

第一章 练习题

1. 记 $C([a, b])$ 是闭区间 $[a, b]$ 上连续函数全体构成的集合, 在 $C([a, b])$ 上定义距离如下:

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \quad \forall f, g \in C([a, b]),$$

(1) $C([a, b])$ 按 ρ 是否完备?

(2) $(C([a, b]), \rho)$ 的完备化空间是什么?

答: (1) 不完备, 例如对于 $[a, b] = [0, 2]$ 以及 $n = 1, 2, \dots$, 定义

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

则 $\{f_n(x)\} \subset C([0, 2])$ 在本题所定义的距离的意义下是 Cauchy 列, 因为

$$\begin{aligned} \rho(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 x^n dx + \int_0^1 x^m dx \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \rightarrow 0, \quad (m, n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

另一方面, 点列 $\{f_n(x)\}$ 并不能在本题所定义的距离的意义下收敛到 $C([0, 2])$ 中的某个元.

事实上, 在几乎处处收敛的意义下, 我们有

$$f_n(x) \rightarrow g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

因此, 根据 Lebesgue 有界收敛定理, 可以得到

$$\begin{aligned} \rho(f_n, g) &= \int_0^1 |f_n(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^1 |x^n - 0| dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

但 $g(x) \notin C([0, 2])$.

(2) $C([a, b])$ 的完备化空间是 $L^1([a, b])$. 因为

(i) 在距离 ρ 的意义下, $C([a, b])$ 是 $L^1([a, b])$ 的稠密子集. 事实上, 任意取定一个

$f(x) \in L^1([a, b])$, 需要证明: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $g(x) \in C[a, b]$, 使得

$$\rho(f, g) = \int_{[a, b]} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

事实上, 首先根据积分的绝对连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $E \subset [a, b]$, 只要 $mE < \delta$, 就有

$$\int_E |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $f(x)$ (Lebesgue) 可积, 故几乎处处有限, 即

$$m \bigcap_{N=1}^{\infty} E_N = 0,$$

其中 $E_N = \{x \in [a, b] \mid |f(x)| \geq N\}$. 由此可以得到 $\lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N) = 0$ (因为 $\{E_N\}$ 是渐缩集

列并且 $[a, b]$ 的测度有限), 故存在某个自然数 N , 使得 $mE_N < \delta$ 且

$$\int_{E_N} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3},$$

因此有

$$|f(x)| \leq N, \quad x \in [a, b] \setminus E_N.$$

引入一个新函数定义为

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [a, b] \setminus E_N \\ 0, & E_N, \end{cases}$$

显然对于 $x \in [a, b]$ 恒有 $|\tilde{f}(x)| \leq N$. 由 Lusin 定理, 存在连续函数 $g(x) \in C(-\infty, +\infty)$ 和

闭集 $F \subset [a, b]$, 使得 $m([a, b] \setminus F) < \min\{\delta, \varepsilon/3N\}$ 且 $|g(x)| \leq N$, 进而

$$g(x) \equiv \tilde{f}(x), \quad x \in F.$$

则 $g(x)$ 限制在 $[a, b]$ 即为所求, 因为:

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &= \int_{[a, b]} |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_{([a, b] \setminus F) \cup F} |f(x) - g(x)| dx \\ &\leq \int_{[a, b] \setminus F} |f(x) - g(x)| dx + \int_F |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq \int_{[a, b] \setminus F} (|f(x)| + N) dx \\ &\quad + \int_{F \cap E_N} |f(x) - \tilde{f}(x)| dx + \int_{F \setminus E_N} |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq \int_{[a, b] \setminus F} |f(x)| dx + Nm([a, b] \setminus F) \\ &\quad + \int_{F \cap E_N} |f(x)| dx + \int_{F \setminus E_N} 0 dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) $(L^1([a,b]), \rho)$ 是完备的空间.

2. 设 (X, ρ) 是距离空间, A 是 X 的子集, 对任意的 $x \in X$, 记

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y),$$

则 (1) $\rho(x, A)$ 是 x 的连续函数.

(2) 若 $\{x_n\}$ 是 X 中的点列, 使 $\rho(x_n, A) \rightarrow 0$, $\{x_n\}$ 是否为 Cauchy 列? 为什么?

证: (1) 任意取定 $x_1, x_2 \in X$, 对于任意的 $y \in A$ 根据三角不等式, 有

$$\rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, y), \quad \rho(x_2, y) \leq \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, y).$$

对两端关于 $y \in A$ 取下确界, 可以得到

$$\inf_{y \in A} \rho(x_1, y) \leq \rho(x_1, x_2) + \inf_{y \in A} \rho(x_2, y), \quad \inf_{y \in A} \rho(x_2, y) \leq \rho(x_2, x_1) + \inf_{y \in A} \rho(x_1, y).$$

即

$$\rho(x_1, A) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, A),$$

$$\rho(x_2, A) \leq \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, A).$$

由此可得

$$|\rho(x_1, A) - \rho(x_2, A)| \leq \rho(x_1, x_2).$$

由此容易证明 $f(x) = \rho(x, A)$ 是 X 上的连续函数, 实际上, $\rho(x, A)$ 还满足 Lipschitz 常数等于 1 的 Lipschitz 条件.

(2) 答: 未必是 Cauchy 列. 例如取 $X = \mathbf{R}$, 其中的距离是 Euclid 距离. 对于 $A = \{-1, 1\}$, 对于 $n = 1, 2, \dots$, 定义点列为

$$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

对于点列 $\{x_n\}$, 不难验证,

$$\rho(x_n, A) = \frac{1}{n} \rightarrow 0;$$

但显然 $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 列. 这里的原因就在于 $\rho(x, A)$ 不是点到点之间的距离, 而是点到集合的距离, 当这个集合 A 含有不止一个点时, $\rho(x, A)$ 不再具有点点之间距离的性质.

3. E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集合, 试证 $L^\infty(E)$ 按距离

$$\rho(f, g) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

是不可分空间.

证法一: 记为方便起见, 设 $E = [a, b]$. 定义

$$f_\lambda(x) = \chi_{[a, \lambda]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, \lambda], \\ 0, & x \in (\lambda, b]. \end{cases}$$

显然 $f_\lambda(x)$ 有界, 可测, 因此必属于 $L^\infty([a, b])$. 记

$$A = \{f_\lambda(x) \mid \lambda \in (a, b]\}.$$

则 $A \subset L^\infty([a, b])$. 既然对于不同的 $\lambda_1, \lambda_2 \in [a, b]$, f_{λ_1} 与 f_{λ_2} 不同的部分是正测度集, 容易

看出 A 的势是 $\aleph$. 进而有 (不妨设 $\lambda_1 < \lambda_2$)

$$\begin{aligned} \rho(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}) &= \inf_{\substack{E \subset [a, b] \\ mE=0}} \sup_{x \in [a, b] \setminus E} |f_{\lambda_1}(x) - f_{\lambda_2}(x)| \\ &= \inf_{\substack{E \subset [a, b] \\ mE=0}} \sup_{x \in [a, b] \setminus E} |f_{\lambda_1}(x) - f_{\lambda_2}(x)| \\ &= \inf_{\substack{E \subset [a, b] \\ mE=0}} \sup_{x \in [a, b] \setminus E} |\chi_{[a, \lambda_1]}(x) - \chi_{[a, \lambda_2]}(x)| \\ &= \inf_{\substack{E \subset [a, b] \\ mE=0}} \sup_{x \in [a, b] \setminus E} \chi_{(\lambda_1, \lambda_2]}(x) = 1. \end{aligned}$$

我们用反证法证明所需的结论. 设 $L^\infty([a, b])$ 是可分的, 则其必有可数的稠密子集

$\{g_1, g_2, g_3, \dots, g_i, \dots\}$, 因此至少有一个 g_i 属于两个不同的 $S(f_{\lambda_1}, 1/3)$ 和 $S(f_{\lambda_2}, 1/3)$. 而由三角不等式, 我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \rho(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}) \leq \rho(f_{\lambda_1}, g_i) + \rho(g_i, f_{\lambda_2}) \\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

这是一个矛盾. 因此 $L^\infty([a, b])$ 不可能是可分的.

证法二: 既然 E 是正测度集, 存在 $R > 0$ 使得 $m(S(0, R) \cap E) > 0$. 不难验证, 存在一系列正数

$\{R_i\}_{i=1}^\infty$ 满足:

$$0 < R_1 < R_2 < \dots < R_i < \dots < R;$$

且

$$m(E \cap [S(0, R_{i+1}) \setminus S(0, R_i)]) > 0.$$

对于每一个 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots)$, 其中 $\lambda_i = 0$ 或 1 , 定义

$$f_\lambda(x) = \lambda_i, \quad x \in E \cap [S(0, R_{i+1}) \setminus S(0, R_i)],$$

$i = 1, 2, \dots$. 显然 $f_\lambda(x)$ 有界, 可测, 因此必属于 $L^\infty(E)$. 记

$$A = \{f_\lambda(x) \mid \lambda \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\},$$

其中 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 表示具有上述性质的 λ 的全体. 则 $A \subset L^\infty(E)$. 既然对于不同的 $\lambda, \mu \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,

(不妨设 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_i, \dots)$ 且对于某个 i , $\lambda_i = 0$ $\mu_i = 1$) f_λ 与 f_μ 不同

的部分至少是正测度集 $E \cap [S(0, R_{i+1}) \setminus S(0, R_i)]$, 容易看出 A 的势与 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 的势都是连续统的势 $\aleph$. 进而有

$$\begin{aligned} 1 &\geq \rho(f_\lambda, f_\mu) = \inf_{\substack{F \subset E \\ mF=0}} \sup_{x \in E \setminus F} |f_\lambda(x) - f_\mu(x)| \\ &\geq \inf_{\substack{F \subset E \\ mF=0}} \sup_{x \in (E \cap S(0, R_{i+1}) \setminus S(0, R_i)) \setminus F} |f_\lambda(x) - f_\mu(x)| \\ &= \inf_{\substack{F \subset E \\ mF=0}} \sup_{x \in (E \cap S(0, R_{i+1}) \setminus S(0, R_i)) \setminus F} |\lambda_i - \mu_i| = 1. \end{aligned}$$

我们用反证法证明所需的结论. 设 $L^\infty(E)$ 是可分的, 则其必有可数的稠密子集

$\{g_1, g_2, g_3, \dots, g_i, \dots\}$, 因此至少有一个 g_j 属于两个不同的 $S(f_\lambda, 1/3)$ 和 $S(f_\mu, 1/3)$. 而由

三角不等式, 我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \rho(f_\lambda, f_\mu) \leq \rho(f_\lambda, g_j) + \rho(g_j, f_\mu) \\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

这是一个矛盾. 因此 $L^\infty(E)$ 不可能是可分的.

补充题. 证明 $L^\infty[a, b]$ 是不可分空间.

证: 记

$$K = \{\chi_{[a, t]}(x) \mid a < t < b\},$$

其中

$$\chi_{[a, t]}(x) := \begin{cases} 1, & a \leq x \leq t, \\ 0, & t < x \leq b. \end{cases}$$

显然 $K \subset L^\infty[a, b]$, 且只要 $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$, 则有

$\chi_{[a, t_1]}, \chi_{[a, t_2]} \in K$, 且因为(不妨设 $t_1 < t_2$) $(t_1, t_2]$ 的测度为正, 故

$$\begin{aligned}\|\chi_{[a,t_1]} - \chi_{[a,t_2]}\|_{L^\infty[a,b]} &= \operatorname{ess\,sup} |\chi_{[a,t_1]}(x) - \chi_{[a,t_2]}(x)| \\ &= \sup_{x \in (t_1, t_2]} |\chi_{(t_1, t_2]}(x)| = 1.\end{aligned}$$

因此, 由 (a, b) 是不可数集, 而 K 的基数与 (a, b) 的基数相同, 故也是不可数集, 且 K 中任何两个不同元的距离均为 1.

如果 $L^\infty[a, b]$ 是可分的, 因此有一个可数的稠密子集合 $A = \{f_k(x) | k = 1, 2, \dots\}$, 且

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} S(f_k, \frac{1}{3}) \supseteq K.$$

但这是荒谬的, 因为上式左端只有可数多个开球, 右端有不可数多个元, 所以至少有 K 中的两个不同的 $\chi_{[a,t_1]}, \chi_{[a,t_2]}$ 属于同一个开球 $S(f_{k_0}, \frac{1}{3})$, 由此得到矛盾:

$$\begin{aligned}1 &= \|\chi_{[a,t_1]} - \chi_{[a,t_2]}\|_{L^\infty[a,b]} \\ &\leq \|\chi_{[a,t_1]} - f_{k_0}\|_{L^\infty[a,b]} + \|f_{k_0} - \chi_{[a,t_2]}\|_{L^\infty[a,b]} \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

此矛盾表明 $L^\infty[a, b]$ 不可能是可分的.

4. 设 $C^k([a, b])$ 是闭区间 $[a, b]$ 上具有 k 阶连续导数的函数全体, 定义:

$$\rho(f, g) = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)|, \quad f, g \in C^k([a, b])$$

试证:

(1) $C^k([a, b])$ 是完备的距离空间;

(2) 若定义

$$\|f\| = \rho(f, 0),$$

则 $(C^k([a, b]), \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

证: (1) 这里只证明该距离是完备的. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $C^k([a, b])$ ($k=0$ 时, $C^0([a, b])$ 就理解为 $C[a, b]$) 中该距离意义下的 Cauchy 列. 因此当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\rho(f_m, f_n) = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f_m^{(i)}(x) - f_n^{(i)}(x)| \rightarrow 0.$$

由此容易知道对于每一个 $i = 0, 1, \dots, k$, $\{f_n^{(i)}(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 $C^0([a, b])$ 中的 Cauchy 列. 根据

$C^0([a, b])$ 的完备性, 知 $\{f_n^{(i)}(x)\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 $C^0([a, b])$ 中的某个元, 记其为 $f^i(x)$, 则

$f^i(x) \in C^0([a, b])$, 且

$$f_n^{(i)}(x) \rightrightarrows f^i(x), \quad n \rightarrow \infty, i = 0, 1, \dots, n,$$

其中 “ $\rightrightarrows$ ” 表示是一致收敛. 如果我们记 $f(x) = f^0(x)$, 利用数学分析中函数序列一致收敛的分析性质, 可以得到

$$\begin{aligned} f'(x) &= f^1(x), f''(x) = f^2(x), \dots, \\ f^{(k)}(x) &= f^k(x). \end{aligned} \quad (*)$$

例如, 因为 $f_n'(x) \rightrightarrows f^1(x)$, 故

$$\int_a^x f_n'(t) dt \rightrightarrows \int_a^x f^1(t) dt,$$

即

$$f_n(x) - f_n(a) \rightrightarrows \int_a^x f^1(t) dt,$$

又 $f_n(x) \rightrightarrows f^0(x)$ 及 $f_n(a) \rightrightarrows f^0(a)$, 故

$$f^0(x) - f^0(a) = \int_a^x f^1(t) dt.$$

求导即可得到

$$f^{0'}(x) = f^1(x), \quad \text{即} \quad f'(x) = f^1(x).$$

归纳地可得(*).

因此 $f(x) = f^0(x) \in C^k([a, b])$ 且

$$\begin{aligned} \rho(f_n, f) &= \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f_n^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)| \\ &= \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f_n^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

即 $C^k([a, b])$ 是完备的距离空间.

(2) 证略.

7. 证明有限维线性赋范空间是完备的.

证: 记该有限维(实)线性赋范空间为 E , 是 n 维的, 范数记为 $\|x\|$, 需要证明 $(E, \|\cdot\|)$ 是完备

的. 记 E 中的一组基为:

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n.$$

因此对于任意的 $x \in E$, 存在唯一一组实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得 $x = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$, 反之亦然.

(i) 我们断言存在一个与 x 无关的常数 $K > 0$, 使得

$$|x_i| \leq K \|x\|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (*)$$

首先定义一个映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为: 对于任意的 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := \|x\| = \|x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n\|.$$

则对于任意的 $x, y \in E$ ($y = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + \dots + y_n \mathbf{v}_n$) 有

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= f(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \\ &\leq |x_1 - y_1| \cdot \|\mathbf{v}_1\| + \dots + |x_n - y_n| \cdot \|\mathbf{v}_n\| \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \cdot \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{v}_n\|^2}. \end{aligned}$$

由此容易知道 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数. 记 ∂B_1 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面, 即

$$\partial B_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1\}. \text{ 则对于任意的 } (x_1, \dots, x_n) \in \partial B_1, \text{ 有 } f(x_1, \dots, x_n) > 0.$$

(事实上, 若有 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ 则

$$f(x_1, \dots, x_n) = \|x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n\| = 0,$$

因此 $x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n = 0$, 但 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性无关, 故必有 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, 此与

$(x_1, \dots, x_n) \in \partial B_1$ 相矛盾.) 注意到 ∂B_1 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集(紧子集), 连续函数 f 必可在其上达到正的最小值 $1/K > 0$.

现在我们可以证明式(*). 事实上, 对于任意的 $x \in E$, 存在唯一的一组实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得 $x = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$, 不失一般性, 可设 $x \neq 0$ 因此, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 不全为零, 注意到

$$y = \left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} \right) \in \partial B_1,$$

故

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{x_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} \mathbf{v}_1 + \frac{x_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} \mathbf{v}_n \right\| = f(y) \\ & = f \left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} \right) \geq \frac{1}{K}, \end{aligned}$$

或

$$\|x\| = \|x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n\| \geq \frac{1}{K} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

由此容易得出(*)式.

(ii) 设 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ 是 E 中的基本列, 这里

$$x^{(k)} = x_1^{(k)} \mathbf{v}_1 + x_2^{(k)} \mathbf{v}_2 + \dots + x_n^{(k)} \mathbf{v}_n,$$

即

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\| \rightarrow 0, \text{ 当 } k, l \rightarrow \infty.$$

利用(*)式便可以得到对于每一个 $i=1, 2, \dots, n$, 成立

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| \leq K \|x^{(k)} - x^{(l)}\| \rightarrow 0, \text{ 当 } k, l \rightarrow \infty.$$

即 $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的基本列, 因此收敛. 设

$$x_i^{(k)} \rightarrow x_i^{(0)}, (k \rightarrow \infty, i=1, 2, \dots, n).$$

记 $x^{(0)} = x_1^{(0)} \mathbf{v}_1 + x_2^{(0)} \mathbf{v}_2 + \dots + x_n^{(0)} \mathbf{v}_n$, 显然 $x^{(0)} \in E$. 根据 E 中收敛的等价性(即按范数收敛意味着每个分量收敛或即按坐标收敛), 容易得到

$$\|x^{(k)} - x^{(0)}\| \rightarrow 0, \text{ 当 } k \rightarrow \infty.$$

因此 $(E, \|\cdot\|)$ 是完备的.

