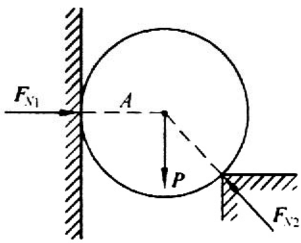
第一章 静力学公理和物体的受力分析

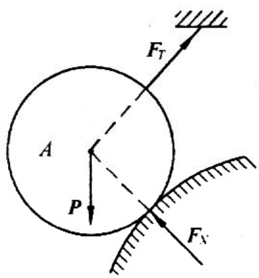
1.1 已知 各结构、机构如图，图中未画重力的物体重量均不计，所有接触处均为光滑接触；

求 画出各图中物体 A、ABC 或物体 AB、BC 的受力图。

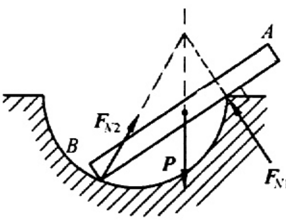
解 上述指定物体的受力图分别如下(图中虚轮廓线表示拆除的物体)。



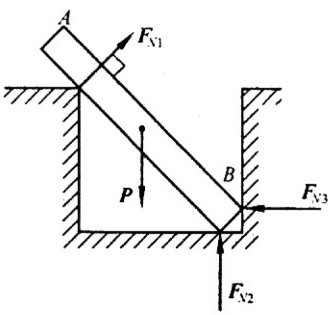
题 1.1(a)图



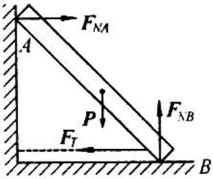
题 1.1(b)图



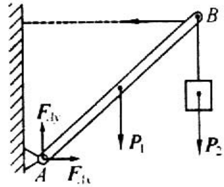
题 1.1(c)图



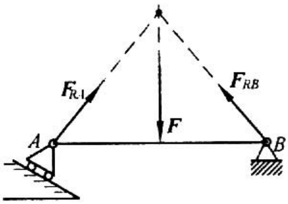
题 1.1(d)图



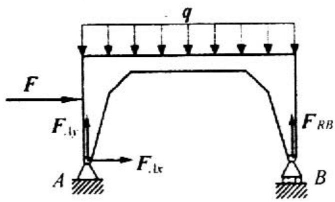
题 1.1(e)图



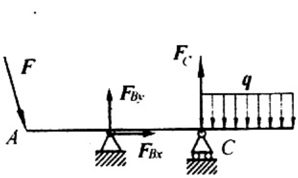
题 1.1(f)图



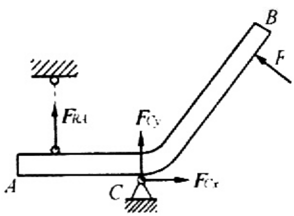
题 1.1(g)图



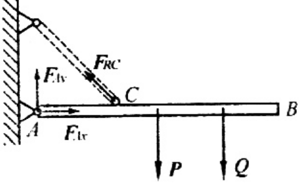
题 1.1(h)图



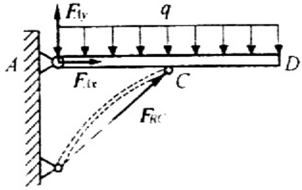
题 1.1(i)图



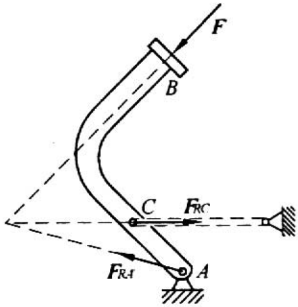
题 1.1(j)图



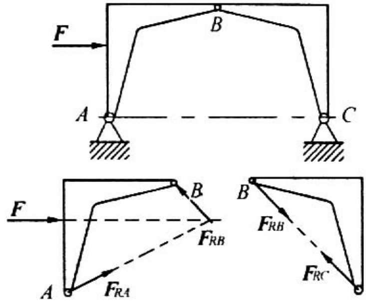
题 1.1(k)图



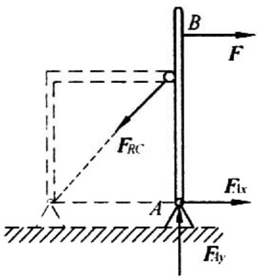
题 1.1(l)图



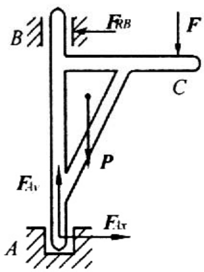
题 1.1(m)图



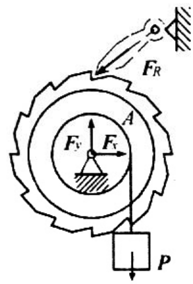
题 1.1(n)图



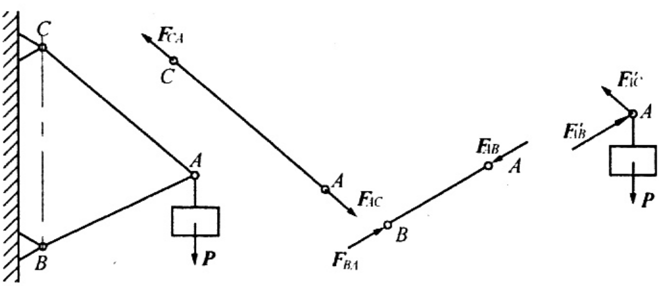
题 1.1(o)图



题 1.1(p)图



题 1.1(r)图

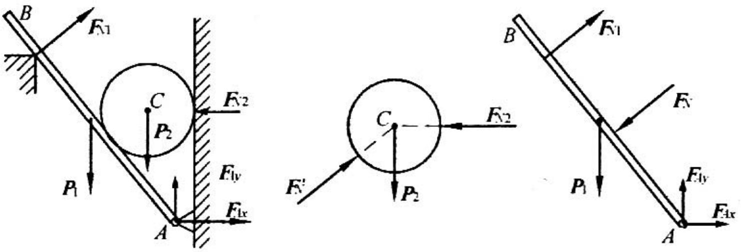


题 1.1(q)图

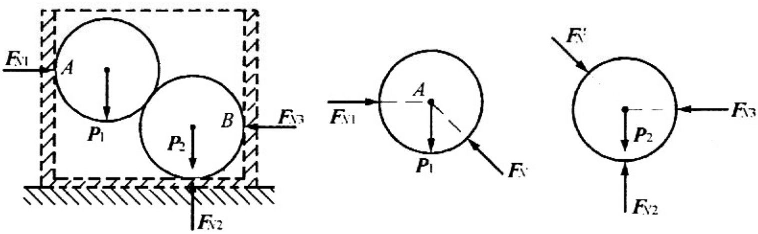
1.2 已知 各结构、机构如图,其它条件与上题相同;

求 画出各标注字符的物体的受力图及(a)~(p)各小题的整体受力图。

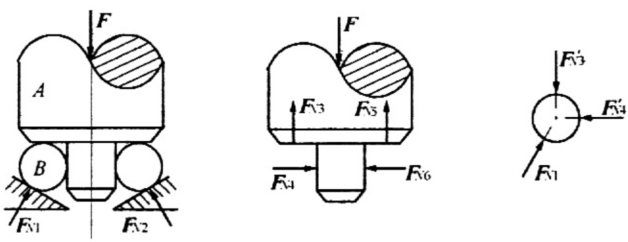
解 上述指定物体的受力图分别如下(图中虚轮廓线表示拆除的物体)。



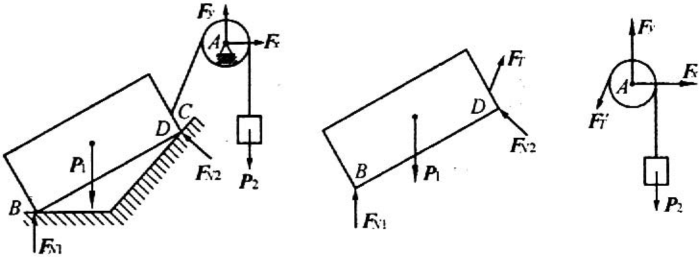
题 1.2(a)图



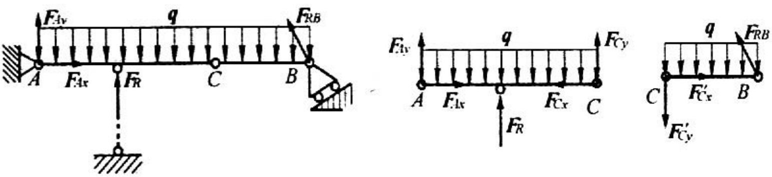
题 1.2(b)图



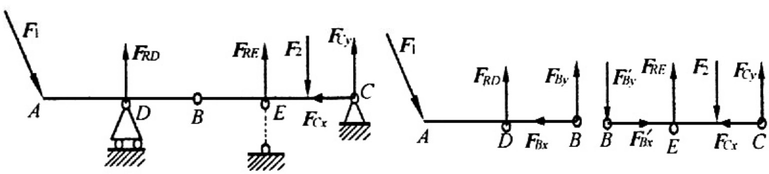
题 1.2(c)图



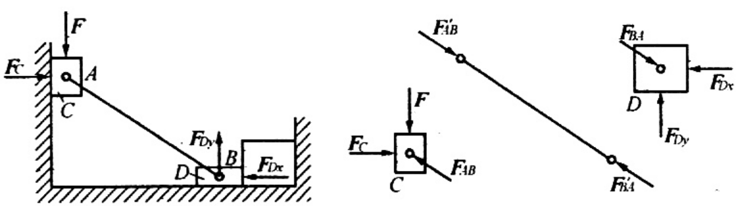
题 1.2(d)图



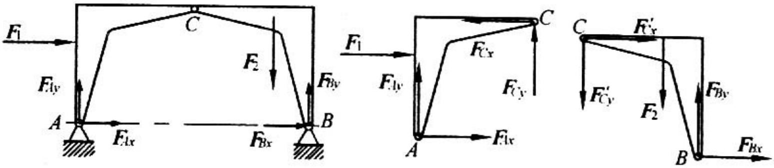
题 1.2(e)图



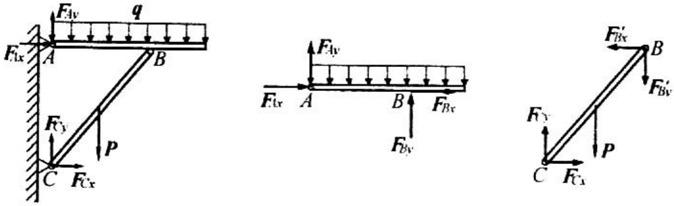
题 1.2(f)图



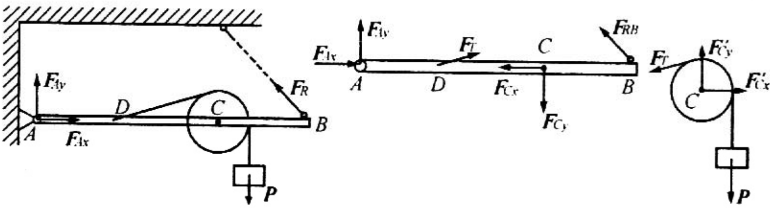
题 1.2(g)图



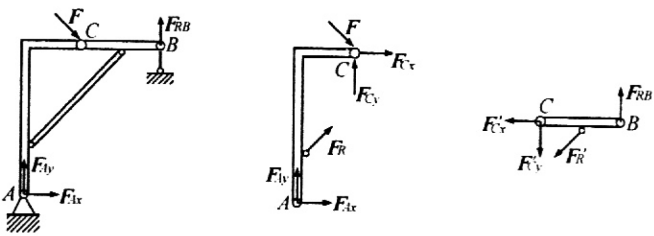
题 1.2(h)图



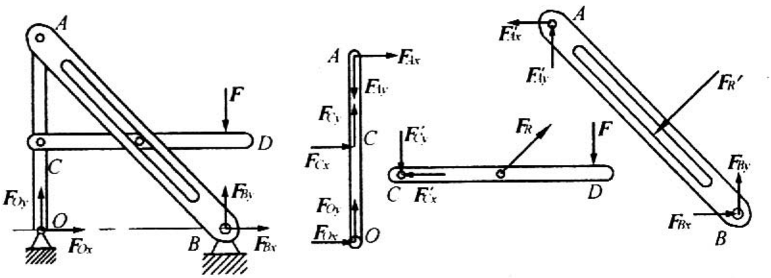
题 1.2(i)图



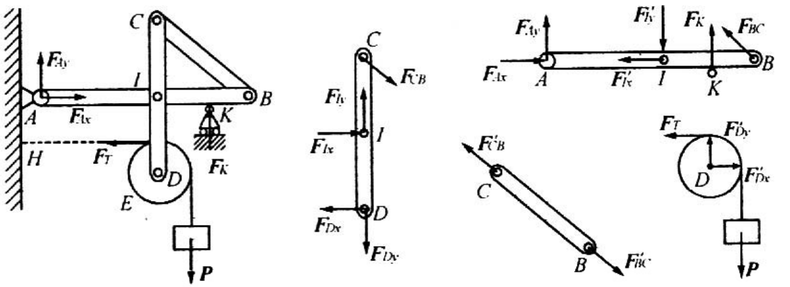
题 1.2(j)图



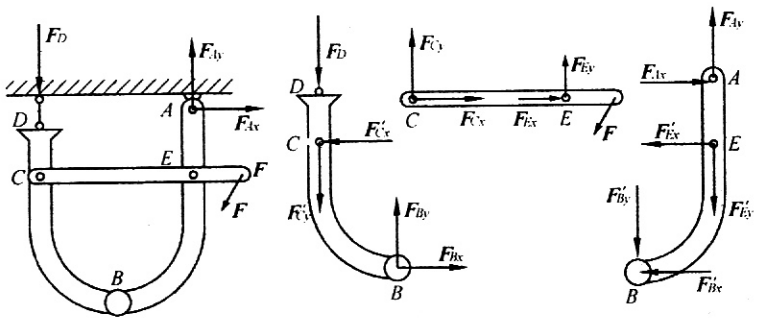
题 1.2(k)图



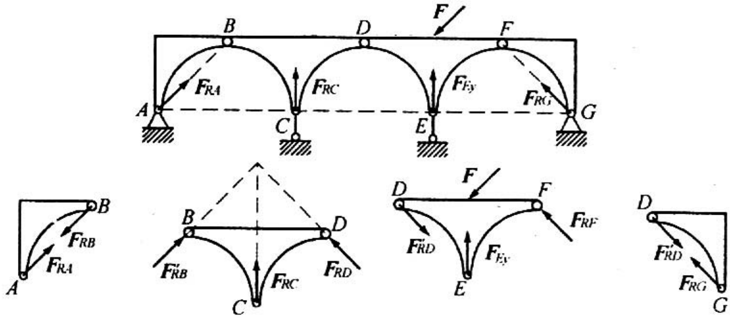
题 1.2(l)图



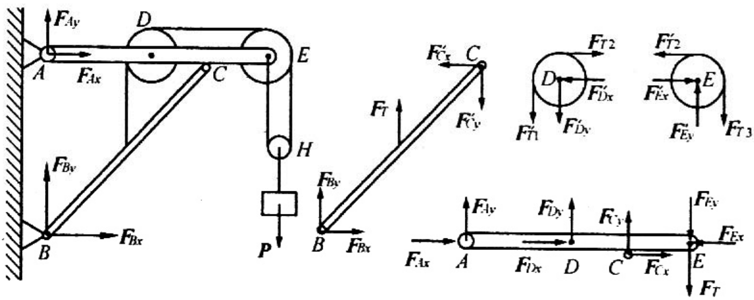
题 1.2(m)图



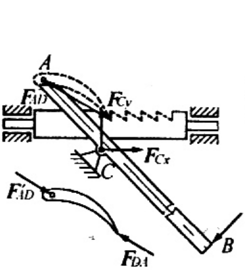
题 1.2(n)图



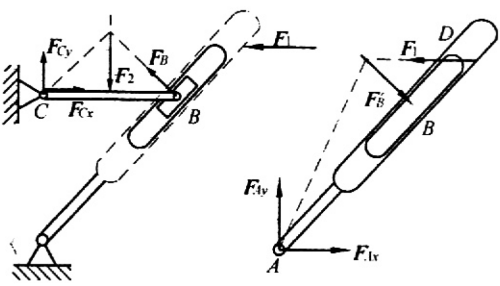
题 1.2(o)图



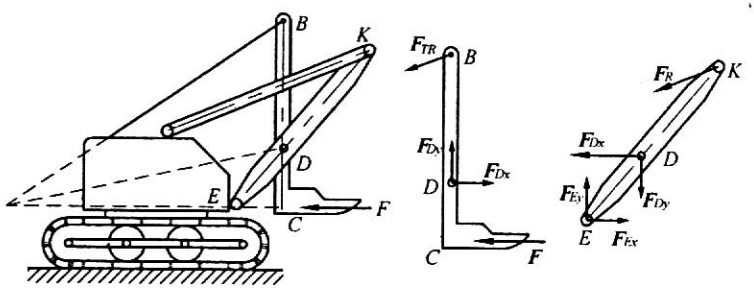
题 1.2(p)图



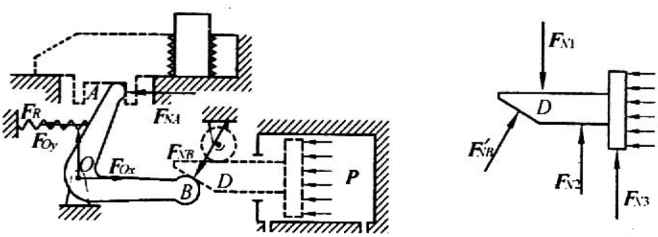
题 1.2(q)图



题 1.2(r)图



题 1.2(s)图

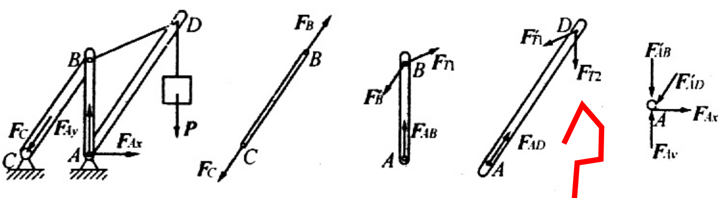


题 1.2(t)图

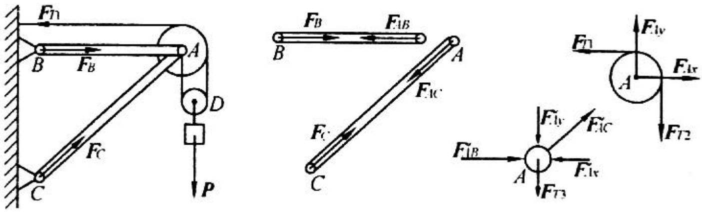
1.3 已知 各结构如图,销钉 A 穿透各构件,其它条件与上题相同;

求 画出各标注字符的物体、销钉 A 及整个结构的受力图。

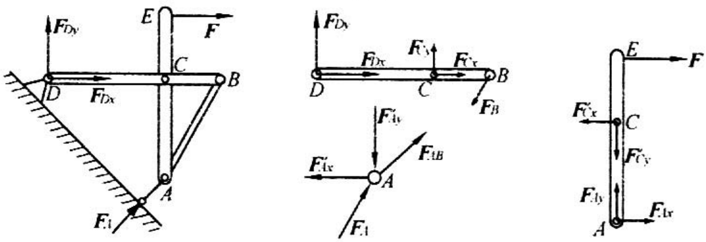
解 上述指定物体的受力图分别如下。



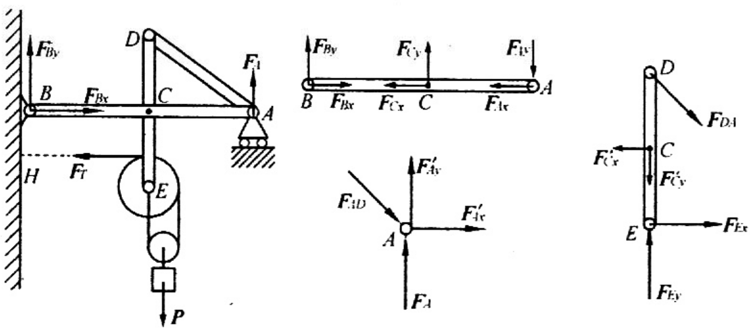
题 1.3(a)图



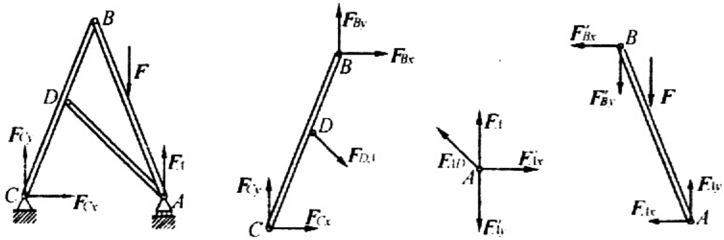
题 1.3(b)图



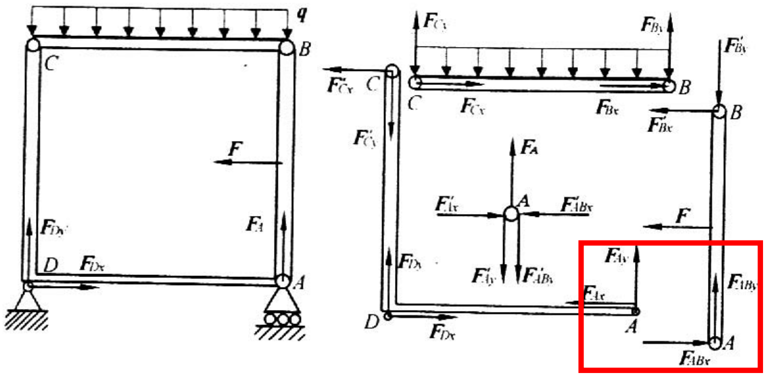
题 1.3(c)图



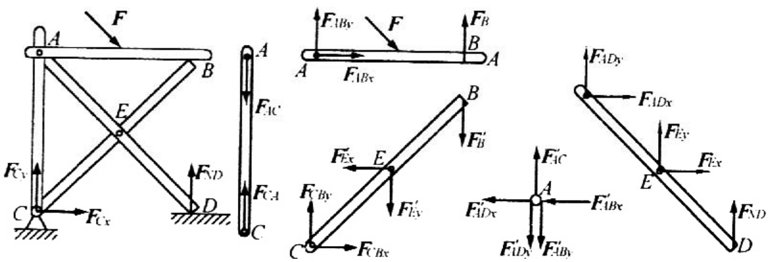
题 1.3(d)图



题 1.3(e)图



题 1.3(f)图



题 1.3(g)图

第二章　平面汇交力系与平面力偶系

2.1　已知　$F_1 = 100\ \mathrm{N}, F_2 = 50\ \mathrm{N}, F_3 = 50\ \mathrm{N}$；

求　力系的合力。

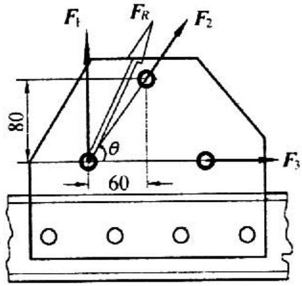
解　由解析法，有

$$F_{Rx} = \Sigma X = F_2\cos\theta + F_3 = 80\ \mathrm{N}$$

$$F_{Ry} = \Sigma Y = F_1 + F_2\sin\theta = 140\ \mathrm{N}$$

故　$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 161.2\ \mathrm{N}$

$$\angle(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{F}_1) = \arccos\frac{F_{Ry}}{F_R} = 29°44'$$



