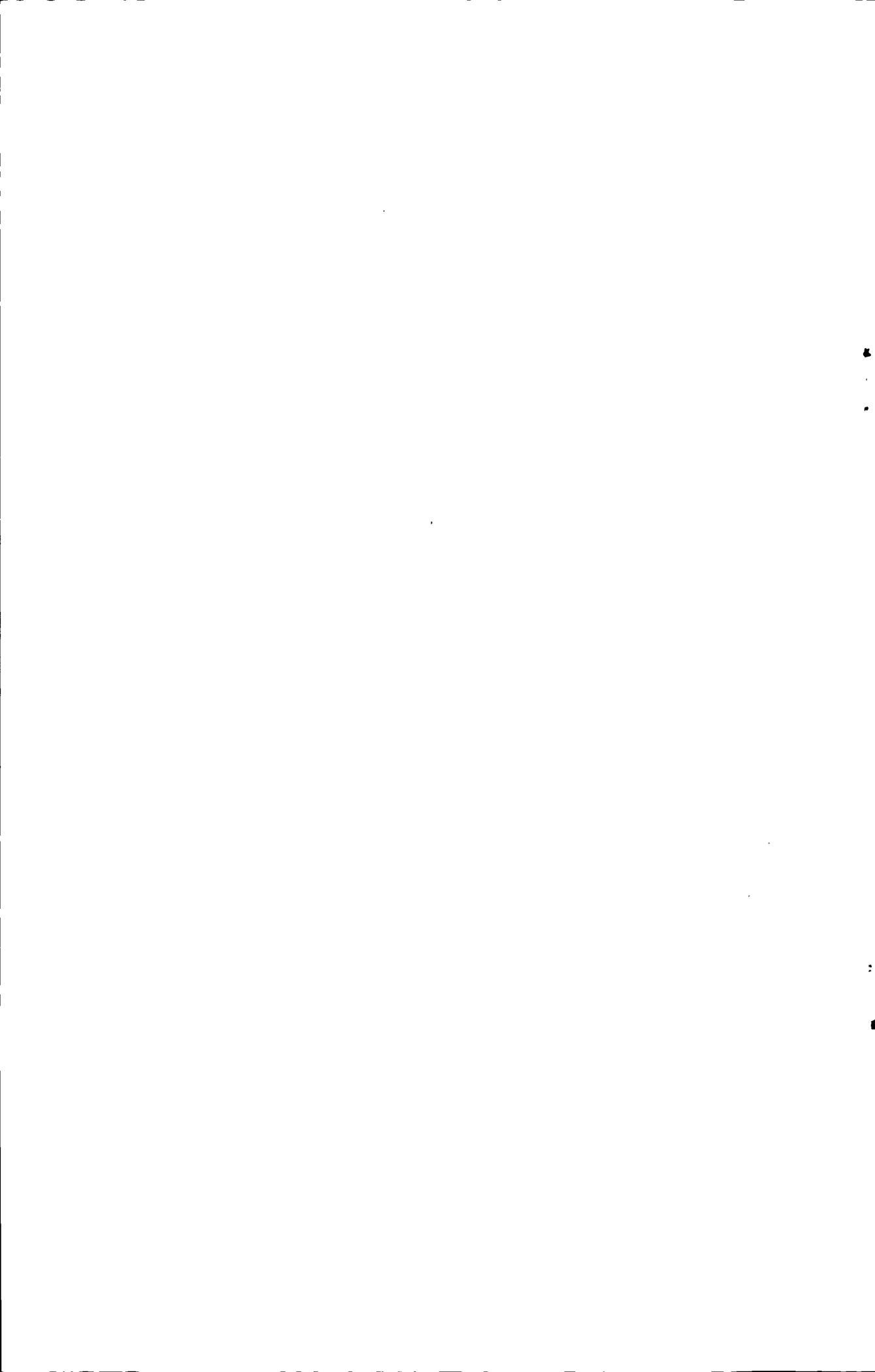
目录

中文摘要	i
英文摘要	v
第一章 引言及预备知识	1
§1.1 引言	1
§1.2 预备知识	6
第二章 D_n 型 cluster 倾斜代数	9
§2.1 预备知识	9
§2.2 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图	13
§2.3 D_n 型 cluster 倾斜代数的同构类	20
第三章 A_n 型 m -cluster 倾斜代数	27
§3.1 预备知识	27
§3.2 A_n 型 m -cluster 范畴的倾斜图	31
§3.3 连通的 A_n 型 m -cluster 倾斜代数的同构类	35
参考文献	41
读博期间完成的论文	48
致谢	49



Contents

Chinese abstract	i
English abstract	v
Chapter 1. Introduction and preliminaries	1
§1.1 Introduction	1
§1.2 Preliminaries	6
Chapter 2. Cluster-tilted algebras of type D_n	9
§2.1 Preliminaries	9
§2.2 Quivers of cluster-tilted algebras of type D_n	13
§2.3 Isomorphism classes of cluster-tilted algebras of type D_n	20
Chapter 3. m-cluster-tilted algebras of type A_n	27
§3.1 Preliminaries	27
§3.2 Tilting graph of m -cluster category of type A_n	31
§3.3 Isomorphism classes of m -cluster-tilted algebras of type A_n	35
Bibliography	41
Accepted and completed papers	48
Acknowledgements	49



Dynkin 型 cluster 倾斜代数及 m -cluster 倾斜代数

戈 文 旭

(山东大学数学学院, 山东, 济南 250100)

中文摘要

2002 年, Fomin 和 Zelevinsky 在文 [FZ1, FZ2] 中引入了 cluster 代数的概念, 用来研究量子群的典范基和代数群的整体正性之间的联系. 这种理论很快就和数学中的许多分支产生了密切的联系 (参见 [FZ3]). 特别是近几年, cluster 代数及其组合理论给有限维代数表示理论带来了很大的影响. 文 [BMRRT] 引入了 cluster 范畴和 cluster 倾斜理论的概念, 成为更好的理解 Fomin 和 Zelevinsky 的 cluster 代数的一个范畴化模型. 设 H 是代数闭域上的有限维遗传代数, $\mathcal{D}^b(H)$ 是 H 的有界导出范畴, cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 定义为轨道范畴 $\mathcal{D}^b(H)/\tau^{-1}[1]$, 其中 τ 是 $\mathcal{D}^b(H)$ 中的 Auslander-Reiten 变换, $[1]$ 是 $\mathcal{D}^b(H)$ 中的平移函子. Cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 中的 cluster 倾斜对象与 cluster 代数的 cluster 一一对应.

Cluster 范畴的 cluster 倾斜理论完善了有限维代数表示理论中的经典倾斜理论, cluster 倾斜对象的自同态代数称为 cluster 倾斜代数. 近年来, 对这一类代数的大量研究表明, 它们具有很多好的性质, 例如这是一类非平凡的 1-Gorenstein 代数. 参见文 [BMR1, BMR2, ABS1, KR1].

在 Dynkin 型 cluster 范畴和 cluster 倾斜代数方面, P. Caldero, F. Chapoton 和 R. Schiffler 在文 [CCS1] 中建立了 A_n 型 cluster 范畴的几何模型, 为我们研究 cluster 范畴提供了一个新的思路. 随后, R. Schiffler 在文 [Sch] 中构造了 D_n 型 cluster 范畴的几何模型.

作为 cluster 范畴的推广, H. Thomas 在文 [Th] 引入了 m -cluster 范畴的概念. m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 定义为轨道范畴 $\mathcal{D}^b(H)/\tau^{-1}[m]$. 随后, m -cluster 倾斜对象和 m -cluster 倾斜代数也被引入. 若 m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 上的一个对象 T 满足以下条件:

- $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(T, X[i]) = 0, 1 \leq i \leq m$, 当且仅当 $X \in \text{add}(T)$,

- $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(X, T[i]) = 0, 1 \leq i \leq m$, 当且仅当 $X \in \text{add}(T)$,

则称 T 为 m -cluster 倾斜对象. m -cluster 倾斜代数 $\text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\text{op}}$ 为 m -cluster 倾斜对象 T 的自同态代数. 在这方面的研究, 参见文 [BaM1, BaM2, HJ1, HJ2, KR1, KR2, IY, P, Wr, Zh3, ZZ].

本文分两部分: 第一部分, 我们研究了 D_n 型 cluster 倾斜代数, 分类了所有的 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图, 并给出了两个 D_n 型 cluster 倾斜代数同构的充要条件. 第二部分, 我们研究了 A_n 型 m -cluster 倾斜代数, 给出了 A_n 型 m -cluster 倾斜代数连通的充要条件, 进一步得到了两个连通的 A_n 型 m -cluster 倾斜代数同构的充要条件.

第一章给出引言和预备知识. 介绍了与本论文有关的基本概念和结果, 并阐述了论文的工作背景和思路.

第二章利用 R. Schiffler 在文 [Sch] 构造的几何模型进一步对 D_n 型 cluster 倾斜代数进行研究. 首先, 我们给出了穿刺多边形 P_n 中由标记弧构成的三角的等价分类. 进一步, 我们得到了 D_n 型箭图的 mutation 等价类和所有的 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图, 并且我们还给出了它们的关系理想. 最后我们给出了两个 D_n 型 cluster 倾斜代数同构的充要条件. 主要结果如下:

定理 2.2.5. 箭图 Q 是 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图当且仅当箭图 Q 属于 2.2 节描述的四种类型中的一种.

定理 2.3.1. 设 T 和 T' 是 $D_n (n \geq 5)$ 型 cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 中的两个 cluster 倾斜对象, $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T)^{\text{op}}$ 与 $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T')^{\text{op}}$ 是相应的 cluster 倾斜代数. 则 Γ 和 Γ' 同构的充要条件是存在整数 i 和 j 使得 $T = \tau^i T'$ 或 $T = \sigma \tau^j T'$, 其中 τ 是 Auslander-Reiten 变换, σ 是 $\mathcal{C}(H)$ 的一个自同构函子 (σ 的定义见 2.3 节).

第三章, 我们利用 K. Baur 和 R. Marsh 建立的 A_n 型 m -cluster 范畴的几何模型进一步对 A_n 型 m -cluster 倾斜代数进行研究. 我们讨论了由 m -cluster 倾斜对象构成的倾斜图的连通性, 给出了 A_n 型 m -cluster 倾斜代数连通的充要条件, 并且还证明了两个连通的 A_n 型 m -cluster 倾斜代数同构的充要条件. 主要结果如下:

定理 3.2.7. 设 Π 是 $(n+1)m+2$ 多边形, Σ_m 是由 Π 中的 m -对角线分割构

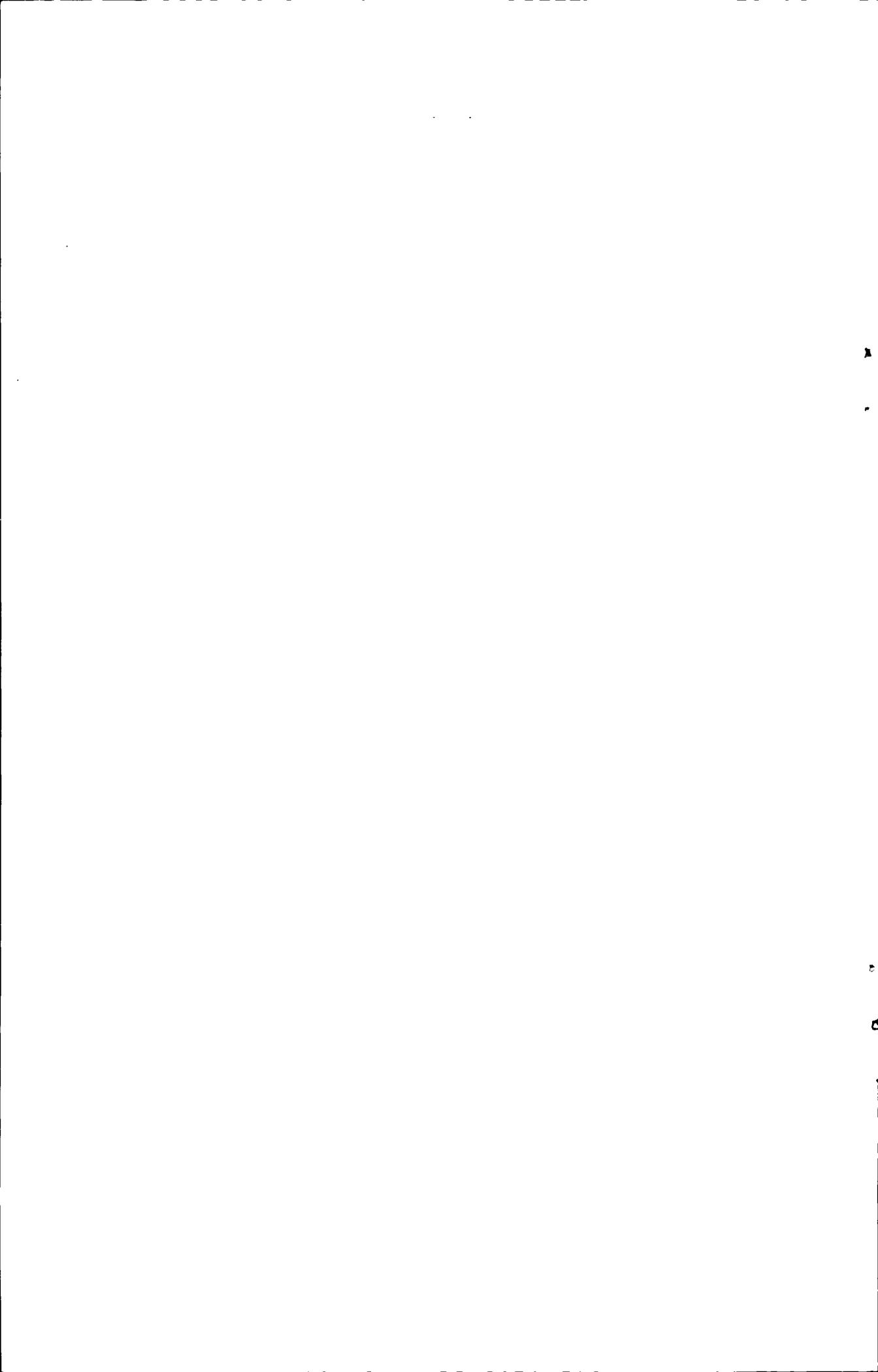
成的 m -mutation 无向图. 则 Σ_m 是连通的. 即: A_n 型 m -cluster 范畴的倾斜图是连通的.

定理 3.2.9. 设 T 是 A_n 型 m -cluster 范畴中的一个 cluster 倾斜对象, $B = \text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\text{op}}$ 是相应 m -cluster 倾斜代数. 则 B 是连通的充要条件是对 T 中任意一个不可分解直和项 M 都存在 T 中的另一个不可分解直和项 N 使得 M 和 N 在同一个 ray 或 coray 中.

定理 3.2.10. 设 Σ'_m 是由 A_n 型 m -cluster 范畴中连通的 m -cluster 倾斜对象构成的倾斜图, 则 Σ'_m 是连通的.

定理 3.3.3. 设 T 和 T' 是 A_n 型 m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 中的两个连通的 m -cluster 倾斜对象, $B = \text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\text{op}}$ 与 $B' = \text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T')^{\text{op}}$ 是相应的 m -cluster 倾斜代数. 则 B 和 B' 同构的充要条件是存在整数 i 使得 $T = T'[i]$, 其中 $[i]$ 是平移函子 $[1]$ 的 i 次幂.

关键词: cluster 范畴, cluster 倾斜代数, 三角, m -cluster 范畴, m -cluster 倾斜代数, m -对角线分割.



Dynkin cluster-tilted algebras and m -cluster-tilted algebras

Wenxu Ge

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan, Shandong, 250100)

Abstract

In 2002, cluster algebras were introduced by Fomin and Zelevinsky [FZ1, FZ2] in order to explain the connection between the canonical basis of a quantized enveloping algebra and total positivity for algebraic groups. There are interesting connections to their theory in many directions (see [FZ3]). As a categorical model for better understanding of cluster algebras, cluster categories and cluster-tilting theory were introduced in [BMRRT]. Let H be a finite dimensional hereditary algebra over an algebraically closed field and $\mathcal{D}^b(H)$ be the bounded derived category of H . Then the cluster category $\mathcal{C}(H)$ is the orbit category $\mathcal{D}^b(H)/\tau^{-1}[1]$, where τ is the Auslander-Reiten translation in $\mathcal{D}^b(H)$ and $[1]$ is the shift functor of $\mathcal{D}^b(H)$. There is a one to one correspondence between cluster tilting objects in cluster categories and the clusters of cluster algebras.

Cluster-tilted algebras were introduced in [BMR1], which together with cluster categories provide an algebraic understanding of combinatorics of cluster algebras. Here, cluster-tilted algebra is the endomorphism algebra of a cluster tilting object, is the form $\text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T)^{\text{op}}$. A large number of research of such algebra show that there are many good properties, see [BMR1, BMR2, ABS1, KR1].

In the type of Dynkin, P. Caldero, F. Chapoton and R. Schiffler [CCS1] have associated a category to the cluster algebra of type A_n , and proved that this category is equivalent to the cluster category of type A_n . Later, R. Schiffler constructed a geometric model for cluster category of type D_n in [Sch].

As a generalization of cluster categories, m -cluster categories $\mathcal{C}_m(H)$ were introduced in [Th]. They are defined as the orbit category $\mathcal{D}^b(H)/\tau^{-1}[m]$. An object T in $\mathcal{C}_m(H)$ is an m -cluster tilting object if and only if the following hold:

- $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(T, X[i]) = 0, 1 \leq i \leq m$, if and only if $X \in \text{add}(T)$;
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(X, T[i]) = 0, 1 \leq i \leq m$, if and only if $X \in \text{add}(T)$.

Let T be an m -cluster tilting object. $B = \text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\text{op}}$ is the m -cluster-tilted algebra. Recently, there are a lot of research about these kinds of algebras, see [BaM1, BaM2, HJ1, HJ2, KR1, KR2, IY, P, Wr, Zh3, ZZ].

In this thesis, first, we investigate cluster-tilted algebras of type D_n , classify the quivers of cluster-tilted algebras of type D_n , and moreover, we give a necessary and sufficient condition for the isomorphism between two cluster-tilted algebras of type D_n . Second, we investigate m -cluster-tilted algebras of type A_n , give a necessary and sufficient condition for the isomorphism between two connected m -cluster-tilted algebras of type A_n . This thesis is arranged as follows.

In Chapter 1, we recall some definitions and basic results needed for our research, give some recent developments in this dissertation and make a systemic exposition of our main results.

In Chapter 2, by using the geometric model for cluster category of type D_n by R. Schiffler in [Sch], we investigate the cluster-tilted algebras of type D_n . First, we give an explicit description of the equivalence class of triangulations of the category of tagged arcs of punctured polygon \mathbf{P}_n . As an application, we obtain the mutation classes of quivers of type D_n , and deduce all the quivers of cluster-tilted algebras of type D_n , and moreover, we also give an explicit description for the relation ideal. Next, we give a necessary and sufficient condition for the isomorphism between two cluster-tilted algebras of type D_n . Our main results are as follows.