9. 设 X 为线性赋范空间, X_0 是 X 的线性闭子空间. 在 X 中定义等价关系 $\sim$ 为

$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in X_0$. 对任意的 $x \in X$, 以 $[x]$ 记 x 的等价类, 令

$$X / X_0 = \{[x] \mid x \in X\}.$$

称 X / X_0 为商空间, 在 X / X_0 上定义线性运算如下:

$$(i) [x] + [y] = [x + y], \quad x, y \in X,$$

$$(ii) \lambda[x] = [\lambda x], \quad \lambda \in \mathbf{C}, x \in X.$$

并定义

$$\|[x]\|_0 = \inf_{y \in X_0} \|x + y\|.$$

试证: X / X_0 按 $\|[x]\|_0$ 也是一个线性赋范空间.

证: (一) X / X_0 按照所定义的线性运算是线性空间 (证明略).

(二) $\|[x]\|_0$ 是 X / X_0 中的范数. 按照定义, 对于每一个 $[x] \in X / X_0$ 显然

$\|[x]\|_0 = \inf_{y \in X_0} \|x + y\|$ 是一个确定的数, 因此 $\|\cdot\|_0: X / X_0 \rightarrow \mathbf{R}$ 是映射.

(i) (非负性) 对于 $x \in X$, 显然

$$\|[x]\|_0 = \inf_{y \in X_0} \|x + y\| \geq 0.$$

(正定性) 当 $[x] = [0] = X_0$ 时, 有

$$\|[x]\|_0 = \|[0]\|_0 = \inf_{y \in X_0} \|y\| = 0.$$

反之, 如果我们假设 $\|[x_0]\|_0 = \inf_{y \in X_0} \|x_0 + y\| = 0$, 需要证明 $[x_0] = [0] = X_0$, 也只需证明

$x_0 \in X_0$. 事实上, 根据下确界的定义, 对每一个自然数 $k = 1, 2, \dots$, 存在 $y_k \in X_0$, 使得

$$\|x_0 + y_k\| < \|[x_0]\|_0 + \frac{1}{k} = \inf_{y \in X_0} \|x_0 + y\| + \frac{1}{k} = \frac{1}{k},$$

由此得到一个序列 $\{y_k\} \subset X_0$ 且

$$y_k \xrightarrow{\|\cdot\|_0} -x_0.$$

因为 X_0 是闭子空间因此 $-x_0 \in X_0$ 故 $x_0 \in X_0$, 即 $[x_0] = [0] = X_0$.

(ii) (正齐性) 对于 $\lambda \in \mathbf{C}, x \in X$, 如果 $\lambda = 0$, 则

$\lambda x = 0x = 0 \in X_0$, 故 $[\lambda x] = X_0 = [0] = 0[x] = \lambda[x]$. 如果 $\lambda \neq 0$, 则当 y 取遍 X_0 中的所

有元时, $\frac{y}{\lambda}$ 也取遍 X_0 中的所有元, 反之亦然, 因此

$$\begin{aligned}\|[\lambda x]\|_0 &= \inf_{y \in X_0} \|\lambda x + y\| = \inf_{y \in X_0} \|\lambda \cdot \|x + \frac{y}{\lambda}\| \\ &= \|\lambda\| \inf_{y \in X_0} \|x + \frac{y}{\lambda}\| = \|\lambda\| \inf_{\frac{y}{\lambda} \in X_0} \|x + \frac{y}{\lambda}\| \\ &= \|\lambda\| \inf_{z \in X_0} \|x + z\| = \|\lambda\| \cdot \| [x] \|,\end{aligned}$$

(iii) (三角不等式) 设 $x, y \in X$. 设 $u, v \in X_0$, 当 u, v 取遍 X_0 中的所有元时, $u + v$ 也取遍 X_0 中的所有元, 反之亦然, 进而, u, v 的取法是相互独立的, 因此

$$\begin{aligned}\| [x + y] \|_0 &= \inf_{u \in X_0} \|x + y + u\| \\ &= \inf_{u, v \in X_0} \|x + y + u + v\| \\ &\leq \inf_{u, v \in X_0} (\|x + u\| + \|y + v\|) \\ &= \inf_{u \in X_0} \|x + u\| + \inf_{v \in X_0} \|y + v\| \\ &= \| [x] \|_0 + \| [y] \|_0.\end{aligned}$$

也可用下面的证明方法: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由下确界的定义, 存在 $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in X_0$ 使得

$$\|x + u_\varepsilon\| < \| [x] \|_0 + \varepsilon, \quad \|y + v_\varepsilon\| < \| [y] \|_0 + \varepsilon,$$

因此可以得到

$$\begin{aligned}\| [x + y] \|_0 &= \inf_{u \in X_0} \|x + y + u\| \leq \|x + y + u_\varepsilon + v_\varepsilon\| \\ &\leq \|x + u_\varepsilon\| + \|y + v_\varepsilon\| \\ &< \| [x] \|_0 + \| [y] \|_0 + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 可得

$$\| [x + y] \|_0 \leq \| [x] \|_0 + \| [y] \|_0.$$

10. 设 X 为线性赋范空间, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 即 $S_k = \sum_{n=1}^k x_n$ 按 X 中的范数收敛, 则

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

证: 记

$$S_k = \sum_{n=1}^k x_n.$$

对于有限项之和, 利用三角不等式, 成立

$$\|S_k\| = \left\| \sum_{n=1}^k x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^k \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \quad (*)$$

又因为 $S_k = \sum_{n=1}^k x_n$ 在范数意义下收敛, 其极限自然可以记为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 即

$$S_k \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

再一次利用三角不等式, 可以得到当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\left| \|S_k\| - \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \right| \leq \left\| S_k - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \rightarrow 0,$$

即 $\|S_k\| \rightarrow \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|$, 因此在(*)式中令 $k \rightarrow \infty$, 可得

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

11. 设 $X \neq \{0\}$ 为线性赋范空间, 试证 X 是 **Banach** 空间当且仅当 $\{x \in X \mid \|x\|=1\}$ 是完备的.

证: 记 $T = \{x \in X \mid \|x\|=1\}$.

(必要性) 设 X 是 Banach 空间, $\{x_n\} \subset T$ 是 T 中的 Cauchy 列, 即 $\|x_n\|=1$ 且

$$\|x_m - x_n\| \rightarrow 0 \text{ (当 } m, n \rightarrow \infty \text{)}.$$

因为 X 是 Banach 空间, 故 $\{x_n\}$ 收敛, 即存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$, 由三角不等式容易得到:

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|,$$

因此

$$\left| \|x_n\| - \|x_0\| \right| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0,$$

知 $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$, 故 $\|x_0\|=1$ 因此 $x_0 \in T$, 即 T 完备.

(充分性) 设 T 是完备的, 并设 $\{x_n\} \subset X$ 是 X 中的 Cauchy 列, 即 $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ 当

$m, n \rightarrow \infty$. 由

$$\left| \|x_m\| - \|x_n\| \right| \leq \|x_m - x_n\| \rightarrow 0,$$

知 $\{\|x_n\|\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的 Cauchy 数列, 因此收敛, 即存在某个数 $A \in \mathbb{R}$ 使得

$$\|x_n\| \rightarrow A.$$

如果 $A=0$, 显然 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中的零元, 故不妨设 $A>0$. 由此知当 n 充分大时, 总有

$\|x_n\| > 0$, 不失一般性, 可设对所有的 n , 都有 $\|x_n\| > 0$. 考虑新的点列

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|},$$

显然 $y_n \in T$. 进而

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\| &= \left\| \frac{x_m}{\|x_m\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x_m}{\|x_m\|} - \frac{x_m}{\|x_n\|} \right\| + \left\| \frac{x_m}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| \\ &= \|x_m\| \left| \frac{1}{\|x_m\|} - \frac{1}{\|x_n\|} \right| + \frac{1}{\|x_n\|} \|x_m - x_n\|, \end{aligned}$$

由此易知 $\{y_n\} \subset T$ 是 T 中的 Cauchy 列. 因为 T 作为距离空间是完备的, 故 $\{y_n\}$ 收敛, 即存

在 $y_0 \in T$, 使得 $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y_0$. 最后我们断言:

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Ay_0.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \|x_n - Ay_0\| &= \|x_n\| \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{Ay_0}{\|x_n\|} \right\| \\ &= \|x_n\| \left\| y_n - \frac{Ay_0}{\|x_n\|} \right\| \\ &\leq \|x_n\| \left(\|y_n - y_0\| + \left\| y_0 - \frac{Ay_0}{\|x_n\|} \right\| \right) \\ &= \|x_n\| \left(\|y_n - y_0\| + \|y_0\| \left| 1 - \frac{A}{\|x_n\|} \right| \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

综上可得 X 是 Banach 空间.

15. 试证定理 4 中 (f) 式定义的 (x, y) 的确满足内积分的定义.

证明: 即要证明: 对于赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$, 如果范数满足平行四边形法则:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (*)$$

则由

$$(x, y)_{\mathbf{R}} := \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] \quad (K = \mathbf{R} \text{ 时}) \quad (f')$$

或

$$(x, y)_{\mathbf{C}} := \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2] \quad (K = \mathbf{C} \text{ 时}) \quad (f)$$

所定义的确是内积.

(i) 对于 $x \in X$,

$$(x, x)_{\mathbf{C}} = \frac{1}{4} [\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2 + i\|x+ix\|^2 - i\|x-ix\|^2] = \|x\|^2 \geq 0,$$

因为 $|1+i|=|1-i|$, 并且根据范数的性质

$$(x, x)_{\mathbf{C}} = 0 \Leftrightarrow 0 = (x, x)_{\mathbf{C}} = \|x\|^2 \Leftrightarrow x = 0.$$

同理可证 $(x, x)_{\mathbf{R}} \geq 0$ 且 $(x, x)_{\mathbf{R}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) 首先考虑 $K = \mathbf{R}$ 时的情形, 对于 $x, y, z \in X$,

可将 $(x, z)_{\mathbf{R}} + (y, z)_{\mathbf{R}}$ 表示为如下形式:

$$\begin{aligned} & (x, z)_{\mathbf{R}} + (y, z)_{\mathbf{R}} \\ &= \frac{1}{4} [\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2] \\ &= \frac{1}{4} [(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2) - (\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2)] \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\| \frac{x+y}{2} + z + \frac{x-y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x+y}{2} + z - \frac{x-y}{2} \right\|^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} \left(\left\| \frac{x+y}{2} - z + \frac{x-y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x+y}{2} - z - \frac{x-y}{2} \right\|^2 \right) \right), \end{aligned}$$

再由平行四边形法则

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{x+y}{2} + z + \frac{x-y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x+y}{2} + z - \frac{x-y}{2} \right\|^2 \\
&= 2 \left(\left\| \frac{x+y}{2} + z \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 \right); \\
& \left\| \frac{x+y}{2} - z + \frac{x-y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x+y}{2} - z - \frac{x-y}{2} \right\|^2 \\
&= 2 \left(\left\| \frac{x+y}{2} - z \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 \right).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
(x, z)_{\mathbf{R}} + (y, z)_{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{x+y}{2} + z \right\|^2 - \left\| \frac{x+y}{2} - z \right\|^2 \right) \\
&= 2 \left(\frac{x+y}{2}, z \right)_{\mathbf{R}}.
\end{aligned}$$

进而, 令 $y = 0$ 可以得到

$$(x, z)_{\mathbf{R}} = 2 \left(\frac{x}{2}, z \right)_{\mathbf{R}},$$

这里利用了 $(0, z)_{\mathbf{R}} = 0$. 因为 x 是任意的, 故可将 x 换为 $x+y$, 即可得到

$$(x+y, z)_{\mathbf{R}} = 2 \left(\frac{x+y}{2}, z \right)_{\mathbf{R}}.$$

对照上述二式, 即有

$$(x, z)_{\mathbf{R}} + (y, z)_{\mathbf{R}} = (x+y, z)_{\mathbf{R}}. \quad (**)$$

至于 $K = \mathbf{C}$ 时的情形, 注意到从形式上看

$$(x, y)_{\mathbf{C}} = (x, y)_{\mathbf{R}} + i(x, iy)_{\mathbf{R}},$$

利用上述已经证明了的等式(**)不难得到

$$(x, z)_{\mathbf{C}} + (y, z)_{\mathbf{C}} = (x+y, z)_{\mathbf{C}}.$$

(iii) 首先考虑 $K = \mathbf{R}$ 时的情形, 对于 $x, z \in X$ 和任意实数 $s, t \in \mathbf{R}$, 由已经证明的(**)式有

$$(sx, z)_{\mathbf{R}} + (tx, z)_{\mathbf{R}} = ((s+t)x, z)_{\mathbf{R}},$$

可知函数 $f(t) := (tx, z)_{\mathbf{R}}$ 满足如下的函数方程:

$$f(s) + f(t) = f(s+t). \quad (***)$$

又 $f(t) := (tx, z)_{\mathbf{R}}$ 关于 t 是连续的, 因此必有

$$f(t) = f(1)t = t(x, z)_{\mathbf{R}}.$$

(事实上, 由(***)式对于任意的正整数 n 和 m , 利用数学归纳法有

$$f(ns) = f(s + s + \cdots + s)$$

$$= f(s) + f(s) + \cdots + f(s) = nf(s);$$

进而取 $s = \frac{1}{n}$, 有 $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} f(1)$, 因此

$$f(\frac{n}{m}) = nf(\frac{1}{m}) = \frac{n}{m} f(1).$$

又(***)中取 $s = t = 0$ 可得 $f(0) = 0$, 取 $s = -t$ 可得 $f(-s) = -f(s)$. 因此对于所有的有理数, 均成立

$$f(s) = sf(1).$$

利用 $f(s)$ 的连续性, 可知对所有的实数也成立.)

因此得到

$$(tx, z)_{\mathbf{R}} = f(t) = f(1)t = t(x, z)_{\mathbf{R}}.$$

至于 $K = \mathbf{C}$ 时的情形, 注意到由(f)

$$\begin{aligned} (ix, y)_{\mathbf{C}} &= \frac{1}{4} [\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 + i\|ix + iy\|^2 - i\|ix - iy\|^2] \\ &= \frac{1}{4} [\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 + i\|x + y\|^2 - i\|x - y\|^2] \\ &= \frac{1}{4} [-i^2\|ix + y\|^2 + i^2\|ix - y\|^2 + i\|x + y\|^2 - i\|x - y\|^2] \\ &= \frac{i}{4} [-i\|x - iy\|^2 + i\|x + iy\|^2 + \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2] \\ &= i(x, y)_{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

由此也容易得到, 对于 $t \in \mathbf{C}$

$$(tx, z)_{\mathbf{C}} = t(x, z)_{\mathbf{C}}.$$

(iv) 当 $K = \mathbf{R}$ 时, 容易知道

$$(x, y)_{\mathbf{R}} = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2] = (y, x)_{\mathbf{R}};$$

而当 $K = \mathbf{C}$ 时, 直接计算也可得到

$$\begin{aligned}\overline{(x, y)}_{\mathbb{C}} &= \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2] \\ &= \frac{1}{4} [\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 - i\|y - ix\|^2 + i\|y + ix\|^2] \\ &= (y, x)_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

16. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中单位开圆盘, 即 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. dA 是 D 上的面积测度, $L_a^2(D)$ 定义为

$$L_a^2(D) = \{f \mid f \text{ 在 } D \text{ 中解析且 } \int |f(z)|^2 dz < \infty\}.$$

(见课本第六页例 4) 在 $L_a^2(D)$ 中定义内积为

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z) \overline{g(z)} dA.$$

试证 (1) $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 构成 $L_a^2(D)$ 的正交基.

(2) 若 $f \in L_a^2(D)$ 的 Taylor 展开式是 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{1+k} < \infty$;

(3) 若 $g \in L_a^2(D)$ 的展开式是 $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, 则

$$\langle f, g \rangle = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \bar{b}_k}{1+k}.$$

证: 先给出一个预备性结果: 对于 $f \in L_a^2(D)$, 因为 $f(z)$ 是解析函数, 因此可以展开为幂

级数: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. 由此可以断言:

$$\langle f(z), \varphi_n(z) \rangle = a_{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{n}}. \quad (*)$$

事实上, 因为 $f(z)$ 是解析函数, 幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 在 D 中内闭一致收敛, 即对于 D 的任意闭子

集 F , $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 在 F 上一致收敛. 对于 $0 < \varepsilon < 1$, 以下取闭子集 F 为

$$\bar{D}_{\varepsilon} := \{z \in D \mid |z| \leq 1 - \varepsilon\}.$$

容易知道 $\bar{D}_{\varepsilon}$ 是 D 中的闭子集.

对于每一个 $n=1,2,\dots$, 注意到级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sqrt{\frac{n}{\pi}} \bar{z}^{n-1}$ 在 $\bar{D}_\varepsilon$ 中仍旧一致收敛, 以下的积分

号和求和号可以交换顺序:

$$\begin{aligned}
\langle f(z), \varphi_n(z) \rangle &= \int_D f(z) \overline{\varphi_n(z)} dA \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{D}_\varepsilon} f(z) \overline{\varphi_n(z)} dA \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{D}_\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sqrt{\frac{n}{\pi}} \bar{z}^{n-1} dA \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\bar{D}_\varepsilon} z^k \bar{z}^{n-1} dA \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\bar{D}_\varepsilon} r^{k+n-1} (\cos k\theta + i \sin k\theta) \cdot \\
&\quad \cdot (\cos(n-1)\theta - i \sin(n-1)\theta) dA \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-\varepsilon} r^{k+n-1} (\cos k\theta + i \sin k\theta) \cdot \\
&\quad \cdot (\cos(n-1)\theta - i \sin(n-1)\theta) r dr \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{1-\varepsilon} r^{k+n-1} r dr \int_0^{2\pi} (\cos k\theta + i \sin k\theta) \cdot \\
&\quad \cdot (\cos(n-1)\theta - i \sin(n-1)\theta) d\theta \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{n}{\pi}} 2\pi a_{n-1} \int_0^{1-\varepsilon} r^{2n-1} dr \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{n}{\pi}} 2\pi a_{n-1} \frac{(1-\varepsilon)^{2n}}{2n} \\
&= a_{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

因此 (*) 式得证.