题 2.1 图

2.2　已知　$F_1 = 2\ 000\ \mathrm{N}$，$F_2 = 2\ 500\ \mathrm{N}, F_3 = 1\ 500\ \mathrm{N}$；

求　力系的合力。

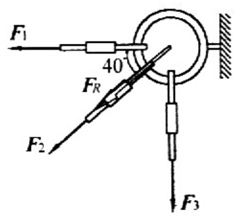
解　由解析法，有

$$F_{Rx} = \Sigma X = -F_1 - F_2\cos40° = -3\ 915\ \mathrm{N}$$

$$F_{Ry} = \Sigma Y = -F_2\sin40° - F_3 = -3\ 107\ \mathrm{N}$$

故　$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 5\ 000\ \mathrm{N}$

$$\angle(\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{F}_1) = \arccos\frac{F_{Rx}}{F_R} = 38°28'$$



题 2.2 图

2.3　已知　各力如图示；

求　力系合力。

解　由解析法，有

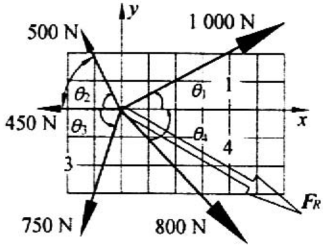
$$F_{Rx} = \Sigma X = 1\ 000\cos\theta_1 - 500\cos\theta_2 - 450 - 750\cos\theta_3 + 800\cos\theta_4$$
$$= 549.3\ \mathrm{N}$$

$F_{Ry} = \Sigma Y = 1\,000\sin\theta_1 + 500\sin\theta_2$

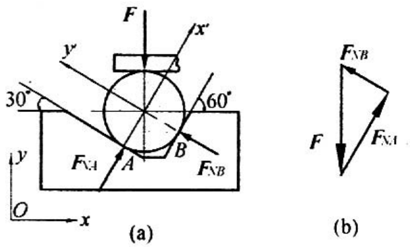
$- 750\sin\theta_3 - 800\sin\theta_4 = -382.8\ \mathrm{N}$

故 $$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 669.5\ \mathrm{N}$$

$$\angle(\boldsymbol{F}_R, x) = \arccos\frac{F_{Rx}}{F_R} = -34^\circ52'$$



题 2.3 图



题 2.4 图

2.4 已知 力 $F = 400$ N,不计工件自重;

求 工件对 V 形铁的压力。

解 工件受力如图(a),由

$\Sigma X = 0,\quad F_{NA}\cos60^\circ - F_{NB}\cos30^\circ = 0$

$\Sigma Y = 0,\quad F_{NA}\sin60^\circ + F_{NB}\cos60^\circ - F = 0$

或由

$\Sigma X' = 0,\quad F_{NA} - F\cos30^\circ = 0$

$\Sigma Y' = 0,\quad F_{NB} - F\sin30^\circ = 0$

解得 $F_{NA} = 200\sqrt{3} = 346.4\ \mathrm{N},\ F_{NB} = 200\ \mathrm{N}$

也可用几何法,画出封闭的力三角形如图(b)所示,解得此结果。工件对 V 形铁的压力与 $\boldsymbol{F}_{NA}$,$\boldsymbol{F}_{NB}$ 等值反向。

2.5 已知 $AB = AC = 2$ m,$BC = 1$ m,$P = 10$ kN;

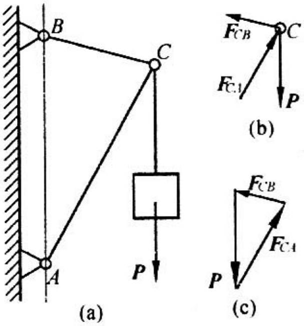
求 AC 与 BC 杆受力。

解 销钉 C 受力如图(b);其封闭的力三角形(图(c))与

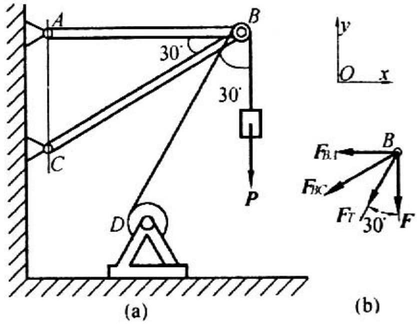
$\triangle ABC$ 相似，由

$$\frac{F_{CA}}{P}=\frac{AC}{AB}=1,\frac{F_{CB}}{P}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$$

解得
$$F_{CA}=10\ \text{kN(压)}$$
$$F_{CB}=5\ \text{kN(拉)}$$



题 2.5 图



题 2.6 图

2.6 已知 $P=20$ kN，不计杆重和滑轮尺寸；

求 杆 AB 与 BC 所受的力。

解 滑轮(图(b))上，$F=P$，

由 $\Sigma X=0$，$\Sigma Y=0$，分别有

$$-F_{BA}-F_{BC}\cos30^\circ-F_T\sin30^\circ=0$$
$$-F_{BC}\sin30^\circ-F_T\cos30^\circ-F=0$$

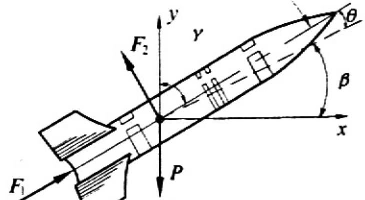
解得 $F_{BC}=-74.64$ kN(压)

$F_{BA}=54.64$ kN(拉)

2.7 已知 火箭匀速直线飞行，$F_1=100$ kN，$P=200$ kN，$\theta=5^\circ$，$\beta=25^\circ$；

求 空气动力 F_2 及角 γ。

解 由 $\Sigma X=0$，$\Sigma Y=0$，分



题 2.7 图

别有

$$F_1\cos30^\circ - F_2\cos(155^\circ - \gamma) = 0$$

$$F_1\sin30^\circ + F_2\sin(155^\circ - \gamma) - P = 0$$

解得 $\quad F_2 = 173.2\ \text{kN}, \gamma = 95^\circ$;

读者可再用几何法求解。

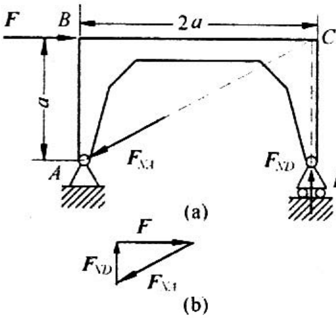
2.8 已知 水平力 $\boldsymbol{F}$,不计刚架重量;

求 支座 A、D 的反力。

解 刚架上三力汇交于点 C(图(a)),其封闭的力三角形(图(b))与△ABC 相似,故

$$\frac{F_{ND}}{F} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2},\ F_{ND} = \frac{1}{2}F$$

$$\frac{F_{NA}}{F} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2},\ F_{NA} = \frac{\sqrt{5}}{2}F(\swarrow)$$



题 2.8 图

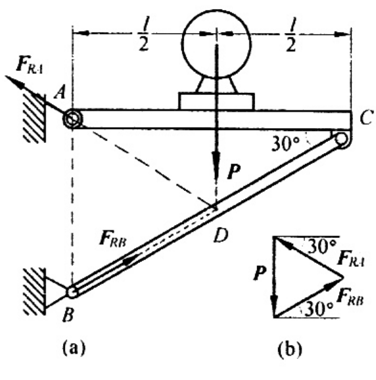
2.9 已知 $P = 5\ 000$ N,梁与撑杆自重不计;

求 BC 杆的内力及铰 A 的反力。

解 该系统受力如图(a),三力汇交于点 D,其封闭的力三角形如图(b),解得

$F_{BC} = 5\ 000\ \text{N}, F_{RA} = 5\ 000\ \text{N}$

读者可再用解析法求解。



题 2.9 图

2.10 已知 $P=400\ \mathrm{N}, AB=l=40\ \mathrm{m}, CD=f=1\ \mathrm{m}$；

求 图(a)电线中点和两端的拉力。

解 AC 段电线受力如图(b)，三力汇交于点 E；画封闭的力三角形如图(c)，图中

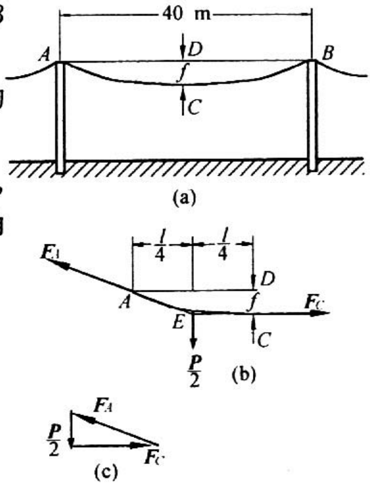
$$\tan\theta=\frac{4f}{l}=\frac{1}{10}$$

解此力三角形，得

$F_C=2\,000\ \mathrm{N}$，$F_A=2\,010\ \mathrm{N}$

因对称，故

$$F_B=F_A=2\,010\ \mathrm{N}$$



题 2.10 图

2.11 已知 $D=120\ \mathrm{mm}, p=6\ \mathrm{N/mm^2}, \alpha=30^\circ$，各杆自重不计；

求 机构的夹紧力 F。

解 销钉 B、滑块 C 受力如图示，图中 $F_1=6\pi\dfrac{D^2}{4}=21.6\pi$ kN，对销钉 B，由 $\Sigma X=0$，$\Sigma Y=0$，分别得

$$F_{BA}\cos 30^\circ-F_{BC}\cos 30^\circ=0$$

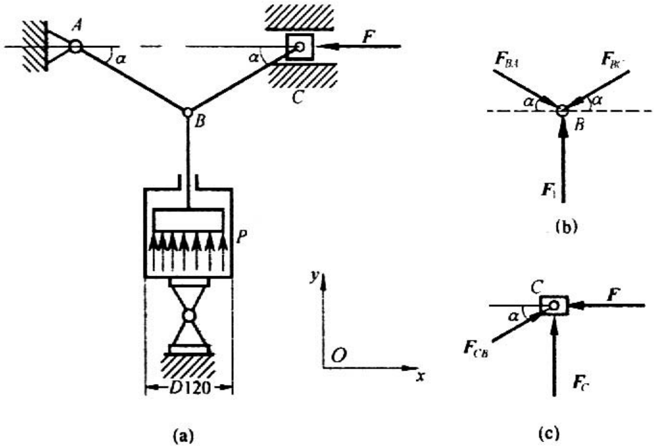
$$-F_{BA}\sin 30^\circ-F_{BC}\sin 30^\circ+F_1=0$$

解出 $$F_{BC}=F_{BA}=F_1$$

对滑块 C（图(c)），由

$$\Sigma X=0,\quad -F+F_{CB}\cos 30^\circ=0$$

得 $$F=58.76\ \mathrm{kN}$$



题 2.11 图

2.12 已知　力 F，各杆自重不计；

求　机构的压紧力 $\boldsymbol{F}_N$。

解　先研究滚轮 B，受力如图(b)所示，图中 $\boldsymbol{F}_{BA}=\boldsymbol{F}$，由

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{BC}\sin\theta - F = 0$$

得
$$F_{BC} = \frac{F}{\sin\theta}$$

再研究铰链 C，在 BC 轴上有

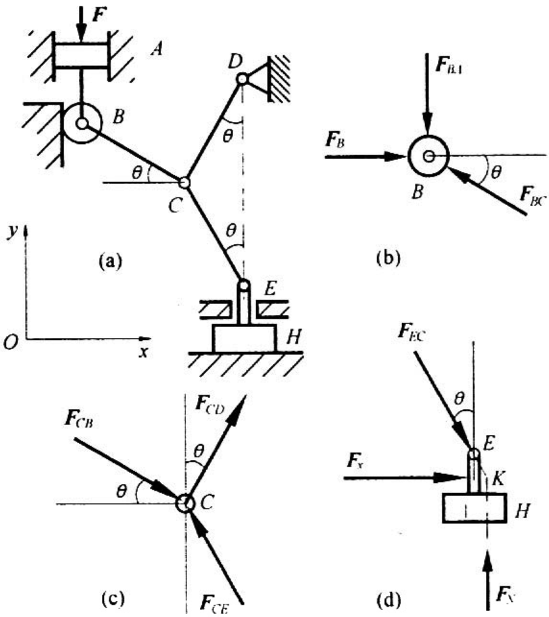
$$F_{CB} - F_{CE}\cos(90^{\circ} - 2\theta) = 0$$

解得
$$F_{CE} = \frac{F}{2\sin^2\theta\cos\theta}$$

最后研究工件 EH，三力相交于点 K，由

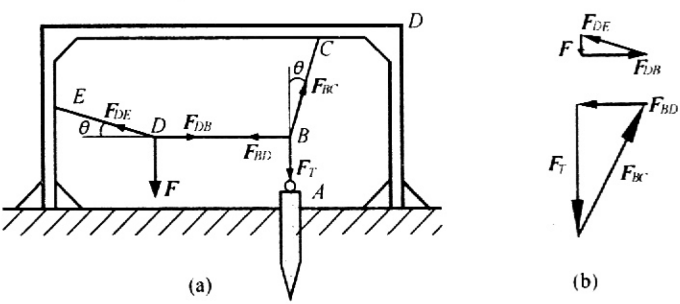
$$\Sigma Y = 0, \; F_N - F_{EC}\cos\theta = 0$$

得
$$F_N = \frac{F}{2\sin^2\theta}$$



题 2.12 图

2.13 已知　$F = 800$ N, $\theta = 0.1$ rad($\tan\theta \approx \theta$);
求　绳 AB 作用于桩上的拉力。



题 2.13 图

解　分别取结点 D、B 为研究对象，受力如图(a)，图中 $\boldsymbol{F}_{DB} = -\boldsymbol{F}_{BD}$，故可画封闭的力三角形如图(b)，解这两个力三角形，得

$$F_{DB} = \frac{F}{\tan\theta} = 8\ 000\ \text{N},\ F_T = \frac{F_{BD}}{\tan\theta} = 80\ \text{kN}$$

读者可再用解析法求解。

2.14　已知　力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$，杆重不计；

求　该机构在图(a)位置平衡时，力 F_1 与 F_2 的关系。

解　销钉 A 受力如图(b)，有

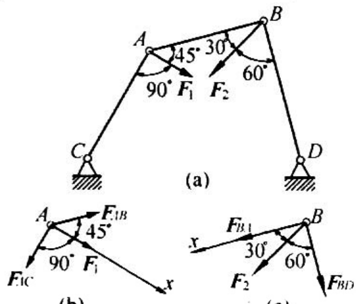
$$\Sigma X = 0,\quad F_{AB}\cos45^\circ + F_1 = 0$$

销钉 B 受力如图(c)，有

$$\Sigma X = 0,\quad F_{BA} + F_2\cos30^\circ = 0$$

式中 $F_{BA} = F_{AB}$，由此两式解得

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sqrt{6}}{4} = 0.6124$$



题 2.14 图

2.15　已知　三根钢管相同，均重 P；

求　$\theta = 90^\circ$、60°、30° 时，图(a)，槽底 A 处所受压力 F_N。

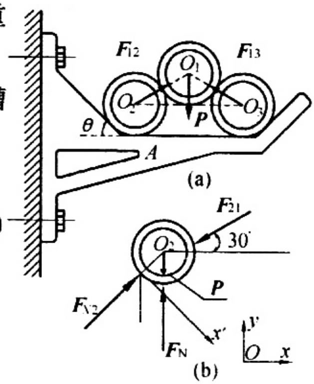
解　O_1 管受力如图(a)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{12}\cos30^\circ - F_{13}\cos30^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{12}\sin30^\circ + F_{13}\sin30^\circ - P = 0$$

解得　$F_{12} = F_{13} = P$

O_2 管受力如图(b)，对任意 θ 角，由



题 2.15 图

$$\Sigma X = 0,\ F_{N2}\sin\theta - F_{21}\cos 30^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\ F_{N2}\cos\theta + F_N - F_{21}\sin 30^\circ - P = 0$$

式中 $F_{21} = F_{12}$,解得 $F_N = (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\theta)P$

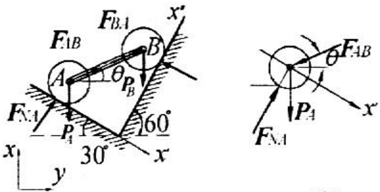
此答案也可通过将图(b)所示力系向 x' 轴投影列一个平衡方程而得到。所以, 当 $\theta = 90^\circ$ 时,$F_N = 1.5P$

当 $\theta = 60^\circ$ 时,$F_N = P$, 当 $\theta = 30^\circ$ 时,$F_N = 0$

2.16 已知 两轮各重 P_A 与 P_B,处于平衡状态,杆重不计;

求 1)若 $P_A = P_B = P$,角 $\theta = ?$

2) 若 $P_A = 300$ N,$\theta = 0^\circ$,$P_B = ?$



(a) (b)

题 2.16 图

解 A、B 两轮受力分别如图示,对 A 轮有

$$\Sigma X = 0,\quad F_{NA}\cos 60^\circ - F_{AB}\cos\theta = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{NA}\sin 60^\circ - F_{AB}\sin\theta - P_A = 0$$

对 B 轮有 $\Sigma X = 0,\quad F_{BA}\cos\theta - F_{NB}\cos 30^\circ = 0$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{BA}\sin\theta + F_{NB}\sin 30^\circ - P_B = 0$$

(1)四个方程联立求解,得 $\theta = 30^\circ$

(2) 把 $\theta = 0^\circ$,$P_A = 300$ N 代入方程,联立解得

$$P_B = 100 \text{ N}$$

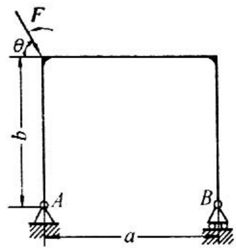
本题对轮 A、B 也可以分别列方程 $\Sigma X' = 0$ 和 $\Sigma X'' = 0$ 求解;若用几何法,且避开求解 F_{NA} 与 F_{NB},运算也比较简单,读者不妨一试。

2.17 已知 a、b、F、θ；

求 $M_A(\boldsymbol{F})$，$M_B(\boldsymbol{F})$。

解 $M_A(\boldsymbol{F}) = -F\cos\theta \cdot b = -Fb\cos\theta$

$$M_B(\boldsymbol{F}) = -F\cos\theta \cdot b + F\sin\theta \cdot a = F(a\sin\theta - b\cos\theta)$$



题 2.17 图

2.18 已知 扳手受力及尺寸如图；

求 (1)$\theta = 75^\circ$ 时，此力对螺钉中心 O 之矩；(2) 当 θ 角为何值时，该力矩的绝对值为最小；(3) 当 θ 角为何值时，该力矩为最大值。

解 (1)$\theta = 75^\circ$ 时，有

$$M_O(\boldsymbol{F}) = 80\sin\theta(250 + 30\cos 53.13^\circ) - 80\cos\theta \cdot 30\sin 53.13^\circ = 20.21\ \text{N} \cdot \text{m}$$

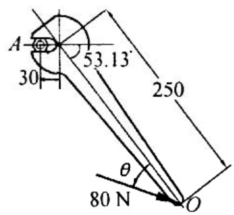
(2)当力沿 OA 作用时，$M_O(\boldsymbol{F}) = 0$，为最小，此时 由

$$\frac{\sin\theta}{30} = \frac{\sin(53.13^\circ - \theta)}{250}$$

得 $$\theta = 5.12^\circ$$

(3)当力垂直于 OA 时，$M_O(\boldsymbol{F})$ 最大，得此时

$$\theta = 90^\circ + 5.12^\circ = 95.12^\circ$$



题 2.18 图

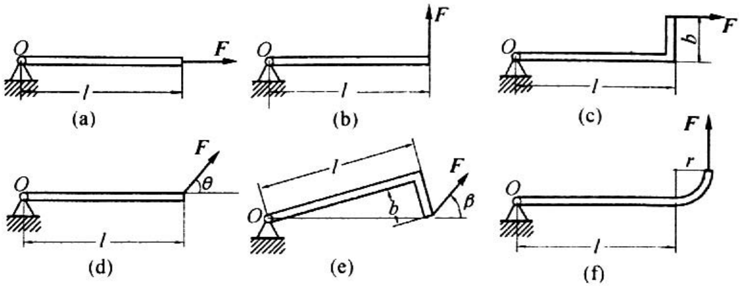
2.19 已知 力 F 与尺寸；

求 各种情况下的 $M_O(\boldsymbol{F})$。

解 (a) $M_O(\boldsymbol{F}) = 0$ (b) $M_O(\boldsymbol{F}) = Fl$

(c) $M_O(\boldsymbol{F}) = -Fb$ (d) $M_O(\boldsymbol{F}) = Fl\sin\theta$

(e) $M_O(\boldsymbol{F}) = F\sin\beta\sqrt{l^2 + b^2}$ (f) $M_O(\boldsymbol{F}) = F(l + r)$