Theorem 2.2.5. *The quiver Q is a quiver of cluster-tilted algebras of type D_n if and only if Q belongs to one of type 1, type 2, type 3 or type 4 in section 2.2.*

Theorem 2.3.1. *Let T and T' be two cluster tilting objects in the cluster category $\mathcal{C}(H)$ of type D_n ($n \geq 5$), $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T)^{\text{op}}$ and $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T')^{\text{op}}$ be the corresponding cluster-tilted algebras. Then Γ is isomorphic to Γ' if and only if $T = \tau^i T'$ or $T = \sigma \tau^j T'$ for some integers i and j , where τ is the Auslander-Reiten translation, σ is the automorphism of $\mathcal{C}(H)$ defined in section 2.3.*

In Chapter 3, we use the geometric model for m -cluster category of type A_n by K. Baur and R. Marsh to investigate the m -cluster-tilted algebras of type A_n . We prove that the tilting graph of m -cluster category of type A_n is connected, and obtain a necessary and sufficient condition for the connected m -cluster-tilted algebras of type A_n , and moreover, give a necessary and sufficient condition for the isomorphism between two connected m -cluster-tilted algebras of type A_n . Our main results are as follows.

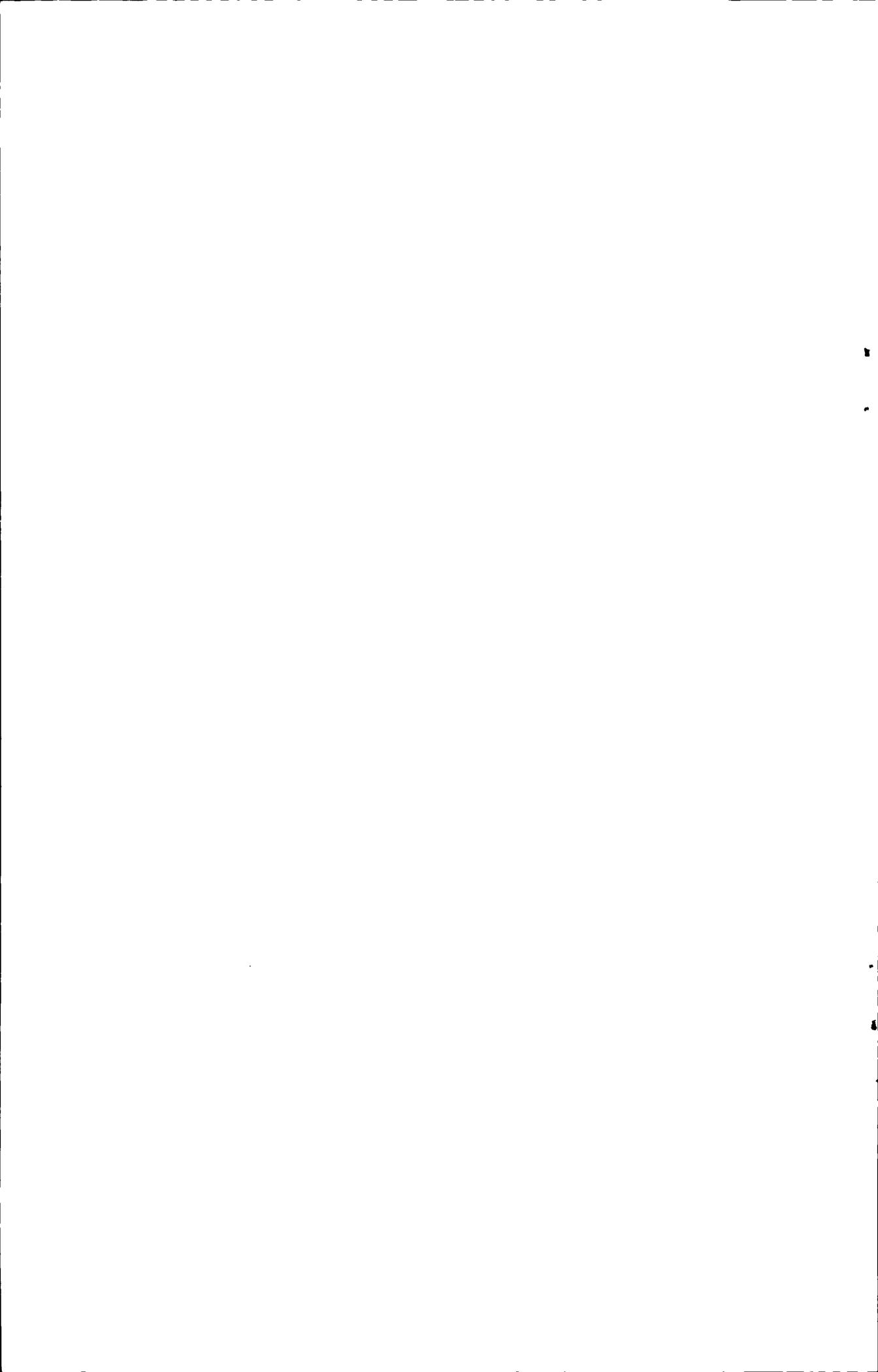
Theorem 3.2.7. *Let Σ_m be the tilting graph of an m -cluster category of type A_n . Then Σ_m is connected.*

Theorem 3.2.9. *Let T be an m -cluster tilting object in m -cluster category of type A_n , $B = \text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\text{op}}$ be the corresponding m -cluster-tilted algebra. Then B is connected if and only if for any indecomposable direct summand M of T , there exists another indecomposable direct summand N of T such that N and M lie on a same ray or coray.*

Theorem 3.2.10. *Let Σ'_m be the tilting subgraph consisting of connected m -cluster tilting objects in the m -cluster category of type A_n . Then Σ'_m is connected.*

Theorem 3.3.3. *Let T and T' are two connected m -cluster tilting objects in the cluster category $\mathcal{C}_m(H)$ of type A_n , $B = \text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\text{op}}$ and $B' = \text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T')^{\text{op}}$ be the corresponding m -cluster-tilted algebras. Then B is isomorphic to B' if and only if $T = T'[i]$ for some integer i .*

Key words: cluster category, cluster-tilted algebra, triangulation, m -cluster category, m -cluster-tilted algebra, m -diagonal division.



第一章 引言及预备知识

§1.1 引言

2002年,为了研究量子群的典范基和代数群的整体正性之间的联系, Fomin 和 Zelevinsky 在文 [FZ1, FZ2] 中引入了 cluster 代数的概念. 设 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(u_1, u_2, \dots, u_3)$ 是有 n 个变元的有理函数域, $X \subseteq \mathbb{F}$ 是 \mathbb{Q} 上的一组超越元基, $B = (b_{xy})_{x,y \in X}$ 是行和列以 X 为标记的 $n \times n$ 符号反对称整数矩阵. 也就是说, 对任意的 $x, y \in X$, 我们有 $b_{xy} = 0 \Leftrightarrow b_{yx} = 0$; $b_{xy} > 0 \Leftrightarrow b_{yx} < 0$; $b_{xx} = 0$. 我们称这样的一个二元组 (X, B) 为一个 seed, X 称为 cluster. 对一个给定的 seed (X, B) 和 X 中的一个元素 z , 通过下面的二进制交换关系我们定义一个 \mathbb{F} 中的新的元素 z'

$$zz' = \prod_{x \in X, b_{xz} > 0} x^{b_{xz}} + \prod_{x \in X, b_{xz} < 0} x^{-b_{xz}}.$$

在这种情况下, 我们称 z, z' 构成了一个交换对 (exchange pair). $X' = X \cup \{z'\} \setminus \{z\}$ 是 \mathbb{F} 的一个新的超越元基, 我们称矩阵 $B' = (b'_{xy})_{x,y \in X'}$ 是矩阵 B 在 z 处的 mutation, 其中

$$b'_{xy} = \begin{cases} -b_{xy} & \text{若 } x=z \text{ 或 } y=z; \\ b_{xy} + \frac{1}{2}(|b_{xz}|b_{zy} + b_{xz}|b_{zy}|) & \text{其它.} \end{cases}$$

二元组 (X', B') 称为 seed (X, B) 在 z 处的 mutation. 记集合 S 为我们通过对 (X, B) 重复做 mutation 得到的所有的 seed 构成的集合, S 中所有 seed 里出现的超越元构成了一个集合, 我们记做 χ , 它中的超越元我们叫做 cluster 变量. Cluster 代数 $\mathcal{A}(X, B)$ 定义为由集合 χ 生成的 \mathbb{F} 的子环. 在同构的意义下, cluster 代数和 X 的选取无关, 只和整数矩阵 B 有关, 所以一般我们记为 \mathcal{A}_B .

当矩阵 B 是反对称矩阵时, 一个 seed (X, B) 决定了一个箭图 Q_B . Q_B 的顶点对应于矩阵 B 的行和列, $b_{ij} > 0$ 表示顶点 i 到 j 的箭向量. 若集合 χ 是有限集, 那么我们说 cluster 代数 \mathcal{A}_B 是有限型的. 在 [FZ2] 中, 证明了有限型 cluster 代数中存在一个 seed 对应的箭图是 Dynkin 图.

关于 cluster 代数及其组合的相关知识可参见文献 [CFZ, FZ3, FZ4, FR1]. 这种理论很快就和数学中的许多分支产生了密切的联系. 特别是近几年, cluster 代数及其组合理论给有限维代数表示理论带来了很大的影响. 文 [MRZ] 首先给出了 cluster 代数及其组合理论与箭图表示的关系. 接着, 当 cluster 代数中存在一个 $\text{seed}(X, B)$ 决定的箭图 Q_B 为某个遗传代数 H 的箭图时, 即 $H = kQ_B$, 文 [BMRRT] 引入了 cluster 范畴和 cluster 倾斜理论的概念, 成为更好的理解 Fomin 和 Zelevinsky 的 cluster 代数的一个范畴化模型.

Cluster 范畴的定义如下. 设 H 是代数闭域上的有限维遗传代数, $\mathcal{D}^b(H)$ 是 H 的有界导出范畴, τ 是 $\mathcal{D}^b(H)$ 中的 Auslander-Reiten 变换, $[1]$ 是 $\mathcal{D}^b(H)$ 中的平移函子. 令 $F = \tau^{-1}[1]$, cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 定义为轨道范畴 $\mathcal{D}^b(H)/F$, 对象是 $\mathcal{D}^b(H)$ 中对象的 F -轨道, 态射定义为:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}(H)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(H)}(X, F^i Y),$$

这里 X, Y 是 $\mathcal{D}^b(H)$ 中的对象, \tilde{X}, \tilde{Y} 分别是 X, Y 的 F -轨道 (为了方便, 我们有时将 \tilde{X}, \tilde{Y} 简记为 X, Y). 由文 [K], cluster 范畴是三角范畴, 而且是 Calabi-Yau 维数为 2 的 Calabi-Yau 范畴. Cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 中的 cluster 倾斜对象 T 满足如下两个条件:

- $\text{Ext}_{\mathcal{C}(H)}^1(T, T) = 0$;
- 对 cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 中任意不可分解对象 M , 若 $\text{Ext}_{\mathcal{C}(H)}^1(T, M) = 0$, 则 M 是 T 的直和项.

现在 cluster 范畴已经成为 acyclic 型 cluster 代数及其组合的一个成功的模型, 参见文 [BMR, CC, CK1, CK2]. 在这个范畴化的模型中, cluster 范畴中的不可分解例外对象对应于文 [FZ1] 中定义的 cluster 变量, 而 cluster 倾斜对象对应于 cluster 代数中的 cluster, 参见文 [CK1, CK2]. 特别的, 对应于 cluster 代数的 cluster-mutation, 文 [BMRRT] 定义了 cluster 范畴中的 cluster 倾斜对象上的一种 mutation. 简单来说, 就是 cluster 范畴中的一个几乎 cluster 倾斜对象 \bar{T} 恰好有 2 个互不同构的不可分解补 M 和 M^* , 而且它们通过下面的三角相联系:

$$M^* \xrightarrow{g} T' \xrightarrow{f} M \longrightarrow M^*[1] \quad \text{和} \quad M \xrightarrow{f^*} T'' \xrightarrow{g^*} M^* \longrightarrow M[1],$$

其中, $T' \in \text{add } \bar{T}$, $T'' \in \text{add } \bar{T}$, f, g^* 是极小右 $\text{add } \bar{T}$ -逼近, f^*, g 是极小左 $\text{add } \bar{T}$ -逼近.

cluster 范畴与有限维代数表示理论中的经典倾斜理论相结合, 促成了 cluster 倾斜代数理论的产生, 参见文 [BMR1], 这里 cluster 倾斜代数定义为 cluster 倾斜对象的自同态代数, 即为 $\text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T)^{\text{op}}$. 近年来, 对这一类代数的大量研究表明, 它们具有很多好的性质.

文 [BMR1] 证明了 cluster 倾斜代数的模范畴很大程度上是由它所对应的 cluster 范畴确定的. 若 T 是 cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 的一个 cluster 倾斜对象, 那么存在范畴等价

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}(H)}(T, -) : \mathcal{C}(H)/\text{add}(\tau T) \longrightarrow \text{mod } \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T)^{\text{op}}$$

文 [BMR2] 给出了 cluster 倾斜代数理论和 cluster 代数理论之间的联系. 证明了: 若 \bar{T} 是 cluster 范畴中的一个几乎倾斜对象, M 和 M^* 是它的两个补, 记 $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(\bar{T} \oplus M)^{\text{op}}$, $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(\bar{T} \oplus M^*)^{\text{op}}$, k 是 M 在 Γ 中对应的点, 那么箭图 Q_Γ 和 $Q_{\Gamma'}$, 或者等价的说, 矩阵 $B_\Gamma = (b_{ij})$ 和 $B_{\Gamma'} = (b'_{ij})$ 存在下面的关系式

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{若 } i=k \text{ 或 } j=k; \\ b_{ij} + \frac{1}{2}(|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|) & \text{其它.} \end{cases}$$

文 [ABS1] 给出了 cluster 倾斜代数和经典的倾斜代数之间的关系, 证明了一个代数 \tilde{C} 是一个 cluster 倾斜代数当且仅当存在一个倾斜代数 C 使得 \tilde{C} 是 C 的关系扩张代数.

文 [KR1] 考查了 cluster 倾斜代数的同调性质, 特别是证明了 cluster 倾斜代数是 Gorenstein 维数至多为 1 的 Gorenstein 代数. Cluster 倾斜代数理论也为经典的倾斜理论带来了新的视角, 比如广义 APR-倾斜, 参见文 [BMR1].

Dynkin 型 (A_n, D_n, E_6, E_7, E_8) 遗传代数作为最经典的一类有限维遗传代数, 在有限维遗传代数的发展中起到举足轻重的作用. 同样由 Dynkin 型遗传代数生成的 cluster 范畴在 cluster 范畴和 cluster 倾斜代数的发展中也起到了很好的推动作用, 因此对 Dynkin 型的研究成为我们研究 cluster 范畴及 cluster 倾斜代数的一个重要突破点.

文 [BMR3] 证明了 Dynkin 型 cluster 倾斜代数由其箭图唯一确定, 从而对 Dynkin 型我们可以把 cluster 范畴中的 cluster 倾斜对象的 mutation 转化为对应的 cluster 倾斜代数箭图的 mutation, 即通过对箭图的 mutation 我们可以实现 cluster 代数上的 cluster-mutation.

文 [CCS1] 独立构造了一个几何化的 A_n 型的范畴, 并且证明了这个范畴等价于 A_n 型 cluster 范畴. 紧接着, H. Torkildsen 在 [Tor] 中利用 [CCS1] 中的几何化模型给出了两个 A_n 型 cluster 倾斜代数同构的等价条件, 并算出了其个数.

同时, A. Buan 和 D. Vatne 运用组合的方法给出了 A_n 型 cluster 倾斜代数的导出等价分类; J. Bastian 和 T. Holm 在 [BH] 中给出了 E 型 cluster 倾斜代数的导出等价分类; 对 D_n 型的导出等价分类至今没人解决.

D. Vatne 在文 [Vat] 中运用组合的方法给出了 D_n 型箭图的 mutation 等价类. R. Schiffler 在文 [Sch] 独立构造了一个几何化的 D_n 型的范畴, 并证明了这个范畴等价于 D_n 型的 cluster 范畴.

本论文第二章进一步对 D_n 型 cluster 倾斜代数进行研究. 首先我们给出了穿刺多边形 P_n 中由标记弧构成的三角的等价分类; 进一步, 我们得到了 D_n 型箭图的 mutation 等价类和所有的 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图, 并且我们还给出了它们的关系理想; 最后, 我们证明了: 设 T 和 T' 是 $D_n (n \geq 5)$ 型 cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 中的两个 cluster 倾斜对象, $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T)^{\text{op}}$ 与 $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T')^{\text{op}}$ 是相应的 cluster 倾斜代数. 则 Γ 和 Γ' 同构的充要条件是存在整数 i 和 j 使得 $T = \tau^i T'$ 或 $T = \sigma \tau^j T'$, 其中 τ 是 Auslander-Reiten 变换, σ 是 cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 中的一个自同构函子.

现在, cluster 范畴和 cluster 倾斜代数已经成为代数表示论一个重要的组成部分, 关于最近的研究成果, 可以参见文 [ABS1, ABS2, ABS3, BMR1, BMR2, BMR3, BMRT, BR, CK1, CK2, KR1, KR2, KZ, Zh1, Zh2], 也可参见综述性文献 [BM, Re].

任意给定正整数 m , 作为 cluster 范畴的推广, H. Thomas 在文 [Th] 引入了 m -cluster 范畴的概念. 设 H 是代数闭域上的有限维遗传代数, $\mathcal{D}^b(H)$ 是 H 的有界导出范畴, τ 是 $\mathcal{D}^b(H)$ 上的 Auslander-Reiten 变换, $[1]$ 是 $\mathcal{D}^b(H)$ 中的平移函子. 令 $F_m = \tau^{-1}[m]$, m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 定义为轨道范畴 $\mathcal{D}^b(H)/F_m$. 对象是 $\mathcal{D}^b(H)$ 中对

象的 F_m -轨道, 态射定义为:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(H)}(X, F_m^i Y),$$

这里 X, Y 是 $\mathcal{D}^b(H)$ 的对象, \tilde{X}, \tilde{Y} 分别是 X, Y 的 F_m -轨道. (为了方便, 我们有时将 \tilde{X}, \tilde{Y} 简记为 X, Y). 由文 [K], $\mathcal{C}_m(H)$ 是三角范畴, 同时也是 Calabi-Yau 维数为 $m+1$ 的 Calabi-Yau 范畴. 作为 cluster 范畴的推广, m -cluster 范畴为 Fomin 和 Reading 定义的 m -cluster 组合 ([FR1, FR2]) 提供了一种好的代数理解.

