第二节 向量及其线性运算

一、向量及其几何表示

二、向量的坐标表示

三、向量的模与方向角

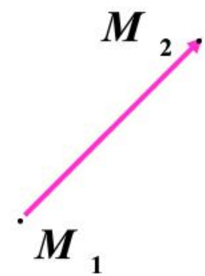
四、向量的线性运算

www.docin.com

五、向量的分向量表示式

六、小结 思考题

一、向量及其几何表示



向量(vector): 既有大小又有方向的量.

向量表示： $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$

以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段.

向径： 空间直角坐标系中任一点 M 与原点构成的向量 $\overrightarrow{OM}$.

www.docin.com

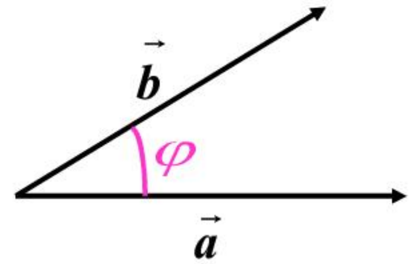
自由向量：不考虑起点、终点位置的向量.

相等向量：大小相等且方向相同的向量.

负向量：大小相等但方向相反的向量，记为$-\vec{a}$.

www.docin.com

空间两向量的夹角的概念：



$\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0},$

向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角

$$\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) \qquad (0 \le \varphi \le \pi)$$

类似地，可定义向量与一轴或空间两轴的夹角.

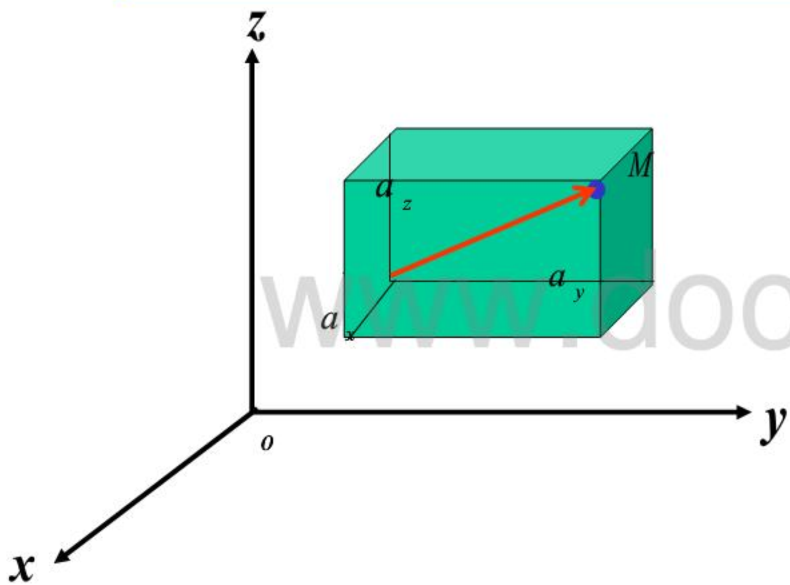
www.docin.com

特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.

二、向量的坐标表示

设有向线段 $\overrightarrow{M_0M}$ 代表向量 $\vec{a}$

起点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，终点 $M(x, y, z)$

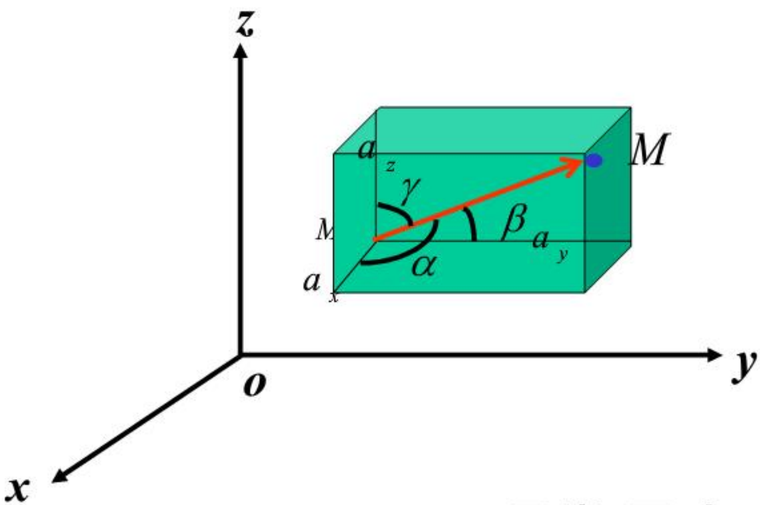


$a_x = x - x_0$ 向量在x轴上的投影

$a_y = y - y_0$ 向量在y轴上的投影

$a_z = z - z_0$ 向量在z轴上的投影

www.docin.com



由图分析可知

$$a_x = |M_0M| \cos \alpha$$

$$a_y = |M_0M| \cos \beta$$

$$a_z = |M_0M| \cos \gamma$$

α、β、γ 通常用来表示向量的方向.