题 2.19 图

2.20　已知　油桶重 1 500 N, $AB = 2.4$ m, $BC = 1.2$ m;
求　能将桶拉上汽车的最小拉力。

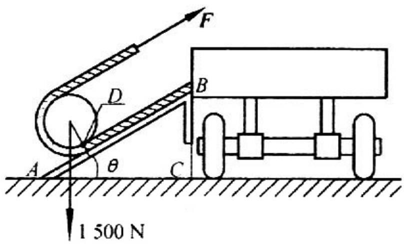
解　油桶受力如图,有

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$1\,500 r \sin\theta - F \cdot 2r = 0$$

式中　$\sin\theta = \dfrac{1.2}{2.4} = \dfrac{1}{2}$

解得　$F = 375$ N



题 2.20 图

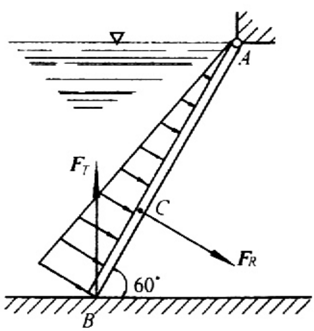
2.21　已知　水压力合力 $F_R = 16\,974$ N, $AC = \dfrac{4}{3}$ m;
求　能拉开闸门的最小铅直力 F_T。

解　闸门受力如图,由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,$$

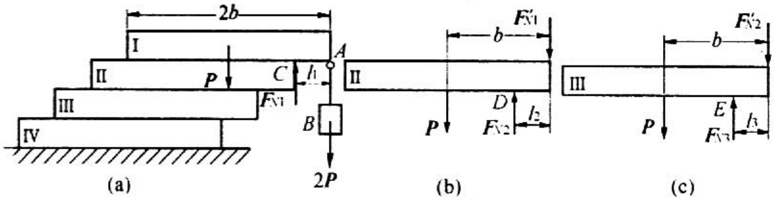
$$\frac{4}{3} F_R - 2F_T \cos 60^\circ = 0$$

得　$F_T = 22.63$ kN



题 2.21 图

2.22 已知 均质板各重 P,重物 B 重为 $2P$,叠放如图(a);
求 平衡时,每块板可伸出的最大距离。



题 2.22 图

解 依次研究板Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ;受力如图(a)、(b)、(c);分别有

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\quad P(b - l_1) - 2Pl_1 = 0$$

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,\quad P(b - l_2) - F'_{N1} l_2 = 0$$

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0,\quad P(b - l_3) - F'_{N2} l_3 = 0$$

式中 $F'_{N1} = 3P$, $F'_{N2} = 4P$;解得 $l_1 = \dfrac{b}{3}$, $l_2 = \dfrac{b}{4}$, $l_3 = \dfrac{b}{5}$

设 n 为板的数目,以此类推可得 $l_n = \dfrac{b}{n+2}$

2.23 已知 $F_{T1} = 400\ \text{N}, F_{T2} = 300\ \text{N}$;
求 合力偶矩。
解 两力偶的矩分别为

$$M_1 = 400\sin 60^\circ \cdot 240 + 400\cos 60^\circ \cdot 200 = 123\ 138\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

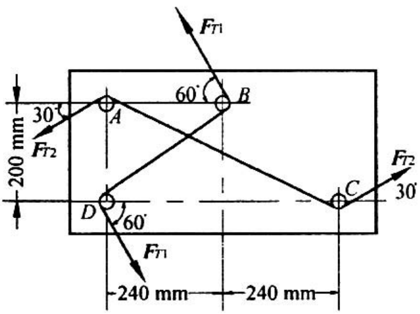
$$M_2 = 300\sin 30^\circ \cdot 480 + 300\cos 30^\circ \cdot 200 = 123\ 962\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

合力偶矩为 $M = M_1 + M_2 = 247.1\ \text{N}\cdot\text{m}$(逆时针转向)

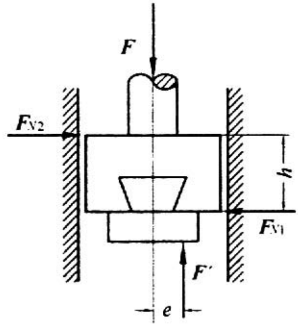
2.24 已知 $F = F' = 1\ 000\ \text{kN}, e = 20\ \text{mm}, h = 200\ \text{mm}$;
求 锤头加给两侧导轨的压力。
解 锤头受力如图,这是个力偶系的平衡问题,

由 $$\Sigma M_i = 0,\quad Fe - F_{N1}h = 0$$

解得 $$F_{N1} = F_{N2} = 100\ \text{kN}$$



题 2.23 图



题 2.24 图

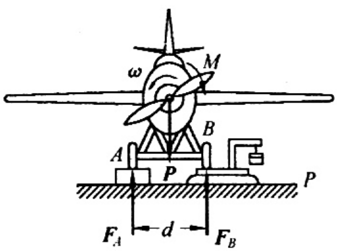
2.25 已知 $d = 2.5$ m，螺旋桨不转时地秤的读数为 $F_{B1} = 4.6$ kN，螺旋桨旋转时地秤的读数为 $F_{B2} = 6.4$ kN；

求 螺旋桨受的空气阻力偶矩 $M_{阻}$。

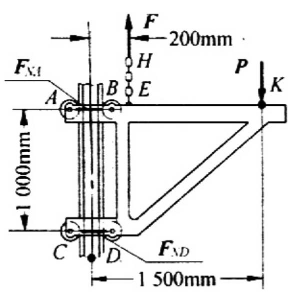
解 飞机受力如图，F_{B1} 为飞机自重作用在地秤上的力，故飞机自重为 $P = 2F_{B1}$；F_{B2} 是飞机自重与空气阻力偶矩 $M_{阻}$ 同时作用在地秤上的力，由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{B2}d - P\frac{d}{2} - M_{阻} = 0$$

得
$$M_{阻} = (F_{B2} - F_{B1})d = 4.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



题 2.25 图



题 2.26 图

2.26 已知 起落架及其载荷总重 $P = 9\ \mathrm{kN}$,不计摩擦;

求 平衡时钢索的拉力和导轮 A、D 的 约束反力。

解 起落架(包括导轮)受力如图,为一力偶系,故

$$F = P = 9\ \mathrm{kN}$$

由

$$\Sigma M_i = 0,$$

$$1\,000 F_{NA} - 1\,300 P = 0$$

得

$$F_{NA} = F_{ND} = 11.7\ \mathrm{kN}$$

2.27 已知 M,无重梁长 l;

求 (a)、(b)、(c)三图的支座反力。

解 AB 梁受力如各图所示,由 $\Sigma M_i = 0$,对图(a)、(b)有

$$F_{RA} l - M = 0$$

得

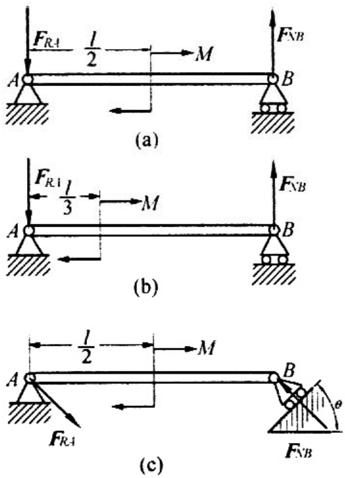
$$F_{RA} = F_{NB} = \frac{M}{l}$$

对图(c)有

$$F_{RA} l \cos\theta - M = 0$$

得

$$F_{RA} = F_{NB} = \frac{M}{l\cos\theta}$$



题 2.27 图

2.28 已知 a 和 M,杆重不计;

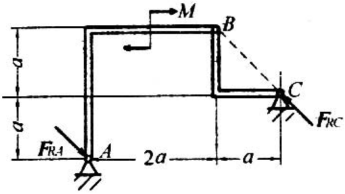
求 支座 A 和 C 的约束反力。

解 整体受力如图,注意 BC 杆为二力杆,由

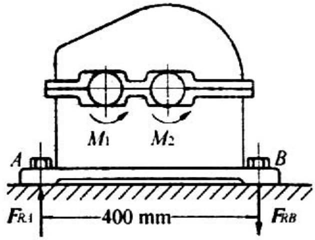
$$\Sigma M_i = 0,\quad 2\sqrt{2}aF_{RA} - M = 0$$

解得

$$F_{RA} = F_{RB} = F_{RC} = \frac{M}{2\sqrt{2}a}$$



题 2.28 图



题 2.29 图

2.29 已知　$M_1 = 2\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}, M_2 = 1\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}$；

求　由力偶 M_1、M_2 引起的螺钉的约束反力。

解　减速箱受力如图，由

$$\Sigma M_i = 0,\ M_1 + M_2 - 0.4F_{RA} = 0$$

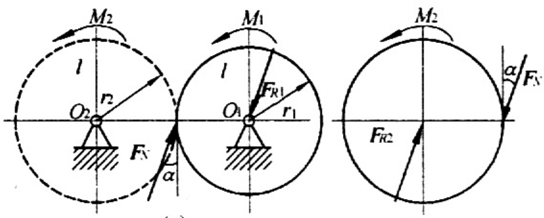
解得

$$F_{RA} = 7\ 500\ \text{N}(\text{向上})$$

$$F_{RB} = 7\ 500\ \text{N}(\text{向下})$$

2.30 已知　r_1、r_2、M_1、压力角 α，不计各轮自重；

求　平衡时 M_2 及 O_1、O_2 处的反力。



(a)　　(b)

题 2.30 图

解　两轮受力如图(a)、(b)，由 $\Sigma M_i = 0$，分别有

$$M_1 - F_{R1}r_1\cos\alpha = 0,\quad M_2 - F_{R2}r_2\cos\alpha = 0$$

解得

$$F_{R1} = \frac{M_1}{r_1\cos\alpha}(\swarrow),\ M_2 = \frac{r_2}{r_1}M_1,\ F_{R2} = \frac{M_1}{r_1\cos\alpha}(\nearrow)$$

2.31 已知 $OA=0.4\ \text{m}, O_1B=0.6\ \text{m}, M_1=1\ \text{N}\cdot\text{m}$；不计杆自重；

求 M_2 及 AB 杆受力。

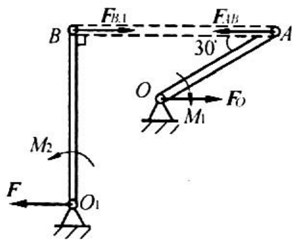
解 OA 和 O_1B 分别受力如图，由 $\Sigma M_i=0$，分别有

$$F_{AB}\cdot OA\sin 30^\circ - M_1 = 0$$

$$M_2 - F_{BA}\cdot O_1B = 0$$

解得 $F_{AB}=5\ \text{N}$(拉)

$M_2 = 3\ \text{N}\cdot\text{m}$



题 2.31 图

2.32 已知 $M=40\ \text{kN}\cdot\text{m}$，尺寸如图(a)所示；

求 支座 A、B 处的约束反力及 EC 杆受力。

解 整体受力如图(a)，为一力偶系，由

$$\Sigma M_i = 0,$$

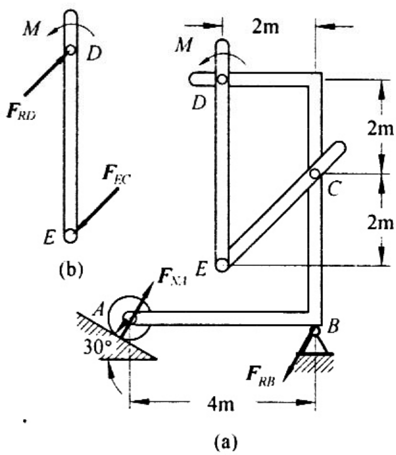
$$M - F_{NA}4\sin 60^\circ = 0$$

得 $F_{NA}=F_{RB}=\dfrac{20}{\sqrt{3}}\ \text{kN}$

DE 杆受力如图(b)，也为一力偶系，由

$\Sigma M_i = 0$，$M - F_{EC}4\sin 45^\circ = 0$

得 $F_{EC}=10\sqrt{2}\ \text{kN}$(压)

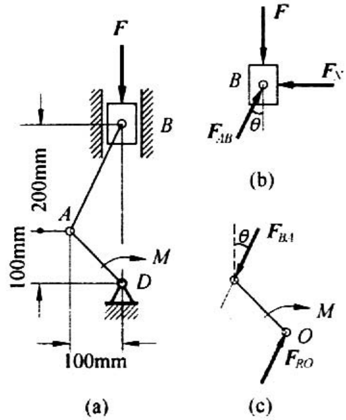


题 2.32 图

2.33 已知 $F=400\ \text{N}$，尺寸如图；

求 若系统此时平衡，力偶矩 $M=?$

解 滑块 B 受平面汇交力系作用如图(b)，由



题 2.33 图

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{AB}\cos\theta - F = 0,$$

得
$$F_{AB} = 200\sqrt{5}\ \mathrm{N}$$

对 OA 杆,图(c),由

$$\Sigma M_i = 0,\ 100F_{BA}\sin\theta + 100F_{BA}\cos\theta - M = 0$$

或
$$F_{BA}\cdot OA\cos(45^\circ + \theta) - M = 0$$

解得
$$M = 60\ \mathrm{N\cdot m}$$

2.34 已知 M, l;各杆自重不计;

求 A 处的约束反力。

解 物体 BC 受力如图(a),由

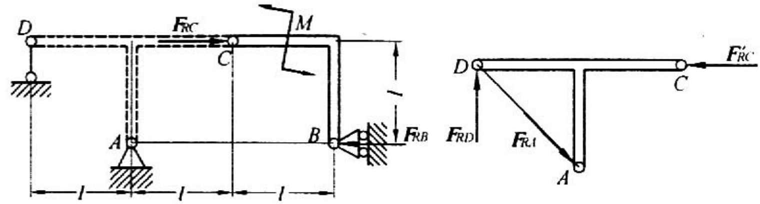
$$\Sigma M_i = 0, \quad M - F_{RC}l = 0$$

得
$$F_{RC} = \frac{M}{l}$$

对物体 ADC (图(b)),由

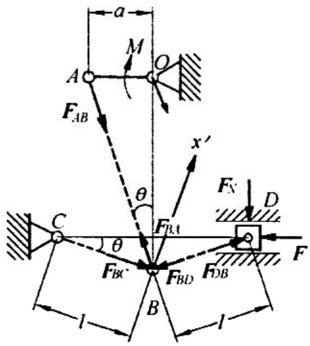
$$\Sigma X = 0, \quad F_{RA}\cos45^\circ - F_{RC} = 0$$

得
$$F_{RA} = \sqrt{2}\,\frac{M}{l}(\searrow)$$



(a) (b)

题 2.34 图



(a)

题 2.35 图

2.35 已知 θ、M、F，各杆自重不计；

求 机构平衡时，M 与 F 之间的关系。

解 先研究滑块 D，受力如图，由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{DB}\cos\theta - F = 0$$

得
$$F_{DB} = \frac{F}{\cos\theta}$$

再研究销钉 B，有

$$\Sigma X = 0, \quad F_{BC}\cos\theta - F_{BD}\cos\theta - F_{BA}\sin\theta = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad -F_{BC}\sin\theta - F_{BD}\sin\theta + F_{BA}\cos\theta = 0$$

把 $F_{BD} = \dfrac{F}{\cos\theta}$ 代入，解得 $\quad F_{BA} = \dfrac{2F\sin\theta}{\cos 2\theta}$

（或者，由 $\Sigma X' = 0$，$F_{BA}\cos 2\theta - F_{BD}\sin 2\theta = 0$，解出 F_{BA}）

最后研究 OA 杆，受力如图，由

$$\Sigma M_i = 0, \quad F_{AB}a\cos\theta - M = 0$$

解得
$$F = \frac{M}{a}\cot 2\theta$$

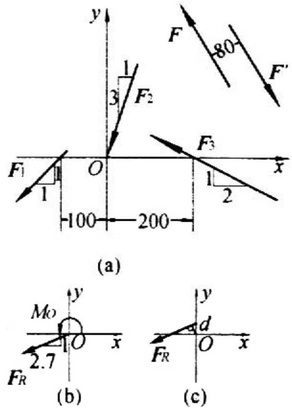
第三章　平面任意力系

3.1　已知　图(a)力系中，$F_1 = 150$ N,$F_2 = 200$ N,$F_3 = 300$ N,$F = F' = 200$ N;

求　力系向点 O 简化的结果;合力的大小及其与原点的距离。

解　$\Sigma X = -F_1\cos45^\circ - F_2\dfrac{1}{\sqrt{10}} - F_3\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -437.6$ N

$\Sigma Y = -F_1\sin45^\circ - F_2\dfrac{3}{\sqrt{10}} + F_3\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -161.6$ N



(a)　(b)　(c)

题 3.1 图

$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = F_1\sin45^\circ\,0.1 + F_3\dfrac{1}{\sqrt{5}}0.2 - 0.08F = 21.44\ \text{N}\cdot\text{m}$

得向点 O 简化的结果如图(b);合力如图(c);图中

$F_R' = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2} = 466.5$ N,$M_O = 21.44\ \text{N}\cdot\text{m}$

合力 $F_R = F_R' = 466.5$ N ,而 $d = \dfrac{M_O}{F_R} = 45.96$ mm

3.2　已知　$F_1 = 40\sqrt{2}$ N,$F_2 = 80$ N,$F_3 = 40$ N,$F_4 = 110$ N,$M = 2\,000\ \text{N}\cdot\text{mm}$;

求　力系向点 O 的简化结果;合力的大小、方向及合力作用线方程。

解　$F_{Rx} = \Sigma X = F_1\cos45^\circ - F_2 - F_4 = -150$ N

$F_{Ry} = \Sigma Y = F_1\sin45^\circ - F_3 = 0$

得 $F_R' = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2} = 150\ \mathrm{N}$

$$M_O = \Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 30F_2 + 50F_3 - 30F_4 - M = -900\ \mathrm{N\cdot mm}$$

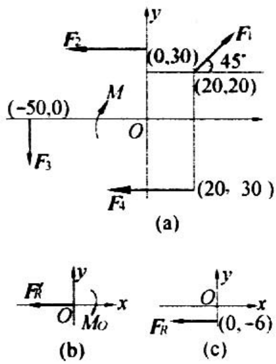
向 O 点简化结果如图(b)；合力如图(c)，其大小与方向为

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_R' = -150\boldsymbol{i}\ \mathrm{N}$$

设合力作用线上一点坐标为 (x, y)，则

$$M_O(\boldsymbol{F}_R) = M_O = xF_{Ry} - yF_{Rx}$$

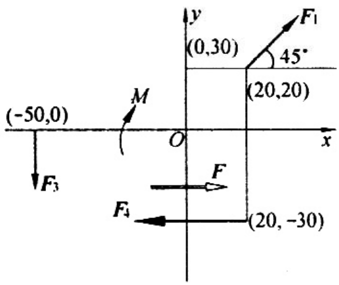
将 M_O、F_{Ry} 和 F_{Rx} 代入此式，即得合力作用线方程为 $\quad y = -6\ \mathrm{mm}$



题 3.2 图

3.3 已知 $\quad F_1 = 40\sqrt{2}\ \mathrm{N}$，$F_3 = 40\ \mathrm{N}$，$F_4 = 110\ \mathrm{N}$，$M = 2\,000\ \mathrm{N\cdot mm}$，它们与力 F 的合力 $\boldsymbol{F}_R = 150\boldsymbol{i}\ \mathrm{N}$，且过 O 点；

求 $\quad$ 力 $\boldsymbol{F}$ 的大小、方向及作用线方程。



题 3.3 图

解 $\quad$ 设 $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$

$$\Sigma X = F_1\cos 45^\circ + F_x - F_4 = 150$$

$$\Sigma Y = F_1\sin 45^\circ + F_y - F_3 = 0$$

解此方程组，可得

$$F_y = 0,\ F = F_x = 220\ \mathrm{N}$$

又设 (x, y) 是力 $\boldsymbol{F}$ 作用线上的一点，由

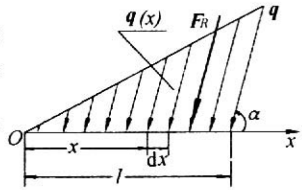
$$M_O = \Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x + 50F_3 - 30F_4 - M = 0$$

解得 $y = -15\ \mathrm{mm}$，故力 $\boldsymbol{F}$ 如图所示。

3.4 已知 q, l, α；

求 合力大小及作用线位置。

解 这是平行力系，故其合力 F_R 与原力系平行，设它与 x 轴交于x_C，在 x 处取微元，因 $q_x = \frac{q}{l}x$，故积分可得合力大小为



题 3.4 图

$$F_R = \int_o^l q_x \mathrm{d}x = \int_o^l \frac{q}{l}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ql$$

取 O 点为矩心，应用合力矩定理，有

$$F_R \sin\alpha \cdot x_C = \int_o^l q_x \cdot x \sin\alpha \mathrm{d}x$$

解得
$$x_C = \frac{2}{3}l$$

3.5 已知 各力在 x、y 轴的投影及作用点坐标如表所示；

求 该力系向坐标原点O简化的结果及合力作用线方程。

	$\boldsymbol{F}_1$	$\boldsymbol{F}_2$	$\boldsymbol{F}_3$	$\boldsymbol{F}_4$
X	1	−2	3	−4
Y	4	1	−3	−3
x(mm)	200	−200	300	−400
y(mm)	100	−100	−300	−600

解 力系的主矢与主矩分别为

$$F'_{Rx} = \Sigma X = 1 - 2 + 3 - 4 = -2 \text{ N}$$

$$F'_{Ry} = \Sigma Y = 4 + 1 - 3 - 3 = -1 \text{ N}$$

$$F'_R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2} = \sqrt{5} \text{ N}$$