随后, m -cluster 倾斜对象和 m -cluster 倾斜代数也被引入, 若 m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 上的一个对象 T 满足以下条件:

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(T, X[i]) = 0, 1 \leq i \leq m$, 当且仅当 $X \in \mathrm{add}(T)$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(X, T[i]) = 0, 1 \leq i \leq m$, 当且仅当 $X \in \mathrm{add}(T)$,

则称 T 为 m -cluster 倾斜对象. m -cluster 倾斜代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\mathrm{op}}$ 为 m -cluster 倾斜对象 T 的自同态代数. 在这方面的研究产生了很多成果, 参见文 [BaM1, BaM2, HJ1, HJ2, KR1, KR2, IY, P, Wr, Zh3, ZZ].

在 Dynkin 型 m -cluster 范畴和 m -cluster 倾斜代数方面, K. Baur 和 R. Marsh 做了一系列的工作, 在文 [BaM1] 和 [BaM2] 分别给出了 A_n 型和 D_n 型 m -cluster 范畴的几何模型. Graham. J. Murphy 在 [Mu] 中利用 [BaM1] 中的几何模型给出了 A_n 型 m -cluster 倾斜代数的导出等价分类.

本论文第三章进一步对 A_n 型 m -cluster 倾斜代数进行研究. 首先我们讨论了由 m -cluster 倾斜对象构成的倾斜图的连通性. 其次, 我们给出了 A_n 型 m -cluster 倾斜代数连通的充要条件. 最后, 我们证明了: 设 T 和 T' 是 A_n 型 m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 中的两个连通的 m -cluster 倾斜对象, $B = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\mathrm{op}}$ 与 $B' = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T')^{\mathrm{op}}$ 是相应的 m -cluster 倾斜代数. 则 B 和 B' 同构的充要条件是存在整数 i 使得 $T = T'[i]$, 其中 $[i]$ 是平移函子 [1] 的 i 次幂.

§1.2 预备知识

本节介绍代数表示论中的一些基本概念，符号和结论。

定义 1.2.1. 箭图 (quiver) $Q := (Q_0, Q_1, s, t: Q_1 \rightarrow Q_0)$, 其中 Q_0 是顶点集, Q_1 是箭向集. $\forall \rho \in Q_1, s(\rho)$ 是 ρ 的起点, $t(\rho)$ 是 ρ 的终点, 即 $s(\rho) \xrightarrow{\rho} t(\rho)$. 若与顶点 x 相连的箭向都以 x 为起点, 我们称点 x 为 source 点; 若与顶点 x 相连的箭向都以 x 为终点, 我们称点 x 为 sink 点.

Dynkin 型箭图 (无赋值) 是指底图 (去掉方向得到的图) 为以下五种的箭图.

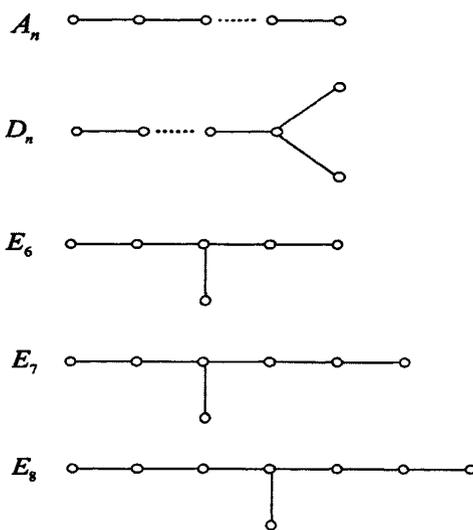


图 1.2-1

定义 1.2.2. 箭图 mutation: 对箭图 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 和任一点 i , 定义 Q 在点 i 处的 mutation 箭图 $Q^* = (Q_0^*, Q_1^*, s^*, t^*)$ 是 Q 通过如下变换得到:

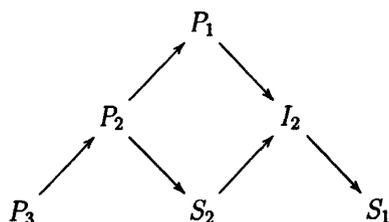
- 对所有和 i 相连的箭向反向;
- 若有 r 个从 j 到 i 的箭向, 有 s 个 i 到 k 的箭向, 那么添加 rs 个从 j 到 k 的箭向, 然后去掉极大的 2- 循环箭向.

我们记 $Q^* = \mu_i(Q)$, 其中 μ_i 为 Q 在点 i 处的 mutation 作用. 若箭图 Q' 由箭图 Q 经过一系列 mutation 作用得到, 那么我们称 Q' 和 Q 是 mutation 等价的. 所有与 A_n 型箭图 mutation 等价的箭图构成的集合我们记为 \mathcal{M}_n^A ; 所有与 D_n 型箭图 mutation 等价的箭图构成的集合记为 \mathcal{M}_n^D .

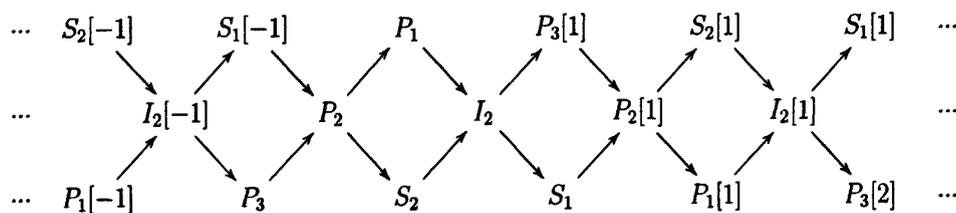
上个世纪七十年代左右, M. Auslander, I. Reiten, 和 S.O. Smalø 等人创立了 Auslander-Reiten 理论, 并迅速成为 Artin 代数表示理论的一个重要分支, 参见 [ARS]. 通过 Auslander-Reiten 理论, 我们可以用 Auslander-Reiten 箭图来直观的描述一个代数的表示范畴. 上个世纪八十年代, D. Happel 引入了导出范畴, 并迅速发展了导出范畴上的 Auslander-Reiten 理论. 下面我们来回顾一下 A_n 型有限维遗传代数的导出范畴的 Auslander-Reiten 箭图.

D. Happel 证明了导出范畴 $D^b(A_n)$ 的 Auslander-Reiten 箭图 $\Gamma_{D^b(A_n)}$ 同构与 $\overrightarrow{\mathbb{Z}A_n}$, 参见 [Hap]. 例: 当 $n = 3$ 时, $A_3: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 的模范畴和导出范畴的 Auslander-Reiten 箭图如下图:

$\Gamma_{\text{mod}A_3}$:



$\Gamma_{D^b(A_3)}$:



其中 P_1, P_2, P_3 表示不可分解投射模, $S_1, S_2, S_3 = P_1$ 表示单模, $I_1 = S_1, I_2, I_3 = P_1$ 表示不可分解内射模.

在箭图 $\Gamma_{D^b(A_n)}$ 中, 一个有 n 个箭向的链 $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$ 若满足 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, 我们都有 $M_i \neq \tau M_{i+2}$, 我们则称它为一个 ray 或 coray. 在箭图 $\Gamma_{D^b(A_n)}$ 中, 若它是从下往上的, 我们称为 ray; 若它是从上往下的, 我们称为

coray. 例: $\Gamma_{D^b(A_3)}$ 中, $P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$ 和 $P_1[-1] \rightarrow I_2[-1] \rightarrow S_1[-1]$ 为 ray;
 $S_1[-1] \rightarrow P_2 \rightarrow S_2$ 和 $P_1 \rightarrow I_2 \rightarrow S_1$ 为 coray.

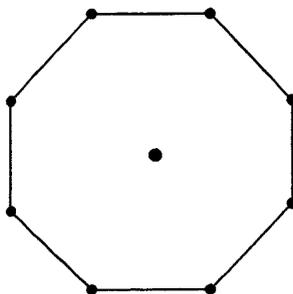
从现在开始, 如不特别说明, 我们总假定 H 是代数闭域 k 上的有限维遗传代数. 我们所考虑的模或者对象都是基本 (basic) 的. 关于代数表示论中更多的定义和符号, 参见文 [ARS, ASS, Hap, Rin].

第二章 D_n 型 cluster 倾斜代数

设 k 是代数闭域, H 是 D_n 型遗传 k -代数. 本章主要分三部分: 第一节, 预备知识, 主要介绍 D_n 型 cluster 范畴的几何化描述; 第二节, 我们给出了穿刺多边形 P_n 中由标记弧构成的三角的等价分类, 进一步我们得到了 D_n 型箭图的 mutation 等价类和所有的 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图; 第三节, 我们证明了: 设 T 和 T' 是 $D_n (n \geq 5)$ 型 cluster 范畴 $\mathcal{C}(H)$ 中的两个 cluster 倾斜对象, $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T)^{\text{op}}$ 与 $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}(H)}(T')^{\text{op}}$ 是相应的 cluster 倾斜代数. 则 Γ 和 Γ' 同构的充要条件是存在整数 i 和 j 使得 $T = \tau^i T'$ 或 $T = \sigma \tau^j T'$.

§2.1 预备知识

设 P_n 是在中心有一个穿刺的穿刺多边形, 其中 n 为正整数且 $n \geq 4$. 例: 当 $n = 8$ 时, P_8 如下图:



$$n = 8$$

图 2.1-1

下面我们回顾一下 [Sch] 中的一些定义和结果, 这对我们以后的讨论非常必要.

设 a 和 b 是穿刺多边形 P_n 的两个不同的顶点, $\delta_{a,b}$ 是按逆时针方向沿着边界从 a 到 b 的一条路, 并且同一个顶点不经过两次. $|\delta_{a,b}|$ 表示路 $\delta_{a,b}$ 的顶点的个数 (包含

a 和 b). 对顶点 a 和 b 定义 a 和 b 相邻, 若 $|\delta_{a,b}| = 2$ 或 $|\delta_{a,b}| = n$; a 和 b 逆时针相邻, 若 $|\delta_{a,b}| = 2$; a 和 b 顺时针相邻, 若 $|\delta_{a,b}| = n$. $\delta_{a,a}$ 表示从 a 出发逆时针绕多边形一周又回到 a 的一条路, 显然 $|\delta_{a,a}| = n + 1$.

P_n 中的一个弧是指一个三元组 (a, α, b) 满足以下条件:

1. a 和 b 是穿刺多边形 P_n 的两个的顶点 (a 和 b 可以相同), α 表示从 a 到 b 的一条路;
2. α 在 P_n 的内部, 且自不相交;
3. α 与 $\delta_{a,b}$ 同伦, 且 $|\delta_{a,b}| \geq 3$.

两个弧 (a, α, b) 和 (c, β, d) 等价当且仅当 $a = c, b = d$, 并且 α 同伦与 β . 定义集合 E 表示所有弧的等价类构成的集合, 显然 E 中任一元素有顶点构成的二元有序组 (a, b) 唯一确定. 因此, 在 E 中我们用 $M_{a,b}$ 表示弧 (a, α, b) 的等价类.

$E' = \{M_{a,b}^\epsilon \mid M_{a,b} \in E, \epsilon = \pm 1 \text{ 若 } a = b; \epsilon = 1 \text{ 若 } a \neq b\}$ 表示由标记弧构成的集合. 若 $a \neq b, M_{a,b}^1$ 简记为 $M_{a,b}$. 对 P_n 中的任意一个顶点 a , 存在 E' 中的两个标记弧 $M_{a,a}^{-1}$ 和 $M_{a,a}^1$, 在 P_n 中我们用从 a 出发到穿刺点的弧来表示他们, 其中 $M_{a,a}^{-1}$ 表示带一个标记的弧, $M_{a,a}^1$ 表示不带标记的弧. 例如:

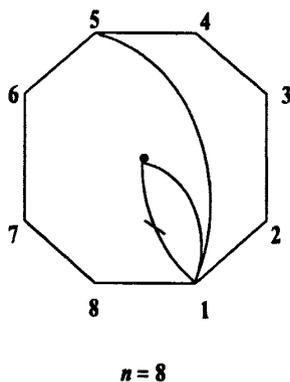


图 2.1-2

为了下面证明方便, 我们给出一些简单的定义. 若 $a \neq b$, 我们称 $M_{a,b}$ 的长度为 $|\delta_{a,b}|$; 若 $a = b, M_{a,a}^\epsilon$ 的长度为 1. $M_{a,b}$ 称为接近边界的, 若它的长度为 3; $M_{a,b}$ 称为连通的, 若它的长度大于 3; 对任一个顶点 $a, M_{a,a}^\epsilon$ 称为退化的.

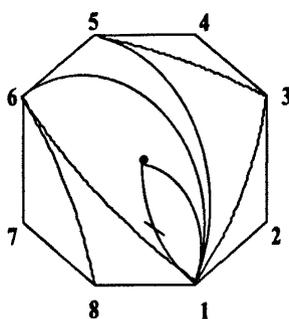
我们用 Δ° 表示穿刺多边形 P_n 的内部, 设 $M = M_{a,b}^\epsilon$ 和 $N = M_{c,d}^{\epsilon'}$ 为 E' 中的两个标记弧, 定义 $e(M, N)$ 为 M 和 N 在 Δ° 中的交点个数的下确界. 穿刺多边形 P_n 中的三角定义为极大的不相交的标记弧的集合.

引理 2.1.1.^[Sch] (1) 任一穿刺多边形 P_n 中的三角都正好含有 n 个元素.

(2) 对任意 $M \in E'$, $e(M, M) = 0$, 并且有

$$e(M_{a,a}^\epsilon, M_{b,b}^{\epsilon'}) = \begin{cases} 1 & a \neq b \text{ 且 } \epsilon \neq \epsilon'; \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

例: 当 $n = 8$ 时, P_8 中的一个三角如图 2.1-3:



$n = 8$

图 2.1-3

在 [Sch] 中, 我们定义 Auslander-Reiten 变换函子 τ 为 E' 到 E' 的双射, 满足如下性质: 对任意 $M_{a,b}^\epsilon \in E'$, 设 a' (或 b') 和 a (或 b) 顺时针相邻, 那么

1. 若 $a \neq b$, $\tau M_{a,b}^\epsilon = M_{a',b'}$;
2. 若 $a = b$, $\tau M_{a,a}^\epsilon = M_{a',a'}^{-\epsilon}$, 其中 $\epsilon = \pm 1$.

定义 2.1.2. 单位运动 (Elementary moves)

在穿刺多边形 P_n 中, 设 c (或 d) 和 a (或 b) 逆时针相邻, 从标记弧 $M_{a,b}^\epsilon$ 出发的单位运动由下面四种情况构成:

1. 若 $|\delta_{a,b}| = 3$, 那么存在单位运动 $M_{a,b} \mapsto M_{a,d}$.

2. 若 $4 \leq |\delta_{a,b}| \leq n-1$, 那么存在两个单位运动 $M_{a,b} \mapsto M_{c,b}$ 和 $M_{a,b} \mapsto M_{a,d}$.
3. 若 $|\delta_{a,b}| = n$, 那么 $d = a$, 存在三个单位运动 $M_{a,b} \mapsto M_{c,b}$, $M_{a,b} \mapsto M_{a,a}^1$ 和 $M_{a,b} \mapsto M_{a,a}^{-1}$.
4. 若 $|\delta_{a,b}| = n+1$, 那么 $a = b$, 存在单位运动 $M_{a,a}^\epsilon \mapsto M_{c,a}$.

标记弧范畴 \mathcal{C} 是一个域 k 上的加法范畴, 其中对象为 E' 中标记弧的直和, 从标记弧 M 到 N 的态射为从 M 到 N 的所有单位运动序列张成的 k 线性空间在网格 (mesh) 关系下的商空间, 详细的描述参见 [Sch].

设 H 是 D_n 型遗传 k -代数, $\mathcal{C}(H)$ 是代数 H 对应的 cluster 范畴. 如不特别说明, $\mathcal{C}(H)$ 一般简记为 \mathcal{C} . 由 [BMRRT] 知, cluster 范畴 \mathcal{C} 是一个三角范畴, 且 $\mathcal{C} = \mathcal{D}^b(H)/\tau^{-1}[1]$. cluster 范畴 \mathcal{C} 中的 cluster 倾斜对象 T 满足如下条件: (1) $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, T) = 0$; (2) 对 cluster 范畴 \mathcal{C} 中任意不可分解对象 M , 若 $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, M) = 0$, 则 M 是 T 的直和项.

下面的两个引理来自 [Sch], 我们后面的证明要用到.

引理 2.1.3. 标记弧范畴 \mathcal{C} 和 D_n 型 cluster 范畴 \mathcal{C} 之间范畴等价, 等价函子记为 $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 且 \mathcal{C} 中平移函子 $[1] = \tau$.

在标记弧范畴 \mathcal{C} 中, 我们定义两个不可分解对象 M 和 N 之间的扩张函子 Ext^1 如下: $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \tau N)$.

引理 2.1.4. 设 M 和 N 是标记弧范畴 \mathcal{C} 中任意两个不可分解对象, 则我们有: $\dim_k \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) = e(M, N)$.

设 \mathcal{T}_n 是穿刺多边形 P_n 中所有三角构成的集合. 通过引理 2.1.3 和引理 2.1.4, 我们知: 对任一 \mathcal{T}_n 中三角 Δ , 对应的 $\varphi(\Delta)$ 是 \mathcal{C} 中 cluster 倾斜对象. cluster 倾斜代数为 cluster 倾斜对象的自同态代数, 即为 $\text{End}_{\mathcal{C}}(\varphi(\Delta))^{\text{op}}$, 其箭图我们记为 Q_{Δ} . 显然, 所有 D_n 型的 cluster 倾斜代数的箭图都可以通过这种方式得到.

一个三角 Δ 在给定的标记弧 M 处的 mutation 定义如下: 去掉这个给定的标记弧 M , 添加另一个标记弧 M' 使添加上之后得到的 Δ' 仍然是一个三角, 详细的描述参见 [Sch]. 设 Q_{Δ} 是 Δ 对应的 cluster 倾斜代数的箭图, 显然, 三角 Δ 在标记弧 M 处的 mutation 诱导出了 Q_{Δ} 在与 M 对应顶点 i 处的箭图 mutation. 进一步, 我们知

道每一个三角可以诱导出一个 cluster 倾斜代数的箭图, 并且每一个 cluster 倾斜代数的箭图对应至少一个三角.

设 \mathcal{M}_n^D 是所有与 D_n 型箭图 mutation 等价的箭图构成的集合, 即由 D_n 型箭图通过箭图 mutation 生成的所有的箭图. 通过上面的论述, 我们有态射 $\gamma: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{M}_n^D$, 对 \mathcal{T}_n 中的任一三角 Δ , 定义 $\gamma(\Delta) = Q_\Delta$, 显然 γ 是满射. 设 \mathcal{H}_n 是 D_n 型 cluster 倾斜代数的同构类构成的集合, 由 [BMR3] 知: 任一 D_n 型 cluster 倾斜代数在同构的意义下有它的箭图唯一确定, 那么由 γ 诱导出了态射 $\gamma': \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$, 显然 γ' 也是满射.