www.docin.com

$\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ 表示向量的长度

有向线段 $M_0M \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 有序数组 a_x, a_y, a_z

向量的坐标表达式：

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

www.docin.com

特殊地：$\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$

三、向量的模(modulus)与方向角

向量的模（大小）：

$$|\vec{a}| \text{ 或 } |\overrightarrow{M_1M_2}|$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

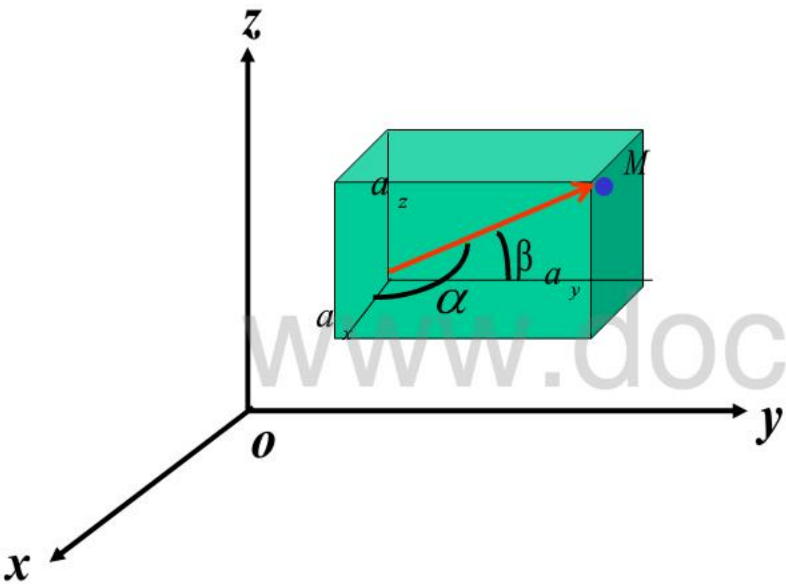
www.docin.com

单位向量(unit vector)：

模长为1的向量，记为 $\overrightarrow{a^0}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2^0}$

非零向量 $\vec{a}$ 的方向角(direction angle)：α 、β 、γ

非零向量与三条坐标轴的正向的夹角.



$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$

www.docin.com

当 $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \neq 0$ 时,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

向量的方向余弦

www.docin.com

方向余弦的特征

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

特殊地
单位向量与方向余弦的关系为:

$$\vec{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

www.docin.com

例 1　设有向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 2$，它与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，如果 P_1 的坐标为 $(1,0,3)$，求 P_2 的坐标.

解　设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角为 α、β、γ

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \therefore \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

www.docin.com

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$ 设 P_2 的坐标为 (x, y, z),

$$\cos\alpha = \frac{x-1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2,$$

$$\cos\beta = \frac{y-0}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{y-0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2},$$

www.docin.com

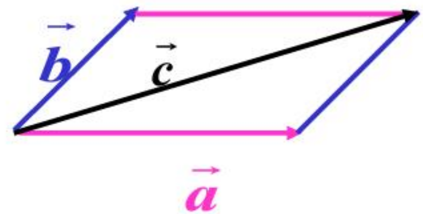
$$\cos\gamma = \frac{z-3}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{z-3}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow z = 4, \quad z = 2,$$

P_2 的坐标为 $(2, \sqrt{2}, 4)$, $(2, \sqrt{2}, 2)$.

四、向量的线性运算

1. 向量的加法

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$



（平行四边形法则）

（平行四边形法则有时也称为三角形法则）

特殊地：若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ 分为同向和反向

www.docin.com

$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

$|c|=\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. (commutativity)

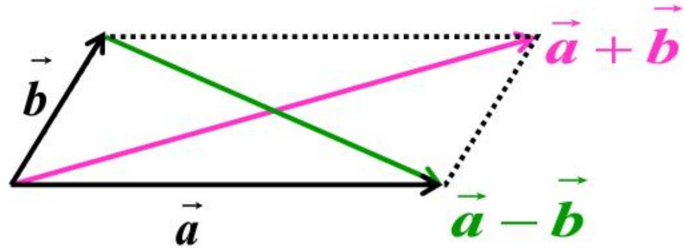
（2）结合律：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. (associativity)

www.docin.com

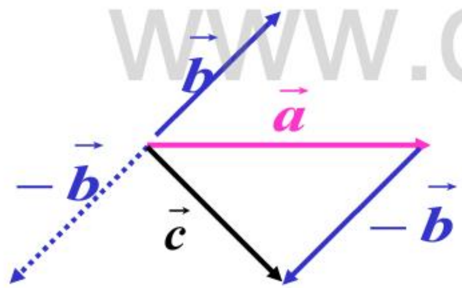
（3）$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