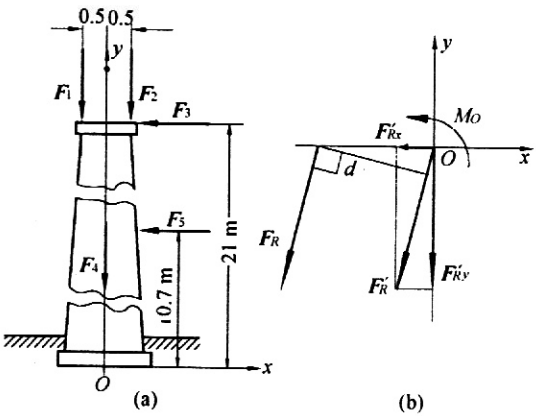
$$\begin{aligned} M_O = \Sigma M_O(\boldsymbol{F}) &= \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) \\ &= (200 \cdot 4 - 100 \cdot 1) + [-200 \cdot 1 - (-100) \cdot (-2)] \\ &\quad + [300 \cdot (-3) - (-300) \cdot 3] \end{aligned}$$

$$+[(-400)\cdot(-3)-(-600)\cdot(-4)]$$
$$=-900\ \mathrm{N\cdot mm}=-0.9\ \mathrm{N\cdot m}$$

设合力作用线上任一点的坐标为 (x,y)，则合力对 O 点之矩可写为
$$M_O(\boldsymbol{F}_R)=xF_{Ry}-yF_{Rx}$$
式中 $M_O(\boldsymbol{F}_R)=M_O, F_{Rx}=F'_{Rx}, F_{Ry}=F'_{Ry}$，故将前面求出的 F'_{Rx}, F'_{Ry} 和 M_O，代入上式，有
$$-900=x(-1)-y(-2)$$
故合力作用线方程为 $\quad x-2y-900=0$

3.6 已知 $F_1=1\ 940\ \mathrm{kN}, F_2=800\ \mathrm{kN}, F_3=193\ \mathrm{kN}, F_4=5\ 280\ \mathrm{kN}, F_5=140\ \mathrm{kN}$，各力作用位置如图(a)；

求 力系向 O 点简化结果；若能简化为一合力，求合力作用线位置。



题 3.6 图

解 向 O 点简化
$$M_O=\Sigma M_O(\boldsymbol{F})$$
$$=0.5F_1-0.5F_2+21F_3+10.7F_5=6\ 121\ \mathrm{kN\cdot m}$$
$$\Sigma X=-F_3-F_5=-333\ \mathrm{kN}$$

$$\Sigma Y = -F_1 - F_2 - F_4 = -8\ 020\ \text{kN}$$

$$F_R' = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2} = 8\ 027\ \text{kN},\ \alpha = \arctan\frac{F'_{Rx}}{F'_R} = 267.6°$$

因该平面力系的主矢不为零，故有合力存在，其大小与方向为

$$F_R = F_R' = 8\ 027\ \text{kN},\quad \angle(\boldsymbol{F}'_R, \boldsymbol{i}) = 267.6°$$

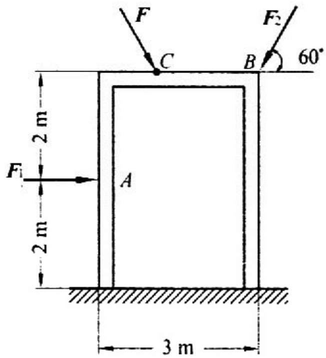
设合力与 x 轴的交点为$(x,0)$，则由

$$M_O = xF_{Ry} = x\Sigma Y$$

得 $6\ 121 = -8\ 020x$，解出 $x = -0.763$ m，即力 $\boldsymbol{F}$ 在O 点左边，见图(b)。

3.7 已知 $F_1 = F_2 = 10$ kN;

求 在 C 点与此二力等效的力 $\boldsymbol{F}$ 的大小、方向及 BC 间的距离。



题 3.7 图

解 力 $\boldsymbol{F}$ 是$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的合力，故

$$M_C(\boldsymbol{F}) = M_C(\boldsymbol{F}_1) + M_C(\boldsymbol{F}_2)$$

即 $0 = 2F_1 - BC \cdot F_2 \sin 60°$

又

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$= F_1 - F_2\cos 60° = 5\ \text{kN}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = -5\sqrt{3}$$

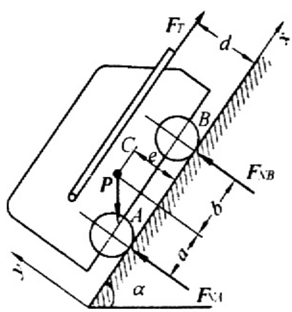
解得 $BC = 2.31$ m

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10\ \text{kN}$$

$$\theta = \arctan\left|\frac{F_y}{F_x}\right| = 60°$$

3.8 已知 $P = 240$ kN, $a = 1$ m, $b = 1.4$ m, $e = 1$ m, $d = 1.4$ m, $\alpha = 55°$;

求 钢索的拉力和轨道的支反力。



题 3.8 图

解 小车受力如图，由

$$\Sigma X = 0,\ F_T - P\sin\alpha = 0$$

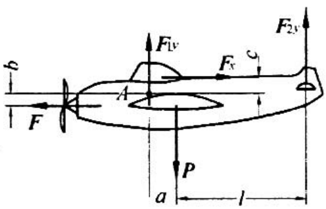
$$\Sigma Y = 0,\ F_{NA} + F_{NB} - P\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\ F_{NB}(a+b) - F_T d + eP\sin\alpha - aP\cos\alpha = 0$$

解得 $\underline{F_T = 196.6\ \text{kN}}$，$\underline{F_{NB} = 90.12\ \text{kN}}$，$\underline{F_{NA} = 47.54\ \text{kN}}$

3.9 已知 $P = 30$ kN，$F = 4$ kN，$a = 0.2$ m，$b = 0.1$ m，$c = 0.05$ m，$l = 5$ m；

求 飞机匀速航行时，阻力 F_x，机翼升力 F_{1y} 尾部升力 F_{2y}。



题 3.9 图

解 飞机受力如图所示，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_x - F = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{1y} + F_{2y} - P = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad (a+l)F_{2y} - Pa - Fb - F_x c = 0$$

解得 $\underline{F_x = 4\ \text{kN}}$，$\underline{F_{1y} = 28.73\ \text{kN}}$，$\underline{F_{2y} = 1.269\ \text{kN}}$

3.10 已知 P_1, P_2, a, b, c；

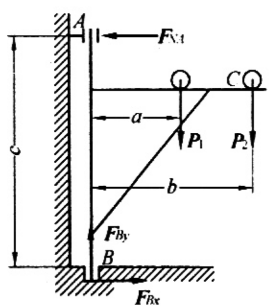
求 轴承 A、B 处的支座反力。

解 起重机受力如图，由

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{NA}c - P_1 a - P_2 b = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad -F_{NA} + F_{Bx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{By} - P_1 - P_2 = 0$$



题 3.10 图

解得 $\underline{F_{NA} = F_{Bx} = \dfrac{P_1 a + P_2 b}{c}}$

$\underline{F_{By} = P_1 + P_2}$

3.11 已知 起重机轴上 C 处有一凸台阻止构架下滑,尺寸如图,重力 $P = 10$ kN;

求 B、C 处的约束反力。

解 起重机受力如图,由

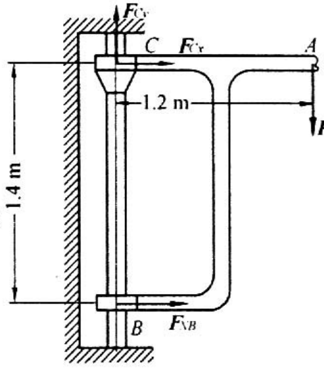
$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\ 1.4F_{NB} - 1.2P = 0$

$\Sigma X = 0,\ F_{Cx} + F_{NB} = 0$

$\Sigma Y = 0,\ F_{Cy} - P = 0$

解得 $F_{NB} = 8.571$ kN

$F_{Cx} = -8.571$ kN, $F_{Cy} = 10$ kN



题 3.11 图

3.12 已知 p N/m, F, l;

求 梁根部的支反力。

解 梁受力如图,由

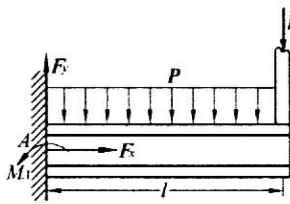
$\Sigma X = 0,\ F_x = 0$

$\Sigma Y = 0,\ F_y - pl - F = 0$

$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, M_A - pl\,\dfrac{l}{2} - Fl = 0$

解得 $F_R = F_y = F + pl$

$M_A = l(F + \dfrac{1}{2}pl)$



题 3.12 图

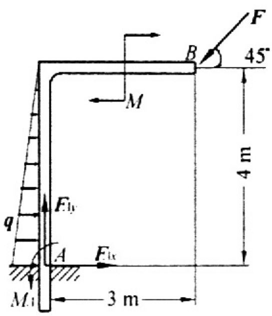
3.13 已知 $q = 3$ kN/m, $F = 6\sqrt{2}$ kN, $M = 10$ kN · m, 尺寸如图;

求 固定端 A 处的约束力。

解 刚架受力如图,由

$\Sigma X = 0,\ F_{Ax} + \dfrac{1}{2}q \cdot 4 - F\cos 45^\circ = 0$

$\Sigma Y = 0,\ F_{Ay} - F\sin 45^\circ = 0$



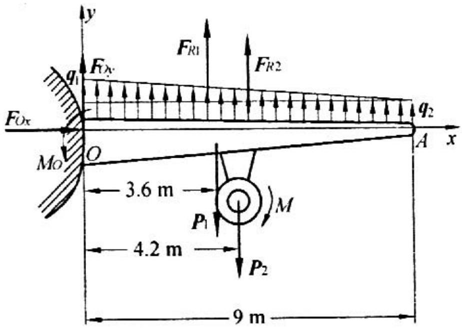
题 3.13 图

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, M_A - \frac{1}{2}q \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} - M - 3F\sin 45^\circ + 4F\cos 45^\circ = 0$$

分别解得 $F_{Ax} = 0$，$F_{Ay} = 6\ \mathrm{kN}$，$M_A = 12\ \mathrm{kN \cdot m}$

3.14 已知 $q_1 = 60\ \mathrm{kN/m}$，$q_2 = 40\ \mathrm{kN/m}$，$P_1 = 45\ \mathrm{kN}$，$P_2 = 20\ \mathrm{kN}$，$M = 18\ \mathrm{kN \cdot m}$，尺寸如图所示；

求 机翼根部固定端 O 的约反力。



题 3.14 图

解 研究机翼，把梯形载荷分解为一三角形载荷与一矩形载荷，其合力分别为

$$F_{R1} = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \cdot 9 = 90\ \mathrm{kN}, \quad F_{R2} = 9 \cdot q_2 = 360\ \mathrm{kN}$$

分别作用在距离 O 点 3 m 与 4.5 m 处，如图所示，由

$\Sigma X = 0$，$F_{Ox} = 0$

$\Sigma Y = 0$，$F_{Oy} - P_1 - P_2 + F_{R1} + F_{R2} = 0$

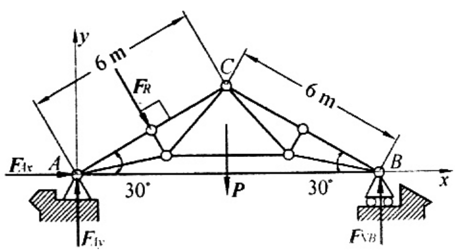
$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0$，$M_O - 3.6P_1 - 4.2P_2 - M + 3F_{R1} + 4.5F_{R2} = 0$

解得 $F_{Ox} = 0$，$F_{Oy} = -385\ \mathrm{kN}$，$M_O = -1\ 626\ \mathrm{kN \cdot m}$

3.15 已知 屋架重 $P = 100\ \mathrm{kN}$，风力合力为 $F_R = 8\ \mathrm{kN}$；

求 支座反力。

解 研究屋架，由



题 3.15 图

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_R\cos60^\circ = 0$$

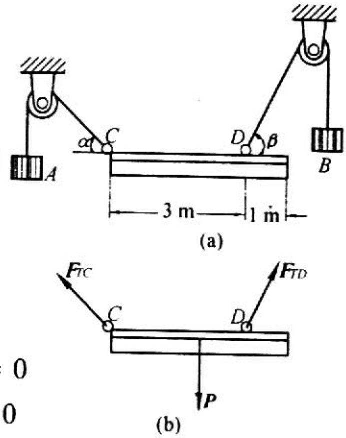
$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - P - F_R\sin60^\circ + F_{NB} = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 2F_{NB}\cdot 6\cos30^\circ - 6P\cos30^\circ - 3F_R = 0$$

解得 $F_{Ax} = -4\ \text{kN}$,

$F_{Ay} = 54.62\ \text{kN}$,

$F_{NB} = 52.31\ \text{kN}$



题 3.16 图

3.16 已知 梁重 $P = 5\ 000$ N,长为 4 m,$\alpha = 45^\circ$ 图(a);

求 梁保持平衡时的 β 角及 A 与 B 的重量。

解 CD 梁受力如图(b),由

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,\ P\cdot 1 - 3F_{TC}\sin\alpha = 0$$

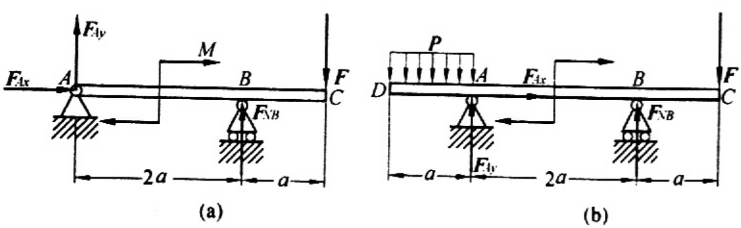
$$\Sigma X = 0,\quad F_{TD}\cos\beta - F_{TC}\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{TD}\sin\beta + F_{TC}\sin\alpha - P = 0$$

解得 $P_A = F_{TC} = 2\ 357\ \text{N}$, $\beta = 63^\circ26'$, $P_B = F_{TD} = 3\ 727\ \text{N}$

3.17 已知 F, M, p, a;

求 分别在图(a)、图(b)情况下,支座 A、B 处的约束反力。



题 3.17 图

解 水平梁受力分别如图(a)、(b)所示,对图(a),由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} + F_{NB} - F = 0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\ -2aF_{Ay} - M - Fa = 0$$

解得 $F_{Ay} = -\frac{1}{2}(F + \frac{M}{a})$，$F_{Ax} = 0$，$F_{NB} = \frac{1}{2}(3F + \frac{M}{a})$

对图(b)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - pa + F_{NB} - F = 0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad pa\frac{5}{2}a - 2aF_{Ay} - M - Fa = 0$$

解得

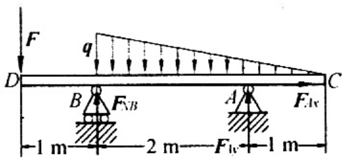
$$F_{Ay} = -\frac{1}{2}(F + \frac{M}{a} - \frac{5}{2}pa)$$

$$F_{Ax} = 0, F_{NB} = \frac{1}{2}(3F + \frac{M}{a} - \frac{1}{2}pa)$$

3.18 已知 $F = 2\ 000$ N，$q = 1\ 000$N/m，尺寸如图所示；

求 支座反力。

解 梁受力如图，由



题 3.18 图

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{NB} - F + F_{Ay} - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot q = 0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 1\cdot F + 2\cdot F_{Ay} - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot q\cdot 1 = 0$$

解得 $F_{Ax} = 0$，$F_{Ay} = -250$ N，$F_{NB} = 3\ 750$ N

3.19 已知 $P = 10$ kN，$P_1 = 50$ kN，$P_2 = 30$ kN；

求 支座 A、B 的反力。

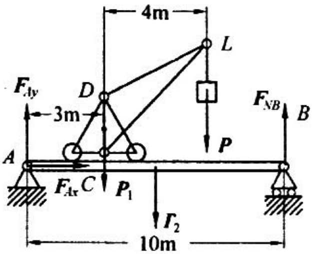
解 整体受力如图，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} = 0$$

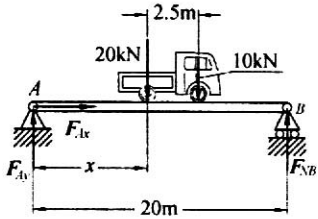
$$\Sigma Y=0,\quad F_{Ay}-P_1-P_2-P+F_{NB}=0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad -10F_{Ay}+7P_1+5P_2+3P=0$$

解得 $\quad F_{Ax}=0, F_{Ay}=53\ \text{kN}, F_{NB}=37\ \text{kN}$



题 3.19 图



题 3.20 图

3.20 已知 汽车前轮压力为 10 kN,后轮压力为 20 kN,汽车前后两轮间距为 2.5 m,桥长 20 m ,桥重不计;

求 后轮到 A 支座距离 x 为多大时,支座 A、B 受力相等。

解 选桥为研究对象,受力如图

$$\Sigma X=0,\quad F_{Ax}=0$$

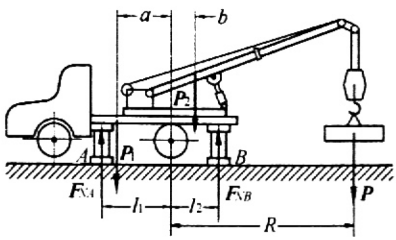
$$\Sigma Y=0,\quad F_{Ay}+F_{NB}-20-10=0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad 20F_{NB}-20x-10(x+2.5)=0$$

令 $F_{Ay}=F_{NB}$,解得 $\quad F_{Ay}=F_{NB}=15\ \text{kN}, x=9\dfrac{1}{6}\ \text{m}$

3.21 已知 $P_1=60$ kN, $P_2=20$ kN, $a=1.4$ m, $b=0.4$ m, $l_1=1.85$ m, $l_2=1.4$ m;

求 (a) 当 $R=3$ m 时,起吊重量 $P=50$ kN 时,支撑腿 A、B 所受地面的支持力;



题 3.21 图

(b)当 $R=5$ m 时，为保证起重机不翻倒，最大起重量为多少？

解 (a)取整体为研究对象，受力如图，由

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad P_1(l_2+a)+P_2(l_2-b)-F_{NA}(l_1+l_2)-P(R-l_2)=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad F_{NA}-P_1-P_2-P+F_{NB}=0$$

解得 $F_{NA}=33.23\ \text{kN},\ F_{NB}=96.77\ \text{kN}$

(b)当 $R=5$ m 时，为使起重机不翻倒，需同时满足

$F_{NA}\geqslant 0$ 和

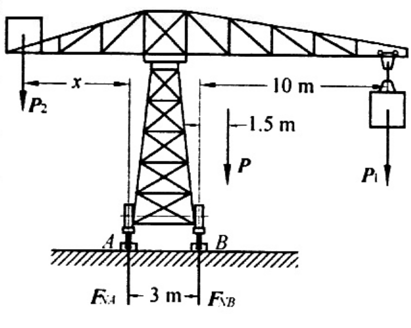
$\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0$,

$$P_1(l_2+a)+P_2(l_2-b)-P(R-l_2)-F_{NA}(l_1+l_2)=0$$

解得 $P\leqslant\dfrac{P_1(l_2+a)+P_2(l_2-b)}{(R-l_2)}$, $P_{\max}=52.22\ \text{kN}$

3.22 已知 $P=500$ kN, $P_1=250$ kN；

求 欲使起重机满载和空载时均不翻倒，平衡锤的最小重量及平衡锤到左轨的最大距离 x 应为多大。



题 3.22 图

解 起重机整体受力如图，满载时要使起重机不翻倒，需同时满足

$$F_{NA}\geqslant 0$$

和 $\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad P_2(x+3)-3F_{NA}-1.5P-10P_1=0$

解得

$$P_2(x+3)\geqslant 3250 \tag{1}$$

空载时，要使起重机不翻倒，需同时满足

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F})=0,\quad P_2x+3F_{NB}-4.5P=0$$

和

$$F_{NB}\geqslant 0$$

解得

$$P_2x\leqslant 2\ 250 \tag{2}$$

由(1)、(2)两式得

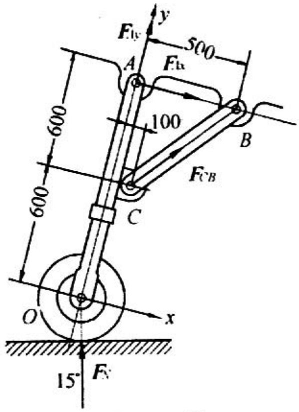
$P_2 \geqslant 333.3\ \text{kN}, x \leqslant 6.75\ \text{m}$

即 $\quad \underline{P_{2\min} = 333.3\ \text{kN}}$

$\quad \underline{x_{\max} = 6.75\ \text{m}}$

3.23 已知 $F_N = 30\ \text{kN}$，尺寸如图所示；

求 A、B 两处的约束反力。



题 3.23 图

解 物体 ACO 受力如图，由

$$\Sigma F_x = 0, \qquad F_{Ax} + F_{CB}\sin\theta - F_N \sin 15^\circ = 0$$

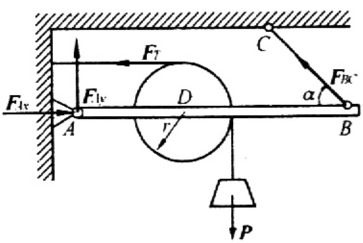
$$\Sigma Y = 0, \qquad F_{Ay} + F_{CB}\cos\theta + F_N \cos 15^\circ = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{CB}\sin\theta \cdot 600 + F_{CB}\cos\theta \cdot 100 - F_N \sin 15^\circ \cdot 1\,200 = 0$$

得 $\quad \underline{F_{CB} = 22.4\ \text{kN}}$，$\underline{F_{Ax} = -4.661\ \text{kN}}$，$\underline{F_{Ay} = -47.62\ \text{kN}}$