定义 2.1.5. 设 \mathcal{C} 是穿刺多边形 P_n 中的标记弧范畴, 定义函子 $\sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 满足:

- (1) $\sigma(M_{a,b}) = M_{a,b}$, 若 $a \neq b$;
- (2) $\sigma(M_{a,b}^\epsilon) = M_{a,b}^{-\epsilon}$, 若 $a = b$, 其中 $\epsilon = \pm 1$.

注: σ 是 \mathcal{C} 到 \mathcal{C} 的自同构函子, 且 $\sigma^2 = 1$. 对 \mathcal{T}_n 中的任一三角 Δ , 我们有 $\gamma(\Delta) = \gamma(\sigma\Delta)$, 并且 σ 和 τ 函子可交换, 即: $\tau\sigma = \sigma\tau$.

在 \mathcal{T}_n 中我们定义等价关系 \sim 如下: 若 $\Delta = \tau^i \Delta'$ 或 $\Delta = \sigma \tau^j \Delta'$, 其中 i, j 为任意整数, 则 $\Delta \sim \Delta'$. 我们记 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 为 \mathcal{T}_n 中的等价类构成的集合, 那么我们得到一个由 γ 诱导的态射 $\widetilde{\gamma}: \widetilde{\mathcal{T}}_n \rightarrow \mathcal{M}_n^D$, 显然由 $\gamma(\Delta) = \gamma(\sigma\Delta)$ 知, $\widetilde{\gamma}$ 是良定义的, 即: 当 $\Delta \sim \Delta'$ 时, $Q_\Delta = Q_{\Delta'}$. 由 γ 是满射我们易知 $\widetilde{\gamma}$ 也是满射, 在 2.3 节我们将证明: 当 $n \geq 5$ 时, $\widetilde{\gamma}$ 也是单射.

§2.2 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图

本章, 通过几个引理, 我们对 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中的元素进行了分类, 进一步我们对 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图进行了细致的刻画, 把它们分成了四类.

设 Δ 是 \mathcal{T}_n 中的一个三角, Q_Δ 是对应的 cluster 倾斜代数 $\text{End}_{\mathcal{G}}(\varphi(\Delta))^{\text{op}}$ 的箭图, M 是 Δ 中的一个标记弧, 我们记 V_M 为在 Q_Δ 中与 M 对应的顶点. 若标记弧 M 在 Δ 中是连通的, 则我们说相应的顶点 V_M 在 Q_Δ 中也是连通的; 若顶点 V_M 和 V_N 在箭图 Q_Δ 中有一个箭向相连, 则我们说相应的标记弧 M 和 N 也是相连的.

设 Δ 是 \mathcal{T}_n 中的一个三角, $M = M_{a,b} \in \Delta$ 是 Δ 中的一个连通的标记弧, 那么 M 把穿刺多边形 P_n 分成两部分, 一部分 P' 在中间没有穿刺点, 另一部分 P'' 在

其中间有穿刺点. 同样的, M 也把三角 Δ 分成了两部分, 一部分 Δ_1 在 P' 中, 另一部分 Δ_2 在 P'' 中, 并且有 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{M\}$. 对 Δ_1 和 Δ_2 , 我们有如下引理.

引理 2.2.1. Δ_1 和 Δ_2 定义如上, 设 $M_1 \in \Delta_1, M_2 \in \Delta_2, V_{M_1}$ 和 V_{M_2} 是 Q_Δ 中对应的顶点. 则 V_{M_1} 和 V_{M_2} 在 Q_Δ 中必没有箭向相连, 且任何 V_{M_1} 和 V_{M_2} 之间的路必然经过顶点 V_M .

证明: 反证法. 不失一般性, 我们不妨设存在一条 V_{M_1} 到 V_{M_2} 的箭向, 也就是说, $\text{Ext}_C^1(M_1, \tau^{-1}M_2) = \text{Hom}_C(M_1, M_2) \neq 0$, 则由引理 2.1.4 知: $e(M_1, \tau^{-1}M_2) \neq 0$, 也就是说, M_1 和 $\tau^{-1}M_2$ 在穿刺多边形 P_n 的内部相交. 又由 M 分 Δ 为 Δ_1 和 Δ_2 两部分, 并且 $M_1 \in \Delta_1, M_2 \in \Delta_2$ 知, M 和 $\tau^{-1}M_2$ 在穿刺多边形 P_n 的内部必相交. 则 $e(M, \tau^{-1}M_2) \neq 0$. 同样由引理 2.1.4 知, $\text{Ext}_C^1(M, \tau^{-1}M_2) = \text{Hom}_C(M, M_2) \neq 0$. 同理, 我们也可以证明: $\text{Hom}_C(M_1, M) \neq 0$. 由 $\text{Hom}_C(M_1, M) \neq 0$ 和 $\text{Hom}_C(M, M_2) \neq 0$ 知: 在箭图 Q_Δ 中, 存在一条从 V_{M_1} 到 V_M 的路 $V_{M_1} \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_i \rightarrow V_M$ 和一条从 V_M 到 V_{M_2} 的路 $V_M \rightarrow V'_1 \rightarrow \dots \rightarrow V'_j \rightarrow V_{M_2}$, 从而我们有一个 Q_Δ 的子箭图. 如图 2.2-1.

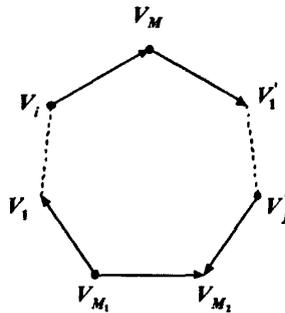


图 2.2-1

在箭图 Q_Δ 中, 依次作用箭图 mutation $\mu_{V_1}, \mu_{V_2}, \dots, \mu_{V_i}, \mu_{V_M}, \mu_{V'_1}, \dots, \mu_{V'_j}$, 我们将得到另一条 V_{M_1} 到 V_{M_2} 的箭向, 这与 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图没有重箭向矛盾, 从而命题得证. \square

注: 我们用 P'_m 代替 P' , 其中 m 表示 P' 中顶点的个数. 在箭图 Q_Δ 中去掉 Δ_2 对应的顶点得到子箭图 Q'_m , 由 [CCS1] 知 Q'_m 是 A_m 型 cluster 倾斜代数的箭图.

引理 2.2.2. 设 M 是三角 Δ 中的一个连通的标记弧, Q'_m 是 Q_Δ 的子箭图, 定义如上. 则 Q'_m 中和 V_M 相连的顶点个数为一个或两个. 若个数为两个, 则顶点 V_M 和这两个相连的顶点构成一个长度为 3 的箭向圈.

证明: 设 V_N 是箭图 Q'_m 中和 V_M 相连的一个顶点, 由引理 2.2.1 知, 我们只须考虑以下三种情况即可, 如图 2.2-2.

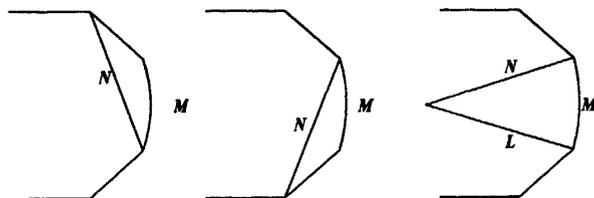


图 2.2-2

前两种情况, 和 V_M 相连的顶点只有 V_N ; 第三种情况, V_M 在长度为 3 的箭向圈 $V_M \rightarrow V_L \rightarrow V_N \rightarrow V_M$ 中. \square

设 \mathcal{M}_k^A 是 A_k 型箭图的 mutation 等价类, 所有 mutation 等价类 $\mathcal{M}_k^A (k \geq 1)$ 中的箭图构成的集合我们记为 \mathcal{M}^A . 若 Q 是一个 \mathcal{M}^A 中的箭图, 由 [BV] 知 Q 具有如下性质.

1. 所有箭向圈的长度均为 3;
2. 和任意一个顶点相连的箭向的个数最多为四个;
3. 若和某个顶点相连的箭向的个数为四个, 则其中两个箭向属于一个长度为 3 的箭向圈, 另两个箭向属于另一个长度为 3 的箭向圈;
4. 若和某个顶点相连的箭向的个数为三个, 则其中两个箭向属于一个长度为 3 的箭向圈, 另外一个箭向一定不属于某个长度为 3 的箭向圈.

设 H_A 是 A_n 型 cluster- 倾斜代数, 由 [BMR2, BV] 知存在 \mathcal{M}_n^A 中的一个箭图 Q , 使 $H_A = kQ/I$, 其中关系理想 I 由所有长度为 3 的箭向圈中所有长度为 2 的路构成的集合生成. 详细证明参见 [BMR2].

现在我们开始考虑分类 $\widetilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_n / \sim$ 中元素, 其中 \mathcal{T}_n 表示穿孔多边形 P_n 中所有三角构成的集合, 等价关系 \sim 定义如下: $\Delta \sim \Delta'$ 当且仅当 $\Delta = \tau^i \Delta'$ 或 $\Delta = \sigma \tau^j \Delta'$, 其中 i, j 为任意整数. 为后面叙述方便, 我们用三角 Δ 本身表示 Δ 等价类. 由上一节知, 存在满射 $\tilde{\gamma}: \widetilde{\mathcal{T}}_n \rightarrow \mathcal{M}_n^D$, 下一节我们将证明 $\tilde{\gamma}$ 也是单射. 后面我们将对 \mathcal{M}_n^D 中元素进行分类.

为了后面叙述方便, 我们下面给出一些简单的定义. 我们称两个退化的标记弧 $M_{a,a}^1$ 和 $M_{a,a}^{-1}$ 为成双的 (*double*). 若顶点 a 和 b 在穿孔多边形 P_n 中相邻, 我们称两个退化的标记弧 $M_{a,a}^c$ 和 $M_{b,b}^c$ 为成对的 (*pairing*). 设 Δ 是 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中的一个元素, $\tilde{\gamma}(\Delta) = Q_\Delta$ 是对应的 \mathcal{M}_n^D 中的一个元素, 显然 Δ 中至少含有两个退化的标记弧. 首先我们来讨论一下 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中元素的性质.

引理 2.2.3. 设 Δ 是 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中的一个元素, $M_{a,a}^1$ 和 $M_{b,b}^1$ 是 Δ 中的两个退化的标记弧. 若 Δ 按逆时针方向在 $M_{a,a}^1$ 和 $M_{b,b}^1$ 之间没有其它的退化的标记弧, 则标记弧 $M_{a,b}$ 必属于 Δ .

证明: 反证法. 假设标记弧 $M_{a,b}$ 不属于 Δ , 根据三角的定义, 那么必存在一个 Δ 中非退化的标记弧 $M_{c,d}$, 使 $e(M_{c,d}, M_{a,b}) \neq 0$. 由此可知, $e(M_{c,d}, M_{a,a}^1) \neq 0$ 或 $e(M_{c,d}, M_{b,b}^1) \neq 0$, 这与三角 Δ 的定义矛盾, 故命题得证. \square

命题 2.2.4. 设 Δ 是 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中的一个元素.

1. 若三角 Δ 中有一个长度为 n 的标记弧, 则 Δ 中只含有两个退化的标记弧, 且是成双的或成对的.
2. 若三角 Δ 中只有两个的退化的标记弧且为成双的, 记为 $M_{a,a}^1$ 和 $M_{a,a}^{-1}$, 并且 Δ 中没有长度为 n 的标记弧. 则在穿孔多边形 P_n 中必存在一个顶点 $b (b \neq a)$, 使 $M_{a,b}$ 和 $M_{b,a}$ 属于三角 Δ .
3. 若三角 Δ 中只有两个退化的标记弧但不是成双的, 并且 Δ 中没有长度为 n 的标记弧. 则这两个退化的标记弧也不是成对的.
4. 若三角 Δ 中有三个或三个以上的退化的标记弧, 则 Δ 中必没有长度为 n 的标记弧.

证明: 1. 由引理 2.1.1 易得.

2. 设 $M_{a,b}$ 是三角 Δ 中从 a 出发的长度最大的标记弧, 下面我们证明 $M_{b,a}$ 也在三角 Δ 中. 由 Δ 中不含长度为 n 的标记弧知, $M_{a,b}$ 的终点 b 一定不和起点 a 相邻. 若 $M_{b,a}$ 不在三角 Δ 中, 那么必存在一个 Δ 中的非退化的标记弧 $M_{c,d}$, 使 $e(M_{c,d}, M_{b,a}) \neq 0$. 由此可知, $e(M_{c,d}, M_{a,b}) \neq 0$, 与标记弧 $M_{a,b}$ 属于三角 Δ 矛盾. 因此 $M_{a,b}$ 和 $M_{b,a}$ 都属于三角 Δ .

3. 由引理 2.2.3 易得.

4. 由三角的定义易得. □

设 Δ 是 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中的一个元素, $Q_\Delta = \bar{\gamma}(\Delta)$ 是对应的 \mathcal{M}_n^D 中的箭图, H_Δ 是对应的 cluster 倾斜代数. 由命题 2.2.4 知, 我们可以把 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中的元素分为四类. 通过对 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中的元素的划分和引理 2.1.3, 我们可以对 \mathcal{M}_n^D 元素进行划分, 这和 [Vat] 中 \mathcal{M}_n^D 的划分是一致的. 并且我们这种新的分类途径还可以分类对应的 cluster 倾斜代数, 即给出 cluster 倾斜代数的箭图 Q_Δ 中的关系理想, 这与 [BMR3] 中给出的理想是一致的.

类型一: 三角 Δ 中含有长度为 n 的标记弧 $M = M_{a,b}$, 如图 2.2-3.

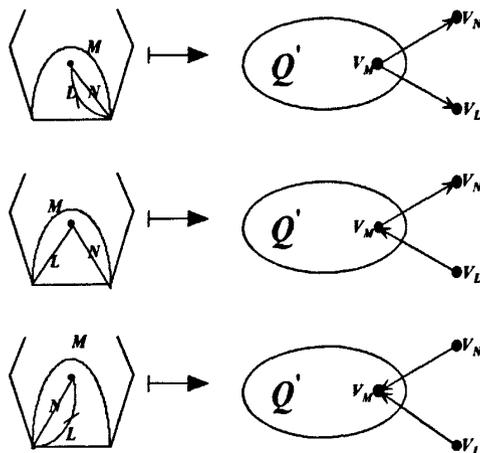


图 2.2-3

其中 $Q' = Q_\Delta \setminus \{V_N, V_L\}$ 是 \mathcal{M}^A 中箭图, 顶点 V_M 是连通的. cluster 倾斜代数 $H_\Delta = kQ_\Delta/I$, 其中关系理想 I 由集合 $\Sigma_{Q'}$ 生成, 集合 $\Sigma_{Q'}$ 表示由 Q' 中所有长度为 3 的箭向圈中所有长度为 2 的路构成.

类型二: 三角 Δ 不含有长度为 n 的标记弧, 但恰好只有两个的退化标记弧且为

成双的.

此时, 我们记成双的标记弧为 $M_{a,a}^1$ 和 $M_{a,a}^{-1}$, 由命题 2.2.4 知, 存在顶点 $b(b \neq a)$ 使得 $M_{a,b}$ 和 $M_{b,a}$ 属于三角 Δ . 并且 $M_{a,b}$ 和 $M_{b,a}$ 把三角 Δ 分成三部分, Δ_1, Δ_2 和 $\{M_{a,b}, M_{b,a}, M_{a,a}^1, M_{a,a}^{-1}\}$.

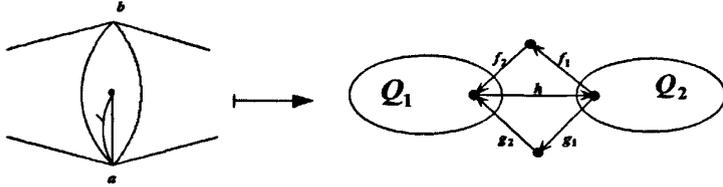


图 2.2-4

如图 2.2-4, 箭图 Q_1 和 Q_2 属于 \mathcal{M}^A . cluster 倾斜代数 $H_\Delta = kQ_\Delta/I$, 其中关系理想 I 由集合 $\Sigma_{Q_1} \cup \Sigma_{Q_2} \cup \{f_1 f_2 - g_1 g_2, h f_1, f_2 h, h g_1, g_2 h\}$ 生成.

类型三: 三角 Δ 不含有长度为 n 的标记弧, 且恰好只有两个的退化标记弧但不是成双的, 如图 2.2-5.

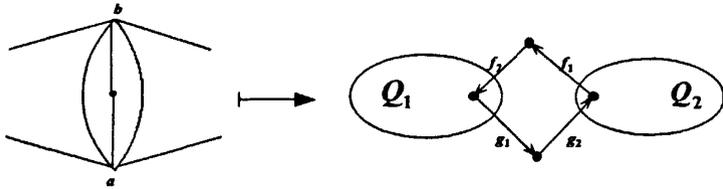


图 2.2-5

此时, 我们记两个退化的标记弧为 $M_{a,a}^1$ 和 $M_{b,b}^1$. 由引理 2.2.3 和命题 2.2.4 知, 两个顶点 a 和 b 一定不相邻并且 $M_{a,b}$ 和 $M_{b,a}$ 属于三角 Δ .

在图 2.2-5 中, 箭图 Q_1 和 Q_2 属于 \mathcal{M}^A . cluster 倾斜代数 $H_\Delta = kQ_\Delta/I$, 其中关系理想 I 由集合 $\Sigma_{Q_1} \cup \Sigma_{Q_2} \cup \{f_1 f_2 g_1, f_2 g_1 g_2, g_1 g_2 f_1, g_2 f_1 f_2\}$ 生成.

类型四: 三角 Δ 含有 t 个退化的标记弧, 其中 $t \geq 3$.

此时, 按逆时针方向我们把这 t 个退化的标记弧依次记为 $M_{a_1, a_1}^1, M_{a_2, a_2}^1, \dots, M_{a_t, a_t}^1$. 为了方便, 我们记 $t + i \equiv i \pmod{t}$, 若 a_i 和 a_{i+1} 相邻, 记 $M_{a_i, a_{i+1}} = 0$. 由

引理 2.2.3 我们知, 所有 $M_{a_1, a_2}, M_{a_2, a_3}, \dots, M_{a_{t-1}, a_t}, M_{a_t, a_1}$ 中的非零元都属于三角 Δ . 并且 $M_{a_1, a_2}, M_{a_2, a_3}, \dots, M_{a_{t-1}, a_t}, M_{a_t, a_1}$ 把三角 Δ 分成 $t+1$ 部分, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_t$ 和 $\{M_{a_1, a_2}, M_{a_2, a_3}, \dots, M_{a_{t-1}, a_t}, M_{a_t, a_1}, M_{a_1, a_1}^1, \dots, M_{a_t, a_t}^1\}$, 如图 2.2-6.