注：向量的减法

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



平行四边形法则



三角形法则

www.docin.com

向量加减法的坐标表达式

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

$$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$$

www.docin.com

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}$$

二、向量与数的乘法（数乘）

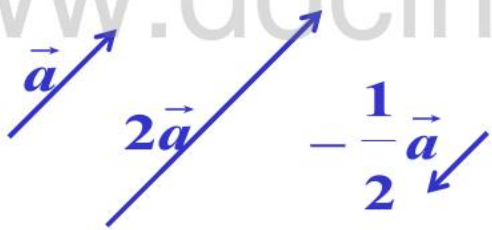
设 λ 是一个数，向量 $\vec{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 规定为

(1) $\lambda > 0$，　$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$

(2) $\lambda = 0$，　$\lambda\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\lambda < 0$，　$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

www.docin.com



数与向量的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

www.docin.com

向量与数的乘法的坐标表达式

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

特殊地，一向量与其单位向量的关系为

www.docin.com

$$\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

两个向量的平行关系

定理

设向量 $\vec{a} \neq 0$,

那末向量 $\vec{b}$ 平行于 $\vec{a}$ 的充分必要条件

是：存在唯一的实数 λ，使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

www.docin.com

证明充分性显然；

必要性　设 $\vec{b} \parallel \vec{a}$　取 $|\lambda| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，

当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时　λ 取正值，

当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时　λ 取负值，　即有 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

$\because$ 此时 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向．且 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

λ 的唯一性．　设 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$，又设 $\vec{b} = \mu\vec{a}$，

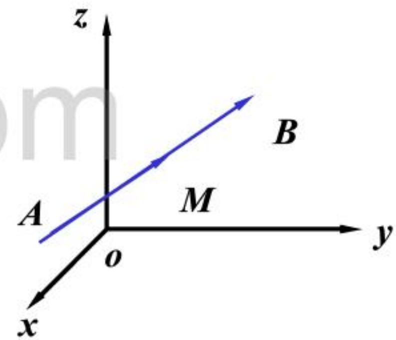
两式相减，得 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$，　即 $|\lambda - \mu||\vec{a}| = 0$，

$\because |\vec{a}| \neq 0$，　故 $|\lambda - \mu| = 0$，　即 $\lambda = \mu$.

www.docin.com

例 2　设 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 为两已知点，而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为两部分 $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{MB}$，使它们的值的比等于某数 $\lambda(\lambda \neq -1)$，即 $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$，求分点的坐标.

解　设 $M(x, y, z)$ 为直线上的点，



$$\overrightarrow{AM} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{MB} = \{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\}$$

www.docin.com

由题意知： $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$

$$\{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\} = \lambda\{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\},$$

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \Rightarrow y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

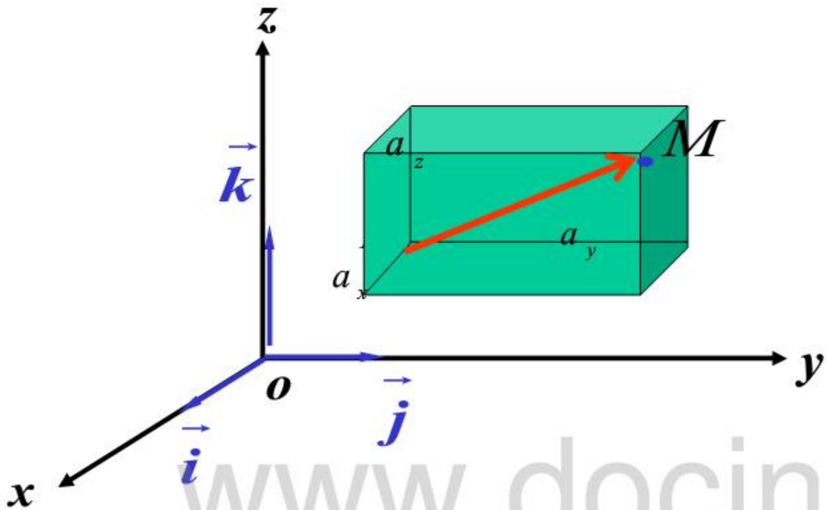
$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \Rightarrow z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

www.docin.com

M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. M 为中点时，

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

五、向量的分向量表示式



www.docin.com

以 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 分别表示沿 x, y, z 轴正向的单位向量.