3.24 已知 $r = 0.1\ \text{m}$，$AD = 0.2\ \text{m}, BD = 0.4\ \text{m}, \alpha = 45^\circ, P = 1\,800\ \text{N}$；

求 支座 A 的力和 BC 杆的内力。



题 3.24 图

解 整体受力如图，图中

$$F_T = P$$

由 $\quad \Sigma X = 0, \quad F_{Ax} - F_T - F_{BC}\cos\alpha = 0$

$\quad \Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} - P + F_{BC}\sin\alpha = 0$

$\quad \Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{BC}AB\sin\alpha - P(AD + r) + F_T r = 0$

解得 $\quad \underline{F_{BC} = 848.5\ \text{N}}$，$\underline{F_{Ax} = 2\,400\ \text{N}}$，$\underline{F_{Ay} = 1\,200\ \text{N}}$

3.25 已知 起重机 $P_1 = 50$ kN，起重载荷 $P_2 = 10$ kN，梁重不计；

求 支座 A、B 和 D 的约束反力。

解 先研究起重机，图(b)，由 $\Sigma M_F(\boldsymbol{F}) = 0$，

$$2F_{NG} - 1P_1 - 5P_2 = 0$$

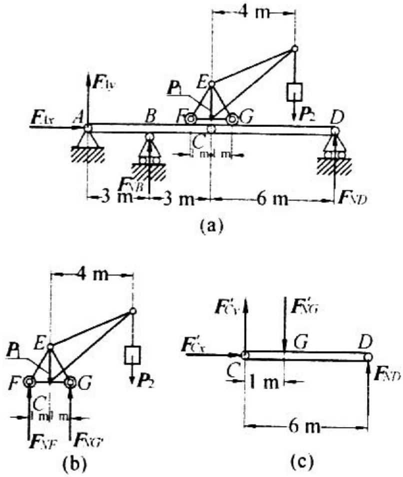
得 $F_{NG} = 50$ kN

再研究 CD 梁，图(c)，由

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$6F_{ND} - 1 \times F'_{NG} = 0$$

求得 $F_{ND} = 8.333$ kN



题 3.25 图

最后研究整体如图(a)，由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} + F_{NB} - P_1 - P_2 + F_{ND} = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 12F_{ND} - 10P_2 - 6P_1 + 3F_{NB} = 0$$

解得 $F_{Ax} = 0$，$F_{Ay} = -48.33$ kN，$F_{NB} = 100$ kN

3.26 已知 q (N/m)，M (N·m)，a (m) 及角 θ，不计各图中梁的自重；

求 下述五个连续梁中 A、B、C 三处的约束反力。

解 对题(a)，先研究 BC 梁，如图(a_2)，由

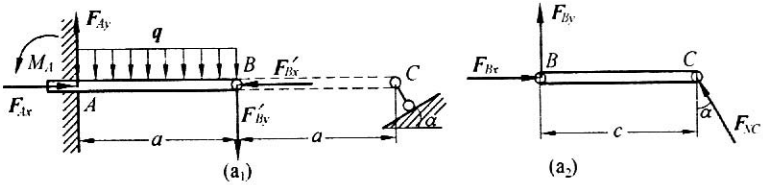
$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{NC} a \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Bx} - F_{Nc} \sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{By} + F_{Nc} \cos\alpha = 0$$

解得 $F_{Nc} = 0$，$F_{Bx} = 0$，$F_{By} = 0$

再研究 AB 梁，如图(a_1)，由



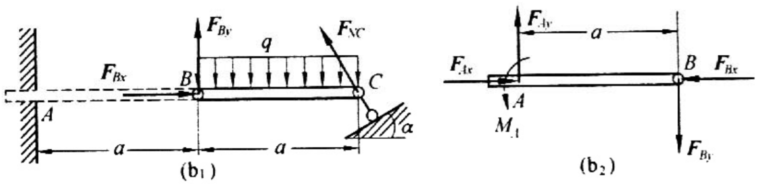
题 3.26(a)图

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A - qa\frac{a}{2} - F'_{By}a = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F'_{Bx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - qa - F'_{By} = 0$$

解得 $F_{Ax} = 0$，$F_{Ay} = qa$，$M_A = \frac{1}{2}qa^2$



题 3.26(b)图

对题(b)，先研究 BC 梁，如图(b_1)，由

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{NC}\,a\cos\alpha - qa\frac{a}{2} = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Bx} - F_{NC}\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{By} - qa + F_{NC}\cos\alpha = 0$$

解得 $F_{NC} = \frac{qa}{2\cos\alpha}$，$F_{Bx} = \frac{1}{2}qa\tan\alpha$，$F_{By} = \frac{1}{2}qa$

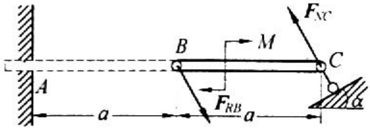
再研究 AB 梁，如图(b_2)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F'_{Bx} = 0$$

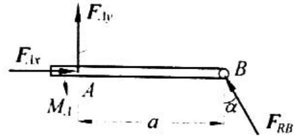
$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - F'_{By} = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A - F'_{By}a = 0$$

解得 $\underset{\sim\sim\sim}{F_{Ax} = \frac{1}{2}qa\ \tan\alpha}$, $\underset{\sim\sim\sim}{F_{Ay} = \frac{1}{2}qa}$, $\underset{\sim\sim\sim}{M_A = \frac{1}{2}qa^2}$



(c_1)



(c_2)

对题(c),先研究 BC 梁(图(c_1)),由

$$\Sigma M_i = 0,\quad F_{NC}a\ \cos\alpha - M = 0$$

解得 $\underset{\sim\sim\sim}{F_{NC} = F_{RB} = \dfrac{M}{a\ \cos\alpha}}$

再研究 AB 梁,如图(c_2),由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F_{RB}' \sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} + F_{RB}' \cos\alpha = 0$$

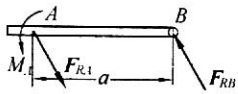
$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A + F_{RB}'a\ \cos\alpha = 0$$

解得

$$\underset{\sim\sim\sim}{F_{Ax} = \frac{M}{a}\tan\alpha},$$

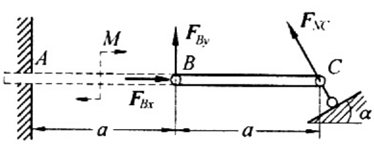
$$\underset{\sim\sim\sim}{F_{Ay} = -\frac{M}{a}},\quad \underset{\sim\sim\sim}{M_A = -M}$$

对 AB 梁也可按力偶系(图(c_3))求解。

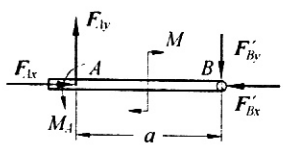


(c_3)

题 3.26(c)图



(d_1)



(d_2)

题 3.26(d)图

对题(d),先研究 BC 梁,如(图(d_1)),由

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{NC}a\ \cos\alpha = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Bx} - F_{NC}\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{By} + F_{NB}\cos\alpha = 0$$

解得 $F_{NC} = 0$，$F_{Bx} = 0$，$F_{By} = 0$

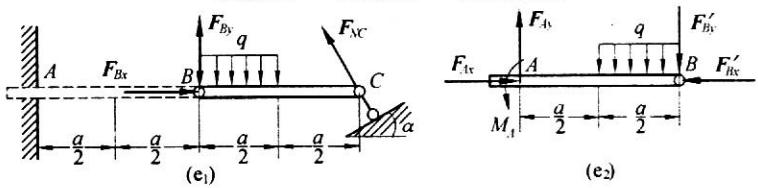
再研究 AB 梁，如图(d_2)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F_{Bx}' = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - F_{By}' = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A - M - F_{By}'a = 0$$

解得 $F_{Ax} = 0$，$F_{Ay} = 0$，$M_A = M$



题 3.26(e)图

对题(e)，先研究 BC 梁，如图(e_1)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Bx} - F_{NC}\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{By} - \frac{1}{2}qa + F_{NC}\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{NC}a\cos\alpha - \frac{a}{2}q\,\frac{a}{4} = 0$$

解得 $F_{NC} = \dfrac{qa}{8\cos\alpha}$，$F_{Bx} = \dfrac{qa}{8}\tan\alpha$，$F_{By} = \dfrac{3}{8}qa$

再研究 AB 梁，如图(e_2)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F_{Bx}' = 0$$

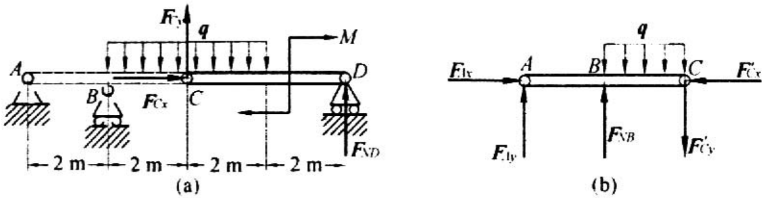
$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - \frac{1}{2}qa - F_{By}' = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A - \frac{1}{2}qa\,\frac{3}{4}a - F_{By}'a = 0$$

解得 $F_{Ax} = \dfrac{qa}{8}\tan\alpha$，$F_{Ay} = \dfrac{7}{8}qa$，$M_A = \dfrac{3}{4}qa^2$

3.27 已知 $q = 10\ \text{kN/m}, M = 40\ \text{kN} \cdot \text{m}$,梁重不计;

求 支座 A、B、C、D 处受力。



题 3.27 图

解 先研究 CD 梁,如图(a),由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Cx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{ND} + F_{Cy} - 2q = 0$$

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -4F_{Cy} + 2q \cdot 3 - M = 0$$

解得 $F_{ND} = 15\ \text{kN},\ F_{Cx} = 0, F_{Cy} = 5\ \text{kN}$

再研究 ABC 梁,如图(b),由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} - F'_{Cx} = 0$$

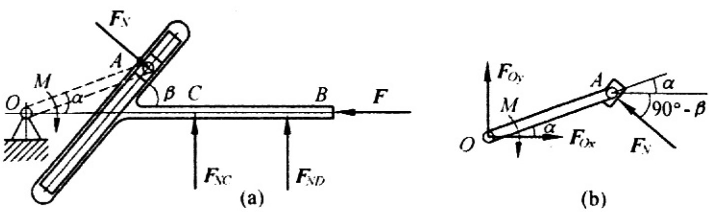
$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -2F_{Ay} - 2q \cdot 1 - 2F'_{Cy} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} + F_{NB} - 2q - F'_{Cy} = 0$$

解得 $F_{NB} = 40\ \text{kN},\ F_{Ax} = 0,\ F_{Ay} = -15\ \text{kN}$

3.28 已知 $OA = r, \beta, F$;

求 力偶矩 M 与角 α 之间的关系。



题 3.28 图

解　先研究滑道 ABC，如图(a)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_N \sin\beta - F = 0$$

得
$$F_N = \frac{F}{\sin\beta}$$

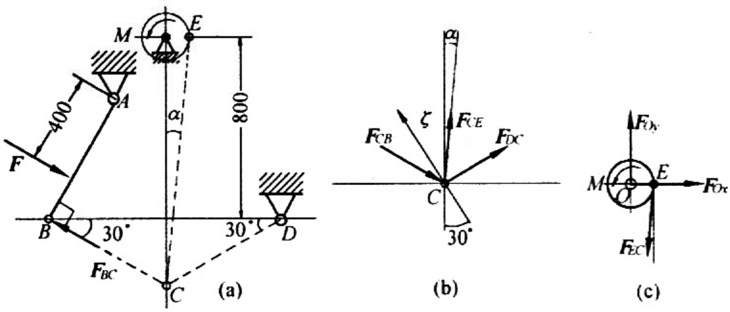
再研究曲柄 OA，如图(b)，由

$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\quad rF_N' \sin(90^\circ - \beta + \alpha) - M = 0$$

解得
$$M = \frac{rF\cos(\beta - \alpha)}{\sin\beta}$$

3.29　已知　$F = 1\,000$ N，$AB = BC = CD = 600$ mm，$OE = 100$ mm，不计各构件自重；

求　机构平衡时的力偶矩 M。



题 3.29 图

解　先研究压板 AB，如图(a)，由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 400F - 600F_{BC} = 0$$

得
$$F_{BC} = \frac{2\,000}{3}\ \text{N}$$

再研究销钉 C，如图(b)，由

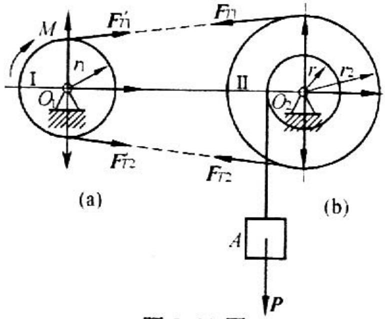
$$\Sigma F_\zeta = 0,\quad -F_{CB}\cos 30^\circ + F_{CE}\cos(30^\circ + \alpha) = 0$$

解得
$$F_{CE} = 706.5\ \text{N}$$

最后研究轮 OE，如图(c)，由

$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M - F_{BC}100\cos\alpha = 0$$

解得 $M = 70.36\ \text{N}\cdot\text{m}$



题 3.30 图

3.30 已知 r_1、r_2、r 和 P;

求 使重物匀速上升的力偶矩 M。

解 断开皮带,轮Ⅱ带重物受力如图(b),而轮Ⅰ受力如图(a),对此两图分别有

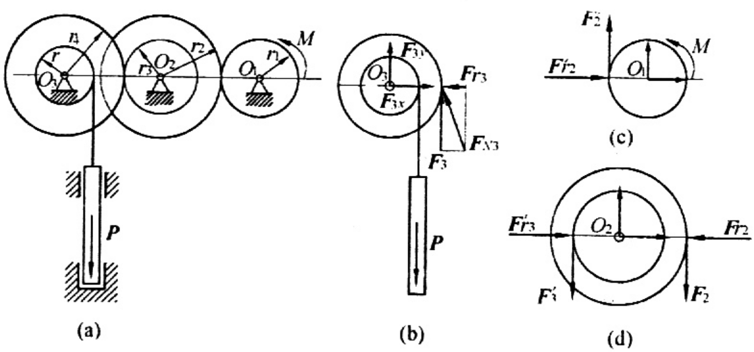
$$\Sigma M_{O2}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad Pr + F_{T1}r_2 - F_{T2}r_2 = 0$$

$$\Sigma M_{O1}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F'_{T2}\cdot r_1 - F'_{T1}\cdot r_1 - M = 0$$

式中 $F'_{T1} = F_{T1}$, $F'_{T2} = F'_{T2}$, 解得 $M = \dfrac{r_1}{r_2}rP$

3.31 已知 r_1、r_2、r_3、r_4、r、P 和齿轮压力角 α,图(a);

求 最小启门力偶矩 M 及轴承 O_3 的约束反力。



题 3.31 图

解 O_3 轮和闸门为一体受力如图(b),有

$$\Sigma M_{O3}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad r_4 F_3 - Pr = 0$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{3x} - F_{r3} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{3y} + F_3 - P = 0$$

根据齿轮压力角概念,式中 $F_{r3} = F_3 \tan\alpha$

解得 $F_3 = \dfrac{Pr}{r_4}$, $F_{3x} = \dfrac{Pr}{r_4}\tan\alpha$, $F_{3y} = P(1 - \dfrac{r}{r_4})$

再依次研究 O_2 轮和 O_1 ,受力如图(c)和图(d),分别由

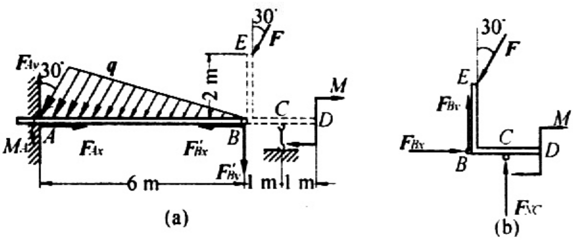
$$\Sigma M_{O2}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad r_3 F_3' - r_2 F_2 = 0$$

$$\Sigma M_{O1}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M - r_1 F_2' = 0$$

解得 $F_2 = \dfrac{r\,r_3}{r_2\,r_4}P$, $M = \dfrac{r\,r_1\,r_3}{r_2\,r_4}P$

3.32 已知 $q = 10$ kN/m, $F = 50$ kN, $M = 6$ kN · m;

求 固定端 A 及支座 C 的约束反力。



题 3.32 图

解 先研究构架 EBD 如图(b),由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Bx} - F\sin 30° = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{By} + F_{NC} - F\cos 30° = 0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{NC} \cdot 1 - M + 2F\sin 30° = 0$$

解得 $F_{Bx} = 25$ kN, $F_{By} = 87.3$ kN, $F_{NC} = -44$ kN

再研究 AB 梁如图(a),由

$$\Sigma X = 0, \quad -\frac{1}{2}q \cdot 6\sin 30^\circ + F_{Ax} - F_{Bx}' = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} - \frac{1}{2}q \cdot 6\cos 30^\circ - F_{By}' = 0$$

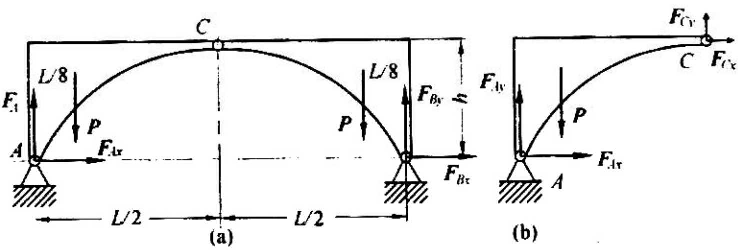
$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_A - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot q\cos 30^\circ - 6F_{By}' = 0$$

解得　$F_{Ax} = 40\ \text{kN}$, $F_{Ay} = 113.3\ \text{kN}$, $M_A = 575.8\ \text{kN}\cdot\text{m}$

此题也可先研究 EBD，求得 F_{NC} 之后，再研究整体，求 A 处反力，这样可减少平衡方程数，但计算量并未明显减少。

3.33　已知　$P = 300\ \text{kN}, L = 32\ \text{m}, h = 10\ \text{m}$；

求　支座 A、B 的反力。



题 3.33 图

解　先研究整体如图(a)，有

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} + F_{By} - 2P = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{By}L - P\frac{7}{8}L - P\frac{1}{8}L = 0 \tag{3}$$

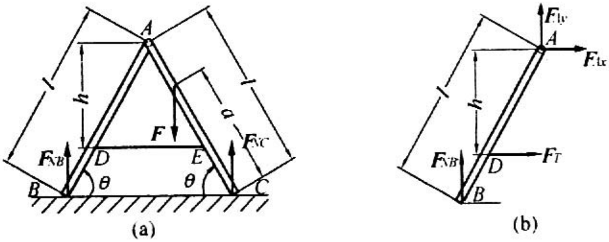
由后两式，得　　$F_{Ay} = F_{By} = 300\ \text{kN}$

再研究 AC 拱，如图(b)，由

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{Ax}h + P\frac{3}{8}L - F_{Ay}\frac{L}{2} = 0 \tag{4}$$

解得 $F_{Ax} = 120\ \text{kN}$，再由式(1)得 $F_{Bx} = -120\ \text{kN}$

3.34 已知 力 F,尺寸如图 (a)所示,梯重不计;
求 绳的拉力 $\boldsymbol{F}_T$。



题 3.34 图

解 先研究整体如图(a),有

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad Fa\cos\theta - F_{NB}2L\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

再研究 AB 部分,受力如图(b),有

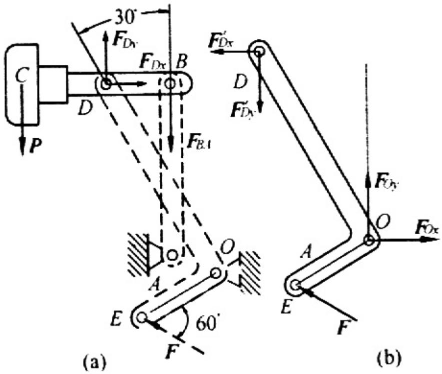
$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_T h - F_{NB}L\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

依次解得

$$F_{NB} = \frac{Fa}{2L},\ F_T = \frac{Fa\cos\theta}{2h}$$

3.35 已知 $BD = 0.3$ m,$CD = OE = 0.4$ m,$OD = 1$ m,$P = 500$ N,$OD \perp OE$;

求 保持平衡的力 F 及连杆 AB 和铰链 D、O 处所受的力。



题 3.35 图

解 先研究翻台 CDB 如图(a),由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Dx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Dy} - P - F_{BA} = 0$$

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0, \quad P \cdot CD - F_{BA} \cdot DB = 0$$

解得　$\underline{F_{BA} = 666.7\ \text{N}}$, $\underline{F_{Dx} = 0}$, $\underline{F_{Dy} = 1\ 167\ \text{N}}$

再研究曲杆 EOD 如图(b),由

$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F'_{Dy}OD\sin30^\circ - F\sin60^\circ OE = 0$$

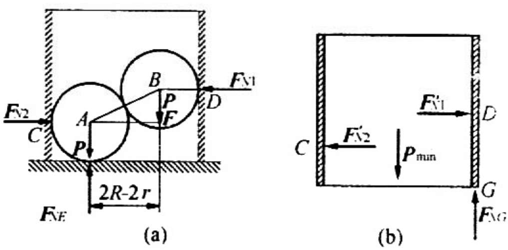
$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ox} - F\cos30^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Oy} - F'_{Dy} + F\sin30^\circ = 0$$

解得　$\underline{F = 1\ 684\ \text{N}}$, $\underline{F_{Ox} = 1\ 459\ \text{N}}$, $\underline{F_{Oy} = 325\ \text{N}}$

3.36　已知　每个球重为 P,半径为 r,圆筒半径为 R,图(a);

求　圆筒不致翻倒的最小重量 $P_{\min}$。



题 3.36 图

解　先取 A、B 球为研究对象,受力如图(a),由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{N2} - F_{N1} = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{N1}2\sqrt{2Rr - R^2} - P2(R - r) = 0$$