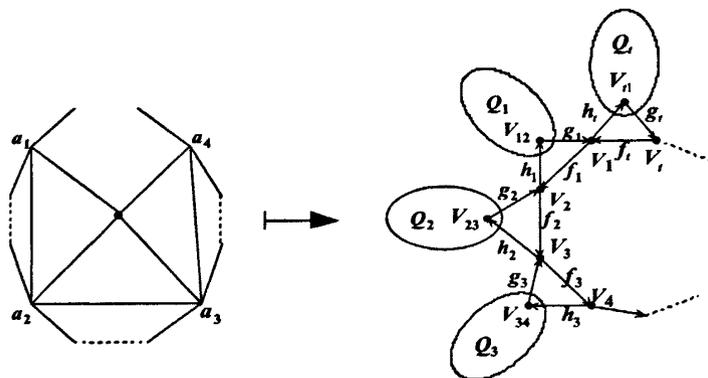


图 2.2-6

在图 2.2-6 中, $V_{M_{a_i, a_i}}$ 和 $V_{M_{a_i, a_{i+1}}}$ 简记为 V_i 和 V_{i+1} . 对应的箭图 Q_Δ 的子箭图 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 属于 M^A , 其中, 若 a_i 和 a_{i+1} 相邻, 则箭图 Q_i 不含任何顶点; 若 $M_{a_i, a_{i+1}}$ 的长度 $|\delta_{a_i, a_{i+1}}| = 3$, 则 Q_i 只含有唯一的一个顶点. 对应的 cluster 倾斜代数 $H_\Delta = kQ_\Delta/I$, 其中关系理想 I 由集合 $(\bigcup_{i=1}^t \Sigma_{Q_i}) \cup \Sigma' \cup \Sigma''$ 生成, 其中 Σ' 为集合 $\{f_1g_1, f_2g_2, \dots, f_tg_t, g_1h_1, g_2h_2, \dots, g_th_t, h_1f_1, h_2f_2, \dots, h_tf_t\}$, Σ'' 为下面两个集合的并,

$\{f_i f_{i+1} f_{i+2} \dots f_{i+t}, \text{ 其中 } 1 \leq i \leq t, a_{i+t} \text{ 和 } a_i \text{ 不相邻}\}$

和 $\{f_i f_{i+1} f_{i+2} \dots f_{i+(t-1)}, \text{ 其中 } 1 \leq i \leq t, a_{i+t} \text{ 和 } a_i \text{ 相邻}\}.$

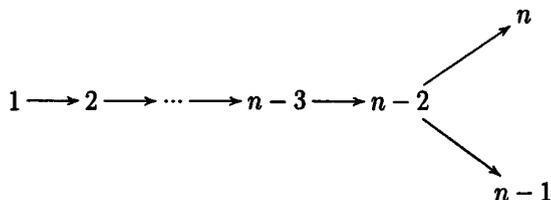
由以上讨论可得下面的定理, 在 [Vat] 中 D. Vatne 首先用另一种方法给出了证明.

定理 2.2.5. 箭图 Q 是 D_n 型 cluster 倾斜代数的箭图当且仅当箭图 Q 属于上面四种类型中的一种.

§2.3 D_n 型 cluster 倾斜代数的同构类

本节, 主要想法来自 [Tor] 中 H.Torkildsen 关于 A_n 型 cluster 倾斜代数的讨论, 我们把它推广到 D_n 型 cluster 倾斜代数.

设 $P_n (n \geq 5)$ 是穿刺多边形, 按逆时针方向我们把 P_n 的顶点记为 $\{1, 2, \dots, n\}$. H 是 D_n 型有限维遗传代数 kQ_n , 其中箭图 Q_n 如下:



设 \mathcal{C} 是代数 H 对应得 cluster 范畴, T 和 T' 是 cluster 范畴 \mathcal{C} 中的两个 cluster 倾斜对象, 本节我们将对 cluster 倾斜代数 $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{\text{op}}$ 和 $\text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{\text{op}}$ 什么时候同构给出充分必要条件.

下面, 我们先来回顾一下 cluster 范畴 \mathcal{C} 的 Auslander-Reiten 箭图的知识, 参考 [Hap]. 记 \mathcal{C} 的 Auslander-Reiten 箭图为 $\Gamma_{\mathcal{C}}$, 它是由箭图 Q_n 重复 n 次构成的稳定箭图. 我们记 $\Gamma_{\mathcal{C}}$ 的顶点 $V(\mathcal{C}) := \mathbb{Z}_n \times \{1, 2, \dots, n\}$, 箭向为 $\left. \begin{matrix} (i, j) \rightarrow (i, l) \\ (i, l) \rightarrow (i+1, l) \end{matrix} \right\}$ 当在 Q_n 中存在一个 $j \rightarrow l$ 的箭向时.

最后, Auslander-Reiten 变换函子 τ 定义如下:

$$\tau(i, j) = \begin{cases} (i-1, n-1), & \text{若 } i=0, j=n \text{ 且 } n \text{ 是奇数,} \\ (i-1, n), & \text{若 } i=0, j=n-1 \text{ 且 } n \text{ 是奇数,} \\ (i-1, j), & \text{其它.} \end{cases}$$

设 \mathcal{C} 是 2.1 节定义的标记弧范畴, 由引理 2.1.3 知, 存在三角范畴的等价 $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. 在 \mathcal{C} 中我们定义不可分解对象 $T_{i,j}$ 与 \mathcal{C} 的箭图 $\Gamma_{\mathcal{C}}$ 中的顶点 (i, j) 相对应. 显然利用三角范畴的等价我们知, $\varphi(M_{i,i+2}) = T_{i,1}$, $\varphi(M_{i,i}^1) = T_{i,n-1}$ 和 $\varphi(M_{i,i}^{-1}) = T_{i,n}$.

在上一节我们定义了标记弧范畴 \mathcal{C} 上的自同构函子 σ , 有它我们可以导出 cluster 范畴 \mathcal{C} 上的一个自同构函子, 我们仍然用记号 σ . 显然 σ 在 \mathcal{C} 上的作用如下: $\sigma(T_{i,j}) = T_{i,j}$, 其中 $1 \leq j \leq n-2$; $\sigma(T_{i,n}) = T_{i,n-1}$; $\sigma(T_{i,n-1}) = T_{i,n}$.

设 T_n^H 表示 cluster 范畴 \mathcal{C} 中所有 cluster 倾斜对象构成的集合, 显然由三角范畴等价 φ 诱导出了双射 $\varphi: T_n \rightarrow T_n^H$. 与在 T_n 中类似, 在 T_n^H 中我们也可以定义等价关系 " \sim " 如下: $T \sim T'$ 当且仅当 $T = \tau^i T'$ 或 $T = \sigma \tau^j T'$, 其中 i 和 j 为任意整数. 我们用 \widetilde{T}_n^H 表示 T_n^H 的所有等价类构成的集合. 由双射 $\varphi: T_n \rightarrow T_n^H$ 我们知, 存在双射 $\widetilde{\varphi}: \widetilde{T}_n \rightarrow \widetilde{T}_n^H$.

下面我们给出本节最重要的一个结果.

定理 2.3.1. 设 T 和 T' 是 $D_n(n \geq 5)$ 型 cluster 范畴 \mathcal{C} 中的两个 cluster 倾斜对象, $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{\text{op}}$ 与 $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{\text{op}}$ 是相应的 cluster 倾斜代数. 则 Γ 和 Γ' 同构的充要条件是存在整数 i 和 j 使得 $T = \tau^i T'$ 或 $T = \sigma \tau^j T'$, 其中 τ 是 Auslander-Reiten 变换.

为了证明定理 2.3.1, 我们先来证明几个引理.

引理 2.3.2. 设三角 Δ 是 \widetilde{T}_n 中的一个元素, $Q_\Delta = \widetilde{\gamma}(\Delta)$ 是对应的 M_n^D 中的箭图. 若三角 Δ 中的标记弧 M 是接近边界的, 则 M 在 Q_Δ 中对应得顶点 V_M 要么是 source 点, 要么是 sink 点, 要么在一个箭向圈中.

证明: 对 M 在三角 Δ 中的位置进行分析, 总共有以下八种情况, 如图 2.3-1.

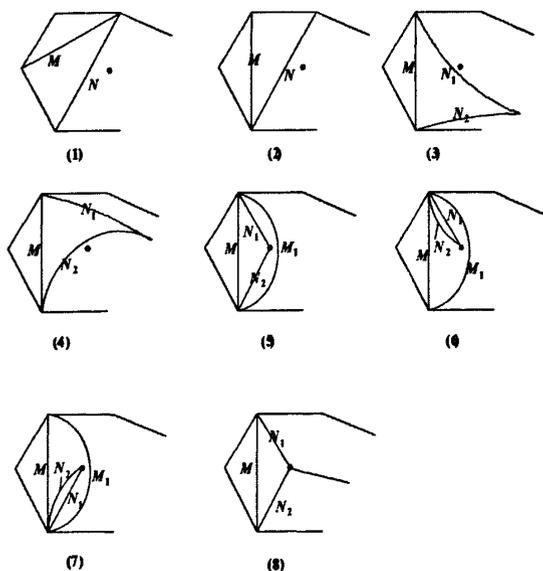


图 2.3-1

由引理 2.2.2 知, 在第一种情况, 顶点 V_M 是 source 点; 在第二种情况, 顶点 V_M 是 sink 点; 剩下的六种情况, 顶点 V_M 依次在如下箭向圈中:

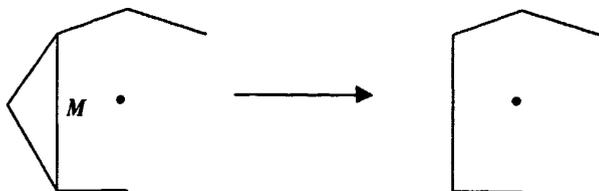
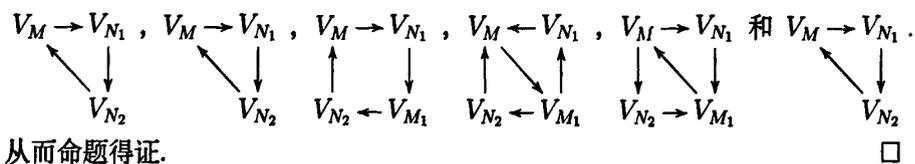


图 2.3-2

设 Δ 是穿刺多边形 $P_n (n \geq 5)$ 中的一个三角, $Q_\Delta = \tilde{\gamma}(\Delta)$ 是对应的箭图, M 是 Δ 中的一个标记弧, 顶点 V_M 是 M 在 Q_Δ 对应的点. 我们定义商三角 Δ/M 为三角 Δ 去掉 M 得到的三角. 显然若 M 是接近边界的标记弧, 则 Δ/M 是穿刺多边形 P_{n-1} 中的一个三角, 如图 2.3-2. 我们用 Q_Δ/V_M 表示 Δ/M 对应的箭图, 由引理 2.3.2 知, 我们有如下推论.

推论 2.3.3. 设 Δ 是 $T_n (n \geq 5)$ 中的一个三角, $Q_\Delta = \tilde{\gamma}(\Delta)$ 是对应的箭图. 若 M 是三角 Δ 中一个接近边界的标记弧, V_M 是 M 在 Q_Δ 中对应的顶点, 则箭图 Q_Δ/V_M 是连通的且属于 \mathcal{M}_{n-1}^D .

引理 2.3.4. 设 Δ 是 $T_n (n \geq 5)$ 中的一个三角, $Q_\Delta = \tilde{\gamma}(\Delta)$ 是对应的箭图. 若 M 是三角 Δ 中一个退化的标记弧, V_M 是 M 在 Q_Δ 中对应的顶点, 则箭图 Q_Δ/V_M 是连通的且属于 \mathcal{M}_{n-1}^A .

证明: 由定理 2.2.5 知, 我们只须考虑以下四种情况, 如图 2.3-3.

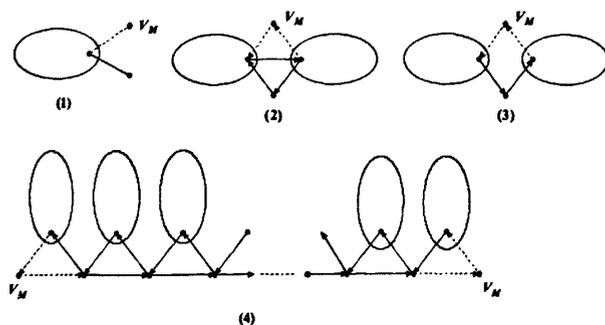


图 2.3-3

由 [BV] 知, 命题成立. □

注: 若 M 是三角 Δ 中一个连通的标记弧, 也就是说, 对应的顶点 V_M 是在 Q_Δ 中是连通的, 由引理 2.2.1 和引理 2.2.2 知, 箭图 Q_Δ/V_M 必不连通.

命题 2.3.5. 设 Δ 是 $T_n (n \geq 5)$ 中的一个三角, $Q_\Delta = \tilde{\gamma}(\Delta)$ 是对应的箭图. 若 M 是三角 Δ 中一个标记弧, V_M 是 M 在 Q_Δ 中对应的顶点, 则我们有:

1. 箭图 Q_Δ/V_M 是连通的且属于 M_{n-1}^D 当且仅当 M 是接近边界的标记弧;
2. 箭图 Q_Δ/V_M 是连通的且属于 M_{n-1}^A 当且仅当 M 是退化的标记弧.

证明: 由推论 2.3.3, 引理 2.3.4 和上面的备注易得. □

引理 2.3.6. 态射 $\tilde{\gamma}: \tilde{T}_5 \rightarrow M_5^D$ 是双射.

证明: 由 2.1 节知, 态射 $\tilde{\gamma}$ 是满射, 下面我们来证 $\tilde{\gamma}$ 也是单射. 由 2.2 节的讨论我们知, \tilde{T}_5 中的三角分为四类. 首先, 我们很容易知道 \tilde{T}_5 中属于第一种类型的三角的个数为十五个, 并且显然它们通过态射 $\tilde{\gamma}$ 对应着互不同构的箭图. 接着, 我们列出了 \tilde{T}_5 中所有属于第二种类型, 第三种类型和第四种类型的三角以及它们所对应的箭图, 如图 2.3-4. 显然, 它们对应着互不同构的箭图, 那么态射 $\tilde{\gamma}: \tilde{T}_5 \rightarrow M_5^D$ 是单射, 从而命题得证. □

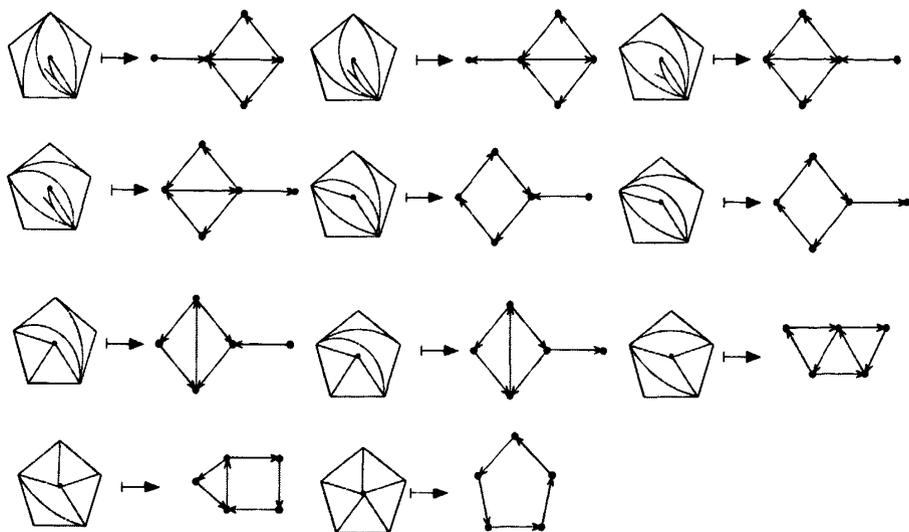


图 2.3-4

现在, 我们来证明 2.1 节最后提到的结果.

命题 2.3.7. 态射 $\tilde{\gamma}: \widetilde{\mathcal{T}}_n \rightarrow \mathcal{M}_n^D$ 是双射, 其中正整数 $n \geq 5$.

证明: 由 2.1 节知, 态射 $\tilde{\gamma}$ 是满射, 下面我们只须证 $\tilde{\gamma}$ 也是单射. 假设在 \mathcal{M}_n^D 中 $Q_\Delta = \tilde{\gamma}(\Delta) = \tilde{\gamma}(\Delta') = Q_{\Delta'}$, 下面我们用归纳法来证在 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中 $\Delta = \Delta'$.

当 $n = 5$ 时, 由引理 2.3.6 知, $\tilde{\gamma}: \widetilde{\mathcal{T}}_5 \rightarrow \mathcal{M}_5^D$ 是单射.

假设 $\tilde{\gamma}: \widetilde{\mathcal{T}}_{n-1} \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}^D$ 是单射, 我们来证当为 n 时也成立.

若三角 Δ 中不含有接近边界的标记弧, 那么 Δ 中的标记弧全是退化的. 显然此时, 箭图 $Q_\Delta = Q_{\Delta'}$ 为有 n 个顶点构成的箭向圈. 从而我们可知, 三角 Δ' 中的所有标记弧也全是退化的, 那么在 $\widetilde{\mathcal{T}}_n$ 中, $\Delta = \Delta'$.

若三角 Δ 中含有一个接近边界的标记弧, 不妨记为 M , V_M 是 M 在 Q_Δ 对应的顶点. 由假设 $Q_\Delta = Q_{\Delta'}$ 和命题 2.3.5 知, 三角 Δ' 中也必含有一个接近边界的标记弧 M' , 并且 M' 在箭图 $Q_\Delta = Q_{\Delta'}$ 中对应的顶点 $V_{M'} = V_M$. 由推论 2.3.3 知, $Q_{\Delta/M} = Q/V_M = Q'/V_{M'} = Q_{\Delta'/M'}$ 且属于集合 \mathcal{M}_{n-1}^D . 由假设我们知, 在 $\widetilde{\mathcal{T}}_{n-1}$ 中, $\Delta/M = \Delta'/M'$.

我们要从三角 $\Delta/M = \Delta'/M'$ 得到三角 Δ 和 Δ' , 我们只须把穿刺多边形 P_{n-1} 在

某个边扩充成一个接近边界的标记弧即可. 固定三角 Δ 中的一个标记弧 N 使得顶点 V_M 和 V_N 在 Q_Δ 中有箭向相连. 由 $Q_\Delta = Q_{\Delta'}$ 我们知, 在三角 Δ' 中必有一个标记弧 N' 和顶点 V_N 对应.