$a_x\vec{i}$，$a_y\vec{j}$和$a_z\vec{k}$表示向量在x、y、z轴上的投影.

例 3 求平行于向量 $\vec{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$ 的单位向量的分解式.

解 所求向量有两个，一个与 $\vec{a}$ 同向，一个反向

$$\because |\vec{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11,$$

$$\therefore \overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{6}{11}\vec{i}+\frac{7}{11}\vec{j}-\frac{6}{11}\vec{k},$$

$$或\ \overrightarrow{a^0}=-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\frac{6}{11}\vec{i}-\frac{7}{11}\vec{j}+\frac{6}{11}\vec{k}.$$

www.docin.com

例 4 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$，$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $\because \vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})$$

$$-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k},$$

$\therefore$ 在 x 轴上的投影为 $a_x=13$，

在 y 轴上的分向量为 $7\vec{j}$.

www.docin.com

六、小结

向量的概念（注意与标量的区别）
向量的坐标
向量的模与方向角
向量的加减法　（三角形法则）
向量与数的乘法（注意数乘后的方向）
向量的分向量表示式
（注意分向量与向量的坐标的区别）

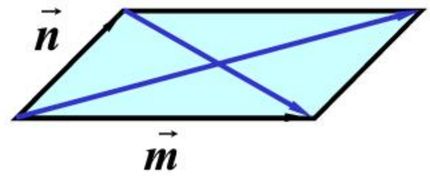
www.docin.com

思考题

1. 设$\vec{m} = \vec{i} + \vec{j}$，$\vec{n} = -2\vec{j} + \vec{k}$，求以向量$\vec{m}$,$\vec{n}$为边的平行四边形的对角线的长度.

www.docin.com

思考题1解答



对角线的长为 $|\vec{m}+\vec{n}|$, $|\vec{m}-\vec{n}|$,

$\because\ \vec{m}+\vec{n}=\{1,-1,1\}$, $\quad \vec{m}-\vec{n}=\{1,3,-1\}$

$\therefore\ |\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{3}$, $\quad |\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{11}$,

平行四边形的对角线的长度各为 $\sqrt{3},\sqrt{11}$.

www.docin.com

思考题

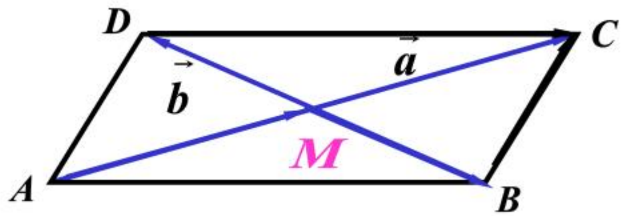
2. 已知平行四边形**ABCD**的对角线

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BD} = \vec{b}$$

试用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示平行四边形四边上对应的向量.

www.docin.com

思考题2解答



$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

www.docin.com

练 习 题

一、 填空：

1. 向量是__________的量；
2. 向量的____________叫做向量的模；
3. ____________的向量叫做单位向量；
4. ______________的向量叫做零向量；
5. 与_____无关的向量称为自由向量；
6. 平行于同一直线的一组向量叫做__________，三个或三个以上平行于同一平面的一组向量叫做_____________；

www.docin.com

7. 两向量_____________，我们称这两个向量相等；
8. 两个模相等、______________的向量互为逆向量；
9. 把空间中一切单位向量归结到共同的始点，则终点构成_____________；

10. 把平行于某一直线的一切单位向量归结到共同的始点，则终点构成___________________________；

11. 要使$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$成立，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$应满足______________________________；

12. 要使$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$成立，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$应满足____________________________.

13. 已知两点$M_1(0,1,2)$和$M_2(1,-1,0)$则$\overrightarrow{M_1M_2}=\{\quad\}$；$-2\overrightarrow{M_1M_2}=\{\quad\}$；

14. 已知两点$M_1(4,\sqrt{2},1)$和$M_2(3,0,2)$，则向量$\overrightarrow{M_1M_2}=$__________，$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=$__________，方向余弦$\cos\alpha=$______；$\cos\beta=$______；$\cos\gamma=$______；方向角$\alpha=$______，$\beta=$______，$\gamma=$______；

www.docin.com

15. 已知向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$及 $\vec{c}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, 则 $\vec{a}^{0}=$________________;

$\vec{b}^{0}=$______________; $\vec{c}^{0}=$________________;

16. 一向量与xOy, yOz, zOx三个坐标平面的夹角α, β, γ满足$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$________________.