(1) 首先证明 $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ 是**正交集**.

事实上, 对于复数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 根据所给的定义

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_m(z), \varphi_n(z) \rangle &= \int_D \sqrt{\frac{m}{\pi}} z^{m-1} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \bar{z}^{n-1} dA \\
&= \int_D \sqrt{\frac{m}{\pi}} (\cos \theta + i \sin \theta)^{m-1} \sqrt{\frac{n}{\pi}} (\cos \theta - i \sin \theta)^{n-1} r^{n+m-2} dA \\
&= \frac{\sqrt{mn}}{\pi} \int_D r^{n+m-2} (\cos(m-1)\theta + i \sin(m-1)\theta) \cdot \\
&\quad \cdot (\cos(n-1)\theta - i \sin(n-1)\theta) dA \\
&= \frac{\sqrt{mn}}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^{n+m-2} (\cos(m-1)\theta + i \sin(m-1)\theta) \cdot \\
&\quad \cdot (\cos(n-1)\theta - i \sin(n-1)\theta) r dr \\
&= \frac{\sqrt{mn}}{\pi} \int_0^1 r^{n+m-2} r dr \int_0^{2\pi} (\cos(m-1)\theta + i(m-1)\sin \theta) \\
&\quad \cdot (\cos(n-1)\theta - i \sin(n-1)\theta) d\theta \\
&= \begin{cases} \frac{\sqrt{mn}}{\pi} 2\pi \frac{1}{2m} = 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此 $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是正交集. 因为 $L_a^2(D)$ 是完备的空间, 故只需再证 $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的即可得知其也是[正交基](#). 设有 $f \in L_a^2(D)$ 且 $f(z) \perp \{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$. 因为 $f(z)$ 是解析函数, 因此可以展开为幂级数:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

根据 (*) 式, 可以得到, 对于每一个 $n=1, 2, \dots$,

$$0 = \langle f(z), \varphi_n(z) \rangle = a_{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

由此即得 $a_{n-1} = 0, (n=1, 2, \dots)$. 所以 $f(z) \equiv 0$. 即

$\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的, 因此是 $L_a^2(D)$ 中的正交基.

(2) 既然 $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是基, 由 Parseval 等式可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f(z), \varphi_n(z) \rangle|^2 = \|f\|^2 < \infty.$$

利用 (*) 式, 上式的左端可以表示为:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f(z), \varphi_n(z) \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \right|^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n-1}|^2}{n} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}. \end{aligned}$$

由此可得所预期的结论.

(3) 对于 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 和 $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, 有

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \varphi_{k+1}(z)$ 和 $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \varphi_{k+1}(z)$, 利用内积的连续性和 (*) 式,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \varphi_{k+1}(z), g(z) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \langle \varphi_{k+1}(z), g(z) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \overline{\langle g(z), \varphi_{k+1}(z) \rangle} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \overline{\left(b_k \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \right)} \\ &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \bar{b}_k}{k+1}. \end{aligned}$$

18. 设 H 是内积空间, $\{e_n\}$ 是 H 中的正交集, 求证:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)} \right| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (\forall x, y \in H).$$

证: 对于任意的正整数 k , 由 Cauchy 不等式和 Bessel 不等式可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |(x, e_n) \overline{(y, e_n)}| &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^k |(x, e_n)|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^k |(y, e_n)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |(y, e_n)|^2} \leq \|x\| \cdot \|y\|, \end{aligned}$$

由 k 的任意性, 知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n) \overline{(y, e_n)}|$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)}$ 绝对收敛, 并

且

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n) \overline{(y, e_n)}| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

19. 试证 $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt \right\}$ 构成 $L^2([0, \pi])$ 的正交基, 但不是 $L^2([-\pi, \pi])$ 的正交基.

证: (1) 首先证明 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt \right\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2([0, \pi])$ 中的正交集. 事实上,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m(t), \varphi_n(t) \rangle &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mt \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ntdt \\ &= -\frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} [\cos(m+n)t - \cos(m-n)t] dt \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\pi}(-\pi) = 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

因此 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2([0, \pi])$ 中的正交集. 同理, 也容易证明 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 还是 $L^2([-\pi, \pi])$ 中的正交集.

(2) 因为 $L^2([0, \pi])$ 是完备的空间, 故只需再证 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备的即可得知其也是正交基.

设有 $f \in L^2([0, \pi])$ 且 $f(t) \perp \{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. 将 $f(t)$ 做奇延拓成为 $f(t)$:

$$f(t) := \begin{cases} f(t), & t \in [0, \pi], \\ -f(-t), & t \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

则 $f(t) \in L^2([-\pi, \pi])$.

注意到对于 $n=1, 2, \dots$, 利用 $f(t) \perp \{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin ntdt \\ &= \int_{-\pi}^0 f(t) \cdot \sin ntdt + \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin ntdt \\ &= -\int_{-\pi}^0 f(-t) \cdot \sin ntdt + \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin ntdt \\ &= -\int_{-\pi}^0 f(-t) \cdot \sin ntdt + \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin ntdt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\pi}^0 f(s) \cdot \sin n(-s) ds + \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin ntdt \\
&= 2 \int_0^{\pi} f(t) \cdot \sin ntdt = 0.
\end{aligned}$$

设 $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$, 对于 $n=0,1,2,\dots$, 利用 $f(t)$ 是奇函数, 可得

$$\langle f, \psi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos ntdt = 0.$$

因此

$$f(t) \perp \left(\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \right).$$

进而也容易得到

$$f(t) \perp \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

又已经知道与

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{\sin t\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$$

仅相差一个常数因子的三角函数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

是 $L^2([-\pi, \pi])$ 中的正交基, 因此

$$f(t) = 0, \text{ a. e. } t \in [-\pi, \pi],$$

即有

$$f(t) = 0, \text{ a. e. } t \in [0, \pi].$$

因此 $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2([0, \pi])$ 中的正交基.

(3) 注意到 $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt \right\}$ 在 $L^2([-\pi, \pi])$ 中不是完备的, 例如对于恒等于常数 1 的函数

$f(t) \equiv 1 \in L^2([-\pi, \pi])$ 是非零元, 但对于 $n=1,2,\dots$,

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin ntdt = 0.$$

因此, $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt\right\}$ 虽然是 $L^2([-\pi, \pi])$ 的正交集, 但不是正交基.

24. 试给出 $C^1([a, b])$ 中列紧集的判别条件.

证: 设子集 $A \subset C^1([a, b])$ 且 x_0 是 $[a, b]$ 中一个数. 记

$$A' = \{f'(x) \mid f(x) \in A\} \text{ 及 } B = \{f(x_0) \mid f(x) \in A\}.$$

则 A 是 $C^1([a, b])$ 中的列紧集的充分必要条件是

- (i) A' 在 $C([a, b])$ 中有界;
- (ii) B 是 $\mathbf{R}$ 中的有界集;
- (iii) A' 是 $C([a, b])$ 中等度连续的集合.

[充分性] 设 $A \subset C^1([a, b])$ 满足条件 (i), (ii) 和 (iii).

根据 $C^1([a, b])$ 中范数的定义: 对于 $f \in C^1([a, b])$,

$$\|f\|_{C^1([a, b])} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|,$$

容易看出,

$$f_k \xrightarrow{C^1([a, b])} f \Leftrightarrow f_k \xrightarrow{C([a, b])} f \text{ 且 } f'_k \xrightarrow{C([a, b])} f'$$

因此只需证明 A 和 A' 分别是 $C([a, b])$ 中的列紧集即可, 根据 Arzela-Ascoli 定理, 这也只需证明 A 和 A' 分别在 $C([a, b])$ 中有界且等度连续即可. 事实上, A' 在 $C([a, b])$ 中有界性和等度连续已由所给条件得到保证 (即 (i) 和 (iii)). 还需证明 A 在 $C([a, b])$ 中的有界性和等度连续性. 记 A' 在 $C([a, b])$ 中的一个界为 $M_{A'}$, B 作为 $\mathbf{R}$ 中的有界集, 一个界为 M_B . 对于任意的 $x \in [a, b]$, 利用中值定理, 有

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \\ &= |f'(\xi)(x - x_0)| + |f(x_0)| \\ &\leq M_{A'}(b - a) + M_B. \end{aligned}$$

此即表明 $\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq M_{A'}(b - a) + M_B$, 所以 A 在 $C([a, b])$ 中有界, 且界为

$M_{A'}(b - a) + M_B$. 进而对于 $x, y \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f'(\xi)(x - y)| \\ &\leq M_{A'} |x - y|. \end{aligned}$$

由此易知 A 具有等度连续性.

[必要性] 设 A 是 $C^1([a, b])$ 中的列紧集, 即对于 A 的任何点列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 在 $C^1([a, b])$ 中的范数(距离)

$$\|f\|_{C^1([a, b])} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

意义下都有收敛的子列 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$. 因此, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{f'_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 分别在 $C([a, b])$ 中有收敛的子列的 $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{f'_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$. 这表明, 根据 Arzela-Ascoli 定理, A 和 A' 均是 $C([a, b])$ 中的列紧集, 因此 A 和 A' 均在 $C([a, b])$ 中有界且等度连续, 因此得到(i)和(iii). 由 A 的有界性, 可以知道集合

$$B = \{f(x_0) \mid f(x) \in A\}$$

对于任意的 $x_0 \in [a, b]$ 都是 $\mathbf{R}$ 中的有界集, 因此得到(ii).

26. 设 (X, ρ) 是紧距离空间, 映射 $f: X \rightarrow X$ 满足

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2). \quad (x_1 \neq x_2)$$

则

(1) f 是否有唯一的不动点?

(2) f 是否为压缩映射?

解答: (1) f 存在唯一的不动点, 证明如下:

(存在性) 定义映射 $h: X \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$h(x) = \rho(x, f(x)).$$

由所给条件知此映射是连续的, 而 X 是紧空间表明此映射能在 X 中取得上下确界. 因此存在 $y \in X$, 使得

$$h(y) = \rho(y, f(y)) = \inf_{x \in X} h(x).$$

断言 $h(y) = \inf_{x \in X} h(x) = 0$, 则 y 是 f 的不动点: $y = f(y)$. 若不然, $h(y) > 0$, 则在所给的

条件中取 $x = f(y)$ 有

$$h(f(y)) = \rho(f(y), f(f(y))) < \rho(y, f(y)) = h(y),$$

此与 y 达到 $h(x)$ 的下确界相矛盾.

(唯一性) 若还有 $z \in X$ 使得 $z = f(z)$ 但 $z \neq y$. 仍由所给的条件, 有

$$0 < \rho(z, y) = \rho(f(z), f(y)) < \rho(z, y).$$

这是个矛盾. 故必有 $z = y$.

(2) f 可以不是压缩映射. 反例如下:

[反例 1] 记 $X = [0, 1]$, 其中距离定义为两点之间的 Euclid 距离: $\forall x, y \in X$,

$$\rho(x, y) := |x - y|.$$

因为 X 是 $\mathbf{R}$ 的闭子集, 因此是完备的, 显然也是紧的. 定义映射 $T: X \rightarrow X$ 为: 对于 $x \in X$,

$$T(x) := \frac{x}{1+x}.$$

显然 T 是自映射, 且有唯一的不动点 0.

对于任意的 $x, y \in X$, 设 $x \neq y$, 则 x, y 中至少有一个不为零, 由此容易得到

$$\rho(Tx, Ty) = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}$$

$$< |x-y| = \rho(x, y).$$

所以 T 满足所需的条件, 但 T 不是压缩映射, 因为

$$\sup_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ x \neq y}} \frac{\rho(Tx, Ty)}{\rho(x, y)} = \sup_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ x \neq y}} \frac{1}{(1+x)(1+y)} = 1.$$

因此不存在常数 $\alpha \in [0, 1)$, 使得对于所有的 $x, y \in X$,

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y).$$

[反例 2] 记 $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, 其中距离定义为两点之间的 Euclid 距离:

$$\forall x, y \in X, \quad \rho(x, y) := |x - y|.$$

因为 X 是 $\mathbf{R}$ 的闭子集, 因此是完备的, 显然也是紧的. 定义映射 $T: X \rightarrow X$ 为: 对于 $x \in X$,

$$T(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

显然 T 是自映射, 且有唯一的不动点 0 .

对于任意的 $x, y \in X$, 设 $x \neq y$, 如果 $x, y \in X \setminus \{0\}$, 则有正整数 m, n , $m \neq n$, 使得

$$x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m},$$

且

$$\begin{aligned}\rho(Tx, Ty) &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| = \frac{|m-n|}{(n+1)(m+1)} \\ &< \frac{|m-n|}{nm} = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = \rho(x, y); \end{aligned}$$

如果 x, y 中有一个为零, 例如 $x = 0$, 也有

$$\rho(Tx, Ty) = \left| 0 - \frac{1}{m+1} \right| = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} = \rho(x, y).$$

所以 T 满足所需的条件, 但 T 不是压缩映射, 因为例如对于 $x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m}$, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 成立

$$\frac{\rho(Tx, Ty)}{\rho(x, y)} = \frac{\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|}{\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|} = \frac{mn}{(n+1)(m+1)} \rightarrow 1,$$

即不存在 $\alpha \in [0, 1)$, 使得 $\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$..

补充题. 设二元函数 $g(x, y) \in C([a, b] \times [a, b])$, A 是 $C([a, b])$ 中的一个有界集, 记

$$\tilde{A} = \left\{ F(x) := \int_a^b g(x, y) f(y) dy \mid f(x) \in A \right\}.$$

(i) 证明 $\tilde{A}$ 是 $C([a, b])$ 中的列紧集;

(ii) 问当 A 还是 $C([a, b])$ 中的闭集时, $\tilde{A}$ 是不是紧集?

证: (i) 因为 $g(x, y) \in C([a, b] \times [a, b])$, 不难得知 $\tilde{A} \subseteq C([a, b])$. 根据 Arzela-Ascoli 定理, 只需再证明 $\tilde{A}$ 在 $C([a, b])$ 中有界且等度连续即可.

(a) $\tilde{A}$ 在 $C([a, b])$ 中有界, 即 $\tilde{A}$ 作为由连续函数组成的集合是一致有界的. 事实上, 如果记 A 的一个界为 M , $|g(x, y)|$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上的最大值为 K , 则对于任意取定的

$F(x) \in \tilde{A}$, 有某个 $f(x) \in A$, 使得

$$F(x) = \int_a^b g(x, y) f(y) dy, \text{ 由此得知}$$

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left| \int_a^b g(x, y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_a^b |g(x, y) f(y)| dy \\ &\leq \int_a^b \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b}} |g(x, y)| \max_{a \leq y \leq b} |f(y)| dy \\ &= \|f\|_{C[a, b]} \int_a^b K dy \\ &\leq \|f\|_{C[a, b]} K(b-a) \\ &\leq KM(b-a). \end{aligned}$$

因此 $\tilde{A}$ 是 $C([a, b])$ 中有界集, 且 $\tilde{A}$ 的一个界为 $KM(b-a)$.

(b) $\tilde{A}$ 在 $C([a, b])$ 中等度连续. 对于 $F(x) \in \tilde{A}$, 有某个 $f(x) \in A$, 使得

$$F(x) = \int_a^b g(x, y) f(y) dy. \text{ 因为 } g(x, y) \in C([a, b] \times [a, b]), \text{ 因此在 } [a, b] \times [a, b] \text{ 上一致}$$

连续, 故对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x, x' \in [a, b]$ 且 $|x - x'| < \delta$ 时, 有

$$|g(x, y) - g(x', y)| < \varepsilon \quad (\forall y \in [a, b]),$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x')| &= \left| \int_a^b g(x, y) f(y) dy - \int_a^b g(x', y) f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_a^b [g(x, y) - g(x', y)] f(y) dy \right| \\ &\leq \int_a^b |g(x, y) - g(x', y)| |f(y)| dy \\ &\leq \int_a^b \max_{a \leq y \leq b} |f(y)| |g(x, y) - g(x', y)| dy \end{aligned}$$

$$= \|f\|_{C[a,b]} \int_a^b |g(x, y) - g(x', y)| dy$$

$$\leq M(b-a)\varepsilon.$$

由此易知 $\tilde{A}$ 具有等度连续性.

(ii) 当 A 还是 $C([a, b])$ 中的闭集时, $\tilde{A}$ 未必是紧集!

反例可以构造如下: 考虑 $C([0, 1])$ 中的集合

$$A = \{x^k \mid k = 1, 2, \dots\},$$

显然 A 是 $C([0, 1])$ 中的有界集, 一个界可以取为 1. 可以断言 A 是 $C([0, 1])$ 中的闭集, 因为

对于任意的 $x^k, x^l \in A$, 不妨设 $l > k$, 则

$$\begin{aligned} \|x^k - x^l\|_{C[0,1]} &= \max_{x \in [0,1]} |x^k - x^l| \\ &= \left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{k}{l-k}} - \left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{l}{l-k}} = \left(\frac{k}{l}\right)^{\frac{k}{l-k}} \left[1 - \frac{k}{l}\right], \end{aligned}$$

对于任意固定的 k , 当 l 趋于无穷大时, 右端项趋向于 1, 由此容易知道, 作为 $C([0, 1])$ 中的子点列, 集合 A 不是 Cauchy 列, 因此不可能在 $C([0, 1])$ 中有收敛的子列, 故集合 A 没有聚点, 因此是 $C([0, 1])$ 中的闭集.

定义 $K(x, y) = 1$, 显然 $K(x, y) \in C([0, 1] \times [0, 1])$.

对于上述的集合 A , 不难计算

$$\tilde{A} = \left\{ F(x) = \int_0^1 x^k dx \mid k = 1, 2, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{k+1} \mid k = 1, 2, \dots \right\}$$

显然, $\tilde{A}$ 是 $C([0, 1])$ 中列紧集, 唯一的聚点是零函数, 但零函数不在 $\tilde{A}$ 中, 因此不是闭集.