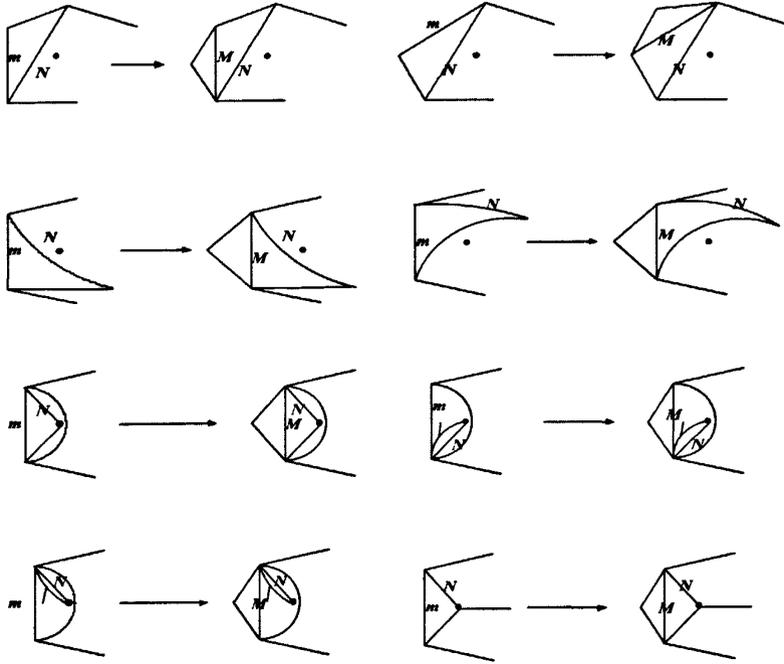


图 2.3-5

如图 2.3-5, 只有八种情况在三角 Δ/M 上扩充一个接近边界的标记弧使得它和 N 相连. 很容易验证这些扩充得到的三角通过态射 $\tilde{\gamma}$ 作用后, 得到互不同构的箭图. 同理, 也只有八种情况在三角 Δ'/M' 上扩充一个接近边界的标记弧使得它和 N' 相连, 并且这些扩充得到的三角通过态射 $\tilde{\gamma}$ 作用后, 得到互不同构的箭图. 因此, 我们得到在集合 \tilde{T}_n 中, $\Delta = \Delta'$. \square

注: 命题 2.3.7 对 D_4 不成立, 如图 2.3-6.

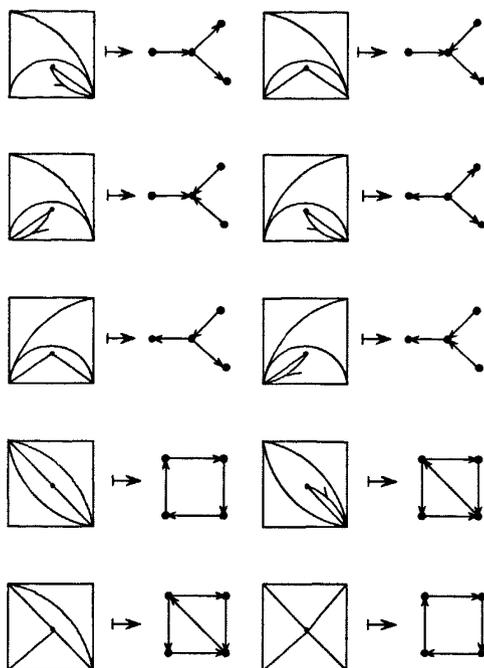


图 2.3-6

定理 2.3.1 的证明. 设 T 和 T' 是 cluster 范畴中的两个 cluster 倾斜对象, Δ 和 Δ' 是 \mathcal{T}_n 中对应的三角. 若 $T \sim T'$, 那么显然有 $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{\text{op}}$ 和 $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{\text{op}}$ 同构. 反过来, 若 $T \approx T'$, 那么 $\Delta \approx \Delta'$. 由命题 2.3.7 知, 箭图 Q_{Δ} 与箭图 $Q_{\Delta'}$ 不同构, 又因为 D_n 型 cluster- 倾斜代数由它的箭图唯一确定, 那么 cluster 倾斜代数 $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{\text{op}}$ 和 $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{\text{op}}$ 不同构, 从而定理得证. \square

备注: 当本文第二章完成并投稿后, A. Buan 和 H. Torildsen 告知他们也做了类似的结果, 参见 [BT].

第三章 A_n 型 m -cluster 倾斜代数

设 k 是代数闭域, H 是 A_n 型遗传 k -代数. 本章主要分三部分: 第一节, 预备知识, 主要介绍 A_n 型 m -cluster 范畴的几何化描述; 第二节, 我们主要讨论了 m -cluster 范畴的倾斜图的连通性; 第三节, 我们给出了两个连通的 A_n 型 m -cluster 倾斜代数同构的充要条件.

§3.1 预备知识

定义 3.1.1. 设 H 是代数闭域 k 上的有限维遗传代数, 我们定义代数 H 的 m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H) := D^b(H)/\tau^{-1}[m]$, 其中 $D^b(H)$ 为 H 上的有界导出范畴, τ 为 $D^b(H)$ 上的 Auslander-Reiten 变换, $[1]$ 为 $D^b(H)$ 上的平移函子, $[m]$ 为 $[1]$ 的 m 次幂, 即: $[1]^m = [m]$. 我们用 $\text{ind}\mathcal{C}_m(H)$ 表示 $\mathcal{C}_m(H)$ 中不可分解对象构成的加法满子范畴.

若 m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 上的一个对象 T 满足以下条件:

- (1) $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(T, X[i]) = 0, 1 \leq i \leq m$, 当且仅当 $X \in \text{add}(T)$;
- (2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}_m(H)}(X, T[i]) = 0, 1 \leq i \leq m$, 当且仅当 $X \in \text{add}(T)$.

则称 T 为 m -cluster 倾斜对象.

我们称 m -cluster 倾斜对象 T 的自同态代数 $\text{End}_{\mathcal{C}_m(H)}(T)^{\text{op}}$ 为 m -cluster 倾斜代数. 本章, 我们主要研究 H 为 A_n 型遗传代数时的情况.

下面我们回顾一下 [BaM2, Mu, Th, Tz, Zh3] 中的一些定义和结果, 这对我们后面的证明非常必要.

设 Π 是一个 $(n+1)m+2$ 多边形, 其中 $m, n \in \mathbb{N}$, 且 $n \geq 2$. 我们把多边形 Π 的顶点按顺时针方向依次标记为 $1, 2, \dots, (n+1)m+2$. Π 中的对角线 D 我们记为 (i, j) , 其中 i, j 为 D 的两个端点. 显然我们有 $(i, j) = (j, i)$. 我们用 $\nu_{i,j}$ 表示 i 和 j 之间较短的边界弧所经过的顶点的个数 (含两个端点 i 和 j).

定义 3.1.2. 我们定义多边形 Π 的逆时针单位转动 $\omega_{(n+1)m+2}$ 满足 $\omega_{(n+1)m+2}(i, j) =$

$(i-1, j-1)$, 其中 $i, j \in \mathbb{Z}_{(n+1)m+2}$. 也就是说, $\omega_{(n+1)m+2}$ 把对角线 (i, j) 沿逆时针转动了一条边的距离. 不特别说明, $\omega_{(n+1)m+2}$ 一般简记为 ω .

我们记 $\omega^{-1} = \omega^{(n+1)m+1}$, 其中 $\omega^{(n+1)m+1}$ 表示 ω 的 $(n+1)m+1$ 次幂. 显然我们有 $\omega^{(n+1)m+2} = 1$, $\omega^{-1}(i, j) = (i+1, j+1)$. 我们称 ω^{-1} 为顺时针单位转动.

例: 当 $n=3, m=2$ 时, $\mu_{10}(1, 4) = (10, 3)$, 如图 3.1-1.

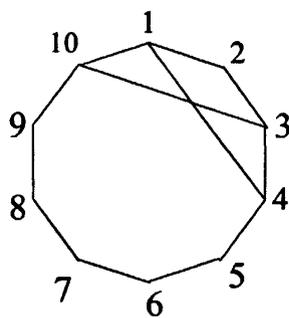


图 3.1-1

定义 3.1.3. 若 Π 中的对角线 D 满足: D 把 Π 分成 $mj+2$ 多边形和 $m(n+1-j)+2$ 多边形, 其中 $j = 1, 2, \dots, [n/2]$, 则我们称 D 为 m - 对角线. 对 m - 对角线 $D = (i, j)$, 我们记它的长度 $|D| = \nu_{i,j}$, 记 Π 中长度最小的 m - 对角线为 接近边界的, 显然它们的长度为 $m+2$.

对多边形 Π 中的 m - 对角线, 我们可以定义箭图 $\Gamma_{A_n}^m$.

定义 3.1.4. 箭图 $\Gamma_{A_n}^m$ 中的顶点和箭向定义如下:

(1) 箭图 $\Gamma_{A_n}^m$ 中的顶点为多边形 Π 中的 m - 对角线.

(2) 箭图 $\Gamma_{A_n}^m$ 中的箭向定义如下: 若 D 和 D' 为 Π 中的两个 m - 对角线, 且它们有一个共同的端点 i , 设 j 和 k 分别是 D 和 D' 的另一个端点. 按顺时针方向, 顶点 i, j, k 把多边形 Π 的边界分成三个弧, $\delta_{ij}, \delta_{jk}, \delta_{ki}$, 如图 3.1-2(为了方便, 我们用圆来表示多边形 Π). 若对角线 D 和 D' 及弧 δ_{jk} 构成一个 $m+2$ 多边形, 并且 D 以点 i 为中心, 在多边形 Π 内部顺时针转动可以得到 D' , 那么我们说在 $\Gamma_{A_n}^m$ 中存在一条从 D 到 D' 的箭向.

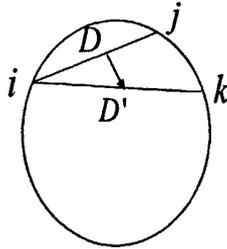


图 3.1-2

注: (1) 若 D 和 D' 为箭图 $\Gamma_{A_n}^m$ 中的两个顶点, 那么它们之间最多存在一条箭向相连. 即 $\Gamma_{A_n}^m$ 没有重箭向.

(2) 在 $\Gamma_{A_n}^m$ 中我们定义变换 $\tau_m = \omega^m$

$$\tau_m : \Gamma_{A_n}^m \rightarrow \Gamma_{A_n}^m$$

$$D \rightarrow D'$$

其中 D' 由 D 沿逆时针方向转动 m 个边得到, 显然 τ_m 为双射.

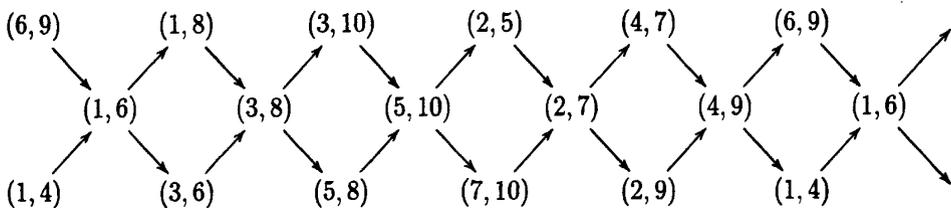
下面我们给出 [BaM2] 中的两个定理, 它们为我们后面的讨论提供了理论支持.

定理 3.1.5. $(\Gamma_{A_n}^m, \tau_m)$ 是连通的稳定的 translation 箭图, 且与 A_n 型 m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 的 Auslander-Reiten 箭图同构.

定理 3.1.6. 由 translation 箭图 $\Gamma_{A_n}^m$ 的 mesh 范畴生成的加法范畴 C_m 与 A_n 型 m -cluster 范畴 $\mathcal{C}_m(H)$ 等价.

注: 关于稳定的 translation 箭图和 mesh 范畴的定义参考 [BaM2, A, Hap]. 后面如果不特别说明, 我们把 $\mathcal{C}_m(H)$ 简记为 \mathcal{C}_m .

例: 当 $n = 3, m = 2$ 时, 箭图 $(\Gamma_{A_n}^m, \tau_m)$ 如下图 3.1-3.



定义 3.1.7. 若 Π 中的一个分割 T 满足如下条件:

1. T 有 n 个在 Π 内部不相交的 m - 对角线构成;
2. T 把 Π 分成 $n + 1$ 个 $m + 2$ 多边形.

则称 T 为 m - 对角线分割.

注: 由定理 3.1.6 知, Π 中的 m - 对角线分割和 m -cluster 范畴 \mathcal{C}_m 中的 m -cluster 倾斜对象一一对应. 即存在双射

$$\varphi: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$$

$$T \rightarrow T$$

其中 \mathcal{T}_n 表示 Π 中的所有 m - 对角线分割构成的集合, \mathcal{S}_n 表示 \mathcal{C}_m 中所有 m -cluster 倾斜对象构成的集合.

设 T 是 Π 中的一个 m - 对角线分割, 我们定义箭图 Q_T 的顶点对应与 T 中的 m - 对角线; 对 Q_T 中的顶点 i 和 j , 存在一个箭向 $i \rightarrow j$ 当且仅当它们满足如下条件:

1. i 和 j 对应得 m - 对角线 D_i 和 D_j 在多边形 Π 中有一个共同端点;
2. 分割 T 把 D_i 和 D_j 分割在同一 $m + 2$ 多边形中;
3. D_j 在 D_i 的顺时针方向.

对 Q_T 中的一条长度为 2 的路 $d: i \rightarrow j \rightarrow k$, 若对应的 D_i , D_j 和 D_k 被 T 分割在同一个 $m + 2$ 多边形中, 那么我们定义此路 d 为零, 在路代数 kQ_T 中由所有这样关系生成的理想我们记为 I_T .

J.Murphy 在 [Mu] 中证明了如下定理, 其中 $m = 1$ 的情况, 首先由 P. Caldero, F. Chapoton, R. Schiffler 在 [CCS1] 证明.

定理 3.1.8. 设 T 是 m - 对角线分割 T 在 m -cluster 范畴 \mathcal{C}_m 中对应的 m -cluster 倾斜对象, 则代数 kQ_T/I_T 同构与 m -cluster 倾斜代数 $\text{End}_{\mathcal{C}_m}(T)^{\text{op}}$.

注 1: 箭图 Q_T 中每个顶点最多连 4 个箭向, 并且只有长度为 $m + 2$ 的箭向圈.

注 2: 由 [BMRRT] 和 [BMR3] 知 cluster 倾斜代数是连通的 (有限维代数连通也就是说它们的箭图连通), 并且 Dynkin 型的 cluster 倾斜代数由它的箭图唯一确定. 但是对 m -cluster 倾斜代数 ($m \geq 2$) 来说, 不一定连通, 也不是有它的箭图唯一确定的.

例: 3 个 A_3 型 2-cluster 倾斜代数如图 3.1-4.

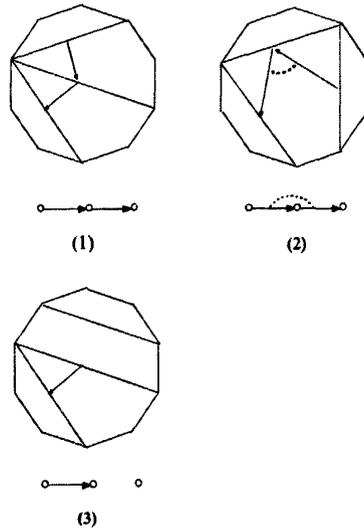


图 3.1-4

图 (1) 和 (2) 的 2-cluster 倾斜代数的箭图一样, 但他们对应的 2-cluster 倾斜代数显然不同构, 图 (3) 对应的 2-cluster 倾斜代数显然不是连通的.

§3.2 A_n 型 m -cluster 范畴的倾斜图

定义 3.2.1. 设 T_0 是 Π 中的一个 m - 对角线分割, 选定 T_0 中的一个 m - 对角线 D_0 . 在 Π 中 D_0 所在的两个 $m+2$ 多边形构成一个 $2m+2$ 多边形, 在此多边形中我们逆时针旋转 D_0 依次得到 m - 对角线 D_1, D_2, \dots, D_m . 因此, 我们定义作用 μ_m :

$$\mu_m(D_i) = D_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

和

$$\mu_m(D_m) = D_0$$

我们令 $\mu_m^{-1} = \mu_m^m$, 其中 μ_m^m 为 μ_m 的 m 次幂. 则我们有 $D_i = \mu_m^i(D_0)$, $\mu_m^{m+1} = 1$. 当 $m = 2$ 时, 如图 3.2-1.

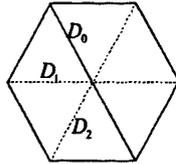


图 3.2-1

我们记 $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_0 \setminus \{D_0\} \cup \{D_i = \mu_m^i(D_0)\}$, 其中 $1 \leq i \leq m$, 显然 \mathcal{T}_i 仍然是 Π 中的 m -对角线分割, 我们记集合 $\mathcal{O} = \{\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_m\}$.

进一步, 通过作用 μ_m , 我们可以诱导出一个 \mathcal{S}_n 上的作用, 我们仍然记为 μ_m :

$$\mu_m(\mathcal{T}_i) = \mathcal{T}_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

$$\mu_m(\mathcal{T}_m) = \mathcal{T}_0$$

和

$$\mu_m(\mathcal{T}) = 0, \quad \mathcal{T} \notin \mathcal{O}$$

我们令 $\mu_m^{-1} = \mu_m^m$, 其中 μ_m^m 为 μ_m 的 m 次幂, 我们称 μ_m 和 μ_m^{-1} 为单位 m -mutation 作用, $\mu_m^k (k \in \mathbb{Z})$ 称为 m -mutation 作用.

注: (1) m -mutation 作用 $\mu_m^k (k \in \mathbb{Z})$ 和 \mathcal{T}_0 以及 D_0 的选取有关.

(2) m -mutation 作用和 [ZZ][I1] 中的几乎 m -cluster 倾斜对象有 $m+1$ 个补是一致的.

(3) 任意两个 m -mutation 作用, 我们可以自然地定义它们的乘法运算.

定义 3.2.2. 对 Π 中任意两个 m -对角线分割 \mathcal{T} 和 \mathcal{T}' , 若存在一系列的 m -mutation 作用 $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ 使得 $\mathcal{T} = \lambda_1 \lambda_1 \dots \lambda_k(\mathcal{T}')$, 那么我们称 \mathcal{T} 和 \mathcal{T}' 是 m -mutation 等价的.

定义 3.2.3. 下面我们定义有 Π 中 m -对角线分割构成的 m -mutation 无向图 Σ_m :

1. Σ_m 中的顶点一一对应于 Π 中的 m - 对角线分割;
2. Σ_m 中的两个顶点 i 和 j , 若存在一个 m -mutation 作用 μ_m^k 使得对应的 m - 对角线分割满足 $T_i = \mu_m^k(T_j)$, 那么我们就在 Σ_m 中存在一条连接 i 和 j 的边.

注: 由双射

$$\varphi: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$$

$$T \rightarrow T$$

知, Σ_m 与 Y. Zhou, B. Zhu 在 [ZZ] 中建立的 m -cluster 范畴的倾斜图是一致的.

定义 3.2.4. 对 Π 中的 m - 对角线分割 T , 若 T 中的所有 m - 对角线有一个共同的端点, 我们则称 T 为 Π 的基本 m - 对角线分割, 如图 3.2-2(当 $n=3, m=2$ 时).