二、用向量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

三、把ABC的BC边五等分，设分点依次为D_1, D_2, D_3, D_4，再把各分点与点A连接，试以$\overrightarrow{AB}=c$, $\overrightarrow{BC}=a$表示向量$\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

www.docin.com

四、一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 X 轴，Y 轴和 Z 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 7，求这向量的起点 A 的坐标 .

五、求平行于向量 $\vec{a}=\{6,7,-6\}$ 的单位向量 .

www.docin.com

练习题答案

一、1. 既有大小, 又有方向； 2. 大小；

3. 模等于 1； 4. 模等于零； 5. 起点；

6. 共线向量, 共面向量； 7. 模相等且方向相同；

8. 方向相反； 9. 半径为 1 的球面；

10. 距离等于 2 的两点；

11. $\vec{a}$ 垂直于 $\vec{b}$ ； 12. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向 .

13. $\{1,-2,-2\},\{-2,4,4\}$

14. $\{-1,-\sqrt{2},1\},2,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}$;

15. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\},\left\{\dfrac{2}{\sqrt{38}},-\dfrac{3}{\sqrt{38}},\dfrac{5}{\sqrt{38}}\right\},\left\{-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$

16. 2.

www.docin.com

三、$\overrightarrow{D_1A} = -(c + \frac{1}{5}a)$ $\overrightarrow{D_2A} = -(c + \frac{2}{5}a)$

$\overrightarrow{D_3A} = -(c + \frac{3}{5}a)$, $\overrightarrow{D_4A} = -(c + \frac{4}{5}a)$.

四、 $(-2, 3, 0)$;

A

五、 $\left\{\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right\}$或$\left\{-\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right\}$.

www.docin.com

2. 工具变量的选取

- 对于联立方程模型的每一个结构方程，例如第1个方程，可以写成如下形式：

$$Y_1 = \beta_{12}Y_2 + \beta_{13}Y_3 + \cdots + \beta_{1g_1}Y_{g_1} + \gamma_{11}X_1 + \gamma_{12}X_2 + \cdots + \gamma_{1k_1}X_{k_1} + \mathrm{N}_1$$

- 内生解释变量（g_1-1）个，先决解释变量k_1个。
- 如果方程是恰好识别的，有（g_1-1）=（k- k_1）。
- 可以选择（k- k_1）个方程没有包含的先决变量作为（g_1-1）个内生解释变量的工具变量。

www.docin.com

3. IV参数估计量

- 方程的矩阵表示为:

$$Y_1 = (\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{X}_0)\begin{pmatrix} \mathrm{B}_0 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} + \mathrm{N}_1$$

- 选择方程中没有包含的先决变量X_0^*作为包含的内生解释变量Y_0的工具变量，得到参数估计量为:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{IV} = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_0^* & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_0^* & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' Y_1$$

www.docin.com

4. 讨论

- 该估计量与OLS估计量的区别是什么？
- 该估计量具有什么统计特性？
- （$k-k_1$）工具变量与（g_1-1）个内生解释变量的对应关系是否影响参数估计结果？为什么？
- IV是否利用了模型系统中方程之间相关性信息？
- 对于过度识别的方程，可否应用IV ？为什么？
- 对于过度识别的方程，可否应用GMM ？为什么？

www.docin.com

三、间接最小二乘法
(ILS, Indirect Least Squares)

www.docin.com

1. 方法思路

- 联立方程模型的结构方程中包含有内生解释变量，不能直接采用OLS估计其参数。但是对于简化式方程，可以采用OLS直接估计其参数。

- 间接最小二乘法：先对关于内生解释变量的简化式方程采用OLS估计简化式参数，得到简化式参数估计量，然后通过参数关系体系，计算得到结构式参数的估计量。

- 间接最小二乘法只适用于恰好识别的结构方程的参数估计，因为只有恰好识别的结构方程，才能从参数关系体系中得到唯一一组结构参数的估计量。

www.docin.com

2.一般间接最小二乘法的估计过程

$$Y_1 = (\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{X}_0)\begin{pmatrix} \mathrm{B}_0 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} + \mathrm{N}_1$$

↓

$$Y_1 - \mathrm{B}_0 \mathbf{Y}_0 - \Gamma_0 \mathbf{X}_0 = \mathrm{N}_1$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{B}_0 & -\Gamma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} = \mathrm{N}_1$$