补充题. 设 A 是 $C([a, b])$ 中的一个有界集, 记

$$B = \left\{ F(x) := \int_a^x f(t) dt \mid f(x) \in A \right\}.$$

证明 B 是 $C([a, b])$ 中的列紧集.

证: 根据 Arzela-Ascoli 定理, 需证明 B 在 $C([a, b])$ 中有界且等度连续即可.

(i) B 在 $C([a, b])$ 中有界, 即 B 作为由函数组成的集合是一致有界的. 事实上, 如果记 A 的界为 M , 则对于任意取定的 $F(x) \in B$, 有某个 $f(t) \in A$, 使得

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ 由此得知}$$

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt \\ &\leq \int_a^x \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| dt = \|f\|_{C[a, b]} \int_a^x dt \\ &\leq \|f\|_{C[a, b]} (b-a) \leq M(b-a). \end{aligned}$$

因此 B 是 $C([a, b])$ 中有界集, 且 B 的界为 $M(b-a)$.

(ii) B 在 $C([a, b])$ 中等度连续. 对于 $F(x) \in B$, 有某个 $f(t) \in A$, 使得 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

对于 $x, \tilde{x} \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\tilde{x})| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{\tilde{x}} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_x^{\tilde{x}} f(t) dt \right| \leq \left| \int_x^{\tilde{x}} |f(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_x^{\tilde{x}} \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| dt \right| = \|f\|_{C[a, b]} \left| \int_x^{\tilde{x}} dt \right| \\ &\leq M |x - \tilde{x}|. \end{aligned}$$

由此易知 B 具有等度连续性.

补充题. 证明课本 20 页定理 8:

对于距离空间 (X, ρ) 中的任何集合 G , G' 与 $\overline{G}$ 均是闭集.

证: (i) 根据闭集的定义, 仅需证明

$$(G')' \subseteq G'.$$

事实上, 设 $y \in (G')'$, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$

$$(S(y, \varepsilon) \setminus \{y\}) \cap G' \neq \emptyset.$$

设 $x \in (S(y, \varepsilon) \setminus \{y\}) \cap G'$, 根据极限点的定义, 对于

$$\delta = \min\{\rho(x, y), \varepsilon - \rho(x, y)\} > 0,$$

有

$$(S(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap G \neq \emptyset.$$

又

$$S(x, \delta) \subseteq S(y, \varepsilon),$$

因此有

$$(S(y, \varepsilon) \setminus \{y\}) \cap G \supseteq (S(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap G \neq \emptyset.$$

注意到 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即可得到 $y \in G'$. 因此 G' 是闭集.

(ii) 需证明的是 $\overline{G}' \subseteq \overline{G}$. 因为 $\overline{G} = G \cup G'$, 又

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cup B', \quad (*)$$

故由(i)中已经证明了的结果, 有

$$\overline{G}' = (G \cup G')' \subseteq G' \cup G'' \subseteq G' \subseteq \overline{G},$$

因此 $\overline{G}$ 是闭集.

如下证明(*): 设 $y \notin A' \cup B'$, 则

$$y \notin A', \quad \text{且} \quad y \notin B'.$$

由前者知存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$(S(y, \varepsilon_0) \setminus \{y\}) \cap A = \emptyset;$$

由后者知存在某个 $\varepsilon_1 > 0$, 使得

$$(S(y, \varepsilon_1) \setminus \{y\}) \cap B = \emptyset.$$

取 $\delta_0 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, 则 $\delta_0 > 0$, 且

$$(S(y, \delta_0) \setminus \{y\}) \cap (A \cup B) = \emptyset,$$

所以 $y \notin (A \cup B)'$, 即(*)得证.

补充题. 判断集合

$$A = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_m, \dots) \in l^2 \mid \left| y_m \right| \leq \frac{1}{m}, m = 1, 2, \dots \right\}$$

是否为 l^2 中的列紧集?

答: A 是 l^2 中的列紧集, 证明如下.

因为 $(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, \dots) \in l^2$, 即级数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ 收敛, 因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在某个 m_0 ,

使得

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \varepsilon.$$

考虑集合:

$$A_{m_0} = \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_{m_0}, 0, \dots) \mid y = (y_1, y_2, \dots, y_m, \dots) \in A \right\}$$

容易知道 A_{m_0} 是 A 的 ε -网, 且如果视其为 $\mathbf{R}^{m_0}$ 空间中的子集, A_{m_0} 是有界集(一个界是

$\sqrt{\sum_{m=1}^{m_0} \frac{1}{m^2}}$), 因此列紧, 在 l^2 中仍然是列紧的. 进而知道 l^2 是完备的, 因此根据前面补充题

的结论 (A 是列紧集的充分必要条件是对于任意的 $\varepsilon > 0$, A 有列紧的 ε -网), 可以得到 A 是 l^2 中的列紧集.

补充题. 设 (X, ρ) 是完备的距离空间, $A \subset X$. 证明:

A 是列紧集的充分必要条件是对于任意的 $\varepsilon > 0$, A 有列紧的 ε -网.

证明:

[必要性] 设 A 是列紧集, 因此 A 是完全有界集, 即对于任意的 $\varepsilon > 0$, A 存在有限 ε -网 B ,

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

又有限集一定是列紧集, 因此 B 是 A 的列紧的 ε -网.

[充分性] 设条件成立, 即对于任意的 $\varepsilon > 0$, A 有列紧的 $\varepsilon/2$ -网 B . 因为 B 列紧, 因此全有界, 即存在有限的 $\varepsilon/2$ -网 C . 不难证明 C 是 A 的有限 ε -网. 由此可以得知, A 是全有界集, 又 (X, ρ) 是完备的距离空间, 因此 A 是列紧集.

第二章 练习题

3. 设 X 是有限维线性赋范空间, 试证: X 上任意两个范数都是等价的.

证明一: 不妨设 X 是 n 维的, $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是其基底, $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是其上的任意两个范数. 因为

“有限维线性赋范空间是完备的” (参见第一章, 习题 7), 因此 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 都完备. 在 X 中

引入一个新的范数 $\|\cdot\|_E$ 如下: 对于 $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in X$, 定义

$$\|x\|_E := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

则容易验证, $(X, \|\cdot\|_E)$ 是 Banach 空间. 显然, 对于任意的 $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in X$, 成立

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\|_1 \\ &\leq \|x_1 e_1\|_1 + \cdots + \|x_n e_n\|_1 \\ &= |x_1| \cdot \|e_1\|_1 + \cdots + |x_n| \cdot \|e_n\|_1 \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| (\|e_1\|_1 + \cdots + \|e_n\|_1) \\ &= (\|e_1\|_1 + \cdots + \|e_n\|_1) \cdot \|x\|_E. \end{aligned}$$

因此范数 $\|\cdot\|_E$ 强于范数 $\|\cdot\|_1$, 根据范数等价性定理, 即知范数 $\|\cdot\|_E$ 等价于范数 $\|\cdot\|_1$. 同

理可证范数 $\|\cdot\|_E$ 等价于范数 $\|\cdot\|_2$, 由此易知范数 $\|\cdot\|_1$ 等价于范数 $\|\cdot\|_2$.

证明二: 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的任意两个范数, 因为 X 是有限维线性赋范空间, 因此

$(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间 (参见第一章, 习题 7), 在 X 中再引入一个新范数:

对于任意的 $x \in X$, 定义

$$\|x\| := \|x\|_1 + \|x\|_2.$$

非常容易地可以证明这个新范数也是完备的, 即 $(X, \|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间. 而新范数 $\|\cdot\|$

强于 $\|\cdot\|_1$, 即

$$\|x\|_1 \leq \|x\|, \quad (\forall x \in X).$$

因此, 根据范数等价性定理 (58 页引理 1), 新范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价, 即存在正数 $K > 0$,

使得

$$\|x\| \leq K \|x\|_1 \quad (\forall x \in X).$$

又因为新范数 $\|\cdot\|$ 强于 $\|\cdot\|_2$, 即 $\|x\|_2 \leq \|x\|$, 因此得到

$$\|x\|_2 \leq \|x\| \leq K \|x\|_1, \quad (\forall x \in X).$$

此即表明: $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

4. 设 X 是有限维线性空间, 试证 X 中的弱收敛等价于按范数收敛.

证明: 设 X 是 n 维空间, $\{e_i\}_{i=1}^n$ 其一个基底, X 中的范数记为 $\|\cdot\|_X$. 则在 X 中按范数收

敛等价于按坐标收敛, 即: 若 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty \subset X, x^{(0)} \in X$, 在基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 意义下可以表示为

$$x^{(k)} = x_1^{(k)} e_1 + x_2^{(k)} e_2 + \cdots + x_n^{(k)} e_n, \quad x^{(0)} = x_1^{(0)} e_1 + x_2^{(0)} e_2 + \cdots + x_n^{(0)} e_n.$$

则可以断言:

$$x^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x^{(0)} \Leftrightarrow x_i^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x_i^{(0)} \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

由此便可以证明本题的结论, 即如果我们假设有 $\{y^{(k)}\}_{k=1}^\infty \subset X, y^{(0)} \in X$ 并且在基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 的意义下表示为

$$y^{(k)} = y_1^{(k)} e_1 + y_2^{(k)} e_2 + \cdots + y_n^{(k)} e_n,$$

$$y^{(0)} = y_1^{(0)} e_1 + y_2^{(0)} e_2 + \cdots + y_n^{(0)} e_n,$$

则

$$y^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|_X} y^{(0)} \Leftrightarrow y^{(k)} \xrightarrow{w} y^{(0)}.$$

[充分性($\Leftarrow$)] 设 $y^{(k)} \xrightarrow{w} y^{(0)}$.

根据 Hahn-Banach 定理, 对于每一个 $i=1, 2, \cdots, n$, 存在泛函 $f_i \in X^*$, 使得

$$f_j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

根据弱收敛的定义, 对于每一个 $f \in X^*$

$$f(y^{(k)}) \longrightarrow f(y^{(0)}),$$

尤其是对于上面所取的 f_i , ($i=1, 2, \cdots, n$) 我们有

$$f_i(y^{(k)}) = y_i^{(k)} \longrightarrow f_i(y^{(0)}) = y_i^{(0)},$$

即, 序列 $\{y^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ 每一个坐标 $\{y_i^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ 收敛到 $y^{(0)}$ 的相应的坐标 $y_i^{(0)}$:

$$y_i^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_i^{(0)}, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

因此, 根据 X 中按范数收敛等价于按坐标收敛, 就有

$$y^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|_X} y^{(0)}.$$

[必要性 ($\Rightarrow$)] (结论是一般性的, 即对于一般的赋范线性空间均有此性质) 设

$y^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|_X} y^{(0)}$, 则对于任意的 $f \in X^*$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 均有

$$|f(y^{(k)}) - f(y^{(0)})| = |f(y^{(k)} - y^{(0)})|$$

$$\leq \|f\|_{X^*} \cdot \|y^{(k)} - y^{(0)}\|_X \rightarrow 0,$$

即

$$f(y^{(k)}) \longrightarrow f(y^{(0)}).$$

因此, 根据弱收敛的定义, 知道 $y^{(k)} \xrightarrow{w} y^{(0)}$.

5. 设 X 是 Banach 空间, $T, S \in L(X)$, 由 $TS = 0$ 能否推出

(1) T 与 S 至少有一个为零? 或

(2) $ST = 0$?

答: (1) 由 $TS = 0$ 不能推出 T 与 S 至少有一个为零. 反例如下: 定义 $T, S \in L(\mathbf{R}^2)$ 分别为:

对于任意的 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$T(x, y) = (x, 0),$$

$$S(x, y) = (0, y).$$

则容易验证, T, S 都是上的线性算子, 但 T, S 都不是零算子, 而

$$TS(x, y) = T(0, y) = (0, 0),$$

即 $TS = 0$.

(注: 在标准基底下, T, S 分别对应矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 而映射 T, S 的复合映射 TS 对

应于矩阵的乘法运算 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

(1) 由 $TS = 0$ 不能推出 $ST = 0$. 反例如下: 定义 $T, S \in L(\mathbf{R}^2)$ 分别为: 对于任意的

$(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$T(x, y) = (0, y),$$

$$S(x, y) = (y, 0).$$

则容易验证, T, S 都是上的线性算子, 且 T, S 都不是零算子, 而

$$TS(x, y) = T(y, 0) = (0, 0),$$

即 $TS = 0$, 但

$$ST(x, y) = S(0, y) = (y, 0),$$

即 $ST \neq 0$. (注意, 也可以习题 6 为例.)

(注: 在标准基底下, T, S 分别对应于矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, TS 对应于矩阵乘法

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 而映射 T 和 S 的复合映射 ST 对应于矩阵的乘法运算

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

6. 定义 $L^2([0, 1])$ 上算子 T_1, T_2 分别为

$$T_1 f(t) = tf(t), \quad T_2 f(t) = \int_0^1 tsf(s)ds,$$

试证 T_1, T_2 是 $L^2([0, 1])$ 上的有界线性算子, 但 T_1 与 T_2 不可交换, 即

$$[T_1, T_2] = T_1 T_2 - T_2 T_1 \neq 0.$$

证: 容易证明算子 T_1, T_2 都有意义, 且是线性的. 对于任意的 $f \in L^2([0, 1])$, 由 T_1 的定义

$$\begin{aligned} \|T_1(f)\|_{L^2} &= \sqrt{\int_0^1 |T_1 f(s)|^2 ds} \\ &= \sqrt{\int_0^1 |sf(s)|^2 ds} \leq \sqrt{\int_0^1 |f(s)|^2 ds} = \|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

因此 T_1 是有界的且 $\|T_1\| \leq 1$.

由 T_2 的定义

$$\begin{aligned} \|T_2(f)\|_{L^2} &= \sqrt{\int_0^1 |T_2 f(s)|^2 ds} \\ &= \sqrt{\int_0^1 |tsf(s)|^2 ds} \leq \sqrt{\int_0^1 |f(s)|^2 ds} = \|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

因此 T_2 是有界的且 $\|T_2\| \leq 1$.

注意到

$$T_1 T_2 f(t) = T_1 \int_0^1 tsf(s)ds = t \int_0^1 tsf(s)ds = t^2 \int_0^1 sf(s)ds,$$

$$T_2 T_1 f(t) = T_2 [tf(t)] = \int_0^1 t s f(s) ds = t \int_0^1 s^2 f(s) ds,$$

因此

$$(T_1 T_2 - T_2 T_1) f(t) = t^2 \int_0^1 s f(s) ds - t \int_0^1 s^2 f(s) ds,$$

显然如果我们取 $f(t) \equiv 1$, 则

$$\begin{aligned} (T_1 T_2 - T_2 T_1) f(t) &= t^2 \int_0^1 s ds - t \int_0^1 s^2 ds \\ &= \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t \neq 0. \end{aligned}$$

注: $T_1 f(t) = tf(t)$ 是乘法算子, 而 $T_2 f(t) = \int_0^1 ts f(s) ds$ 是以 $K(s, t) = st$ 为核的积分算子.

7. 设 $\varphi \in L^\infty([0, 1])$, 定义 $L^2([0, 1])$ 上的算子 M_φ 为

$$M_\varphi f = \varphi f,$$

试证 M_φ 有界线性算子, 并求 M_φ 的范数.

证: 因为 $\varphi \in L^\infty([0, 1])$, 其范数定义中的下确界可以达到, 即存在零测集 $E_0 \subset [0, 1]$, 使得

$$\|\varphi\|_{L^\infty} := \inf_{\substack{E \subset [0, 1] \\ mE = 0}} \sup_{t \in [0, 1] \setminus E} |\varphi(t)| = \sup_{t \in [0, 1] \setminus E_0} |\varphi(t)|.$$

(i) 算子 $M_\varphi : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ 有意义. 这也只需证明对于 $f \in L^2([0, 1])$,

$M_\varphi f = \varphi f \in L^2([0, 1])$ 即可. 事实上, 容易得知 $M_\varphi f = \varphi f$ 是可测函数, 且

$$\begin{aligned} \|M_\varphi(f)\|_{L^2} &= \sqrt{\int_0^1 |M_\varphi f(s)|^2 ds} \\ &= \sqrt{\int_0^1 |\varphi(s) f(s)|^2 ds} \\ &= \sqrt{\int_{[0, 1] \setminus E_0} |\varphi(s)|^2 |f(s)|^2 ds} \\ &\leq \sqrt{\int_{[0, 1] \setminus E_0} |f(s)|^2 \left(\sup_{s \in [0, 1] \setminus E_0} |\varphi(s)| \right)^2 ds} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (\|\varphi\|_{L^\infty})^2 |f(s)|^2 ds} \\ &= \|\varphi\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} < \infty, \end{aligned}$$

由此得知 $M_\varphi f = \varphi f \in L^2([0, 1])$.

(ii) M_φ 是线性的. 事实上, 对于 $f, g \in L^2([0, 1])$ 以及任意的数 a 和 b ,

$$\begin{aligned}
M_\varphi(af + bg) &= \varphi[af + bg] \\
&= a\varphi f + b\varphi g \\
&= aM_\varphi(f) + bM_\varphi(g).
\end{aligned}$$

所以 M_φ 是线性算子.

$$(iii) \quad \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty}$$

对于任意的 $f \in L^2([0,1])$, 由 M_φ 的定义

$$\begin{aligned}
\|M_\varphi(f)\|_{L^2} &= \sqrt{\int_0^1 |M_\varphi f(s)|^2 ds} \\
&= \sqrt{\int_0^1 |\varphi(s)f(s)|^2 ds} \\
&= \sqrt{\int_{[0,1] \setminus E_0} |\varphi(s)|^2 |f(s)|^2 ds} \\
&\leq \sqrt{\int_{[0,1] \setminus E_0} |f(s)|^2 \left(\sup_{s \in [0,1] \setminus E_0} |\varphi(s)| \right)^2 ds} \\
&= \sqrt{\int_0^1 (\|\varphi\|_{L^\infty})^2 |f(s)|^2 ds} \\
&= \|\varphi\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

因此 M_φ 是有界的且 $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}$.