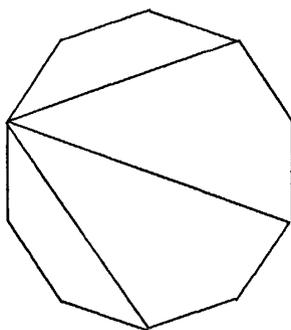


图 3.2-2

注: 基本对角线分割 T 中的 m - 对角线对应到 Auslander-Reiten 箭图 $\Gamma_{A_n}^m$ 中构成一个 ray 或 coray.

引理 3.2.5. 设 T 是 Π 中的任一 m - 对角线分割, 则 T 至少含有两个接近边界的 m - 对角线.

证明: 由 m - 对角线分割的定义易得.

命题 3.2.6. 设 T 是 Π 中的任一 m - 对角线分割, 则 T 与以端点 1 为共同端点的基本 m - 对角线分割 m -mutation 等价.

证明: 对 n 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时, m - 对角线分割中只含有两个 m - 对角线, 命题显然成立.

假设对 n 时成立, 即 $(n+1)m+2$ 多边形中的所有 m - 对角线分割都 m -mutation 等价与以端点 1 为共同端点的基本 m - 对角线分割, 下面证明 $(n+2)m+2$ 多边形中也成立.

任取 $(n+2)m+2$ 多边形 $\Pi_{(n+2)m+2}$ 中的一个 m - 对角线分割 T , 由引理 3.2.5 知, T 含有一个接近边界的 m - 对角线 $D = (i, j)$, 且顶点 1 不在较短的边界弧 $\delta_{i,j}$ 中间. 去掉边界弧 $\delta_{i,j}$, 把对角线 D 看成一个边, 那么剩下的就构成了一个 $(n+1)m+2$ 多边形 $\Pi_{(n+1)m+2}$, 并且 $T \setminus D$ 构成 $\Pi_{(n+1)m+2}$ 的一个 m - 对角线分割, 由假设知, 存在一个基本 m - 对角线分割 U 与它 m -mutation 等价, 如图 3.2-3.

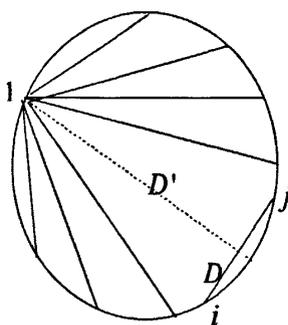


图 3.2-3

显然 $U \cup \{D\}$ 是 $\Pi_{(n+2)m+2}$ 的一个 m - 对角线分割, 并且存在 m - 对角线 D' 和 m -mutation 作用 μ_m^k 使得 $\mu_m^k(U \cup \{D\}) = U \cup \{D'\}$, 从而 T 和 $U \cup \{D'\}$ 是 m -mutation 等价的. 又 $U \cup \{D'\}$ 是 $\Pi_{(n+2)m+2}$ 中的以端点 1 为共同端点的基本 m - 对角线分割, 从而命题得证. \square

Y. Zhou 和 B. Zhu 在 [ZZ] 中证明了由 m -cluster 倾斜对象构成的倾斜图是连通的, 利用命题 3.2.6, 我们也可以证明 A_n 型 m -cluster 范畴的倾斜图的连通性, 即有如下推论.

定理 3.2.7. 设 Σ_m 是由 Π 中的 m - 对角线分割构成的 m -mutation 无向图, 则 Σ_m 是连通的. 即: A_n 型 m -cluster 范畴的倾斜图是连通的.

由上一节我们知道, 由 m - 对角线分割对应的 m -cluster 倾斜代数不一定是连通的, 若 m - 对角线分割 T 对应的 m -cluster 倾斜代数 kQ_T/I_T 是连通的, 那么我们称 T 是连通的.

引理 3.2.8. m - 对角线分割 T 是连通的当且仅当 T 中的任意一个 m - 对角线都存在 T 中的另一条 m - 对角线使得它们有一个共同的端点.

证明: 由箭图 Q_T 的定义可得. □

定理 3.2.9. 设 T 是 A_n 型 m -cluster 范畴中的一个 cluster 倾斜对象, $B = \text{End}_{\mathcal{C}_m}(T)^{\text{op}}$ 是相应 m -cluster 倾斜代数. 则 B 是连通的充要条件是对 T 中任意一个不可分解直和项 M 都存在 T 中的另一个不可分解直和项 N 使 M 和 N 在同一个 ray 或 coray 中.

证明: m -cluster 倾斜代数 $\text{End}_{\mathcal{C}_m}(T)^{\text{op}}$ 是连通的, 也就是说, 对应的 m - 对角线分割 T 是连通的, 由引理 3.2.8 知, 只须对 T 中的任意一个 m - 对角线 M 都存在 T 中的另一条 m - 对角线 N 使得它们有一个共同的端点. 由定义 3.1.4 箭图 $\Gamma_{A_n}^m$ 的构造知, M 和 N 在 Auslander-Reiten 箭图中必在同一个 ray 或 coray 中. □

我们记 Σ'_m 表示 Σ_m 中由连通的 m - 对角线分割构成的子图. 利用命题 3.2.6 同样的证明思路, 我们可以证明 Σ'_m 也是连通的, 从而有如下定理.

定理 3.2.10. 设 Σ'_m 是由 A_n 型 m -cluster 范畴中连通的 m -cluster 倾斜对象构成的倾斜图, 则 Σ'_m 是连通的.

§3.3 连通的 A_n 型 m -cluster 倾斜代数的同构类

本节, 我们主要是把 cluster 倾斜代数的一些想法推广到 m -cluster 倾斜代数, 由 3.1 节定理 3.1.8 知, 我们要考虑连通的 m -cluster 倾斜代数的性质, 我们首先可以考虑连通的 m - 对角线分割的性质.

由 3.1 节知, 存在一个从 \mathcal{T}_n 到 \mathcal{A}_n 的满射 ϕ ,

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathcal{T}_n &\xrightarrow{\phi} \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n \\ \mathcal{T} &\longrightarrow T \longrightarrow kQ_T/\mathcal{I}_T = \text{End}_{\mathcal{C}_m}(T)^{\text{op}} \end{aligned}$$

其中 \mathcal{T}_n 表示 Π 中的所有 m - 对角线分割构成的集合, \mathcal{S}_n 表示 \mathcal{C}_m 中所有 m -cluster 倾斜对象构成的集合, \mathcal{A}_n 表示所有 A_n 型 m -cluster 倾斜代数的同构类构成的集合, φ 是双射.

我们记 \mathcal{T}_n^* 为 Π 中的所有连通的 m - 对角线分割构成的集合, 则有 ϕ 在 \mathcal{T}_n^* 上的限制,

$$\theta = \phi|_{\mathcal{T}_n^*}: \quad \mathcal{T}_n^* \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}_n^* \longrightarrow \mathcal{A}_n^*$$

\mathcal{S}_n^* 表示 \mathcal{C}_m 中所有连通的 m -cluster 倾斜对象构成的集合, \mathcal{A}_n^* 表示所有连通的 A_n 型 m -cluster 倾斜代数的同构类构成的集合.

显然态射 θ 是满射, 但不是单射. 下面我们在 \mathcal{T}_n^* 中定义一个等价关系, 从而由 θ 导出一个双射.

\mathcal{T}_n^* 中定义一个等价关系 \sim :

$$T_1 \sim T_2 \iff T_1 = \omega^i T_2$$

其中 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_n^*$, $i \in \mathbb{Z}$, ω 为多边形 Π 的逆时针单位转动.

显然, 若 $T_1 \sim T_2$, 那么 $\theta(T_1) = \theta(T_2)$. 记 $\widetilde{\mathcal{T}}_n^*$ 为 \mathcal{T}_n^* 中所有等价类构成的集合, 那么我们有满射 $\tilde{\theta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}: \quad \widetilde{\mathcal{T}}_n^* &\longrightarrow \mathcal{A}_n^* \\ T &\longrightarrow kQ_T/I_T \end{aligned}$$

下面我们来证明态射 $\tilde{\theta}$ 是双射, 首先我们来看个引理.

引理 3.3.1. 设 T 是 Π 中一个连通的 m - 对角线分割, D 是 T 中一个接近边界的 m - 对角线. 则对应的顶点 V_D 在箭图 Q_T 中的位置只有以下四种情况:

1. V_D 是 source 点, 且只有一条以 V_D 为起点的箭向;
2. V_D 是 sink 点, 且只有一条以 V_D 为终点的箭向;
3. V_D 在一个长度为 $m+2$ 的箭向圈中;
4. V_D 不在箭向圈中, 但有一条以 V_D 为起点和一条以 V_D 为终点的箭向.

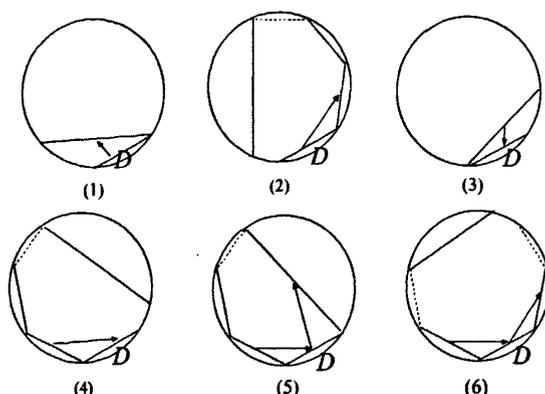


图 3.3-1

证明：由图的性质和 m - 对角线分割的定义知，只有以下六种情况我们需要考虑，如图 3.3-1.

显然，图 (1) 和 (2) 中，对应得顶点 V_D 是 source 点，且只有一条以 V_D 为起点的箭向；图 (3) 和 (4) 中， V_D 是 sink 点，且只有一条以 V_D 为终点的箭向；图 (5) 中， V_D 在一个长度为 $m+2$ 的箭向圈中；图 (6) 中， V_D 不在箭向圈中，但有一条以 V_D 为起点和一条以 V_D 为终点的箭向。□

设 T 是 $(n+1)m+2$ 多边形 Π 中的一个连通的 m - 对角线分割，记 $B_T = kQ_T/I_T$ 为对应的 m -cluster 倾斜代数。设 D 是 T 中一个接近边界的 m - 对角线， V_D 是在箭图 Q_T 中对应的顶点，我们定义一个商分割 T/D 为去掉 D 得到的 m - 对角线分割，如图 3.3-2, T/D 对应的商代数我们记为 B_T/V_D 。显然 B_T/V_D 是一个 A_{n-1} 型 m -cluster 倾斜代数。

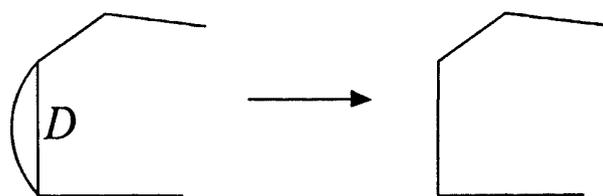


图 3.3-2

定理 3.3.2. 态射 $\tilde{\theta}: \tilde{\mathcal{T}}_n^* \rightarrow \mathcal{A}_n^*$ 是双射.

证明: $\tilde{\theta}$ 显然是满射, 考查 $(n+1)m+2$ 多边形 Π , 我们对 n 用归纳法证明 $\tilde{\theta}$ 也是单射.

当 $n=2$ 时, 命题显然成立. 假设当小于 n 时, 命题成立. 即 $\tilde{\theta}$ 是单射, 下面我们证明当为 n 时也成立. 即要证若 $B_T = B_{T'}$, 那么在 $\tilde{\mathcal{T}}_n^*$ 中 $T = T'$.

在 $(n+1)m+2$ 多边形 $\Pi_{(n+1)m+2}$ 中, 由引理 3.2.5 知, T 含有一个接近边界的 m - 对角线, 记为 D , V_D 是在箭图 Q_T 中对应的顶点, 由假设 $B_T = B_{T'}$ 和引理 3.3.1 知, T' 中也必含有一个接近边界的 m - 对角线 D' , 并且 D' 在箭图 $Q_T = Q_{T'}$ 中对应的顶点 $V_{D'} = V_D$, 那么我们有 $B_{T/D} = B_T/V_D = B_{T'/D'} = B_{T'/D'}$. 由引理 3.3.1 的证明我们知, T/D 只有六种情况如图 3.3-1. 前五种情况, T/D 仍然是连通的, 第六种情况, D 的位置相对固定, 且 $B_{T/D} = B_{T'/D'}$ 为两个连通的 m -cluster 倾斜代数的直和, 所以由归纳假设知, 在 $\tilde{\mathcal{T}}_{n-1}^*$ 中 $T/D = T'/D'$.

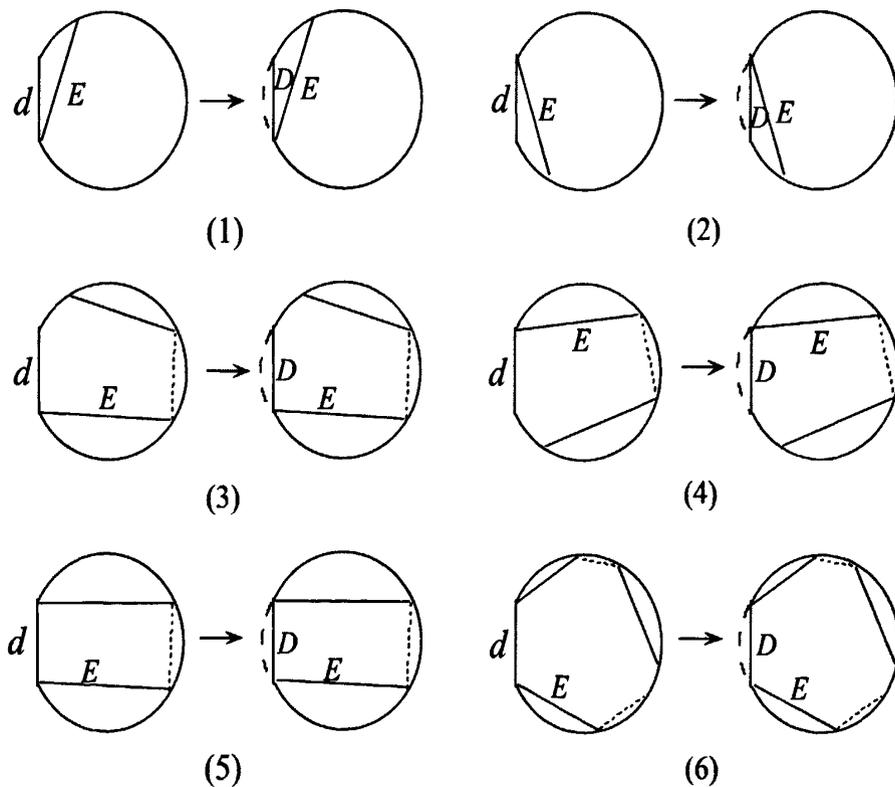


图 3.3-3

我们要从 $T/D = T'/D'$ 得到 T 和 T' , 只须把 $nm + 2$ 多边形的一个边扩充为接近边界的 m - 对角线即可. 固定 T 中一个 m - 对角线 E 使得顶点 V_E 和 V_D 在箭图 Q_T 中有箭向相连. 如图 3.3-3, 只有以下六种情况. 很容易验证这六种情况对应着不同的扩充, 也就是说它们对应着不同的 m -cluster 倾斜代数, 从而我们知, 在 $\tilde{\mathcal{T}}_n^*$ 中 $T = T'$. \square

利用双射

$$\varphi|_{\mathcal{T}_n^*}: \mathcal{T}_n^* \longrightarrow \mathcal{S}_n^*$$

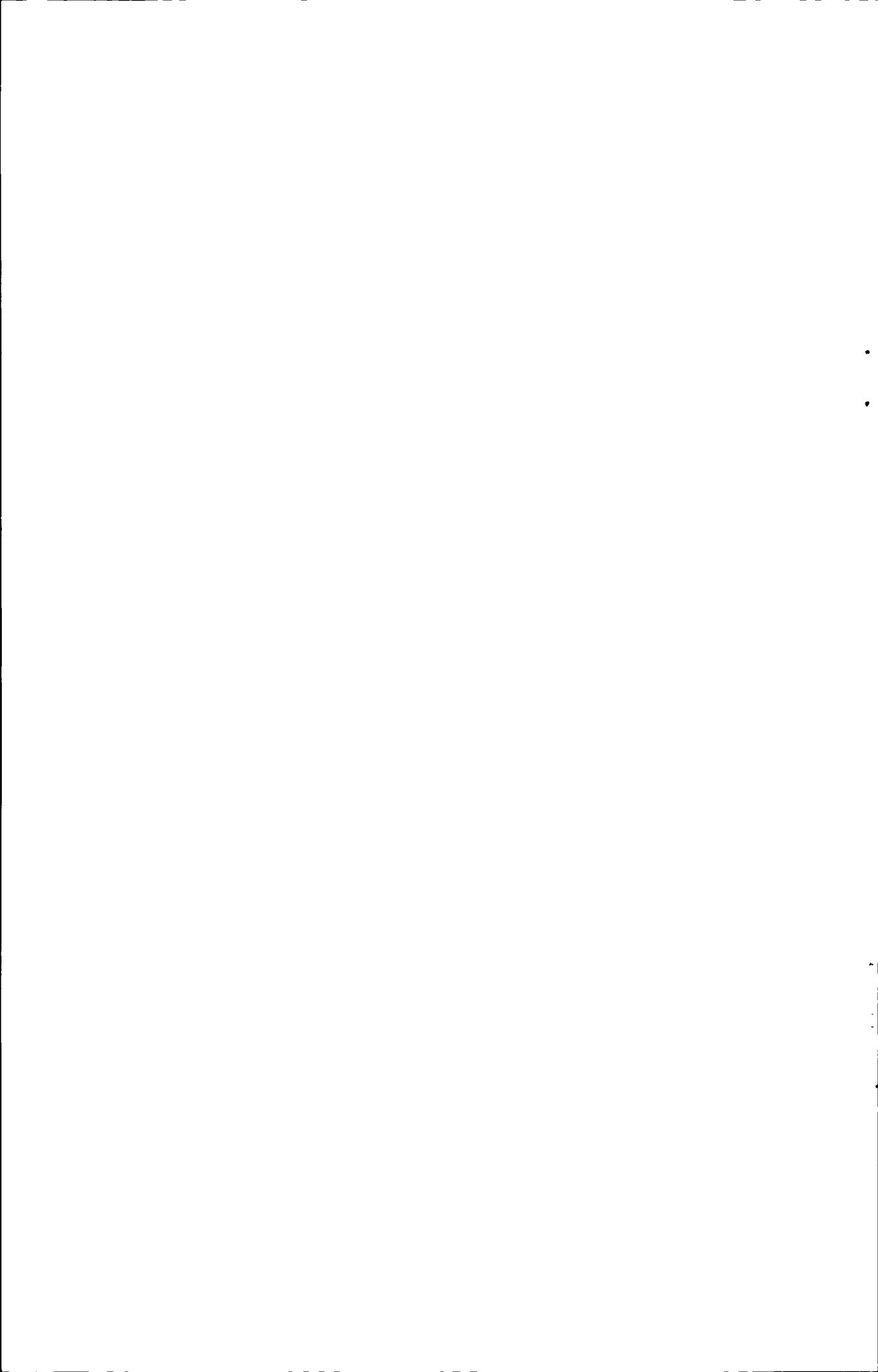
下面我们讨论定理 3.3.2 对应到 m -cluster 范畴上的情况, 首先, 由定理 3.1.6 知, 存在范畴等价

$$\eta: \mathcal{C}_m \rightarrow \mathcal{E}_m$$

其中 \mathcal{C}_m 中的函子 τ_m 对应于 \mathcal{E}_m 中的 Auslander-Reiten 变换 τ . 在 \mathcal{C}_m 中, 由 Auslander-Reiten 箭图 $\Gamma_{A_n}^m$ 的构造知, 多边形 Π 的逆时针单位转动 ω 对应于 \mathcal{E}_m 的平移函子 [1]. 利用定理 3.3.2. 我们有

定理 3.3.3. 设 T 和 T' 是 A_n 型 m -cluster 范畴 \mathcal{E}_m 中的两个连通的 m -cluster 倾斜对象, $B = \text{End}_{\mathcal{E}_m}(T)^{\text{op}}$ 与 $B' = \text{End}_{\mathcal{E}_m}(T')^{\text{op}}$ 是相应的 m -cluster 倾斜代数. 则 B 和 B' 同构的充要条件是存在整数 i 使得 $T = T'[i]$, 其中 $[i]$ 是平移函子 [1] 的 i 次幂.