↓

www.docin.com

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B}_{00} & \Gamma_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{00} \\ \mathbf{X}_{0} \end{pmatrix} = \mathrm{N}_{1}$$

$$\mathbf{Y}_{00} = \Pi_{00} \mathbf{X} + \mathrm{E}$$

$$\mathrm{B}_{00} \Pi_{00} \mathbf{X} + \Gamma_{00} \mathbf{X}_{0} = 0$$

www.docin.com

$$\mathrm{B}_{00} \Pi_{00} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{0} \\ \mathbf{X}_{0}^{*} \end{pmatrix} + \Gamma_{00} \mathbf{X}_{0} = 0$$

$$\Pi_{00} = \left(\Pi_{00}^{1} \quad \Pi_{00}^{2} \right)$$

$$\begin{cases} B_{00}\Pi_{00}^{1} = \Gamma_{0} \\ B_{00}\Pi_{00}^{2} = 0 \end{cases}$$

- 用OLS估计简化式模型，得到简化式参数估计量，代入该参数关系体系，先由第2组方程计算得到内生解释变量的参数，然后再代入第1组方程计算得到先决解释变量的参数。于是得到了结构方程的所有结构参数估计量。

www.docin.com

3. 间接最小二乘法也是一种工具变量方法

- ILS等价于一种工具变量方法：依次选择X作为（Y_0,X_0）的工具变量。
- 数学证明见《计量经济学—方法与应用》（李子奈编著，清华大学出版社，1992年3月）第126—128页。
- 估计结果为：

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{ILS} = \left(\mathbf{X}' \left(\mathbf{Y}_0 \quad \mathbf{X}_0 \right) \right)^{-1} \mathbf{X}' Y_1$$

www.docin.com

四、二阶段最小二乘法
(2SLS, Two Stage Least Squares)

www.docin.com

1. 2SLS是应用最多的单方程估计方法

- IV和ILS一般只适用于联立方程模型中恰好识别的结构方程的估计。
- 在实际的联立方程模型中，恰好识别的结构方程很少出现，一般情况下结构方程都是过度识别的。为什么？
- 2SLS是一种既适用于恰好识别的结构方程，又适用于过度识别的结构方程的单方程估计方法。

www.docin.com

2.2SLS的方法步骤

- 第一阶段：对内生解释变量的简化式方程使用OLS。得到：

$$\hat{\boldsymbol{Y}}_0 = \boldsymbol{X}\hat{\Pi}_0 = \boldsymbol{X}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}_0)$$

- 用估计量代替结构方程中的内生解释变量，得到新的模型：

$$Y_1 = (\hat{\boldsymbol{Y}}_0, \boldsymbol{X}_0)\begin{pmatrix} \mathrm{B}_0 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} + \mathrm{N}_1$$

www.docin.com

- 第二阶段：对该模型应用OLS估计，得到的参数估计量即为原结构方程参数的二阶段最小二乘估计量。

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{2SLS} = \left(\begin{pmatrix} \hat{Y}_0 & X_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \hat{Y}_0 & X_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{Y}_0 & X_0 \end{pmatrix}' Y_1$$

www.docin.com

3. 二阶段最小二乘法也是一种工具变量方法

- 如果用Y_0的估计量作为工具变量，按照工具变量方法的估计过程，应该得到如下的结构参数估计量：

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' Y_1$$

www.docin.com

- 可以严格证明两组参数估计量是完全等价的，所以可以把2SLS也看成为一种工具变量方法。
- 证明过程见《计量经济学—方法与应用》（李子奈编著，清华大学出版社，1992年3月）第130—131页。

www.docin.com

五、三种方法的等价性证明

www.docin.com

1. 三种单方程估计方法得到的参数估计量

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{IV} = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_0^* & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_0^* & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' Y_1$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{ILS} = \left(\mathbf{X}' \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \mathbf{X}' Y_1$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{2SLS} = \left(\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' Y_1$$

www.docin.com

2. IV与ILS估计量的等价性

- 在恰好识别情况下。
- 工具变量集合相同，只是次序不同。
- 次序不同不影响正规方程组的解。

www.docin.com

2. 2SLS与ILS估计量的等价性

- 在恰好识别情况下。
- ILS的工具变量是全体先决变量。
- 2SLS的每个工具变量都是全体先决变量的线性组合。
- 2SLS的正规方程组相当于ILS的正规方程组经过一系列的初等变换的结果。
- 线性代数方程组经过初等变换不影响方程组的解。

www.docin.com

六、简单宏观经济模型实例演示

www.docin.com

1. 模型

$$
\begin{cases}
C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + \mu_{1t} \\
I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \mu_{2t} \\
Y_t = I_t + C_t + G_t
\end{cases}
$$