解得
$$F_{N2} = F_{N1} = P\frac{R - r}{\sqrt{2Rr - R^2}}$$

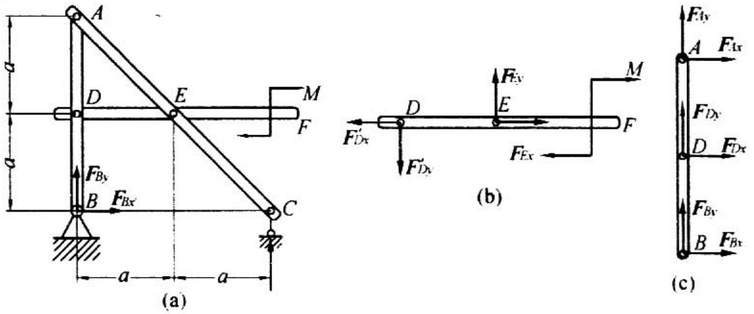
即 F_{N1},F_{N2} 构成一力偶。

圆筒在即将翻倒时,受力如图(b),由

$$\Sigma M_G(\boldsymbol{F}) = 0,\quad P_{\min}R - F'_{N12}\sqrt{2Rr - R^2} = 0$$

解得
$$\underline{P_{\min} = 2P\left(1 - \frac{r}{R}\right)}$$

3.37　已知　a, M，不计各自杆重；
求　A、D 和 B 铰处受力。



题 3.37 图

解　对整体（图(a)），有

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Bx} = 0$$

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -2aF_{By} - M = 0$$

解得

$$\underline{F_{Bx} = 0}, \quad \underline{F_{By} = -\frac{M}{2a}}$$

再研究 DEF 杆（图(b)），有

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0, \; aF'_{Dy} - M = 0, \quad 得 \; \underline{F'_{Dy} = \frac{M}{a}}$$

最后研究 ADB 杆，如图(c)，由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 2aF_{Bx} + aF_{Dx} = 0$$

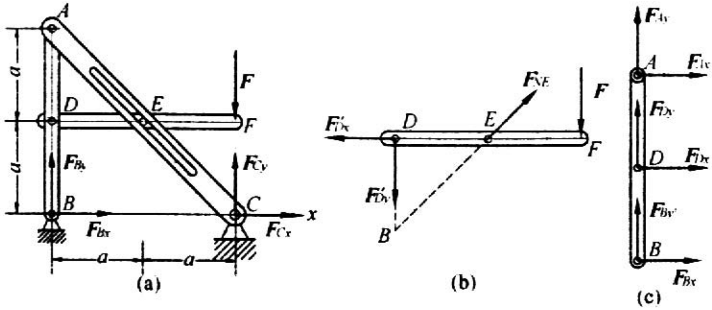
$$\Sigma X = 0, \quad F_{Bx} + F_{Dx} + F_{Ax} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{By} + F_{Dy} + F_{Ay} = 0$$

解得

$$\underline{F_{Dx} = F_{Ax} = 0}, \underline{F_{Ay} = -\frac{M}{2a}}$$

3.38　已知　a、F，不计各杆自重；
求　A、D 和 B 铰处受力。



题 3.38 图

解 先研究整体(图(a)),有

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\ -2aF_{By} = 0,\quad 得\ F_{By} = 0$$

再研究 DEF 杆(图(b)),有

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0,\ aF'_{Dy} - aF = 0,\quad 得 F'_{Dy} = F$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\ F'_{Dx}a - F2a = 0,\quad 得 F'_{Dx} = 2F$$

最后研究 ADB 杆如图(c),由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 2aF_{Bx} + aF_{Dx} = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_{Dx} + F_{Bx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} + F_{Dy} + F_{By} = 0$$

解得 $$F_{Bx} = -F,\ F_{Ax} = -F,\ F_{Ay} = -F$$

3.39 已知 $P = 1\,200$ N,各杆与滑轮自重不计;

求 支承 A,B 处的约束反力及杆 BC 的内力;

解 整体受力如图(a),有

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F_T = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - P + F_{NB} = 0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad P(2 - r) - 4F_{Ay} - F_T(1.5 - r) = 0$$

式中 r 为轮的半径，$F_T = P$，

解得 $F_{Ax} = 1\ 200\ \text{N}$，

$F_{Ay} = 150\ \text{N}$，

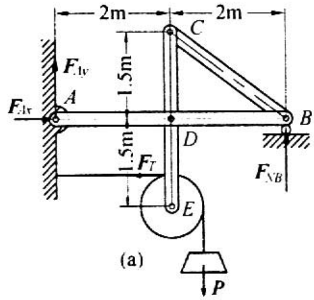
$$F_{NB} = 1\ 050\ \text{N}$$

再研究 ADB 杆如图(b)，由

$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0$，

$$2F_{BC}\sin\theta + 2F_{NB} - 2F_{Ay} = 0$$

得到 $F_{BC} = -1\ 500\ \text{N}$(压)



题 3.39 图

3.40 已知 $AB = DF$，$\theta = 30^\circ$，受力及尺寸如图(a)；

求 铰 B、C、D 的约束反力。

解 整体受力如图(a)，AB 为二力杆，由

$$\Sigma M_F(\boldsymbol{F}) = 0,$$

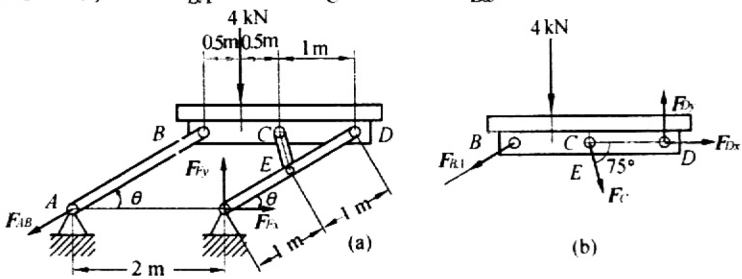
$$2F_{AB}\sin\theta - 4\ 000(2\cos\theta - 1.5) = 0$$

解得 $F_{AB} = F_{BA} = 928.2\ \text{N}(\swarrow)$

再研究平台 BCD，受力如图(b)，由

$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0$，　$2F_{BA}\sin\theta + 4\ 000 \cdot 1.5 + F_C \cdot 1 \cdot \sin 75^\circ = 0$

$\Sigma X = 0$，　$-F_{BA}\cos\theta + F_C\cos 75^\circ + F_{Dx} = 0$



题 3.40 图

$\Sigma Y = 0,\quad -F_{BA}\sin\theta - 4\,000 - F_C\sin 75^{\circ} + F_{Dy} = 0$

解得　$F_C = -7\,173\ \mathrm{N}(\nwarrow)$，$F_{Dx} = 2\,660\ \mathrm{N}$，$F_{Dy} = -2\,464\ \mathrm{N}$

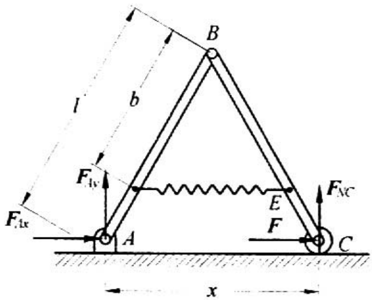
3.41　已知　$AB = BC$，作用力 F，弹簧刚性系数 k，当 $AC = a$ 时，弹簧为原长，杆重不计；

求　平衡时 x 之值。

解　对整体（图(a)），由

$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{NC}x = 0$

得　$F_{NC} = 0$



(a)

再研究 BC 杆（图(b)），由

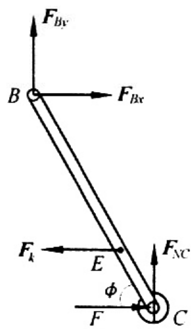
$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,$

$Fl\sin\varphi - F_k b\sin\varphi + F_{NC}l\cos\varphi = 0,$

解得
$$F_k = \frac{F}{b}l$$

当 $AC = a$ 时，设弹簧原长为 $D'E'$，则
$$D'E' = \frac{b}{l}a$$

$AC = x$ 时　$DE = \dfrac{b}{l}x$



(b)

弹簧的变形量为
$$\delta = DE - D'E' = \frac{b}{l}(x - a)$$

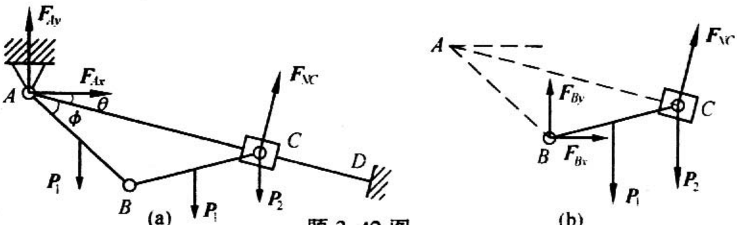
题 3.41 图

由
$$F_k = k\delta = \frac{kb}{l}(x - a) = \frac{F}{b}l$$

解得
$$x = a + \frac{F}{k}\left(\frac{l}{b}\right)^2$$

3.42　已知　AB、BC 杆各重为 P_1，滑块 C 重为 P_2，$AB = BC$，角 θ；

求　系统平衡时的 φ 角。



题 3.42 图

解　整体受力如图(a),设杆长为 l,有 $\Sigma M_A(\boldsymbol{F})=0$, 即

$$F_{NC}2l\cos\varphi - P_1\frac{l}{2}\cos(\theta+\varphi) - P_1[l\cos(\theta+\varphi)$$

$$+\frac{l}{2}\cos(\varphi-\theta)] - P_2\cdot 2l\cos\varphi\cos\theta = 0 \tag{1}$$

再取 BC 杆、滑块 C 为研究对象(图(b)),有 $\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0$,即

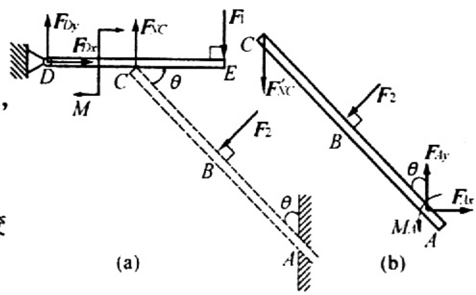
$$F_{NC}l\cos\varphi - P_1\frac{l}{2}\cos(\varphi-\theta) - P_2 l\cos(\varphi-\theta) = 0 \tag{2}$$

由此两式,解得

$$\tan\varphi = \frac{P_1}{2(P_1+P_2)}\cot\theta$$

3.43　已知
$F_1 = F_2 = 400$ N,
$M = 300$ N·m, $\theta = 45°$,
$AB = BC = 400$ mm,
$CD = CE = 300$ mm;

求　固定端 A 与铰链 D 的约束反力。



题 3.43 图

解　先研究 DCE 杆,如图(a),由

$$\Sigma X = 0, F_{Dx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{NC} + F_{Dy} - F_1 = 0$$

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{NC} \cdot CD - M - F_1 \cdot DE = 0$$

解得 $F_{Dx} = 0, F_{Dy} = -1\ 400\ \text{N}, F_{NC} = 1\ 800\ \text{N}$

再研究 ABC 杆,如图(b),由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} - F_2 \cos 45^\circ = 0$$

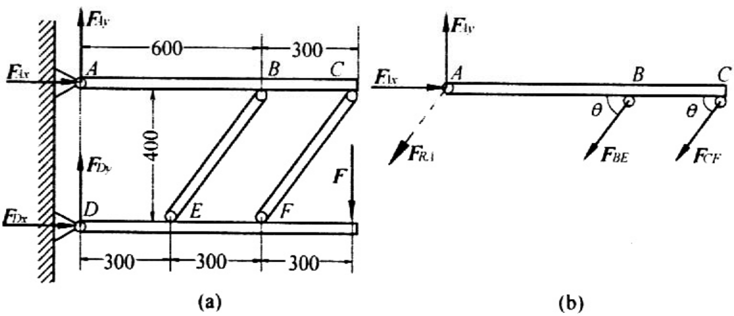
$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} - F_2 \sin 45^\circ - F'_{NC} = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F'_{NC} \cdot AC \sin 45^\circ + M_A + F_2 \cdot AB = 0$$

解得 $F_{Ax} = 200\sqrt{2}\ \text{N}, F_{Ay} = 2\ 083\ \text{N}, M_A = -1\ 178\ \text{N} \cdot \text{m}$

3.44 已知 $F = 1\ 000\ \text{N}$,各尺寸如图(a)所示;

求 铰支座 A、D 的约束反力。



题 3.44 图

解 先研究整体,受力如图(a),有

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -400F_{Ax} - 900F = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} + F_{Dx} = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} + F_{Dy} - F = 0 \tag{3}$$

由式(1)、(2)解得 $F_{Ax} = -2\ 250\ \text{N}$, $F_{Dx} = 2\ 250\ \text{N}$

再研究 ABC 杆,如图(b),由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} - F_{BE}\cos\theta - F_{CF}\cos\theta = 0 \tag{4}$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -900F_{CF}\sin\theta - 600F_{BE}\sin\theta = 0 \tag{5}$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -600F_{Ay} - 300F_{CF}\sin\theta = 0 \tag{6}$$

由式(4)、(5)、(6)解得 $F_{Ay} = -F_{Ax}\tan\theta = -3\ 000\ \text{N}$

代回式(3)得 $F_{Dy} = 4\ 000\ \text{N}$

另一解法是，在研究 ABC 杆时，注意到它受一平行力系的作用，A 处总反力 F_A 如图(b)虚箭头所示，故直接可得

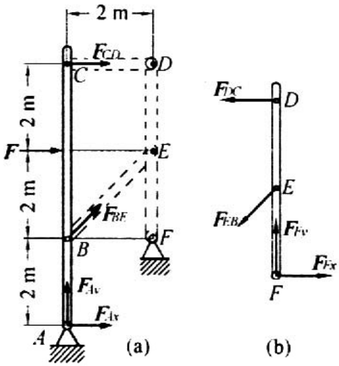
$$F_{Ay} = -F_{Ax}\tan\theta = -3\ 000\ \text{N}$$

这比联立求解(4)、(5)、(6)三式要简单得多。

3.45 已知 $F = 40$ kN，各杆件自重不计，尺寸如图；

求 铰 A、B、C 的约束反力。

解 先研究 ABC 杆如图(a)，有



题 3.45 图

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$-2F_{BE}\sin45^\circ - 6F_{CD} - 4F = 0$$

$$\Sigma X = 0, \ F_{Ax} + F_{BE}\sin45^\circ + F + F_{CD} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \ F_{BE}\cos45^\circ + F_{Ay} = 0$$

再研究 DEF 杆如图(b)，得

$$\Sigma M_F(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 4F_{DC} + 2F_{EB}\sin45^\circ = 0$$

由此四个方程解得 $F_{Ax} = -120$ kN，$F_{Ay} = -160$ kN

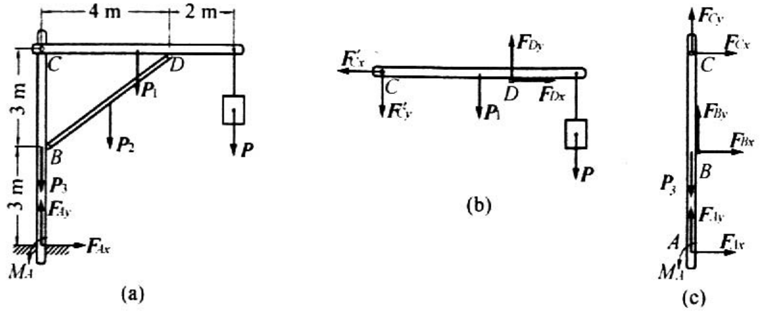
$F_{CD} = F_{DC} = -80$ kN(压)，$F_{BE} = F_{EB} = 160\sqrt{2}$ kN(拉)

3.46 已知 载荷 $P = 1\ 000$ N，各杆单位长度的重量为 30 N/m，尺寸如图(a)；

求 固定端 A 及 B、C 铰的约束反力。

解 整体受力如图(a)，由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} = 0$$



题 3.46 图

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - P - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A - 2P_2 - 3P_1 - 6P = 0$$

式中 $P_1 = P_3 = 30 \times 6 = 180\ \text{N}, P_2 = 30 \times 5 = 150\ \text{N}$

解得 $F_{Ax} = 0, F_{Ay} = 1\ 510\ \text{N}, M_A = 6\ 840\ \text{N} \cdot \text{m}$

再研究 CD 杆如图(b),

由 $\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 4F'_{Cy} + 1P_1 - 2P = 0,$ 得 $F_{Cy} = 455\ \text{N}$

最后研究 ABC 杆,受力如图(c),由

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A + 6F_{Ax} + 3F_{Bx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} - P_3 = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx} = 0$$

解得 $F_{Bx} = -2\ 280\ \text{N}, F_{By} = -1\ 785\ \text{N}, F_{Cx} = 2\ 280\ \text{N}$

3.47 已知 $F = 200\ \text{N}, M = 100\ \text{N} \cdot \text{m}$, ,尺寸如图(a);

求 铰 A、C 及 B 处所受力。

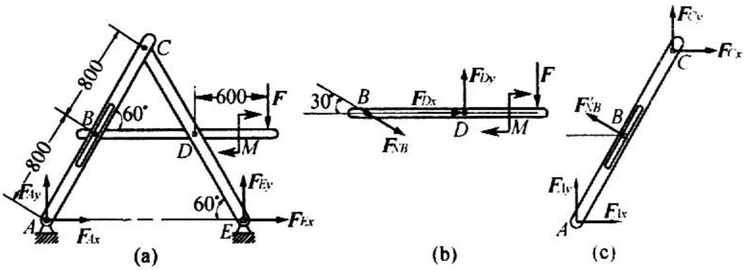
解 整体受力如图(a),由

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0,\qquad -1.6F_{Ay} - M - F(0.6 - 0.4) = 0$$

解得 $F_{Ay} = -87.5\ \text{N}$

再研究 BD 杆如图(b),由

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{NB}0.8\sin 30^\circ - M - 0.6F = 0$$



题 3.47 图

解得 $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F_{NB} = 550\ \text{N}}$

最后研究 *ABC* 杆，受力如图(c)，由

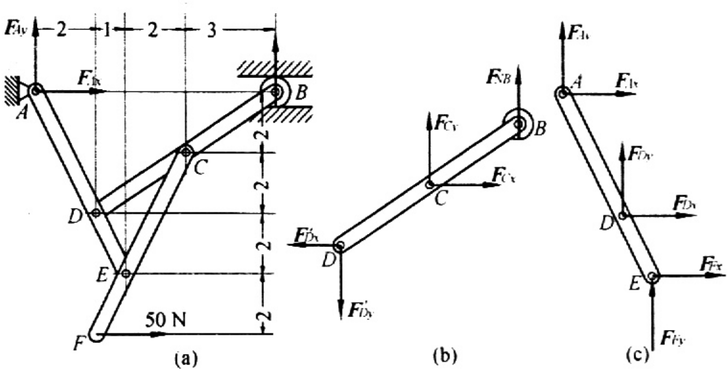
$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 1.6\sin 60^\circ \cdot F_{Ax} - 0.8F_{Ay} - 0.8F'_{NB} = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F'_{NB}\cos 30^\circ + F_{Cx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} + F'_{NB}\sin 30^\circ + F_{Cy} = 0$$

分别解得 $F_{Ax} = 267\ \text{N}, F_{Cx} = 209\ \text{N}, F_{Cy} = -187.5\ \text{N}$

3.48 已知 不计各杆件自重，受力及尺寸如图(a)；
求 铰链 *D* 受的力。



题 3.48 图

解 整体受力如图(a),由

$$\Sigma X=0,\quad F_{Ax}+50=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad F_{Ay}+F_{NB}=0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad 50\times 8-8\times F_{Ay}=0$$

解得 $F_{Ax}=-50\ \mathrm{N},F_{Ay}=50\ \mathrm{N},F_{NB}=-50\ \mathrm{N}$

再分别研究 ADE 与 DCB 杆,对图(b),有

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad 3F_{Dy}'-2F_{Dx}'+3F_{NB}=0 \tag{1}$$

对图(c),有

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F})=0,\quad -6F_{Ax}-3F_{Ay}-2F_{Dx}-1F_{Dy}=0 \tag{2}$$

解得 $\underline{F_{Dx}=F_{Dx}'=37.5\ \mathrm{N}},\underline{F_{Dy}=F_{Dy}'=75\ \mathrm{N}},\underline{F_D=84\ \mathrm{N}}$

3.49 已知 q、a、$M=qa^2$,不计各杆件自重;

求 铰 D 受的力。

解 先研究 BC 杆,受力如图(b),由

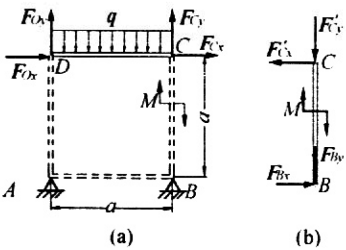
$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad aF_{Cx}'-M=0$$

得 $F_{Cx}'=F_{Cx}=qa$

再研究 CD 杆受力如图(a),由

$$\Sigma X=0,\quad F_{Dx}+F_{Cx}=0$$

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad qa\frac{a}{2}-aF_{Dy}=0$$



题 3.49 图

解得 $\underline{F_{Dx}=-qa}$, $\underline{F_{Dy}=\frac{1}{2}qa}$, $\underline{F_D=\frac{\sqrt{5}}{2}qa}$

3.50 已知 a、F_1、F_2、$M=F_1a$,F_2 作用于销钉 B 上;

求 (1)固定端 A 的约束反力;(2)销钉 B 对 AB 杆及 T 形杆的作用力。

解 先研究 CD 杆如图(a),

由 $\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 2aF'_{Cy} - M = 0,\qquad$ 得 $F'_{Cy} = \dfrac{1}{2}F_1$

接着研究 T 形杆 BCE（不包括销钉 B），如图(b)，图中 $\boldsymbol{F}_{BTx}$ 与 $\boldsymbol{F}_{BTy}$ 是销钉 B 给 T 形杆的作用力，由

$$\Sigma Y = 0,\ F_{BTy} - F_1 + F_{Cy} = 0$$

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\ aF_1 + aF_{BTy} - aF_{BTx} = 0$$