反之, 我们要证明 $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_{L^\infty}$. 不失一般性, 可假设 $\|\varphi\|_{L^\infty} > 0$. 因为 L^∞ 范数中的

下确界可以达到, 不妨设有零测集 $E_0 \subset [0,1]$, 使得

$$\|\varphi\|_{L^\infty} = \sup_{t \in [0,1] \setminus E_0} |\varphi(t)|.$$

对于任意的 $0 < \varepsilon < \|\varphi\|_{L^\infty}$, 由上确界的定义, 存在正测度的子集 $E \subset [0,1] \setminus E_0$, 使得

$$\varphi(t) \geq \|\varphi\|_{L^\infty} - \varepsilon, \quad t \in E.$$

(若不然, 使得 $\varphi(t) \geq \|\varphi\|_{L^\infty} - \varepsilon$ 的点 $t \in E$ 所组成的集合 E 是零测集, 在 $([0,1] \setminus E_0) \setminus E$ 上

恒有 $\varphi(t) < \|\varphi\|_{L^\infty} - \varepsilon$, 此与 $\|\varphi\|_{L^\infty}$ 的定义相矛盾). 定义

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{mE}}, & t \in E, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus E. \end{cases}$$

则 $f_\varepsilon(t) \in L^2([0,1])$ 且

$$\|f_\varepsilon\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 |f_\varepsilon(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_E \left| \frac{1}{\sqrt{mE}} \right|^2 dt} = 1.$$

根据算子范数的性质, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \|M_\varphi\| &= \|f_\varepsilon\|_{L^2} \|M_\varphi\| \\ &\geq \|M_\varphi(f_\varepsilon)\|_{L^2} \\ &= \|\varphi f_\varepsilon\|_{L^2} \\ &= \sqrt{\int_E |\varphi(t)|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{mE}} \right|^2 dt} \\ &\geq \sqrt{\int_E \left| \|\varphi(t)\|_{L^\infty} - \varepsilon \right|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{mE}} \right|^2 dt} \\ &= \left(\|\varphi(t)\|_{L^\infty} - \varepsilon \right) \sqrt{\int_E \left| \frac{1}{\sqrt{mE}} \right|^2 dt} \\ &= \|\varphi(t)\|_{L^\infty} - \varepsilon. \end{aligned}$$

鉴于 ε 的任意性, 我们最终得到 $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_{L^\infty}$.

8. 定义 l^2 上的算子 S 为

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

试证 S 有左逆, 但无右逆.

证: (i) S 的左逆算子是左位移算子 T :

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots).$$

事实上, 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2$,

$$\begin{aligned} TS(x) &= TS(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ &= T(0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ &= x = I(x). \end{aligned}$$

即 $TS = I$, 因此 S 有左逆算子为 T .

(ii) 因为 S 不是满射, 因此 S 无右逆算子. 若不然, 设 S 存在右逆算子是 T , 则 $ST = I$. 但是, 对于例如

$$y = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in l^2,$$

记 $T(y) = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$, 则

$$\begin{aligned}
ST(y) &= S(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \\
&= (0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \\
&\neq (1, 0, \dots, 0, \dots) \\
&= y.
\end{aligned}$$

由此产生的矛盾表明 $ST = I$ 是不可能的.

9. 试证微分算子 $T = \frac{d}{dt}: C^1([0,1]) \rightarrow C([0,1])$ 有右逆, 但无左逆.

证: (i) $T = \frac{d}{dt}$ 的右逆算子是积分算子 $P = \int_0^t$: 即对于任意的 $x(t) \in C([0,1])$

$$P(x) = \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

显然 $TP = I_{C([0,1])}$, 因为对于任意的 $x(t) \in C([0,1])$

$$\begin{aligned}
TP(x) &= T\left(\int_0^t x(\tau) d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t x(\tau) d\tau\right) \\
&= x(t).
\end{aligned}$$

(ii) 因为 T 不是单射, 因此 T 无左逆算子. 若不然, 设 T 存在左逆算子是 Q , 则

$QT = I_{C^1([0,1])}$. 但是, 对于例如 $x(t) \equiv 1 \in C^1([0,1])$, 有

$$QT(1) = Q\left(\frac{d}{dt}(1)\right) = Q(0) = 0$$

(线性算子将零元映射为零元). 由此产生的矛盾表明 $QT = I_{C^1([0,1])}$ 是不可能的.

10. 设 X 是 Banach 空间, X_0 是 X 的线性子空间. 映射 $\pi: X \rightarrow X/X_0$ 定义为

$$\pi: x \mapsto [x] \quad (x \in X),$$

试证: π 是开映射.

证: 已知商空间 $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 是赋范线性空间(见上一章第九题), 其中范数定义为

$$\|[x]\|_0 = \inf_{y \in X_0} \|x + y\|.$$

根据同态定理, 自然映射 $\pi: X \rightarrow X/X_0$ 是满射, 因此根据 Banach 开映射定理, 只要能证

明 $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 是 Banach 空间, 则 $\pi: x \mapsto [x]$ 是开映射.

如下证明商空间的范数 $\|\cdot\|_0$ 是完备的. 设 $\{[x_n]\}_{n=1}^\infty$ 是含于 X/X_0 中在范数 $\|\cdot\|_0$ 意义下

的 Cauchy 列, 即

$$\| [x_m] - [x_n] \|_0 = \| x_m - x_n \|_0 \rightarrow 0, \text{ 当 } m, n \rightarrow \infty.$$

(i) $\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 包含一个子列使得 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 所对应的子列成为 X 中的 Cauchy 列. 事实上, 因为

$\{[x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列, 由此得知存在一个正整数的子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, 满足

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k \rightarrow \infty,$$

且

$$\| [x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}] \|_0 = \| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \|_0 < 2^{-k}.$$

对于每一个 $k = 1, 2, \cdots$, 根据下确界的定义, 存在 $y_k \in X_0$, 使得(不失一般性, 可设 $y_1 = 0$)

$$\| (x_{n_{k+1}} + y_{k+1}) - (x_{n_k} + y_k) \| < \| [x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}] \|_0 + \frac{1}{2^k} < \frac{2}{2^k}.$$

由此我们断言 $\{x_{n_k} + y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 因为对于任意的正整数 p

$$\begin{aligned} & \| (x_{n_{k+p}} + y_{k+p}) - (x_{n_k} + y_k) \| \\ &= \| (x_{n_{k+p}} + y_{k+p}) - (x_{n_{k+p-1}} + y_{k+p-1}) + (x_{n_{k+p-1}} + y_{k+p-1}) \\ & \quad - \cdots + (x_{n_{k+1}} + y_{k+1}) - (x_{n_k} + y_k) \| \\ &\leq \| (x_{n_{k+p}} + y_{k+p}) - (x_{n_{k+p-1}} + y_{k+p-1}) \| + \\ & \quad \cdots + \| (x_{n_{k+1}} + y_{k+1}) - (x_{n_k} + y_k) \| \\ &< \frac{2}{2^{k+p-1}} + \frac{2}{2^{k+p-2}} + \cdots + \frac{2}{2^k} \\ &= \frac{2}{2^k} \frac{1 - \frac{1}{2^{k+p}}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{4}{2^k}. \end{aligned}$$

(ii) 既然 $\{x_{n_k} + y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 因此存在某个 $x_0 \in X$, 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$x_{n_k} + y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0.$$

进而, 当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\| [x_{n_k} - x_0] \|_0 = \inf_{y \in X_0} \| x_{n_k} - x_0 + y \| \leq \| x_{n_k} + y_k - x_0 \| \rightarrow 0,$$

即

$$[x_{n_k}] \xrightarrow{\|\cdot\|_0} [x_0].$$

(iii) Cauchy 列 $\{[x_n]\}_{n=1}^\infty$ 有一个子列 $\{[x_{n_k}]\}_{k=1}^\infty$ 收敛, 则其自身必是收敛的, 即

$$[x_n] \xrightarrow{\|\cdot\|_0} [x_0],$$

即得 $\|\cdot\|_0$ 是完备的, 所以 $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 是 Banach 空间.

18 有界线性算子与闭算子有什么关系?

解: 设 X, Y 是赋范线性空间, $T: D(T) \subset X \rightarrow Y$ 是线性算子.

(i) 如果 $T \in L(D(T), Y)$ 并且 $D(T)$ 是 X 的闭子空间, 则 $T \in C(D(T), Y)$, 即 T 是闭线性算子.

证明: 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D(T)$ 且

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x_0,$$

$$Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y_0.$$

因为 $D(T)$ 是 X 的闭子空间, 故 $x_0 \in D(T)$, 利用 $T \in L(D(T), Y)$, 即 T 是连续的, 有

$$Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} T(x_0).$$

根据极限的唯一性, 得到 $y_0 = T(x_0)$, 因此 T 是闭算子.

(ii) (闭图像定理) 如果 X, Y 是 Banach 空间, T 是闭算子, 并且 $D(T) = X$, 则 $T \in L(X, Y)$.

(iii) 闭算子 $T \in C(D(T), Y)$ 可以是无界算子, 例如微分算子 $T := \frac{d}{dt}$, 其中

$$X := C[a, b],$$

$$D(T) := C^1[a, b],$$

$$Y = X := C[a, b].$$

则 $T := \frac{d}{dt} \in C(D(T), Y)$, 但 $T = \frac{d}{dt}$ 本身是无界算子.

19. 设 X 是线性赋范空间, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 中线性无关的序列. 试证, 存在一列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$,

使得 $\|f_n\| = 1$ 且

$$f_n(x_k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

证：记 $M_n = \overline{\text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots\}}$ ，则 M_n 是 X 的闭子空间，且 $x_n \notin M_n$ 。根据

Hahn-Banach 延拓定理(参见 47 页推论 2)知，存在 $f_n \in X^*$ 使得

$$f_n|_{M_n} = 0, \text{ 且 } \|f_n\| = 1/\text{dist}(x_n, M_n), \quad f_n(x_n) = 1.$$

因此显然有

$$f_n(x_k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

或(参见 47 页推论 2 后面的注)存在 $f_n \in X^*$ 使得

$$f_n|_{M_n} = 0, \text{ 且 } \|f_n\| = 1, \quad f_n(x_n) = \text{dist}(x_n, M_n).$$

如果定义 $y_n = \frac{x_n}{\text{dist}(x_n, M_n)}$ ，则显然 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 仍然是线性无关的，且

$$f_n(y_n) = f\left(\frac{x_n}{\text{dist}(x_n, M_n)}\right) = \frac{1}{\text{dist}(x_n, M_n)} f(x_n) = 1.$$

因此也显然有

$$f_n(y_k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

20. 设 $t_0 \in (a, b)$ ，定义 $C^1[a, b]$ 上的泛函为 $F(f) = f'(t_0)$ ，证明 $F \in C^1[a, b]^*$ 。

证明：显然 $F(f) = f'(t_0)$ 对于任意的 $f \in C^1[a, b]$ 都有意义，因此 F 是 $C^1[a, b]$ 上的一个

泛函。又对于任意的 $f, g \in C^1[a, b]$ 和任意的数 α, β ，容易验证：

$$\begin{aligned} F(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)'(t_0) \\ &= \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0) \\ &= \alpha F(f) + \beta F(g), \end{aligned}$$

因此 F 是 $C^1[a, b]$ 上的一个线性泛函。进而

$$\begin{aligned} |F(f)| &= |f'(t_0)| \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| = \|f\|_{C^1[a, b]}. \end{aligned}$$

由此可以得知，线性映射 F 是 $C^1[a, b]$ 上的一个有界线性泛函，即 $F \in C^1[a, b]^*$ ，且

$$\|F\| \leq 1.$$

21. 设序列 $\{a_n\}$ 使得对于任意 $x = \{\xi_n\} \in l^1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 收敛, 试证

(1) $\{a_n\} = (a_1, \dots, a_n \dots) \in l^\infty$;

(2) 记 $f(x) = f(\{\xi_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, 则 $f \in (l^1)^*$, 且

$$\|f\| = \sup_{n \geq 1} |a_n|.$$

解: 记 $l = l^1$ 中的范数为 $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$. 进而可知

$(l, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

(i) 考虑由 $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ 的前有限项所组成的 l 中的点列:

$$(a_1, 0, \dots, 0, \dots), (a_1, a_2, 0, \dots, 0, \dots), \dots, \\ (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots), \dots (n=1, 2, \dots)$$

其中的每一个可以视为只有有限个分量不为零的无穷维向量, 当然属于 $l = l^1$. 对应于每一个这样的向量我们定义一个对应的 l 上的泛函如下:

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k,$$

其中 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n \dots) \in l, (n=1, 2, \dots)$.

(ii) 不难证明 $T_n: l \rightarrow \mathbf{R}$ 是线性泛函(证明略);

(iii) 可断言 T_n 是有界的泛函, 事实上我们有

$$\begin{aligned} |T_n(x)| &\leq \sum_{k=1}^n |\xi_k a_k| \leq \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| \sum_{k=1}^n |\xi_k| \\ &\leq \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

即 $T_n: l \rightarrow \mathbf{R}$ 是有界线性泛函, 且

$$\|T_n\| \leq \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k|, \quad (n=1, 2, \dots)$$

(iv) 对于每一个固定的 $n, (n=1, 2, \dots)$, 我们断言:

$$\|T_n\| = \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

事实上, 不妨设 $(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots) \neq 0$ 且

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| = |a_{k_0}| \quad (\text{对于某个 } 1 \leq k_0 \leq n).$$

可取一个特殊的 $\tilde{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots) \in l$, 其中的每一个分量按照下面的形式定义:

$$\xi_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_{k_0} & k = k_0, \\ 0 & k \neq k_0 \end{cases}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

且对于 $k > n$, 定义 $\xi_k = 0$. 不难计算

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = |\operatorname{sgn} a_{k_0}| \leq 1.$$

进而根据 $T_n(x)$ 的定义, 可以得到

$$\begin{aligned} \|T_n\| &\geq \|T_n\| \cdot \|\tilde{x}\| \geq T_n(\tilde{x}) \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_k a_k = \xi_{k_0} a_{k_0} = |a_{k_0}| = \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k|. \end{aligned}$$

(v) 考虑 l 上的有界线性泛函族: $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$. 对于每一个, 由所给的条件, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n$ 的收敛性蕴涵数列 $\{T_n(x)\} = \left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时是收敛的, 故 $\{T_n(x) | n = 1, 2, \dots\}$ 是有界集:

$$\sup_{n \geq 1} |T_n(x)| = \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right| < \infty. \quad (\text{点点有界})$$

因此根据一致有界原理 (这里我们利用了事实: $l = l^1$ 和 $\mathbf{R}$ 都是 Banach 空间), 我们知道

$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致有界的, 即

$$\sup_{n \geq 1} \eta_n = \sup_{n \geq 1} \left(\sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| \right) = \sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty.$$

(2) 由所给的定义: 对于任意的 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in l$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 均收敛, 由此知道上面所定义的泛函 $f(x) = f(\{\xi_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 有意义, 因此 $f(x)$ 确实是 l^1 上的泛函. 对于任

意的 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) \in l^p$, $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n$ 也收敛, 根据收敛级数的性质, 我们有

$$\begin{aligned}\alpha f(x) + \beta f(y) &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha \xi_n + \beta \eta_n) = f(\alpha x + \beta y).\end{aligned}$$

此即表明 $f(x)$ 具有线性性质. 进而, 我们有

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |\xi_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \sup_{n \geq 1} |a_n| \\ &= \sup_{n \geq 1} |a_n| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \\ &= \sup_{n \geq 1} |a_n| \cdot \|x\|_{l^1}.\end{aligned}$$

此即表明 f 是有界的, 且

$$\|f\| \leq \sup_{n \geq 1} |a_n|.$$

反之, 仿照(1), 选取 $\tilde{x} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots\} \in l^1$, $\xi_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_{k_0} & k = k_0 \\ 0 & k \neq k_0 \end{cases}$,

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

且对于 $k > n$, 定义 $\xi_k = 0$. 不难计算

$$\|\tilde{x}\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = |\operatorname{sgn} a_{k_0}| \leq 1.$$

进而,

$$\begin{aligned}\|f\| &\geq \|f\| \cdot \|\tilde{x}\|_{l^p} \geq f(\tilde{x}) \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_k a_k = \xi_{k_0} a_{k_0} = |a_{k_0}| = \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k|.\end{aligned}$$

注意到 n 的任意性, 我们立即得到

$$\|f\| \geq \sup_{1 \leq k} |a_k|.$$

综上可得 $\|f\| = \sup_{1 \leq k} |a_k| = \|(a_1, \dots, a_n, \dots)\|_{l^\infty}$.

21. 设序列 $\{a_n\}$ 使得对于任意 $x = \{\xi_n\} \in l^1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 收敛, 试证

(1) $\{a_n\} \in l^\infty$;

(2) 记 $f(x) = f(\{\xi_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, 则 $f \in (l^1)^*$, 且

$$\|f\| = \sup_{n \geq 1} |a_n|.$$

解: 记 $l = l^1$ 中的范数为 $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$. 进而可知

$(l, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

(1) $\{a_n\} \in l^\infty$ [解法二]

不用一致有界原理的反证法: 设题目的条件满足但结论不成立, 即 $\{a_n\} \notin l^\infty$, 因此

$$\sup_{n \geq 1} |a_n| = +\infty.$$

故对于每一个 $k = 1, 2, \dots$, 存在 n_k , 满足

$$n_k > n_{k-1} > \dots > n_1,$$

且

$$|a_{n_k}| \geq k.$$

现在定义一个特殊的 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in l$ 为: 其第 n_k 个分量 ξ_{n_k} 定义为 $\xi_{n_k} = \operatorname{sgn} a_{n_k} / k^2$, 其余的分量为零, 即

$x_0 = (0, \dots, 0, \frac{\operatorname{sgn} a_{n_1}}{1^2}, 0, \dots, 0, \frac{\operatorname{sgn} a_{n_2}}{2^2}, 0, \dots, 0, \frac{\operatorname{sgn} a_{n_k}}{k^2}, 0, \dots)$ 则容易知道 $x_0 \in l^1$ 因为正项级

数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛. 但

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \xi_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{n_k}|}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2} = \infty,$$

此与条件“对于任意 $x = \{\xi_n\} \in l^1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 收敛”相矛盾.