- 消费方程是恰好识别的；
- 投资方程是过度识别的；
- 模型是可以识别的。

www.docin.com

• 下列演示中采用了1978-1996年的数据，与教科书不同。

2. 数据

年份	Y	I	C	G
1978	3606	1378	1759	469
1979	4074	1474	2005	595
1980	4551	1590	2317	644
1981	4901	1581	2604	716
1982	5489	1760	2868	861
1983	6076	2005	3182	889
1984	7164	2469	3675	1020
1985	8792	3386	4589	817
1986	10133	3846	5175	1112
1987	11784	4322	5961	1501
1988	14704	5495	7633	1576
1989	16466	6095	8524	1847
1990	18320	6444	9113	2763
1991	21280	7517	10316	3447
1992	25864	9636	12460	3768
1993	34501	14998	15682	3821
1994	47111	19261	21230	6620
1995	59405	23877	27839	7689
1996	68498	26867	32589	9042

www.docin.com

3. 用狭义的工具变量法估计消费方程

用$\mathbf{G}_t$作为$\mathbf{Y}_t$的工具变量

$$\hat{\alpha}_0 = 164.79951$$

$$\hat{\alpha}_1 = 0.3175387$$

$$\hat{\alpha}_2 = 0.3919359$$

www.docin.com

- 估计结果显示

Dependent Variable: CC

Method: Two-Stage Least Squares

Date: 04/11/03 Time: 22:06

Sample(adjusted): 1979 1996

Included observations: 18 after adjusting endpoints

Instrument list: C G CC1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	164.8004	95.45182	1.726529	0.1048
Y	0.317539	0.032376	9.807786	0.0000
CC1	0.391935	0.087514	4.478510	0.0004

R-squared	0.999435	Mean dependent var	9875.667
Adjusted R-squared	0.999360	S.D. dependent var	9026.792
S.E. of regression	228.3835	Sum squared resid	782385.2
F-statistic	13200.10	Durbin-Watson stat	2.015655
Prob(F-statistic)	0.000000		

www.docin.com

4. 用间接最小二乘法估计消费方程

$$\begin{cases} C_t = \pi_{10} + \pi_{11} C_{t-1} + \pi_{12} G_t + \varepsilon_{1t} \\ Y_t = \pi_{20} + \pi_{21} C_{t-1} + \pi_{22} G_t + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\hat{\pi}_{10} = -63.594002 \qquad \hat{\pi}_{20} = -719.26343$$

$$\hat{\pi}_{11} = 0.8132890 \qquad \hat{\pi}_{21} = 1.3269366$$

$$\hat{\pi}_{12} = 1.2191863 \qquad \hat{\pi}_{22} = 3.8394822$$

$$\downarrow$$

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\pi}_{12} / \hat{\pi}_{22} = 0.31753925$$

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\pi}_{11} - \hat{\alpha}_1 \hat{\pi}_{21} = 0.39193422$$

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\pi}_{10} - \hat{\alpha}_1 \hat{\pi}_{20} = 164.800368$$

www.docin.com

- C简化式模型估计结果

Dependent Variable: CC
Method: Least Squares
Date: 04/11/03 Time: 22:13
Sample(adjusted): 1979 1996
Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-63.59400	279.1279	-0.227831	0.8229
CC1	0.813289	0.145306	5.597062	0.0001
G	1.219186	0.402482	3.029167	0.0085

R-squared	0.994079	Mean dependent var	9875.667
Adjusted R-squared	0.993289	S.D. dependent var	9026.792
S.E. of regression	739.4562	Akaike info criterion	16.20072
Sum squared resid	8201931.	Schwarz criterion	16.34911
Log likelihood	-142.8065	F-statistic	1259.163
Durbin-Watson stat	1.542608	Prob(F-statistic)	0.000000

www.docin.com

- **Y简化式模型估计结果**

Dependent Variable: Y

Method: Least Squares

Date: 04/11/03 Time: 22:17

Sample(adjusted): 1979 1996

Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-719.2634	740.2944	-0.971591	0.3467
CC1	1.326937	0.385377	3.443215	0.0036
G	3.839482	1.067451	3.596869	0.0026