解得 $F_{BTy} = \dfrac{1}{2}F_1,\ F_{BTx} = \dfrac{3}{2}F_1$

再研究 AB 杆（包括销钉 B），受力如图(c)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F'_{BTx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - F_2 - F'_{BTy} = 0$$

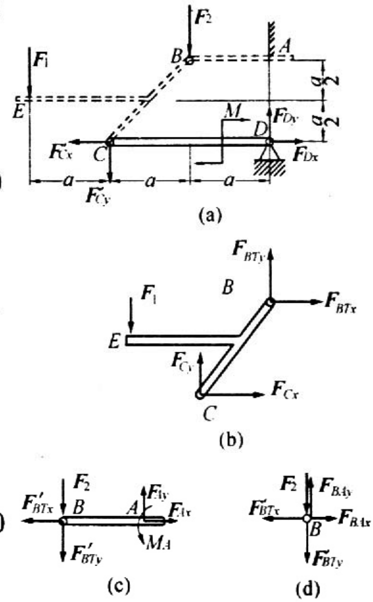
$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$aF'_{BTy} + aF_2 + M_A = 0$$

解得 $\quad F_{Ax} = \dfrac{3}{2}F_1,$

$$F_{Ay} = F_2 + \frac{1}{2}F_1,$$

$$M_A = -\left(F_2 + \frac{1}{2}F_1\right)a$$



题 3.50 图

为求销钉 B 给 AB 杆的作用力，研究销钉 B 如图(d)，图中 $\boldsymbol{F}_{BAx}$、$\boldsymbol{F}_{BAy}$ 是 AB 杆对销钉 B 的作用力，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{BAx} - F'_{BTx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{BAy} - F'_{BTy} - F_2 = 0$$

解得 $\qquad F_{BAx} = \dfrac{3}{2}F_1,\ F_{BAy} = F_2 + \dfrac{1}{2}F_1$

销钉 B 对 AB 杆的作用力与 $\boldsymbol{F}_{BAx}$、$\boldsymbol{F}_{BAy}$ 大小相等，方向相反，作用在 AB 杆的 B 点。

3.51 已知 q、a、$M = qa^2$，P 作用在销钉 B 上，图(a)；

求 固定端 A 的约束反力及销钉 B 对 BC 杆与 AB 杆的作用力。

解 先研究 CD 杆如图(b)，

由 $\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0$， $aF_{Cx} - qa\dfrac{a}{2} = 0$

解得 $$F_{Cx} = \frac{1}{2}qa$$

接着研究 BC 杆(包括销钉 B)，受力如图(c)，由

$\Sigma X = 0$， $F_{BAx} - F'_{Cx} = 0$

$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0$， $M - aF_{BAy} + aP = 0$

解得销钉 B 对弯杆 AB 的作用力为

$$F'_{BAx} = F_{BAx} = \frac{1}{2}qa,$$

$$F'_{BAy} = F_{BAy} = P + qa$$

再研究弯杆 AB(不包括销钉 B)，受力如图(d)，由

$\Sigma X = 0$， $F_{Ax} + \dfrac{1}{2}q \cdot 3a - F'_{BAx} = 0$

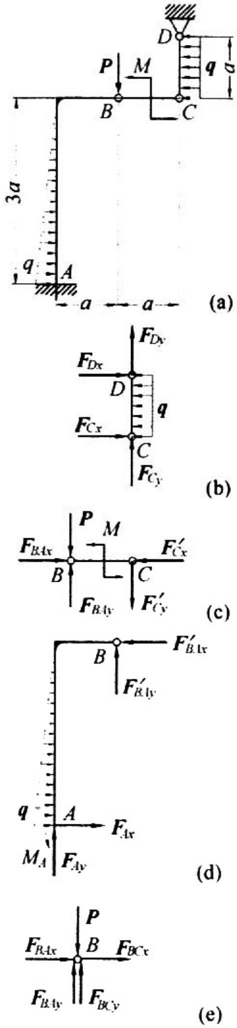
$\Sigma Y = 0$， $F_{Ay} - F'_{BAy} = 0$

$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0$， $M_A - aF'_{BAy} + 3aF'_{BAx} - \dfrac{1}{2}q \cdot 3a \cdot a = 0$

解得 A 处约束反力 $F_{Ax} = -qa$，

$F_{Ay} = P + qa$，$M_A = (P + qa)a$

最后研究销钉 B 如图(e)，图中 $\boldsymbol{F}_{BCx}$、$\boldsymbol{F}_{BCy}$ 是 BC 杆对销钉 B 的作用力，由



题 3.51 图

$$\Sigma X = 0, \quad F_{BAx} + F_{BCx} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{BAy} + F_{BCy} - P = 0$$

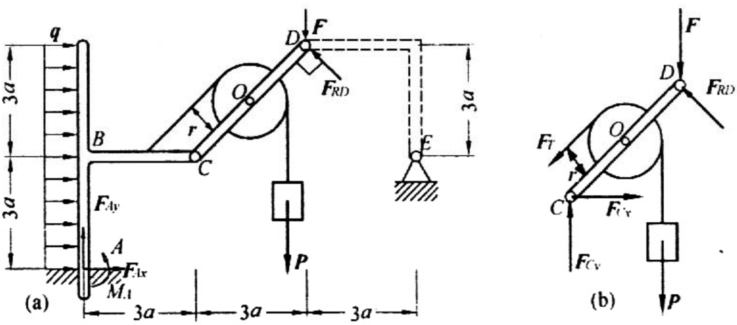
解得 $\quad F_{BCx} = -\frac{1}{2}qa, \; F_{BCy} = -qa$

这里，负号表示该力的实际方向与图设方向相反。

销钉 B 对 BC 杆的作用力与 $\boldsymbol{F}_{BCx}$、$\boldsymbol{F}_{BCy}$ 大小相等，方向相反，作用在 BC 杆的 B 点。

3.52 已知 $\quad r = a, P = 2F, CO = OD, q$；

求 支座 E 及固定端 A 处的约束反力。



题 3.52 图

解 先取 COD 及滑轮为研究对象，受力如图(b)，由

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 3\sqrt{2}aF_{RD} - 3aF + F_T r - P\left(\frac{3}{2}a + r\right) = 0$$

解得 $\quad F_{RE} = F_{RD} = \sqrt{2}F$

再取 $ABCOD$ 为研究对象，受力如图(a)，由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} + 6aq - F_{RD}\cos 45^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} - P - F + F_{RD}\sin 45^\circ = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_A - 6aq3a - 5.5aP - 6aF + 6\sqrt{2}aF_{RD} = 0$$

解得 $\quad F_{Ax} = F - 6qa, F_{Ay} = 2F, M_A = 5aF + 18qa^2$

3.53 已知　人重 P，椅重不计，尺寸如图(a)；

求　C、D、E 三铰的反力。

解　整体受力如图(a)，由 $\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0$，

即 $P(60 + CG + FB) - F_{NA} \cdot AB = 0$

得 $$F_{NA} = 0.634P$$

再研究 CD 板，如图(b)，有

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Cx} + F_{Dx} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Cy} + F_{Dy} - P = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0, \quad P(60 + CD) - F_{Cy} \cdot CD = 0 \quad (3)$$

由(2)、(3)两式求出

$$F_{Cy} = 1.667P, \quad F_{Dy} = -0.667P$$

转而研究 ACE，如图(c)，由

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{Cy}' \cdot CG - 140F_{Cx}' - F_{NA} \cdot AF = 0 \quad (4)$$

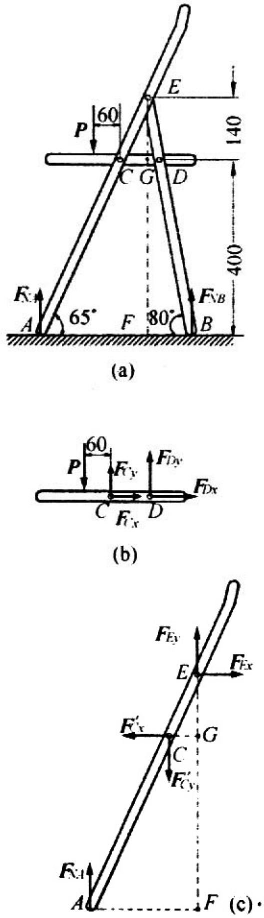
$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ex} - F_{Cx}' = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{NA} - F_{Cy}' + F_{Ey} = 0 \quad (6)$$

解得 $F_{Cx} = F_{Cx}' = 0.367P$，

$F_{Ex} = 0.367P$，$F_{Ey} = 1.033P$

再代入式(1)，解得 $F_{Dx} = -0.367P$



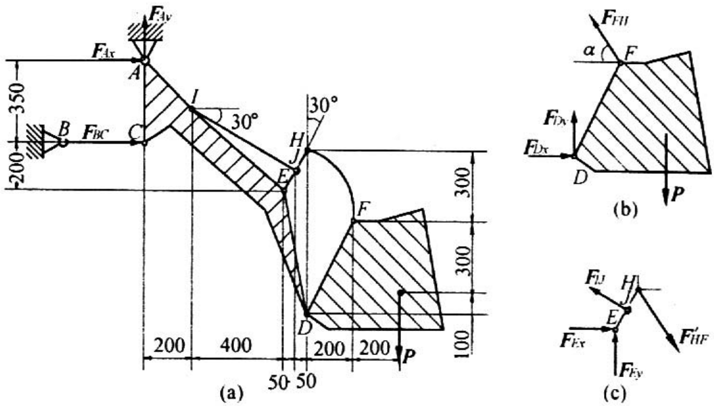
题 3.53 图

3.54 已知　$P = 4\,900$ N，尺寸如图(a)，不计各构件自重；

求　液压杆 BC 与 IJ 所受的力。

解　整体受力如图(a)，由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \ 350F_{BC} - P(200 + 400 + 50 + 50 + 200 + 200) = 0$$



题 3.54 图

解出 $$F_{BC} = 15.4\ \text{kN(压)}$$

再研究铲斗如图(b),由

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 400F_{FH}\cos\alpha + 200F_{FH}\sin\alpha - 400P = 0$$

解得 $$F_{FH} = 5\ 046\ \text{N}$$

最后研究 HJE 杆,如图(c),由

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 100F_{IJ} - 200F_{HF}\cos\alpha\ \cos30^\circ - 100F_{HF}\sin\alpha = 0$$

解得 $$F_{IJ} = 9.05\ \text{kN(拉)}$$

3.55 已知 $P = 12.25$ kN,尺寸如图(a),不计各构件自重;

求 液压杆 EF 与 AD 所受力。

解 整体受力如图(a),由

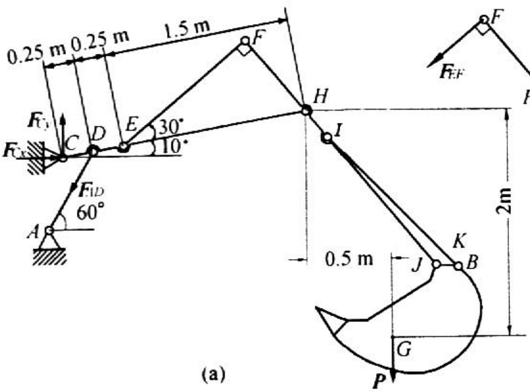
$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\quad -0.25F_{AD}\sin50^\circ - P(0.5 + 2\cos10^\circ) = 0$$

解得 $$F_{AD} = -158\ \text{kN(压)}$$

接着研究 $FHKBG$ 部分,如图(b),

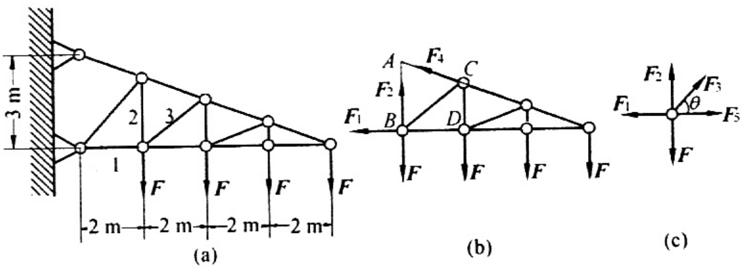
由 $$\Sigma M_H(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{EF}\cdot FH - 0.5P = 0$$

得 $$F_{EF} = 8.167\ \text{kN(拉)}$$



题 3.55 图

3.56 已知 桁架的载荷与尺寸如图(a)所示;
求 杆 1、2 和 3 的内力。



题 3.56 图

解 用截面法取分离体如图(b),由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_1 \cdot AB - 2F - 4F - 6F = 0$$

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_1 \cdot CD - 2F_2 + 2F - 2F - 4F = 0$$

解得 $F_1 = -5.333F$(压), $F_2 = 2F$(拉)

再研究节点 B,受力如图(c)由

$\Sigma Y = 0$, $F_2 + F_3 \sin\theta - F = 0$, 得 $F_3 = -1.667F$(压)

3.57 已知　ABC 为等边三角形，$AD = DB$，E、F 为两腰中点；

求　CD 杆的内力 F_{CD}。

解　整体受力如图(a)，由 $\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0$，

$$F_{NB} \cdot AB - F \cdot \frac{1}{2}AB \cdot \sin 60^\circ = 0$$

解得　$$F_{NB} = \frac{\sqrt{3}}{4}F$$

将桁架截开，研究右边部分，如图(b)所示，由

$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0$，　$F_{FC} \cdot DB \cdot \sin 60^\circ + F_{NB} \cdot DB - F \cdot DF \cdot \sin 60^\circ = 0$

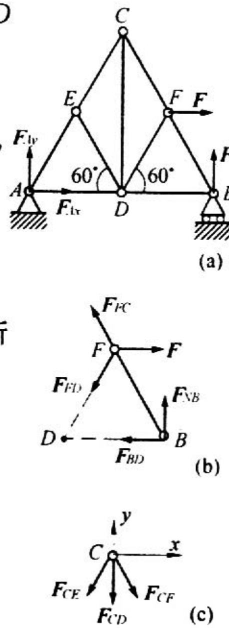
解得　$$F_{FC} = \frac{1}{2}F$$

再研究节点 C，如图(c)，由

$\Sigma X = 0$，　$(F_{CF} - F_{CE})\sin 30^\circ = 0$

$\Sigma Y = 0$，　$-(F_{CF} + F_{CE})\cos 30^\circ - F_{CD} = 0$

解得　$F_{CD} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}F = -0.866F$(压)



题 3.57 图

本题最简单的解法是，首先断定 DE 杆为零杆，再截取 $\triangle BDF$ 来研究，只由一个方程 $\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0$，即可解出 F_{CD}，读者不妨一试。

3.58 已知　$F_1 = 10\ \text{kN}$，$F_2 = F_3 = 20\ \text{kN}$；

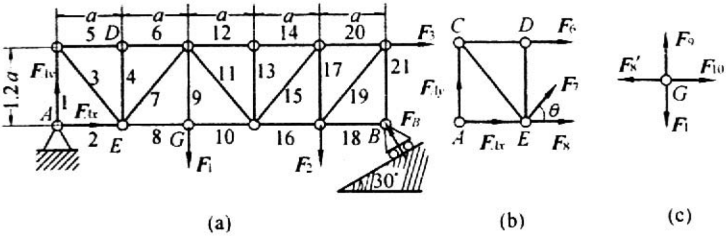
求　6、7、9、10 杆的内力。

解　先研究整体如图(a)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F_B\cos 60^\circ + F_3 = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - F_1 - F_2 + F_B\sin 60^\circ = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 5aF_B\sin 60^\circ - 2aF_1 - 4aF_2 - 1.2aF_3 = 0$$



题 3.58 图

解得 $F_B = 28.64\ \text{kN}, F_{Ax} = -5.68\ \text{kN},$

$F_{Ay} = 5.197\ \text{kN}$

再用截面法取分离体如图(b),由

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0,\quad -1.2a \cdot F_6 - aF_{Ay} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_7 \sin\theta + F_{Ay} = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_6 + F_7 \cos\theta + F_8 = 0$$

解得 $F_6 = -4.33\ \text{kN}$(压),$F_7 = -6.771\ \text{kN}$(压)

$F_8 = 14.35\ \text{kN}$(拉)

最后研究节点 G,如图(c),由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{10} - F_8' = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_9 - F_1 = 0$$

解得 $F_9 = 10\ \text{kN}$(拉),$F_{10} = 14.35\ \text{kN}$(拉)

3.59 已知 $F_1 = 10\ \text{kN}, F_2 = F_3 = 20\ \text{kN}$;

求 4、5、7、10 杆的内力。

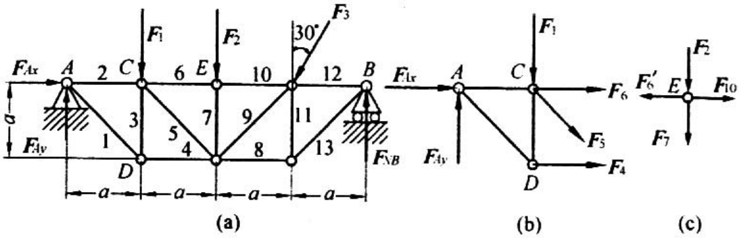
解 整体受力如图(a),由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} - F_3 \sin 30^\circ = 0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad -4aF_{Ay} + 3aF_1 + 2aF_2 + aF_3 \cos 30^\circ = 0$$

解得 $F_{Ax} = 10\ \text{kN}, F_{Ay} = 21.83\ \text{kN}$

再用截面法,取分离体如图(b),由



题 3.59 图

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\quad aF_4 - aF_{Ay} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - F_1 - F_5\sin45^{\circ} = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_4 + F_5\cos45^{\circ} + F_6 = 0$$

解得　$F_4 = 21.83\ \text{kN}$(拉)，$F_5 = 16.73\ \text{kN}$(拉)，

$F_6 = -43.66\text{kN}$

最后研究节点 E（图(c)），由

$$\Sigma Y = 0,\quad -F_7 - F_2 = 0,$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{10} - F_6' = 0$$

解得　$F_7 = -20\ \text{kN}$(压)，

$F_{10} = -43.66\ \text{kN}$(压)

3.60　已知　荷载 F 及尺寸；求　1、2、3 杆的内力。

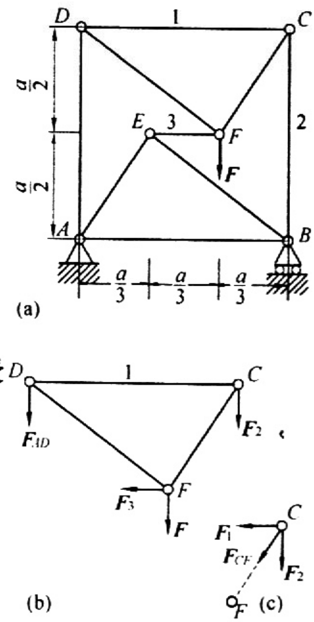
解　用截面法，取 CDF 部分，受力如图(b)，由

$$\Sigma X = 0,\quad -F_3 = 0$$

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$-\frac{2}{3}aF - aF_2 = 0$$

解得 $F_3 = 0$，$F_2 = -\frac{2}{3}F$(压)



题 3.60 图

接着研究节点 C ,受力如图(c),

有 $\Sigma M_F(\boldsymbol{F}) = 0$, $F_1 \dfrac{a}{2} - F_2 \dfrac{a}{3} = 0$, 得 $F_1 = -\dfrac{4}{9}F$(压)

第四章　空间力系

4.1　已知　$F_1 = 100\ \mathrm{N}, F_2 = 300\ \mathrm{N}, F_3 = 200\ \mathrm{N}$，作用位置及尺寸如图(a)所示；

求　力系向 O 点简化的结果。

解　力系主矢在轴上的投影为

$$F_{Rx} = \Sigma X = -F_2\sin\alpha - F_3\cos\beta = -345.4\ \mathrm{N}$$

$$F_{Ry} = \Sigma Y = F_2\cos\alpha = 249.6\ \mathrm{N}$$

$$F_{Rz} = \Sigma Z = F_1 - F_3\sin\beta = 10.56\ \mathrm{N}$$

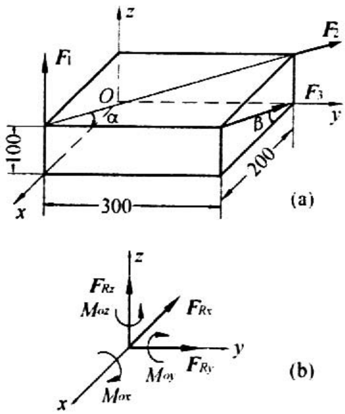
力系对 O 点 的主矩在轴上的投影为

$$M_{Ox} = \Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = -F_2\cos\alpha\cdot 100 - F_3\sin\beta\cdot 300 = -51.78\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{Oy} = \Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = -F_1\cdot 200 - F_2\sin\alpha\cdot 100 = -36.65\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{Oz} = \Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = F_2\cos\alpha\cdot 200 + F_3\cos\beta\cdot 300 = 103.6\ \mathrm{N\cdot m}$$

力系向 O 点简化所得的力 $\boldsymbol{F}_R$ 和力偶 $\boldsymbol{M}_O$ 的各个分量如图(b)所示。



题 4.1 图

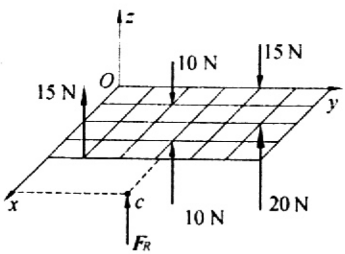
4.2　已知　小正方格的边长为 10 mm，各力的大小及作用线位置如图所示；

求　力系的合力。

解　该平行力系的合力为

$$F_R = F_{Rz} = \Sigma Z$$

$$= 15 - 10 + 10 - 15 + 20 = 20\ \mathrm{N}(\uparrow)$$



题 4.2 图

设合力 $\boldsymbol{F}_R$ 与平面的交点为 (x_C, y_C)，由合力矩定理有

$$M_x(\boldsymbol{F}_R) = \Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 15 \times 10 - 10 \times 20 + 10 \times 30 - 15 \times 40 + 20 \times 50 = 650\ \text{N} \cdot \text{mm}$$

$$M_y(\boldsymbol{F}_R) = \Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = -15 \times 40 + 10 \times 10 - 10 \times 30 - 20 \times 20 = -1\ 200\ \text{N} \cdot \text{mm}$$