(**注记.** 解法二实际上用到了**共鸣定理**, 即一系列泛函 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ ----见解法一的定义----不是一致

有界的, 则必有一个共鸣点 x_0 , 上述的证明实际上是找出了具体的共鸣点 x_0)

(2) 由所给的定义: 对于任意的 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in l$, 级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n \xi_n$ 均收敛, 由此知道上

面所定义的泛函 $f(x) = f(\{\xi_n\}) = \sum_{n=1}^\infty a_n \xi_n$ 有意义, 因此 $f(x)$ 确实是 l^1 上的泛函. 对于任

意的 $y = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) \in l^p$, $f(y) = \sum_{n=1}^\infty a_n \eta_n$ 也收敛, 根据收敛级数的性质, 我们有

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta f(y) &= \alpha \sum_{n=1}^\infty a_n \xi_n + \beta \sum_{n=1}^\infty a_n \eta_n \\ &= \sum_{n=1}^\infty a_n (\alpha \xi_n + \beta \eta_n) = f(\alpha x + \beta y). \end{aligned}$$

此即表明 $f(x)$ 具有线性性质. 进而, 我们有

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^\infty \xi_k a_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty |a_k| |\xi_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \sup_{n \geq 1} |a_n| \\ &= \sup_{n \geq 1} |a_n| \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \\ &= \sup_{n \geq 1} |a_n| \cdot \|x\|_{l^1}. \end{aligned}$$

此即表明 f 是有界的, 且

$$\|f\| \leq \sup_{n \geq 1} |a_n|.$$

反之, 仿照(1), 选取 $\tilde{x} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots\} \in l^1$, $\xi_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_{k_0} & k = k_0 \\ 0 & k \neq k_0 \end{cases}$,

$(k=1, 2, \dots, n)$,

且对于 $k > n$, 定义 $\xi_k = 0$. 不难计算

$$\|\tilde{x}\| = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| = |\operatorname{sgn} a_{k_0}| \leq 1.$$

进而,

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \|f\| \cdot \|\tilde{x}\|_p \geq f(\tilde{x}) \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_k a_k = \xi_{k_0} a_{k_0} = |a_{k_0}| = \sup_{1 \leq k \leq n} |a_k|. \end{aligned}$$

注意到 n 的任意性, 我们立即得到

$$\|f\| \geq \sup_{1 \leq k} |a_k|.$$

综上所述可得 $\|f\| = \sup_{1 \leq k} |a_k| = \|(a_1, \dots, a_n, \dots)\|_{l^\infty}$.

22. 设 $1 < p < \infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 若序列 $\{a_n\}$ 使得对于任意 $x = \{\xi_n\} \in l^p$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 均收敛,

试证

(1) $\{a_n\} \in l^q$;

(2) 记 $f(x) = f(\{\xi_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, 则 $f \in (l^p)^*$, 且

$$\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \right)^{1/q}.$$

$y = \{\eta_n\} \in l^q$, 这里.

解: (1) (i) 考虑由 $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ 的前有限项所组成的 l^p 中的点列:

$$\begin{aligned} &(a_1, 0, \dots, 0, \dots), (a_1, a_2, 0, \dots, 0, \dots), \dots, \\ &(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots), \dots \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

其中的每一个可以视为只有有限个分量不为零的无穷维向量, 当然属于 l^p ($1 \leq p \leq \infty$). 对

其中的每一个无穷维向量, 我们定义一个对应的 l^p 上的泛函如下:

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k,$$

其中 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in l$, ($n=1, 2, \dots$)

(ii) 不难证明 $T_n: l^p \rightarrow \mathbf{R}$ 是线性泛函;

(iii) 由 Holder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} |T_n(x)| &\leq \sum_{k=1}^n |\xi_k a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{l^p}, \end{aligned}$$

即 $T_n: l^p \rightarrow \mathbf{R}$ 是有界线性泛函, 且

$$\|T_n\| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

(iv) 对于每一个固定的 n , ($n=1, 2, \dots$), 我们断言:

$$\|T_n\| = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

事实上, 不妨设 $(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots) \neq \theta$. 可取一个特殊的 $\tilde{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots) \in l^p$,

其中的每一个分量按照下面的形式定义:

$$\xi_k = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{-\frac{1}{p}} |a_k|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} a_k, \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

不难计算(这里用到了 $p+q=pq$ 和 $1+q/p=q$.)

$$\|\tilde{x}\|_{l^p}^p = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{-1} \sum_{k=1}^n |a_k|^q = 1.$$

进而根据 $T_n(x)$ 的定义, 我们不难得到

$$\begin{aligned} \|T_n\| &= \|T_n\| \cdot \|\tilde{x}\|_{l^p} \geq T_n(\tilde{x}) \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_k a_k = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{-\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^n |a_k| |a_k|^{\frac{q}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

(v) 考虑 l^p 上的有界线性泛函族: $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$. 对于每一个 $x = \{\xi_n\} \in l^p$, 由所给的条件, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n$ 的收敛性蕴涵数列 $\{T_n(x)\} \Rightarrow \left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时是收敛的, 故

$\{T_n(x) | n=1, 2, \dots\}$ 是有界集:

$$\sup_{n \geq 1} |T_n(x)| = \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right| < \infty.$$

因此根据**一致有界原理** (试确定这里用到了哪些 Banach 空间), 我们知道 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致有界的, 即

$$\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty.$$

因而可以得到

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = \sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty, \end{aligned}$$

此即表明: $y = \{a_n\} \in l^q$.

(2) 由所给定义: 对于任意 $x = \{\xi_n\} \in l^p$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 均收敛, 由此知道上面所定义的

$f(x) = f(\{\xi_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 有意义, 因此 $f(x)$ 是 l^p 上的泛函. 对于任意的 $y = \{\eta_n\} \in l^p$,

$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n$ 也收敛, 根据收敛级数的性质, 我们有

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta f(y) &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha \xi_n + \beta \eta_n) = f(\alpha x + \beta y). \end{aligned}$$

此即表明 $f(x)$ 具有线性性质. 由 Holder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k a_k \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_{l^p}. \end{aligned}$$

此即表明

$$\|f\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

反之, 仿照(1), 选取 $\tilde{x} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots\} \in l^p$, 其中的每一个分量按照下面的形式定义:

$$\xi_k = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{-\frac{1}{p}} |a_k|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} a_k, \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

则

$$\|\tilde{x}\|_p^p = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{-1} \sum_{k=1}^n |a_k|^q = 1.$$

进而,

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|f\| \cdot \|\tilde{x}\|_p \geq f(\tilde{x}) \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_k a_k = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{-\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^n |a_k| |a_k|^{\frac{q}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

注意到 n 的任意性, 我们立即得到

$$\|f\| \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

23. 设 X 是 Banach 空间, M 是 X 的闭子空间, 试证: $x_0 \in M$, 当且仅当对任意的 $f \in X^*$, 只要 $f|_M = 0$ 必有 $f(x_0) = 0$.

证: (必要性) 对于任意的 $f \in X^*$, 如果 $f|_M = 0$, 则对于 $x_0 \in M$, 当然有 $f(x_0) = 0$.

(充分性) 设题目中的条件成立, 即对任意的 $f \in X^*$, 只要 $f|_M = 0$ 必有 $f(x_0) = 0$. 我们用反证法证明所需证结论, 即假设 $x_0 \notin M$, 因为 M 是 X 的闭子空间, 由 Hahn-Banach 泛函延拓定理 (见课本 47 页推论 2), 存在 $f \in X^*$ 满足: $f|_M = 0$ 且 $f(x_0) = 1$. 此与所给定的条件相矛盾, 因此必有 $x_0 \in M$.

36. 设 X 是 Banach 空间, $x \in X$, 若对任意 $f \in X^*$, 有 $f(x) = 0$, 试证 $x = 0$.

证: 用反证法. 如果 $x \neq 0$, 由 Hahn-Banach 泛函延拓定理 (见课本 47 页推论 1), 存在 $f \in X^*$ 满足: $\|f\| = 1$ 且 $f(x) = \|x\| > 0$. 此与所给定的条件相矛盾, 因此必有 $x = 0$.

补充题. 设 X 是赋范线性空间, $x \in X$, 证明

$x = 0$ 的充分必要条件是: 对任意 $f \in X^*$, 有 $f(x) = 0$.

证：(必要性) 设 $x=0$ ，则对于任意的 $f \in X^*$ ，

因为 f 是线性泛函，故将零元映射为零，即

$$f(x) = f(0) = 0.$$

(充分性) 用反证法，设条件满足，即对任意 $f \in X^*$ ，有 $f(x)=0$ ，如果 $x \neq 0$ ，由 Hahn-Banach 泛函延拓定理 (见课本 47 页推论 1)，存在 $f \in X^*$ 满足： $\|f\|=1$ 且 $f(x)=\|x\|>0$ 。此与所给定的条件相矛盾，因此必有 $x=0$ 。

29. 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是开集， $K(s,t) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ 。定义

$$Tf(s) = \int_{\Omega} K(s,t) f(t) dt, \quad f(t) \in L^2(\Omega)$$

试证 $T \in L(L^2(\Omega))$ 。

证明：可以证明

$$Tf(s) = \int_{\Omega} K(s,t) f(t) dt \in L^2(\Omega),$$

因此

$$T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

是映射。

(1) $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ 是线性的，因为对于任意的 $f(t), g(t) \in L^2(\Omega)$ ，对于任意的数 $\alpha, \beta \in K = \mathbf{R}(\mathbf{C})$ ，利用积分的线性性质，我们有

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g)(t) &= \int_{\Omega} K(s,t) [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt \\ &= \alpha \int_{\Omega} K(s,t) f(t) dt + \beta \int_{\Omega} K(s,t) g(t) dt \\ &= [\alpha T(f) + \beta T(g)](t), \end{aligned}$$

即得

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

所以 $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ 是线性映射。

(2) $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ 是有界的，因为对于任意的 $f(t) \in L^2(\Omega)$ ，根据 Lebesgue 积分的 Holder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} K(s,t) f(t) dt \right|^2 ds \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |K(s,t) f(t)| dt \right)^2 ds \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\sqrt{\int_{\Omega} |K(s,t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\Omega} |f(t)|^2 dt} \right)^2 ds \\
&= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |K(s,t)|^2 dt \cdot \int_{\Omega} |f(t)|^2 dt \right) ds \\
&= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |K(s,t)|^2 dt \right) ds \int_{\Omega} |f(t)|^2 dt \\
&= \int_{\Omega \times \Omega} |K(s,t)|^2 dt ds \cdot \int_{\Omega} |f(t)|^2 dt \\
&= \int_{\Omega \times \Omega} |K(s,t)|^2 dt ds \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

两边开平方可以得到

$$\|T(f)\|_{L^2(\Omega)} \leq M \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

其中

$$M = \sqrt{\int_{\Omega \times \Omega} |K(s,t)|^2 dt ds}$$

是有限数，因为由所给条件知 $K(s,t) \in L^2(\Omega \times \Omega)$.

由此可以得知 $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ 是有界算子，即

$T \in L(L^2(\Omega))$ ，且

$$\|T\| \leq M = \sqrt{\int_{\Omega \times \Omega} |K(s,t)|^2 dt ds}$$

31. 在 $L^2([-\pi, \pi])$ 上定义泛函 f_n 为

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{int} dt, \quad \forall x \in L^2([-\pi, \pi])$$

试证： f_n 弱收敛到 0.

证明：因为 $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ ，所以只需证明：对于任意的 $x \in L^2([-\pi, \pi])$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin ntdt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

注意到由 $[-\pi, \pi]$ 上所有阶梯函数所构成的集合 K 是 $L^2([-\pi, \pi])$ 的稠密子集, 即

$\overline{K} = L^2([-\pi, \pi])$, 因此根据 Banach-Steinhaus 定理的推论, 这也只需再证明:

(i) $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^2([-\pi, \pi])$ 中的有界集;

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin ntdt \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall x \in K.$

第一点的证明是显然的, 因为

$$\|\sin nt\|_{L^2[-\pi, \pi]}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nt|^2 dt = 1.$$

对于第二点, 可证明如下: 当 $x \in K$ 时, $x(t)$ 是阶梯函数, 因此可以表示为

$$x(t) = \sum_{j=1}^k C_j \chi_{E_j}(t),$$

其中 C_j 是常数 E_j 是 $[-\pi, \pi]$ 中的可测集, 且

$$[-\pi, \pi] = \bigcup_{j=1}^k E_j;$$

$\chi_{E_j}(t)$ 是可测集 E_j 上的集特征函数, 即

$$\chi_{E_j}(t) := \begin{cases} 1, & t \in E_j, \\ 0, & t \notin E_j. \end{cases}$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin ntdt &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^k C_j \chi_{E_j}(t) \sin ntdt \\ &= \sum_{j=1}^k C_j \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{E_j}(t) \sin ntdt. \end{aligned}$$

因此也只需再证明, 对于 $j = 1, 2, \dots, k$, 成立

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{E_j}(t) \sin ntdt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

但这是显然的, 因为

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{E_j}(t) \sin nt dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_{E_j}(t) \sin nt| dt \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_{E_j}(t)| dt \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nt| dt \\
&= 2 \int_0^{\pi} \sin nt dt \\
&= -\frac{2}{n} \cos nt \Big|_0^{\pi} \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

注. 本题的结论, 即是数学分析中 Fourier 级数部分的一个著名结果-----“Riemann 引理”。

32. 设 X 是 Banach 空间, 试问

(1) X^* 中的弱收敛与弱*收敛是什么关系?

(2) 若 X 是自反空间, 在这样的空间中, 弱收敛与弱*收敛是什么关系?

解答: (1) X^* 中的弱收敛蕴含弱*收敛. 即若

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X^*, f \in X^* \text{ 且}$$

$$f_k \xrightarrow{w} f,$$

则对于任意的 $F \in X^{**}$

$$F(f_k) \longrightarrow F(f).$$

尤其是对于每一个 $x \in X$, 我们有 $x^{**} \in X^{**}$, 因此

$$x^{**}(f_k) \longrightarrow x^{**}(f),$$

即等价地有

$$f_k(x) \longrightarrow f(x), \quad \forall x \in X.$$

此即表明

$$f_k \xrightarrow{w^*} f.$$

即, 在 X^* 空间中, 弱收敛蕴含弱*收敛.

(2) 若 X 是自反空间, 则弱收敛与弱*收敛是等价的, 因为此时, $X = X^{**}$, 上面的

$$F(f_k) \longrightarrow F(f), \quad \forall F \in X^{**}$$

等价于

$$f_k(x) \longrightarrow f(x), \quad \forall x \in X.$$

即

$$f_k \xrightarrow{w} f \Leftrightarrow f_k \xrightarrow{w^*} f.$$

33. 设 X 是有限维线性空间, 则 X 中的弱收敛与范数收敛是什么关系?

解答: 当 X 是有限维线性赋范空间时, X 中的弱收敛与范数收敛是等价的. (详见第 4 题)

39. 设 X, Y 是 Banach 空间, $T_n \in L(X, Y)$. 对于任意的 $x \in X$ 及 $f \in Y^*$, $\{f(T_n x)\}$ 是有界数列, 试证 $\{\|T_n\|\}$ 有界.

证明: 对于任意取定的 $x \in X$, 将 $T_n x$ 视为 Y^* 上的一列有界线性泛函, 即

$\{T_n x\}_{n=1}^\infty \subset Y^{**}$, 由所给条件, 知对于所有的 $f \in Y^*$,

$$\sup_{n \geq 1} |(T_n x)^{**}(f)| = \sup_{n \geq 1} |f(T_n x)| < \infty,$$

即 $(T_n x)^{**}$ 对每一个 $f \in Y^*$ 是有界的. 根据一致有界性定理(即共鸣定理)知道

$$\sup_{n \geq 1} \|(T_n x)^{**}\|_{Y^{**}} = \sup_{n \geq 1} \|T_n x\|_Y < \infty.$$

因此 $x \in X$ 是任意的, 上式恰好说明 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ 是点点有界的, 因此再一次利用共鸣定理知

$$\sup_{n \geq 1} \|T_n\|_{L(X, Y)} < \infty.$$

有界算子范数求法总结

设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是赋范线性空间, $T: X \rightarrow Y$ 是有界线性算子, 即

$T \in L(X, Y)$. 为求出算子 T 的范数 $\|T\| = \|T\|_{L(X, Y)}$,

(i) 估计出最小的 $M \geq 0$, 使得对于所有的 $x \in X$, 都有

$$\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X,$$

则可以得到 $\|T\| = \|T\|_{L(X, Y)} \leq M$;

(ii) 找一个特定的 $x_0 \in X$, 使得

$$\|x_0\|_X = 1, \text{ 且 } \|Tx_0\|_Y = M,$$

则可以得到

$$\|T\| = \|T\| \cdot \|x_0\|_X \geq \|Tx_0\|_Y = M.$$

综合以上两点, 即得 $\|T\| = M$.

注 (一) 为找到特定的 $x_0 \in X$, 当 X 是函数空间时, 可选择 $x_0 \in X$ 是符号函数, 例如

当 $X = C[a, b]$ 时,

$$x_0 = \operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0. \end{cases}$$

再适当地连续性连接; 当 X 是无穷维向量空间时, 可选取

$$x_0 = (0, 0, \dots, 0, \overset{i}{\operatorname{sgn} x}, 0, \dots);$$

(二) 如果在证明第(ii)点时不容易找到满足所述条件的特定的 $x_0 \in X$, 可以考虑用一系列特定的 $x_k \in X$ 加以逼近 M .

例. 记 $X = C[a, b]$. 考虑区间 $[a, b]$ 的一个分划:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$ 是任意取定的 $n+1$ 个常数, 定义 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 为: 对于任意的 $x \in C[a, b]$

$$f(x) := \sum_{k=0}^n A_k x(t_k).$$

则, $f \in (C[a, b])^*$ 且

$$\|f\| = \sum_{k=0}^n |A_k|.$$

证明: 容易证明 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 是映射并且是线性的. 对于任意的 $x \in X = C^1[a, b]$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n A_k x(t_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |A_k| |x(t_k)| \leq \sum_{k=0}^n |A_k| \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n |A_k| \right) \|x\|_{C[a, b]}. \end{aligned}$$

因此知道 f 是有界的, 且 $\|f\| \leq \sum_{k=0}^n |A_k|$.