R-squared	0.991131	Mean dependent var	20506.28
Adjusted R-squared	0.989948	S.D. dependent var	19561.13
S.E. of regression	1961.163	Akaike info criterion	18.15147
Sum squared resid	57692390	Schwarz criterion	18.29987
Log likelihood	-160.3633	F-statistic	838.1285
Durbin-Watson stat	1.427616	Prob(F-statistic)	0.000000

www.docin.com

5. 用两阶段最小二乘法估计消费方程

$$\hat{Y}_t = -719.26343 + 1.3269366 C_{t-1} + 3.8394822 G_t$$

代替原消费方程中的 Y_t*，应用* **OLS** *估计*

$$\hat{\alpha}_0 = 164.90009$$

$$\hat{\alpha}_1 = 0.3175580$$

$$\hat{\alpha}_2 = 0.3918794$$

www.docin.com

- 比较上述消费方程的3种估计结果，证明这3种方法对于恰好识别的结构方程是等价的。估计量的差别只是很小的计算误差。

- 第2阶段估计结果

Dependent Variable: CC
Method: Least Squares
Date: 04/11/03 Time: 22:22
Sample(adjusted): 1979 1996
Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	164.8004	309.0523	0.533244	0.6017
YF	0.317539	0.104827	3.029167	0.0085
CC1	0.391935	0.283353	1.383203	0.1868

R-squared	0.994079	Mean dependent var	9875.667
Adjusted R-squared	0.993289	S.D. dependent var	9026.792
S.E. of regression	739.4562	Akaike info criterion	16.20072
Sum squared resid	8201931.	Schwarz criterion	16.34911
Log likelihood	-142.8065	F-statistic	1259.163
Durbin-Watson stat	1.542608	Prob(F-statistic)	0.000000

www.docin.com

6. 用两阶段最小二乘法估计投资方程

- 投资方程是过度识别的结构方程，只能用2SLS估计。估计过程与上述2SLS估计消费方程的过程相同。得到投资方程的参数估计量为：

$$\hat{\beta}_0 = -380.11614$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.4049326$$

www.docin.com

- 至此，完成了该模型系统的估计。

- **2SLS第2阶段估计结果**

Dependent Variable: I
Method: Least Squares
Date: 04/11/03 Time: 22:28
Sample(adjusted): 1979 1996
Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-380.2044	427.6175	-0.889123	0.3871
YF	0.404935	0.015324	26.42468	0.0000

R-squared	0.977599	Mean dependent var	7923.500
Adjusted R-squared	0.976199	S.D. dependent var	7975.613
S.E. of regression	1230.436	Akaike info criterion	17.17256
Sum squared resid	24223582	Schwarz criterion	17.27149
Log likelihood	-152.5531	F-statistic	698.2639
Durbin-Watson stat	1.376531	Prob(F-statistic)	0.000000

www.docin.com

7. 用GMM估计投资方程

- 投资方程是过度识别的结构方程，也可以用GMM估计。选择的工具变量为c、G、CC1,得到投资方程的参数估计量为：

$$\hat{\beta}_0 = -388.2216$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.405241$$

www.docin.com

- 与2SLS结果比较，结构参数估计量变化不大。残差平方和由24223582变为3832486，显著减少。为什么？利用了更多的信息。

- **GMM估计结果**

Dependent Variable: I
Method: Generalized Method of Moments
Date: 04/11/03 Time: 22:33
Sample(adjusted): 1979 1996
Included observations: 18 after adjusting endpoints
No prewhitening
Bandwidth: Fixed (2)
Kernel: Bartlett
Convergence achieved after: 2 weight matricies, 3 total coef iterations
Instrument list: C G CC1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-388.2216	82.86703	-4.684874	0.0002
Y	0.405241	0.004748	85.34159	0.0000

R-squared	0.996456	Mean dependent var	7923.500
Adjusted R-squared	0.996234	S.D. dependent var	7975.613
S.E. of regression	489.4184	Sum squared resid	3832486.
Durbin-Watson stat	1.357784	J-statistic	0.002874

www.docin.com

*七、主分量法的应用

www.docin.com

1. 方法的提出

- 主分量方法本身并不是联立方程模型的估计方法，而是配合其它方法，例如2SLS使用于模型的估计过程之中。
- 数学上的主分量方法早就成熟，Kloek和Mennes于1960年提出将它用于计量经济学模型的估计。

www.docin.com

- 2SLS是一种普遍适用的联立方程模型的单方程估计方法，但是当它在实际模型估计中被应用时，立刻就会遇到不可逾越的困难。其第一阶段—用OLS估计简化式方程，是难以实现的。为什么？

2. 方法的原理

- 所谓主分量方法，就是用较少数目的新变量重新表示原模型中较多数目的先决变量的方法。
- 例如，如果能够找到5个左右的新变量表示宏观经济模型中的30个先决变量，那么只需要15组以上的样本，就可以进行2SLS第一阶段的估计。

www.docin.com

- 对充当主分量的变量是有严格要求：一是它必须是先决变量的线性组合，二是它们之间必须是正交的。前一条是保证主分量对先决变量的代表性；后一条是保证主分量之间不出现共线性。

www.docin.com