注: 当 $m = 1$ 的情况, 即为 A_n 型 cluster 倾斜代数的情况, H. Torkildsen 在 [Tor] 中已经给出了证明.



参考文献

- [A] M. Auslander, Representation Dimension of Artin Algebras. Queen Mary College Mathematics Notes. Queen Mary College, London, 1971.
- [ABM] I. Assem, A. Beligiannis, N. Marmaridis, Right triangulated categories with right semi-equivalences. CMS Conference Proceedings. 24 (1998), 17-37.
- [ABS1] I. Assem, T. Brüstle, R. Schiffler, Cluster-tilted algebras as trivial extensions. Bull. London Math. 40 (2006), 151-162.
- [ABS2] I. Assem, T. Brüstle, R. Schiffler, Cluster-tilted algebras and slices. J. Algebra. 319 (8) (2008), 3464-3479.
- [ABS3] I. Assem, T. Brüstle, R. Schiffler, On the Galois coverings of a cluster-tilted algebra. J. Pure and Applied Algebra. 213 (2009), 1450-1463.
- [ABST1] I. Assem, T. Brüstle, R. Schiffler, G. Todorov, Cluster categories and duplicated algebras. J. Algebra. 305 (1) (2006), 548-561.
- [ABST2] I. Assem, T. Brüstle, R. Schiffler, G. Todorov, m -cluster categories and m -replicated algebras, J. Pure and Applied Algebra. 212 (2008), 884-901.
- [AH] I. Assem, D. Happel, Generalized tilted algebras of type A_n , Communications in Algebra. 9(1981), 2101-2125.
- [AI] I. Assem, Y. Iwanaga, On a class of representation-finite QF-3 algebras. Tsukuba J. Math. 11(1987), 199-210.
- [APT] I. Assem, M.I. Platzbeck, S. Trepode, On the representation dimension of tilted and lura algebras. J. Algebra. 296 (2006), 426-439.
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Univ. Press, 1995.

- [ASS] I. Assem , D. Simson , A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory, London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [BaM1] K. Baur, R. Marsh, A geometric description of m -cluster categories of type D_n . International Mathematics Research Notices, (2007).
- [BaM2] K. Baur, R. Marsh, A geometric description of m -cluster categories. Trans. Amer. Math. Soc. 360, no. 11 (2008), 5789-5803.
- [BH] J. Bastian, T. Holm, Derived equivalences for cluster-tilted algebras of Dynkin type E. preprint, arXiv:0906.3422, 2009
- [BM] A. Buan, R. Marsh, Cluster-tilting theory. Trends in representation theory of algebras and related topics. Edited by J. de la Peña and R. Bautista. Contemporary Math. 406 (2006), 1-30.
- [BMR1] A. Buan, R. Marsh, I. Reiten, Cluster-tilted algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 323-332.
- [BMR2] A. Buan, R. Marsh, I. Reiten, Cluster mutation via quiver representations. Comment. Math. Helv. 83, no. 1 (2008), 143-177.
- [BMR3] A. Buan, R. Marsh, I. Reiten, Cluster-tilted algebras of finite representation type. J. Algebra. 306 (2) (2006), 412-431.
- [BMRT] A. Buan, R. Marsh, I. Reiten, G.Todorov, Clusters and seeds for acyclic algebras, with an appendix by A. Buan, P. Caldero, B. Keller, R. Marsh, I. Reiten. Proc. Amer. Math. Soc. 135, no. 10 (2007), 3049-3060.
- [BMRRT] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics, Adv. Math. 204 (2006), 572-618.
- [BR] A. Buan, I. Reiten, Acyclic quivers of finite mutation type. International Mathematics Research Notices, Article ID 12804 (2006), 1-10.

- [BT] A. Buan, H. Torkildsen, The number of elements in the mutation class of a quiver of type D_n . arXiv:0812.2240.(11-Dec-2008). the electronic journal of combinatorics 16 (2009).
- [BV] A. Buan, D. Vatne, Derived equivalence classification of cluster-tilted algebra of type A_n . J.Algebra, 319(7)(2008), 2723-2738.
- [CC] P. Caldero, F. Chapoton, Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations. Comment. Math. Helv. 81 (2006), 595-616.
- [CCS1] P. Caldero, F. Chapoton, R. Schiffler, Quivers with relations arising from clusters(A_n case). Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 1347-1364.
- [CCS2] P. Caldero, F. Chapoton, R. Schiffler, Quivers with relations and cluster-tilted algebras. Algebras and Representation Theory. 9, no. 4 (2006), 359-376.
- [CHU] F. Coelho, D. Happel, L. Unger, Complements to partial tilting modules . J. Algebra. 170 (1994), 184-205.
- [CFZ] P. Chapoton, S. Fomin, A. Zelevinsky, Polytopal realizations of generalized associahedra. Canad. Math. Bull. 45, no. 4, 537-566, 2002.
- [CK1] P. Caldero, B. Keller, From triangulated categories to cluster algebras. Invent. Math. 172 (2008), 169-211.
- [CK2] P. Caldero, B. Keller, From triangulated categories to cluster algebras II. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 39 (4) (2006), 983-1009.
- [CP] F.U. Coelho, M.I. Platzeck, On the representation dimension of some classes of algebras. J. Algebra. 275 (2004), 615-628.
- [DR] V. Dlab, C.M. Ringel. The global dimension of the endomorphism ring of a generator-cogenerator for a hereditary artin algebra. To appear in Mathematical Reports of the Academy of Science of the Royal Society of Canada.
- [EHIS] K. Erdmann, T. Holm, O. Iyama, J. Schroer, Radical embedding and representation dimension. Adv. Math. 185 (2004), 159-177.

- [FR1] S. Fomin, N. Reading, Root system and generalized associahedra. Lecture notes for the IAS/Park City Graduate Summer School in Geometric Combinatorics, 2004.
- [FR2] S. Fomin, N. Reading, Generalized cluster complexes and Coxeter combinatorics. *IMRN*. 44 (2005), 2709-2757.
- [FZ1] S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebra I: Foundation. *J. Amer. Math. Soc.* 15 (2002), 497-529.
- [FZ2] S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebra II: Finite type classification. *Invent. Math.* 154 (2003), 63-121.
- [FZ3] S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebras: Notes for the CDM-03 Conference. *CDM 2003: Current Developments in Mathematics*. International Press, 2004.
- [FZ4] S. Fomin, A. Zelevinsky, The Laurent phenomenon. *Adv. in Appl. Math.* 28, no. 2, 119-144, 2002.
- [Hap] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras. *Lecture Notes series 119*. Cambridge Univ. Press, 1988.
- [HJ1] T. Holm, P. Jørgensen, Cluster categories and selfinjective algebras: type *A*. Preprint, arXiv: math. RT/0610728.
- [HJ2] T. Holm, P. Jørgensen, Cluster categories and selfinjective algebras: type *D*. Preprint, arXiv: math. RT/0612451.
- [HU1] D. Happel, L. Unger, Partial tilting modules and covariantly finite subcategories. *Communications in Algebra*. 22 (1994), 1723-1727.
- [HU2] D. Happel, L. Unger, Complements and the generalized Nakayama conjecture. *CMS Conf. Proc.* 24 (1998), 293-310.
- [HW] D. Hughes, J. Waschbüsch, Trivial extensions of tilted algebras. *Proc. London. Math. Soc.* 46 (1983), 347-364.
- [I1] O. Iyama, Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories. *Adv. Math.* 210 (2007), 22-50.

- [I2] O. Iyama, Auslander correspondence. *Adv. Math.* 210 (2007), 51-82.
- [IY] O. Iyama, Y. Yoshino, Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules. *Invent. Math.* 172 (2008), 117-168.
- [IT] K. Igusa, G. Todorov, On the finitistic global dimension conjecture for artin algebras. *Representations of algebras and related topics*, 201-204. *Fields Inst. Commun.*, 2002, 45, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.
- [K] B. Keller, Triangulated orbit categories. *Documenta Math.* 10 (2005), 551-581.
- [KR1] B. Keller, I. Reiten, Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau. *Adv. Math.* 211 (2007), 123-151.
- [KR2] B. Keller, I. Reiten, Acyclic Calabi-Yau categories are cluster categories, with an appendix by Van. Den. Bergh. *Compositio Mathematica.* 144 (2008), 1332-1348.
- [KZ] S. Koenig, B. Zhu, From triangulated categories to abelian categories: cluster tilting in a general frame work. *Math. Zeit.* 258 (2008), 143-160.
- [Mu] Graham.J. Murphy, Derived equivalence classification of m-cluster tilted algebras of type An. arXiv:0807.3840v1 [math.RT] 24 Jul 2008.
- [MRZ] R. Marsh, M. Reineke, A. Zelevinsky, Generalized associahedra via quiver representations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 355, no. 1 (2003), 4171-4186.
- [P] Y. Palu, Ph.D Thesis, in preparation.
- [Re] I. Reiten, Tilting theory and cluster algebras. Preprint.
- [Rin] C.M. Ringel, Tame algebras and integral quadratic forms, *Lecture Notes in Math.* 1099. Springer Verlag, 1984.
- [S] D. Smith, On tilting modules over cluster-tilted algebras. Preprint, arXiv: math.RT/0710.4329, 2007.

- [Sch] R. Schiffler, A geometric model for cluster category of type D_n , *J. Algebraic Combinatorics*. 27(1)(2008), 1-21.
- [Sev] A. Seven, Recognizing cluster algebra of finite type. *Electron. J. combin.*, 14(1)(2007).
- [Th] H. Thomas, Defining an m -cluster category. *J. Algebra*. 318(2007), 37-46.
- [Tor] H. Torkildsen, Counting cluster-tilted algebras of type A_n , *International electronic Journal of algebra*, 4(2008), 149-158.
- [Tz] E. Tzanaki. Polygon dissections and some generalizations of cluster complexes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2006.
- [Vat] D. Vatne, The mutation class of D_n quivers. *Communications in Algebra*, Volume 38, Issue 3 March 2010 , pages 1137 - 1146
- [Wa] T. Wakamatsu, Stable equivalence of self-injective algebras and a generalization of tilting modules. *J. Algebra*. 134 (1990), 289-325.
- [Wr] A. Wralsen, Rigid objects in higher cluster categories. *J. Algebra*. 321 (2009), 532-547.
- [Z1] S. Zhang, Tilting mutation and duplicated algebras. *Communications in Algebra*. 37(2009), 3516-3524.
- [Z2] S. Zhang, Partial tilting modules over m -replicated algebras. *J. Algebra*. 323(2010), 2538-2546.
- [Z3] S. Zhang, Generalized cluster-tilted algebras. Preprint, arXiv: math. RT/0902.3047, 2009.
- [ZZ] Y. Zhou, B. Zhu, Cluster combinatorics of d -cluster categories. *J. Algebra*. 321(2010), 2898-2915.
- [Zh1] B. Zhu, BGP-reflection functors and cluster combinatorics. *J. Pure Appl. Algebra* 209(2007), 497-506.

- [Zh2] B. Zhu, Equivalences between cluster categories. *J. Algebra.* 304 (2006), 832-850.
- [Zh3] B. Zhu, Generalized cluster complexes via quiver representations. *J. Algebraic Combinatorics.* 27, no.1 (2008), 35-54.
- [Zh4] B. Zhu, Cluster-tilted algebras and their intermediate coverings. Preprint, arXiv: math. RT/0808.2352, 2008.

读博期间完成的论文

- 1 Cluster-tilted algebras of type D_n , *Communications in Algebra*,
已接受 (第一作者)
- 2 m -cluster-tilted algebras of type A_n ,
已投稿 (第一作者)
- 3 m -cluster-tilted algebras of type D_n ,
已完成 (第一作者)

致谢

本文完成之际，首先要衷心感谢我的导师张顺华教授。六年学习期间，张老师渊博的学识，敏锐的科学直觉，独到的数学见解和严谨的治学态度，都深深的感染并启发了我，使我受益无穷。本论文是在张老师的悉心指导和鼓励下完成的。同时张老师在生活方面，为人处世方面给予的帮助和教诲也将使我受益终生。

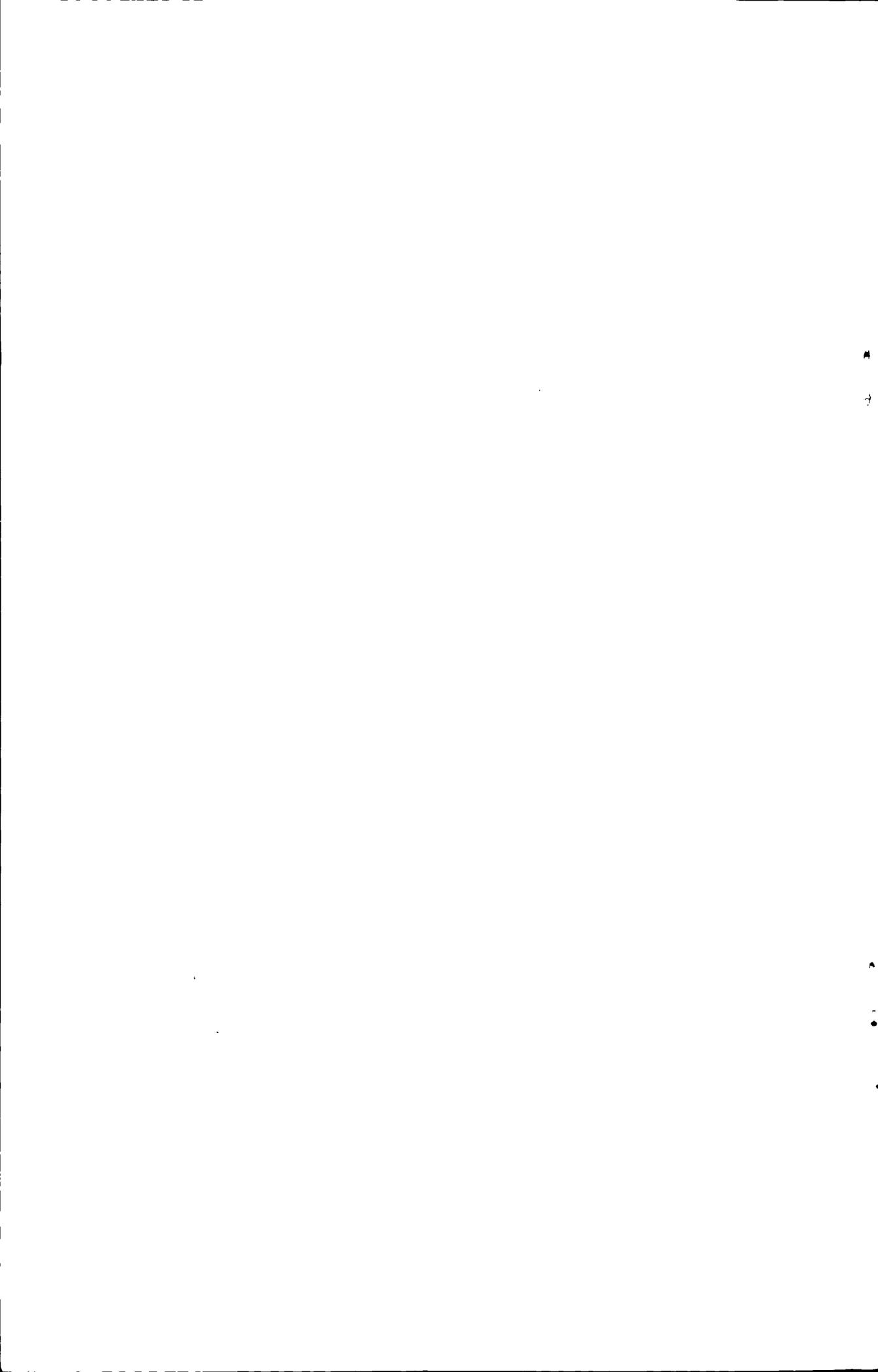
感谢数学院扈培础教授，杨连中教授，江守礼教授，仪洪勋教授，史玉明教授，黄华林教授，他们开设的《现代分析》，《现代微分几何》，《Hopf代数》等课程开阔了作者的眼界，拓宽了知识面。

感谢师姐张爱平，雷雪萍，陈文娟，同门董红昌，吕洪波，与他们积极有益的学习讨论使我受益匪浅。

感谢我的舍友徐钊，刘文剑，同学孟超，王金磊，李清栋等六年来给予的许多关心和帮助。

深深感谢我的父母和我的弟弟，正是他们的理解和支持，让我能安心学习，顺利地完成学业。

我还要感谢山东大学数学学院的各位领导和老师对我的关心和照顾，感谢所有帮助过我的朋友们。



学位论文评阅及答辩情况表

		姓名	专业技术 职 务	是否博导 (硕导)	所 在 单 位	总体评价 ※	
		论文评阅人		匿名			
	匿名					A	
	匿名					A	
		姓名	专业技术 职 务	是否博导 (硕导)	所 在 单 位		
		答辩委员会成员	主席	朱彬	教授	是	清华大学
委			黄华林	教授	是	山东大学	
			杨子中	教授	是	山东大学	
			扈培础	教授	是	山东大学	
			张玉琴	教授	否	山东师范大学	
员							
答辩委员会对论文的 总体评价※		A		答辩秘书	刘红星	答辩日期	2010.5.10
备注							

※优秀为“A”；良好为“B”；合格为“C”；不合格为“D”。