反之, 要证明 $\|f\| \geq \sum_{k=0}^n |A_k|$. 事实上, 我们可以取特殊的 $x_0 \in X = C[a, b]$ 如下:

$$x_0(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} A_k, & t = t_k, k = 0, 1, \dots, n, \\ \text{线性连接}, & t \in [a, b] \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_n\}. \end{cases}$$

则容易知道 $x_0 \in C[a, b]$, 并且

$$\|x_0\|_{C[a, b]} \leq 1.$$

易算出

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^n A_k x_0(t_k) = \sum_{k=0}^n A_k \operatorname{sgn} A_k = \sum_{k=0}^n |A_k|.$$

由此得到

$$\|f\| \geq \|f\| \cdot \|x_0\|_{C[a, b]} \geq f(x_0) = \sum_{k=0}^n |A_k|.$$

综上所述可得

$$\|f\| = \sum_{k=0}^n |A_k|.$$

补充题 1.

设 $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l^\infty$. 定义 $K: l^2 \rightarrow l^2$ 为,

对于任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l^2$

$$K(x) := (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_k y_k, \dots).$$

求证 $K \in L(l^2, l^2)$, 并求算子范数 $\|K\|$

证. (i) K 是由 l 到 l 的映射(证略, 或可见下面的(iii));

(ii) K 是线性的(证略);

(iii) K 是有界的: 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \in l^2$, 利用 l^2 中范数的定义, 可以得到

$$\begin{aligned} \|K(x)\|_{l^2} &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{k \geq 1} |y_k| \right)^2 |x_k|^2} \end{aligned}$$

$$= \left(\sup_{k \geq 1} |y_k| \right) \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$$

$$= \|y\|_{l^\infty} \|x\|_{l^2},$$

因此得到 K 是有界的, 并且

$$\|K\| \leq \|y\|_{l^\infty} = \sup_{k \geq 1} |y_k|.$$

(iv) 只需再证 $\|K\| \geq \|y\|_{l^\infty} = \sup_{k \geq 1} |y_k|$. 事实上, 对于任意一个固定的正整数 i_0 可取

$$x^{(i_0)} = (0, 0, \dots, 0, \overset{i_0}{1}, 0, \dots),$$

则显然 $x^{(i_0)} \in l^2$, 且 $\|x^{(i_0)}\|_{l^2} = 1$. 利用算子范数的性质, 可以得到

$$\begin{aligned} \|K\| &= \|K\| \cdot \|x^{(i_0)}\|_{l^2} \\ &\geq \|K(x^{(i_0)})\|_{l^2} \\ &= \left\| (0, 0, \dots, 0, \overset{(i_0)}{y_{i_0}} \cdot 1, 0, \dots) \right\|_{l^2} \\ &= |y_{i_0}|. \end{aligned}$$

既然 i_0 是任意的, 因此

$$\|K\| \geq \sup_{i_0 \geq 1} |y_{i_0}| = \sup_{k \geq 1} |y_k| = \|y\|_{l^\infty}.$$

综上即得所欲求:

$$\|K\| = \|y\|_{l^\infty} = \sup_{k \geq 1} |y_k|.$$

补充题 2.

记 $X = C^1[a, b]$, $Y = C[a, b]$. 定义 $D = \frac{d}{dt}: X \rightarrow Y$ 为微分算子.

(i) 证明 $\|D\| = 1$.

(ii) 解释: $D = \frac{d}{dt}$ 将有界集 $\{\sin n\pi t\}_{n=1}^\infty$ 映射为无界集 $\{n\pi \cos n\pi t\}_{n=1}^\infty$.

解: (i) 容易证明 $D = \frac{d}{dt}: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 是映射并且是线性的. 对于任意的

$$x \in X = C^1[a, b],$$

$$\begin{aligned}
\|Dx\|_{C[a,b]} &= \left\| \frac{d}{dt} x(t) \right\|_{C[a,b]} \\
&= \max_{t \in [a,b]} |x'(t)| = \|x'\|_{C[a,b]} \\
&\leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)| = \|x\|_{C^1[a,b]}.
\end{aligned}$$

因此知道 $D = \frac{d}{dt}: X \rightarrow Y$ 是有界的, 且 $\|D\| \leq 1$.

反之, 我们要证明 $\|D\| \geq 1$. 事实上, 我们可以取特殊的 $x_\varepsilon \in X = C^1[a,b]$ 如下:

$$x_\varepsilon(t) = \varepsilon t^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

这里, ε 是小于 1 的正数, 并且不失一般性假设 $0 \leq a < b$. 则显然 $x_\varepsilon(t) = \varepsilon t^{\frac{1}{\varepsilon}} \in C^1[a,b]$ 且容易算出

$$\begin{aligned}
\|x_\varepsilon(t)\|_{C^1[a,b]} &= \max_{t \in [a,b]} |\varepsilon t^{\frac{1}{\varepsilon}}| + \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{d}{dt} \left(\varepsilon t^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) \right| \\
&= \varepsilon b^{\frac{1}{\varepsilon}} + \max_{t \in [a,b]} |t^{\frac{1}{\varepsilon}-1}| = \varepsilon b^{\frac{1}{\varepsilon}} + b^{\frac{1}{\varepsilon}-1}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\left(\varepsilon b^{\frac{1}{\varepsilon}} + b^{\frac{1}{\varepsilon}-1} \right) \|D\| &= \|x_\varepsilon(t)\|_{C^1[a,b]} \|D\| \\
&\geq \|D(x_\varepsilon)\|_{C[a,b]} = \left\| \frac{d}{dt} (\varepsilon t^{\frac{1}{\varepsilon}}) \right\|_{C[a,b]} \\
&= \|t^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |t^{\frac{1}{\varepsilon}-1}| = b^{\frac{1}{\varepsilon}-1}.
\end{aligned}$$

由此得到

$$\|D\| \geq \frac{b^{\frac{1}{\varepsilon}-1}}{\varepsilon b^{\frac{1}{\varepsilon}} + b^{\frac{1}{\varepsilon}-1}} = \frac{1}{\varepsilon b + 1}.$$

又因为 ε 可以是任意小的正数, 因此 $\|D\| \geq 1$.

解法二: 对于 $k=1, 2, \dots$ 设

$$x_k = x_k(t) = e^{kt}.$$

则 $x_k \in C^1[a,b]$. 容易算出

$$\|x_k(t)\|_{C^1[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |e^{kt}| + \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{d}{dt} (e^{kt}) \right|$$

$$= \|e^{kt}\|_{C[a,b]} + \max_{t \in [a,b]} |ke^{kt}| = (1+k) \|e^{kt}\|_{C[a,b]},$$

其中

$$\|e^{kt}\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} e^{kt} = e^{bt}$$

因此

$$\begin{aligned} (1+k) \|e^{kt}\|_{C[a,b]} \|D\| &= \|x_k(t)\|_{C^1[a,b]} \|D\| \\ &\geq \|D(x_k)\|_{C[a,b]} = \left\| \frac{d}{dt}(e^{kt}) \right\|_{C[a,b]} \\ &= \|ke^{kt}\|_{C[a,b]} = ke^{kb}. \end{aligned}$$

由此得到

$$\|D\| \geq \frac{k \|e^{kt}\|_{C[a,b]}}{(1+k) \|e^{kt}\|_{C[a,b]}} = \frac{k}{k+1}.$$

又因为 k 可以是任意大的正整数, 因此 $\|D\| \geq 1$.

(ii) 解释: $D = \frac{d}{dt}: X \rightarrow Y$ 是有界算子, 因此必将有界集映射为有界集. 进而注意到

$\{\sin n\pi t\}_{n=1}^{\infty}$ 并不是 $X = C^1[a,b]$ 中的有界集, 因此 “ $D = \frac{d}{dt}$ 将有界集 $\{\sin n\pi t\}_{n=1}^{\infty}$ 映射为无界集 $\{n\pi \cos n\pi t\}_{n=1}^{\infty}$ ” 是指 $D = \frac{d}{dt}$ 视为由 $C[a,b]$ 到 $Y = C[a,b]$ 的算子 (此时 $D = \frac{d}{dt}$ 的

定义域选为 $D(D) = C^1[a,b]$). 在这种情况下, $\{\sin n\pi t\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{n\pi \cos n\pi t\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是 $C[a,b]$ 中的有界集和无界集, 而 $\{\sin n\pi t\}_{n=1}^{\infty}$ 其实是 $C[a,b]$ 中的无界集.

注: 也可解释为:

$$\left\| \frac{d}{dt} \right\|_{L(C^1[a,b], C[a,b])} = 1,$$

$$\left\| \frac{d}{dt} \right\|_{L(C[a,b], C[a,b])} = +\infty.$$

即

$$\frac{d}{dt}: C^1[a,b] \rightarrow C[a,b]$$

是有界线性算子; 而

$$\frac{d}{dt}: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$$

是无界线性算子(此时 $R\left(\frac{d}{dt}\right) = C^1[a, b]$).

补充内容. (习题 30)

在 $C([-\pi, \pi])$ 或 $L^2([-\pi, \pi])$ 上定义算子 T_n 为

$$T_n f(t) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{\sin(2n+2) \frac{\xi-t}{2}}{2 \sin \frac{\xi-t}{2}} d\xi,$$

试计算 $\|T_n\|$.

解: 以 $C([-\pi, \pi])$ 为例

(i) 补充定义 $K_n(\xi, t)$ 为

$$K_n(\xi, t) := \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(2n+2) \frac{\xi-t}{2}}{2 \sin \frac{\xi-t}{2}}, & \xi \neq t, \\ \frac{n+1}{\pi}, & \xi = t. \end{cases}$$

则 $K_n(\xi, t)$ 是 $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ 上的连续函数, 因此 T_n 以 $K_n(\xi, t)$ 为核的积分算子, 即

$$T_n : C[-\pi, \pi] \rightarrow C[-\pi, \pi] \text{ 是映射并且是线性的.}$$

对于任意的 $f \in C[-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} \|T_n f\|_{C[-\pi, \pi]} &= \left\| \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) K_n(\xi, t) d\xi \right\|_{C[-\pi, \pi]} \\ &= \max_{t \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{\sin(2n+2) \frac{\xi-t}{2}}{2 \sin \frac{\xi-t}{2}} d\xi \right| \\ &\leq \max_{t \in [-\pi, \pi]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)| \left| \frac{\sin(2n+2) \frac{\xi-t}{2}}{2 \sin \frac{\xi-t}{2}} \right| d\xi \\ &\leq \max_{t \in [-\pi, \pi]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(2n+2) \frac{\xi-t}{2}}{2 \sin \frac{\xi-t}{2}} \right| d\xi \left(\max_{\xi \in [-\pi, \pi]} |f(\xi)| \right) \\ &= M_n \|f\|_{C[-\pi, \pi]}, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } M_n = \max_{t \in [-\pi, \pi]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(2n+2) \frac{\xi-t}{2}}{2 \sin \frac{\xi-t}{2}} \right| d\xi.$$

因此知道 T_n 是有界线性算子, 且有界的, 且 $\|T_n\| \leq M_n$.

(ii) 反之, 我们要证明 $\|T_n\| \geq M_n$.

(补充题) 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 是赋范线性空间, A 是 X 的一个闭真子空间, 证明 A 是疏朗集.

[证法一]: 如若不然, 设 A 是 X 一个真闭子空间, 但 A 不是疏朗集. 因此

$$A = \bar{A}^\circ \neq \emptyset,$$

即存在某个 $x_0 \in A$, $\delta > 0$ 使得

$$S(x_0, \delta) \subset A.$$

注意到 A 是线性子空间, 因此对于 $k=1, 2, \dots$, 也有

$$kS(x_0, \delta) = S(x_0, k\delta) \subset A.$$

故

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} S(x_0, k\delta) \subset A.$$

此与 A 是 X 的真子空间相矛盾.

[证法二]: 因为 A 是 X 一个真闭子空间, 故存在某个 $x_0 \in X \setminus A$ 并且

$$\text{dist}(x_0, A) > 0.$$

由此可以断言: 对于每一个 $y_0 \in A$, y_0 都不可能是 A 的内点.

事实上, 考虑 y_0 和 x_0 连线

$$\{z_t = tx_0 + (1-t)y_0 \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

上的点 z_t , 容易看出除非 $t=0$, 必有 $z_t \notin A$. 因为如果对于某个 $0 < t' \leq 1$, 使得 $z_{t'} \in A$, 则

$$z_{t'} = t'x_0 + (1-t')y_0 \in A,$$

根据线性空间的封闭性, 知

$$x_0 = \frac{(1-t')y_0 - z_{t'}}{t'} \in A,$$

此与 $x_0 \in X \setminus A$ 相矛盾.

鉴于 $\{z_t = tx_0 + (1-t)y_0 \mid 0 < t \leq 1\} \cap A = \emptyset$, 所以 y_0 不可能是 A 的内点. 又 $y_0 \in A$ 是任意的, 故 $A = \bar{A}$ 无内点, 因此是疏朗集.

定义 3 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, $x, y \in H$, 如果 $(x, y) = 0$, 则称 x, y 为**相互直交**的, 记为 $x \perp y$. 特别地, 若 x 与 y 是相互直交的单位向量, 即 $\|x\| = \|y\| = 1$, 则称它们是**正规直交向量**, 简称为**正交向量**.

命题 (Pythagoras 定理) 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, $x, y \in H$, 如果 $x \perp y$, 则

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

一般地, 若有限个向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 两两相互直交, 则

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

定义 4 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, $M \subseteq H$ 是相互正交的向量集(即对任意 $x, y \in M$, $\|x\| = \|y\| = 1$, 且若 $x \neq y$, 有 $(x, y) = 0$), 通常称 M 为 H 中的**正规直交集**, 简称为**正交集**. 若 M 中不存在与 H 中每个向量都直交的非零向量, 则称 M 为 H 的**完备正交集**.

引理 1 (Bessel 不等式) 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, 若 $M = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 H 中的正交集, 则对任意 $x \in H$, 有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x, e_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (\text{h})$$

定义 5 设 $M = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是内积空间 $(H, (\cdot, \cdot))$ 中的正交集, 若对任意的 $x \in H$, 有

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda,$$

则称 M 为 H 的一个**正交基**, 其中 $\{(x, e_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ 称为 x 关于基 M 的 Fourier **系数**.

注记 (i) 定义中所出现的和式表示只对至多可数个非零项求和, 且级数按由内积导出的范数收敛;

(ii) 进而当内积空间还是 Hilbert 空间时, 成立

$$\left\| x - \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x, e_\lambda)|^2. \quad (j)$$

定理 6 (正交基的判别法则) 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是 Hilbert 空间, $M = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是正规直交集, 则下列各断言等价:

(1) M 是正交基, 即对每一个 $x \in H$, $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda$;

(2) M 是完备的, 即 H 中不存在与 M 垂直的非零向量;

(3) Parseval 等式成立, 即对于任意的 $x \in H$, 则

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x, e_\lambda)|^2.$$

定理 7 (正交基的存在性)

每个非零的 Hilbert 空间都有正交基.

定义 (可分性)

距离空间称为是**可分的**, 如果该距离空间存在可数的稠密子集.

定理 8 (正交基的存在性)

如果 H 是可分的 Hilbert 空间, 则 H 有一个可数的正交基.

定理 1 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 $(X, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, 则对于任意的 $x, y \in X$, 有

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}.$$

定理 2 (内积导出的范数) 设 $(X, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, 对于任意的 $x \in X$, 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

则 $(X, \|\cdot\|)$ 是线性赋范空间, $\|\cdot\|$ 称为由内积 $(\cdot, \cdot)$ 诱导出的范数.

内积诱导出的范数具有性质:

$$\|x + y\|^2 = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y), \quad (b)$$

$$\|x - y\|^2 = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y), \quad (c)$$

$$\|x + iy\|^2 = (x, x) - i(x, y) + i(y, x) + (y, y), \quad (d)$$

$$\|x - iy\|^2 = (x, x) + i(x, y) - i(y, x) + (y, y). \quad (e)$$

定理 3 (极化恒等式) 设 $(X, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, 则对于任意的 $x, y \in X$, 有

$$(x, y) = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2] \quad (\text{当 } K = \mathbb{R} \text{ 时}); \quad (f')$$

或

$$(x, y) = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2] \quad (\text{当 } K = \mathbb{C} \text{ 时}). \quad (f)$$

其中 $\|\cdot\|$ 是由内积 $(\cdot, \cdot)$ 导出的范数, 即 $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.

定理 4 (范数和内积的关系) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是线性赋范空间, 则 $(X, \|\cdot\|)$ 可以赋予内积的充分必要条件为范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (g)$$

当范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则时, 可以定义

$$(x, y) = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2] \quad (\text{当 } K = \mathbb{R} \text{ 时});$$

或

$$(x, y) = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2]$$

(当 $K = \mathbb{C}$ 时).

进而, 此时原范数 $\|\cdot\|$ 还是由内积 $(\cdot, \cdot)$ 导出的范数.

定义 2 完备的内积空间称为 Hilbert 空间. 即设 $(X, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, 如果 $(X, \|\cdot\|)$ 是完备的线性赋范空间, 则称内积空间 $(X, (\cdot, \cdot))$ 为 Hilbert 空间, 其中 $\|\cdot\|$ 是由内积 $(\cdot, \cdot)$ 导出的范数.

定理 5 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, 则 H 按范数 $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ 的完备化空间是 Hilbert 空间.

定义 3 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, $x, y \in H$, 如果 $(x, y) = 0$, 则称 x, y 为相互直交的, 记为 $x \perp y$. 特别地, 若 x 与 y 是相互直交的单位向量, 即 $\|x\| = \|y\| = 1$, 则称它们是正规

直交向量, 简称为正交向量.

命题 (Pythagoras 定理) 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, $x, y \in H$, 如果 $x \perp y$, 则

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

一般地, 若有限个向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 两两相互直交, 则

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

定义 4 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, $M \subseteq H$ 是相互正交的向量集(即对任意 $x, y \in M$,

$\|x\| = \|y\| = 1$, 且若 $x \neq y$, 有 $(x, y) = 0$), 通常称 M 为 H 中的**正规直交集**, 简称为**正交集**.

若 M 中不存在与 H 中每个向量都直交的非零向量, 则称 M 为 H 的**完备正交集**.

引理 1 (Bessel 不等式) 设 $(H, (\cdot, \cdot))$ 是内积空间, 若 $M = \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 H 中的正交集, 则对任意 $x \in H$, 有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x, e_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (\text{h})$$

补充作业

证明 l^p ($1 \leq p < \infty$) 中的三角不等式(Minkowski 不等式):

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

其中

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p},$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l^p.$$

证: 当 $p=1$ 时, 不等式显然成立, 以下不妨设 $1 < p < \infty$, 并记 $q = p/(p-1)$. 对于

$x = (x_1, \dots) \in l^p$ 和 $y = (y_1, \dots) \in l^q$, 不失一般性, 设

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p} > 0, \|y\|_q = \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q} > 0.$$

在不等式

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

中取

$$a = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}, \quad b = \frac{|y_k|}{\|y\|_q},$$

则可得, ($k=1, 2, \dots$)

$$\frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}.$$

对 k 求有限和:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} &\leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^N \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^N \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p \|x\|_p^p} \sum_{k=1}^N |x_k|^p + \frac{1}{q \|y\|_q^q} \sum_{k=1}^N |y_k|^q \\ &\leq \frac{1}{p \|x\|_p^p} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \frac{1}{q \|y\|_q^q} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow \infty$, 可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq 1,$$

整理可得(无穷和的 **Holder** 不等式)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot |y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

此即表明: 对于 $x = (x_1, \dots) \in l^p, y = (y_1, \dots) \in l^q$,

$$x \cdot y := (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_k y_k, \dots) \in l^1,$$

并且

$$\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

以下设 $x = (x_1, \dots, x_k, \dots), y = (y_1, \dots, y_k, \dots) \in l^p$, 记

$z = (|x_1 + y_1|^{\frac{p}{q}}, \dots, |x_k + y_k|^{\frac{p}{q}}, \dots)$, 则容易看出 $z \in l^q$. 由上述的结果知道 $x \cdot z, y \cdot z \in l^1$ 且

$$\begin{aligned}
\|x \cdot z\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{\frac{p}{q}} \\
&\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{\frac{p}{q}}} \\
&= \|x\|_p \|x + y\|_p^{p/q},
\end{aligned}$$

同理

$$\|y \cdot z\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |x_k + y_k|^{\frac{p}{q}} \leq \|y\|_p \|x + y\|_p^{p/q}.$$

由此可以得到

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| |x_k + y_k|^{p/q} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p/q} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |x_k + y_k|^{p/q} \\
&\leq \|x\|_p \|x + y\|_p^{p/q} + \|y\|_p \|x + y\|_p^{p/q}
\end{aligned}$$

进而如果 $\|x + y\|_p = 0$ 所欲证明的不等式显然成立，故不妨设

$\|x + y\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p > 0$ ，则由上式得

$$\|x + y\|_p^{p-p/q} \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

其中 $p - p/q = 1$ ，由此得所欲求。

泛函分析第一章部分补充内容

1. 证明 $L^\infty(E)$ 的“本性上确界”定义中的下确界可以达到，即对于 $f(x) \in L^\infty(E)$ ，存在 E 中的零测集 E_0 ，使得

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \inf_{\substack{E_0 \subset E \\ mE_0 = 0}} \left(\sup_{x \in E \setminus E_0} |f(x)| \right) \\
&= \sup_{x \in E \setminus E_0} |f(x)|.
\end{aligned}$$

证明：由下确界的定义，对于 $\varepsilon = 1/k (k=1, 2, \dots)$ ，存在零测集 $E_k \subset E$ ，使得

$$\sup_{x \in E \setminus E_k} |f(x)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{k}.$$

取 $E_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 则 $E_0 \subseteq E$ 且仍是零测集(可数多个零测集的并仍是零测集). 进而对每个

$k=1, 2, \dots$ 有 $E_0 \subset E_k$, 因而

$$\sup_{x \in E \setminus E_0} |f(x)| \leq \sup_{x \in E \setminus E_k} |f(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \frac{1}{k}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 即可得到

$$\sup_{x \in E \setminus E_0} |f(x)| \leq \|f\|_{\infty}.$$

另一方面, 因为 $E_0 \subseteq E$ 是零测集, 因而

$$\|f\|_{\infty} \leq \sup_{x \in E \setminus E_0} |f(x)|.$$

结合上述两个方面的结果, 可以得到所需结论.

2. 证明 $L^{\infty}(E)$ 中的按距离收敛等价于函数列的几乎处处一致收敛.

证明: 设有点列 $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \subset L^{\infty}(E)$.

先设 f_k 按 $L^{\infty}(E)$ 中的距离收敛于 f_0 . 因为“本性上确界”定义中的下确界可以达到(见上一题目), 则对于 $k=1, 2, \dots$, 存在 $[a, b]$ 中的零测集 E_k , 使得

$$\begin{aligned} \|f_k - f_0\|_{\infty} &= \inf_{\substack{F \subset E \\ mF=0}} \left(\sup_{x \in E \setminus F} |f_k(x) - f_0(x)| \right) \\ &= \sup_{x \in E \setminus E_k} |f_k(x) - f_0(x)|. \end{aligned}$$

取 $E_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 则 $E_0 \subseteq [a, b]$ 且仍是零测集(可数多个零测集的并仍是零测集). 进而对每个

$k=1, 2, \dots$ 有 $E_0 \subset E_k$, 因而当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\begin{aligned} \sup_{x \in E \setminus E_0} |f_k(x) - f_0(x)| &\leq \sup_{x \in E \setminus E_k} |f_k(x) - f_0(x)| \\ &= \|f_k - f_0\|_{\infty} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

即 $f_k(x)$ 在 $E \setminus E_0$ 中一致收敛于 $f_0(x)$, 故 $f_k(x)$ 在 E 中几乎处处一致收敛于 $f_0(x)$, 因为 $mE_0 = 0$.

再设 $f_k(x)$ 在 E 中几乎处处一致收敛于 $f_0(x)$. 因此存在零测集 $E_0 \subseteq E$ 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\sup_{x \in E \setminus E_0} |f_k(x) - f_0(x)| \rightarrow 0.$$

因此

$$\|f_k - f_0\|_\infty \leq \sup_{t \in [a, b] \setminus E_0} |f_k(x) - f_0(x)| \rightarrow 0.$$

即 $f_k(x)$ 按 $L^\infty(E)$ 中的距离收敛于 $f_0(x)$.

当 $1 < p < \infty$ 时, 记 q 为 p 的相拌数, 即共轭数, 即 q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

当 $p=1$ 时, 可以认为 $q=\infty$; 当 $p=\infty$ 时, 可以认为 $p=1$. 进而因为 $p+q=pc$ 故

$$\frac{q}{p} + 1 = q.$$

l^p 和 l^∞ 中的范数记分别记为 $(x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots))$

$$\|x\|_p = \|x\|_{l^p} := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p}; \quad \|x\|_\infty = \|x\|_{l^\infty} := \sup_{n \geq 1} |\xi_n|.$$

命题 2. 设 $y = \{\eta_n\}_{n=1}^\infty = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots) \in l^q$, 定义: 对任何 $x \in l^p$,

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n.$$

则 T 是 l^p 上的有界线性泛函, 且

$$\|T\| = \|g\|_q$$

证明: 情形一: $1 < p < \infty$.

(i) 利用 Holder 不等式容易证明 $T: l^p \rightarrow \mathbf{R}$ 是有意义的.

(ii) $T: l^p \rightarrow \mathbf{R}$ 是线性泛函 (证略);

(iii) 由 Holder 不等式, 我们有

$$|T(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q,$$

即 $T: l^p \rightarrow \mathbf{R}$ 是有界线性泛函, 且

$$\|T\| \leq \|y\|_q, \quad (*)$$

(iv) 我们再证明: $\|T\| \geq \|y\|_q$. 不失一般性, 可设 $\|y\|_q > 0$.

取一个特殊的 $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in l^p$, 其中的每一个分量按照下面的形式定义:

$$\xi_k := \|y\|_q^{-\frac{1}{p}} |\eta_k|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} \eta_k, \quad (k=1, 2, \dots).$$

不难计算(这里用到了 $p+q=pq$ 和 $1+q/p=q$.)

$$\|x_0\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \leq \|y\|_q^{-q} \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q = 1.$$

进而根据 $T(x)$ 的定义, 我们不难得到

$$\begin{aligned} \|T\| &= \|T\| \cdot \|x_0\| \geq T(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k = \|y\|_q^{-\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| |\eta_k|^{\frac{q}{p}} \\ &= \|y\|_q. \end{aligned}$$

情形二: $p=1$ (即 $q=\infty$).

(i) 容易证明 $T: l^1 \rightarrow \mathbf{R}$ 是有意义的.

(ii) $T: l^1 \rightarrow \mathbf{R}$ 是线性泛函 (证略);

(iii) 我们有

$$|T(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \sup_{n \geq 1} |\eta_n| \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \|y\|_{\infty} \|x\|_1,$$

即 $T: l^1 \rightarrow \mathbf{R}$ 是有界线性泛函, 且 $\|T\| \leq \|y\|_{\infty}$.

(iv) 我们断言: $\|T\| = \|y\|_{\infty}$. 不失一般性, 可设 $\|y\|_{\infty} > 0$.

取 $x^{(i)} = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{\operatorname{sgn} \eta_i}, 0, \dots)$, 则显然 $x^{(i)} \in l^1$ 且 $\|x^{(i)}\|_1 \leq 1$, 因此有

$$\|T\| \geq \|T\| \cdot \|x^{(i)}\|_1 \geq T(x^{(i)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n = \eta_i \operatorname{sgn} \eta_i = |\eta_i|.$$

而 i 是任意的自然数, 因此得到: $\|T\| \geq \sup_{i \geq 1} |\eta_i|$.

情形三: $p=\infty$ (此时 $q=1$).

(i) 易证 $T: l^{\infty} \rightarrow \mathbf{R}$ 是有意义的.

(ii) $T: l^{\infty} \rightarrow \mathbf{R}$ 是线性泛函 (证略);

(iii) 对于 $x \in l^{\infty}$, 我们有

$$|T(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \sup_{n \geq 1} |\xi_n| \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| = \|x\|_{\infty} \|y\|_1,$$

即 $T: l^{\infty} \rightarrow \mathbf{R}$ 是有界线性泛函, 且

$$\|T\| \leq \|y\|_1.$$

(iv) 我们断言: $\|T\| = \|y\|_1$. 不失一般性, 可设 $\|y\|_1 > 0$.

取 $x_0 = (\operatorname{sgn} \eta_1, \operatorname{sgn} \eta_2, \dots, \operatorname{sgn} \eta_n, \dots)$, 则显然 $x_0 \in l^{\infty}$ 且 $\|x_0\|_{\infty} \leq 1$, 因此有

$$\|T\| \geq \|T\| \cdot \|x_0\|_{\infty} \geq T(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \operatorname{sgn} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| = \|y\|_1.$$

以下设 G 是可测集, 不失一般性, 可设 $G = [a, b]$.

当 $1 < p < \infty$ 时, 记 q 为 p 的相拌数, 即共轭数, 即 q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

当 $p=1$, 可以认为 $q=\infty$;

当 $p=\infty$, 可以认为 $p=1$.

进而因为 $p+q = pq$ 故 $\frac{q}{p} + 1 = q$.

$L^p(G)$ 和 $L^{\infty}(G)$ 中的范数记分别记为

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(G)} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; \quad \|f\|_{\infty} = \|f\|_{L^{\infty}(G)} := \inf_{\substack{E \subset G \\ mE=0}} \sup_{x \in G \setminus E} |f(x)|.$$

命题 1. 设 $g(\cdot) \in L^q(G)$, 定义: 对任何 $f \in L^p(G)$, 定义

$$T(f) = \int_a^b g(x) f(x) dx.$$

则 T 是 $L^p(G)$ 上的有界线性泛函, 且

$$\|T\| = \|g\|_q = \sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

证明: 情形一: $1 < p < \infty$.

(i) 利用 Holder 不等式容易证明 $T: L^p(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是有意义的.

(ii) $T: L^p(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是线性泛函 (证略);

(iii) 由 Holder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} |T(f)| &\leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &= \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p. \end{aligned}$$

即 $T: L^p(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是有界线性泛函, 且

$$\|T\| \leq \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

(iv) 我们再证明: $\|T\| \geq \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$. 不失一般性, 可设 $\int_a^b |g(x)|^q dx > 0$. 取一个特

殊的 $f_0(x)$ 如下:

$$f_0(x) = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-\frac{1}{p}} |g(x)|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} g(x).$$

显然 $f_0(x)$ 是可测的, 且不难计算

$$\begin{aligned} \|f_0\|_p^p &= \int_a^b |f_0(x)|^p dx \\ &= \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-\frac{p}{p}} \int_a^b \left| |g(x)|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} g(x) \right|^p dx \\ &\leq \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-1} \int_a^b |g(x)|^q dx = 1. \end{aligned}$$

进而根据 $T(f)$ 的定义, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \|T\| &\geq \|T\| \cdot \|f_0\|_p \geq T(f_0) = \int_a^b f_0(x)g(x)dx \\ &= \int_a^b \left\{ \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-\frac{1}{p}} |g(x)|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} g(x) \right\} g(x)dx \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-\frac{1}{p}} |g(x)|^{\frac{q}{p}+1} dx \\ &= \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-\frac{1}{p}} \int_a^b |g(x)|^q dx \\ &= \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

情形二: $p=1$ (即 $q=\infty$).

(i) 利用 Holder 不等式容易证明 $T: L^1(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是有意义的.

(ii) $T: L(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是线性泛函 (证略);

(iii) 既然 $g(x)$ 是本性有界的, 记其在 G 上的本性上确界为 $\|g\|_\infty = \inf_{\substack{E \subset G \\ mE=0}} \sup_{x \in G \setminus E} |g(x)|$. 我们有

$$|T(f)| \leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|g\|_\infty \int_a^b |f(x)| dx,$$

即 $T: L^p(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是有界线性泛函, 且 $\|T\| \leq \|g\|_\infty$,

(iv) 我们断言: 对于任意取定的 $q > 1$ 成立,

$$\|T\| \geq \|g\|_q.$$

不失一般性, 可设 $\int_a^b |g(x)|^q dx > 0$. 取一个特殊的 $f_0(x)$ 如下 (其中 $p+q=pq$):

$$f_0(x) = \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-1/p} |g(x)|^{q/p} \operatorname{sgn} g(x).$$

显然 $f_0(x)$ 仍是有界可测的, 注意到

$$\begin{aligned} \|f_0\|_p^p &= \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-\frac{p}{p}} \int_a^b \left| |g(x)|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} g(x) \right|^p dx \\ &\leq \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-1} \int_a^b |g(x)|^q dx = 1. \end{aligned}$$

因为 $L(G) \supset L^p(G)$, 因此 T_n 也是 $L^p(G)$ 上的泛函 (作用方式仍然相同), 并且 T 在 $L^p(G)$ 上

的算子范数不会超过 T 在 $L(G)$ 上的算子范数. 故根据 $T(f)$ 的定义得到

$$\begin{aligned} \|T\| &\geq \|T\| \cdot \|f_0\|_p \geq T(f_0) = \int_a^b f_0(x)g(x)dx \\ &= \int_a^b \left\{ \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{-\frac{1}{p}} |g(x)|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} g(x) \right\} g(x) dx \\ &= \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

注意到 $q > 1$ 的任意性和下述事实 (可见参考文献):

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} = \|g\|_\infty,$$

最后我们得到 $\|g\|_{\infty} \leq \|T\|$.

这一部分还有另外一种证法如下： 我们断言： $\|T\| \geq \|g\|_{\infty}$. 不失一般性，可设 $\|g\|_{\infty} > 0$.

任取 $\varepsilon > 0$ 使得 $\|g\|_{\infty} - \varepsilon > 0$. 记

$$E_{\varepsilon} = \{x \in [a, b] \mid |g(x)| \geq \|g\|_{\infty} - \varepsilon\}.$$

则 $mE_{\varepsilon} > 0$. 再定义

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{mE_{\varepsilon}} \operatorname{sgn} g(x), & x \in E_{\varepsilon} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E_{\varepsilon} \end{cases}$$

显然 $f_0(x)$ 是可测的，且

$$\|f_0\|_1 = \int_{E_{\varepsilon}} \frac{1}{mE_{\varepsilon}} |\operatorname{sgn} g(x)| dx \leq 1.$$

而

$$\begin{aligned} \|T\| &\geq \|T\| \cdot \|f_0\|_1 \geq T(f_0) = \int_a^b f_0(x)g(x)dx \\ &= \frac{1}{mE_{\varepsilon}} \int_{E_{\varepsilon}} |g(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{mE_{\varepsilon}} \int_{E_{\varepsilon}} (\|g\|_{\infty} - \varepsilon) dx \\ &= \|g\|_{\infty} - \varepsilon \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可以得到 $\|T\| \geq \|g\|_{\infty}$.

情形三： $p = \infty$ (此时 $q = 1$).

(i) 易证 $T: L^{\infty}(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是有意义的.

(ii) $T: L^{\infty}(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是线性泛函 (证略);

(iii) 对于 $f(x) \in L^{\infty}[a, b]$, 我们有

$$|T(f)| \leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{\infty} \int_a^b |g(x)| dx,$$

即 $T: L^{\infty}(G) \rightarrow \mathbf{R}$ 是有界线性泛函，且

$$\|T\| \leq \|g\|_1,$$

(iv) 我们断言: $\|T\| \geq \|g\|_1$. 不失一般性, 可设 $\int_a^b |g_n(x)| dx > 0$. 取一特殊的 $f_0(x)$ 如下:

$$f_0(x) = \operatorname{sgn} g(x).$$

显然 $f_0(x)$ 仍是有界可测的, 注意到

$$\|f_0\|_\infty \leq \|\operatorname{sgn} g(x)\|_\infty \leq 1.$$

根据 $T(f)$ 的定义得到

$$\begin{aligned} \|T\| \geq \|T\| \cdot \|f_0\|_p &\geq T(f_0) = \int_a^b g(x) f_0(x) dx \\ &= \int_a^b g(x) \operatorname{sgn} g(x) dx = \int_a^b |g(x)| dx. \end{aligned}$$

最后我们得到 $\|g\|_1 \leq \|T\|$.