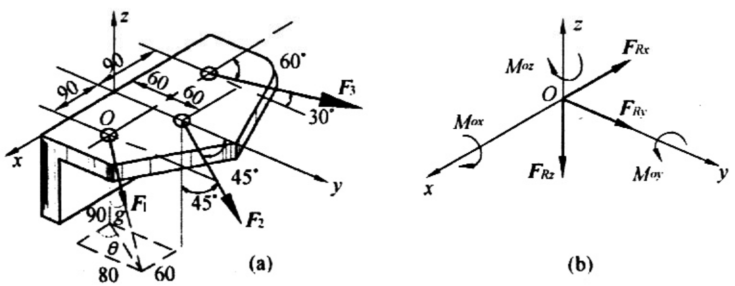
由 $\quad M_x(\boldsymbol{F}_R) = y_C F_{Rz}, \quad M_y(\boldsymbol{F}_R) = -x_C F_{Rz}$

解出 $\quad x_C = -\dfrac{M_y(\boldsymbol{F}_R)}{F_{Rz}} = 60\ \text{mm}, \ y_C = \dfrac{M_x(\boldsymbol{F}_R)}{F_{Rz}} = 32.5\ \text{mm}$

力系的合力 $\boldsymbol{F}_R$ 如图所示。

4.3 已知 $F_1 = 350\ \text{N}, F_2 = 400\ \text{N}, F_3 = 600\ \text{N}$，作用位置及尺寸如图(a)所示；

求 力系向 O 点简化的结果。



题 4.3 图

解 力系主矢在轴上的投影为

$$F_{Rx} = \Sigma X = F_1 \sin\gamma \cos\theta + 0 - F_3 \cos 60^\circ = = -143.9\ \text{N}$$

$$F_{Ry} = \Sigma Y = F_1 \sin\gamma \sin\theta + F_2 \cos 45^\circ + F_3 \cos 30^\circ = 1\ 011\ \text{N},$$

$$F_{Rz} = \Sigma Z = -F_1 \cos\gamma - F_2 \cos 45^\circ + 0 = -516.9\ \text{N};$$

力系对 O 点的主矩在轴上的投影为

$$M_{Ox} = -60 F_{1z} - 120 F_{2z} = -47.99\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{Oy} = 90 F_{1z} = 21.07\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{Oz} = -60F_{1x} + 90F_{1y} + 60F_{3x} - 90F_{3y} = -19.4\ \mathrm{N \cdot m}$$

力系向 O 点简化所得的力 $\boldsymbol{F}_R$ 和力偶 $\boldsymbol{M}_O$ 的各个分量如图(b)所示。

4.4 已知 $F = 1\,000\ \mathrm{N}$，作用位置及尺寸如图所示；

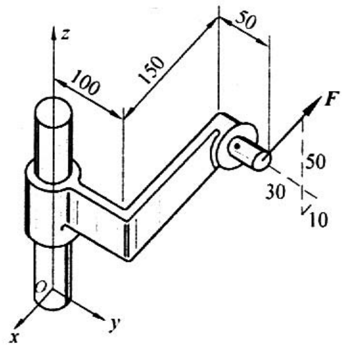
求 $M_z(\boldsymbol{F})$。

解 $M_z(\boldsymbol{F}) = xY - yX$

式中 $x = -150,\ y = 150$

$$X = \frac{F}{\sqrt{35}},\ Y = \frac{3F}{\sqrt{35}}$$

代入得 $M_z(\boldsymbol{F}) = -150 \times 507.1 - 150 \times 169 = -101.4\ \mathrm{N \cdot m}$



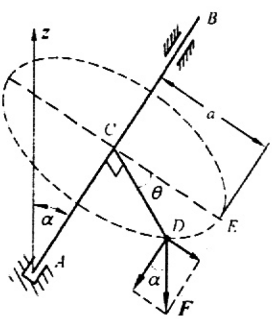
题 4.4 图

4.5 已知 $F, \alpha, \theta, CD = a$；

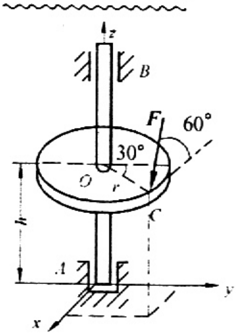
求 力 $\boldsymbol{F}$ 对 AB 轴的矩 $M_{AB}(\boldsymbol{F})$。

解 力 $\boldsymbol{F}$ 在平面 CDE 内的分力为 $F\sin\alpha$，由合力矩定理得

$$M_{AB}(\boldsymbol{F}) = F\sin\alpha \cdot a\sin\theta = Fa\sin\alpha \cdot \sin\theta$$



题 4.5 图



题 4.6 图

4.6　已知　r,h,力 $\boldsymbol{F} \perp OC$,作用位置如图所示;

求　力 $\boldsymbol{F}$ 对 x、y、z 轴的矩。

解　力 $\boldsymbol{F}$ 各分力的大小为　$F_x = F\cos60^\circ\cos30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}F$,

$$F_y = F\cos60^\circ\sin30^\circ = \frac{F}{4},\ F_z = F\sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

由合力矩定理有　$m_x(\boldsymbol{F}) = F_y h - rF_z\cos30^\circ = \dfrac{F}{4}(h-3r)$

$$m_y(\boldsymbol{F}) = F_x h + rF_z\sin30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}F(h+r)$$

$$m_z(\boldsymbol{F}) = -rF\cos60^\circ = -\frac{1}{2}rF$$

4.7　已知　$P = 10$ kN,空间构架连接如图所示;

求　球铰链 A、B、C 处的约束反力。

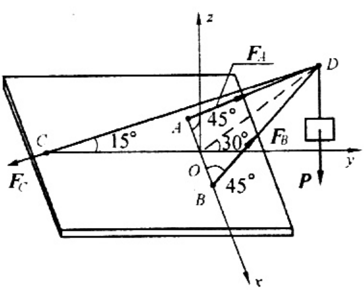
解　三杆均为二力杆,该系统受力如图所示,由

$\Sigma X = 0$,　$F_A\cos45^\circ - F_B\cos45^\circ = 0$

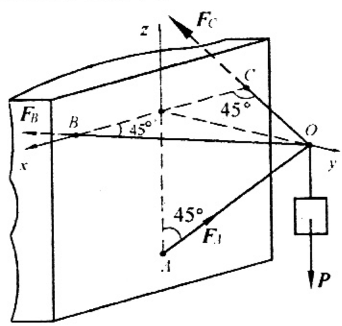
$\Sigma Y = 0$,　$F_A\sin45^\circ\cos30^\circ + F_B\sin45^\circ\cos30^\circ - F_C\cos15^\circ = 0$

$\Sigma Z = 0$,　$F_A\sin45^\circ\sin30^\circ + F_A\sin45^\circ\sin30^\circ - F_C\sin15^\circ - P = 0$

解得　$F_A = F_B = 26.39$ kN(压),$F_C = 33.46$ kN(拉)



题 4.7 图



题 4.8 图

4.8 已知　重物重 $P = 1\,000$ N，空间构架如图所示；
求　三杆所受的力。
解　三杆均为二力杆，该系统受力如图所示，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_B\cos45^\circ - F_C\cos45^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad -F_B\sin45^\circ - F_C\sin45^\circ + F_A\sin45^\circ = 0$$

$$\Sigma Z = 0,\quad F_A\cos45^\circ - P = 0$$

解得　$F_A = 1\,414$ N(压)，$F_B = F_C = 707$ N(拉)

4.9 已知　荷载 P，$AB = BC = AD = AE$，α；
求　支柱和各斜杆的内力。
解　先研究节点 C 和重物，受力如图所示，由

$$\Sigma Z = 0,\quad F_{CA}\sin45^\circ - P = 0$$

$$\Sigma X' = 0,\quad F_{CA}\cos45^\circ - F_{CB} = 0$$

得　$F_{CB} = P$(拉)，$F_{CA} = -\sqrt{2}P$(压)

再研究球铰 B，受力如图所示，由

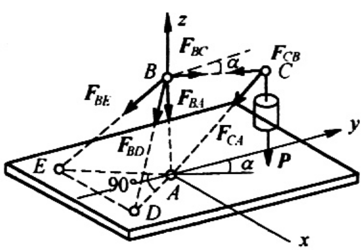
$$\Sigma X = 0,\quad F_{BD}\cos45^\circ\cos45^\circ - F_{BE}\cos45^\circ\cos45^\circ + F_{BC}\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad -F_{BD}\cos45^\circ\sin45^\circ - F_{BE}\cos45^\circ\sin45^\circ + F_{BC}\cos\alpha = 0$$

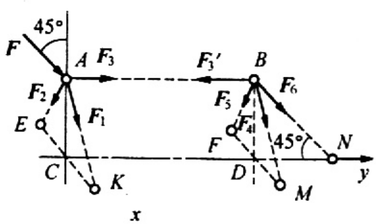
$$\Sigma Z = 0,\quad -F_{BD}\sin45^\circ - F_{BE}\sin45^\circ - F_{BA} = 0$$

解得　$F_{BD} = P(\cos\alpha - \sin\alpha)$，

$F_{BE} = P(\cos\alpha + \sin\alpha)$，$F_{AB} = -\sqrt{2}P\cos\alpha$



题 4.9 图



题 4.10 图

4.10 已知 $F = 10$ kN,等腰 $\triangle EAK = \triangle FBM$,$\angle EAK = \angle FBM = 90°$,$EC = CK = FD = DM$,空间桁架构成如图所示;

求 各杆的内力。

解 节点 A、B 受力分别如图所示。对节点 A ,由

$$\Sigma X = 0,\quad F_1 \sin45° - F_2 \sin45° = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_3 + F \sin45° = 0$$

$$\Sigma Z = 0,\quad -F_1 \cos45° - F_2 \cos45° - F \cos45° = 0$$

解得 $F_1 = F_2 = -5$ kN(压), $F_3 = -7.07$ kN(压)

再对节点 B ,由

$$\Sigma X = 0,\quad F_4 \sin45° - F_5 \sin45° = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_6 \sin45° - F_3' = 0$$

$$\Sigma Z = 0,\quad -F_4 \cos45° - F_5 \cos45° - F_6 \cos45° = 0$$

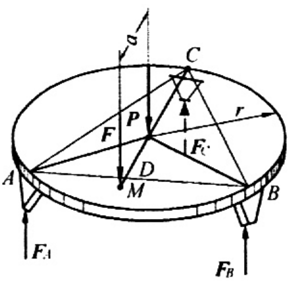
解得 $F_4 = 5$ kN(拉),$F_5 = 5$ kN(拉),$F_6 = -10$ kN(压)

4.11 已知 $r = 500$ mm,桌重为 $P = 600$ N,$F = 1\ 500$ N,$\triangle ABC$ 是一等边三角形;

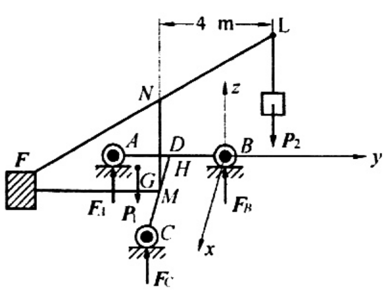
求 使圆桌不致翻倒的最大距离 a。

解 圆桌受力如图,当桌子有翻倒趋势时, $F_C = 0$,

由 $\Sigma M_{AB} = 0$, $F\left(a - \frac{r}{2}\right) - P \cdot \frac{r}{2} = 0$, 解得 $a = 350$ mm



题 4.11 图



题 4.12 图

4.12 已知 $AD = DB = 1\ \text{m}, CD = 1.5\ \text{m}, CM = 1\ \text{m}, GH = 0.5\ \text{m}$,机身和平衡锤共重 $P_1 = 100\ \text{kN}, P_2 = 30\ \text{kN}$;

求 当平面 LMN 平行于 AB 时,车轮对轨道的压力。

解 研究起重机,受力如图,由

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_C \cdot CD + (P_1 + P_2) \cdot DM = 0$$

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_A \cdot AB - F_C \cdot DB - 3P_2 + 1.5P_1 = 0$$

$$\Sigma Z = 0, \quad F_A + F_B + F_C - P_1 - P_2 = 0$$

解得 $F_C = 43\frac{1}{3}\ \text{kN},\ F_A = 8\frac{1}{3}\ \text{kN},\ F_B = 78\frac{1}{3}\ \text{kN}$

4.13 已知 $r_A = 150\ \text{mm}, r_B = 100\ \text{mm}, r_C = 50\ \text{mm}$,各力作用如图所示,物系自由,自重不计;

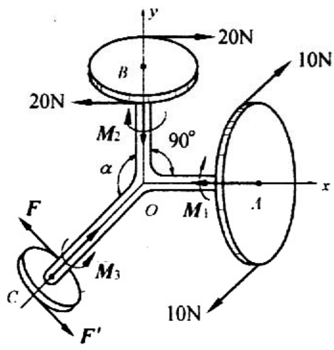
求 能使此物系平衡的力 F 的大小和角 α。

解 物系受3个力偶作用,各力偶矩矢如图所示,其大小为

$M_1 = 30\ 000\ \text{N} \cdot \text{mm}$,

$M_2 = 4\ 000\ \text{N} \cdot \text{mm}$,

$M_3 = 100F\ \text{N} \cdot \text{mm}$



题 4.13 图

由

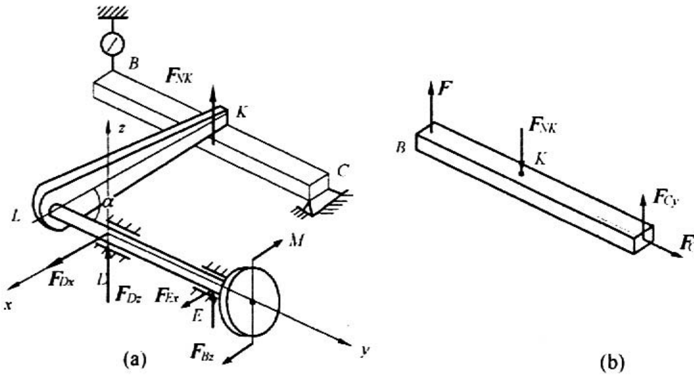
$$\Sigma M_{ix} = 0, \quad M_3 \cos(\alpha - 90^\circ) - M_1 = 0$$

$$\Sigma M_{iy} = 0, \quad M_3 \sin(\alpha - 90^\circ) - M_2 = 0$$

解得 $F = 50\ \text{N}, \alpha = 143^\circ 8'$

4.14 已知 $BK = KC, KL = a, LD = b, DE = c, \alpha = 90^\circ$,测力计 B 读数为 F,各构件自重不计;

求 扭矩 M 的大小以及轴承 D 和 E 的约束反力。



题 4.14 图

解　先研究 BKC 杆,受力如图(b),

$$\text{由}\quad \Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F'_{NK}\cdot KC - F\cdot BC = 0$$

解得
$$F'_{NK} = 2F$$

再研究 $KLDE$ 系统,受力如图(a),由

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{Ex} = 0$$

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{NK}\cdot KL - M = 0$$

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{Ez}\cdot DE - F_{NK}\cdot LD = 0$$

$$\Sigma Z = 0,\quad F_{Dz} + F_{Ez} + F_{NK} = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Dx} + F_{Ex} = 0$$

解得 $M = 2Fa$, $F_{Ex} = F_{Dx} = 0$, $F_{Ez} = \dfrac{2bF}{c}$, $F_{Dz} = -2F\left(1+\dfrac{b}{c}\right)$

4.15　已知　$F_z = 50\ \mathrm{N}, F = 150\ \mathrm{N}$,手摇钻尺寸如图所示;求　(1)钻头受到的阻抗力偶矩 M_A;(2)材料给钻头的反力 $\boldsymbol{F}_{Ax},\boldsymbol{F}_{Ay},\boldsymbol{F}_{Az}$;(3)压力 $\boldsymbol{F}_x,\boldsymbol{F}_y$ 的值。

解　研究手摇钻,受力如图,由

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A - 150F = 0$$

$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 400F_x - 200F = 0$

$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 400F_y = 0$

$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} - F + F_x = 0$

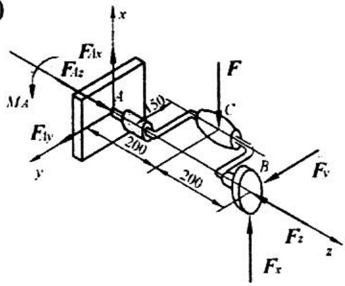
$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} + F_y = 0$

$\Sigma Z = 0, \quad F_{Az} - F_z = 0$

解得

$M_A = 22.5\ \text{N}\cdot\text{m}$, $F_x = 75\ \text{N}$, $F_y = 0$

$F_{Ax} = 75\ \text{N}$, $F_{Ay} = 0$, $F_{Az} = 50\ \text{N}$



题 4.15 图

4.16 已知 $P_1 = 1\,000$ N, $P_2 = 250$ N,轮子半径为 200 mm;

求 重锤的重心 E 到轴 AB 的距离 l 以及轴承 A、B 的约束反力。

解 整体受力如图所示,由

$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0,$

$$P_1 l \sin 30^\circ - 200P_2 = 0$$

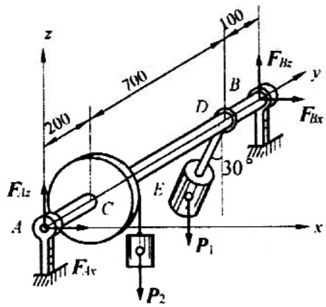
$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -1\,000F_{Bx} = 0$

$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0$

$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 1\,000F_{Bz} - 900P_1 - 200P_2 = 0$

$\Sigma Z = 0, \quad F_{Az} - P_2 - P_1 + F_{BZ} = 0$

解得 $l = 0.1$ m, $F_{Bx} = F_{Ax} = 0$, $F_{Bz} = 950$ N, $F_{Az} = 300$ N



题 4.16 图

4.17 已知 切削力 $F_x = 150$ N, $F_y = 75$ N, $F_z = 500$ N,刀尖位于 xOy 平面内;

求 镗刀杆左端 O 处的约束反力。

解 刀杆受力如图，由

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ox} - F_x = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\Sigma Z = 0, \quad F_{Oz} - F_z = 0$$

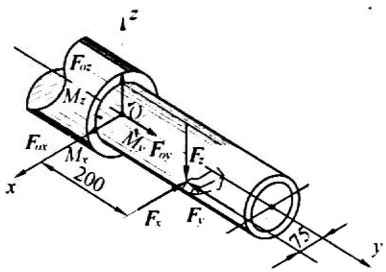
$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_x - 200F_z = 0$$

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_y + 75F_z = 0$$

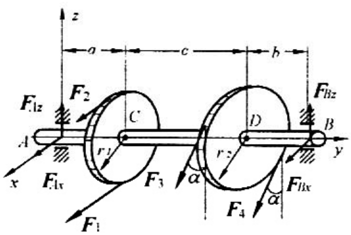
$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_z + 200F_x - 75F_y = 0$$

解得 $F_{Ox} = 150\ \text{N}, F_{Oy} = 75\ \text{N}, F_{Oz} = 500\ \text{N}$,

$M_x = 100\ \text{N}\cdot\text{m}, M_y = -37.5\ \text{N}\cdot\text{m}, M_z = -24.38\ \text{N}\cdot\text{m}$



题 4.17 图



题 4.18 图

4.18 已知 $r_1 = 200\ \text{mm}, r_2 = 250\ \text{mm}, c = 1\,000\ \text{mm}$, $\alpha = 30^\circ, a = b = 500\ \text{mm}$, $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 平行于 x 轴, $F_1 = 2F_2 = 5\,000$ N, $F_3 = 2F_4$;

求 拉力 F_3、F_4 和轴承 A、B 的约束反力。

解 整体受力如图，由

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_2 r_1 - F_1 r_1 + F_3 r_2 - F_4 r_2 = 0$$

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{Bz}(a + b + c) - (F_3 + F_4)(a + c)\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Z = 0, \quad F_{Az} + F_{Bz} - (F_3 + F_4)\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_{Bx}(a + b + c) - (F_3 + F_4)(a + c)\sin\alpha - (F_1 + F_2)a = 0$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} + F_1 + F_2 + (F_3 + F_4)\sin\alpha + F_{Bx} = 0$$

解得 $F_3 = 4\ 000\ \text{N}, F_4 = 2\ 000\ \text{N}, F_{Bz} = 3\ 897\ \text{N},$

$F_{Az} = 1\ 299\ \text{N}, F_{Bx} = -4\ 125\ \text{N}, F_{Ax} = -6\ 375\ \text{N}$

4.19 已知 $P_1 = 60\ \text{N}$，轮的半径是卷筒的半径的六倍，其它尺寸如图所示；

求 重物 P_2 的重量，以及轴承 A 与 B 的约束反力。

解 设卷筒半径为 r，该系统受力如图，图中 $F = P_1$，由

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F6r - P_2 r = 0$$

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 1.5F_{Bz} - 1 \cdot P_2 + 0.5F\sin30^\circ = 0$$

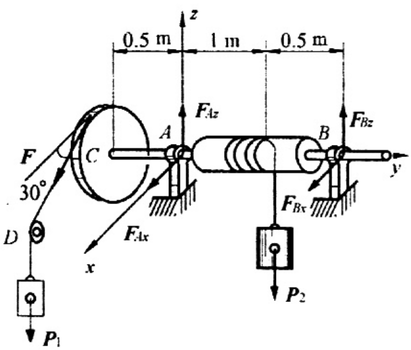
$$\Sigma Z = 0, \quad F_{Az} + F_{Bz} - P_2 - F\sin30^\circ = 0$$

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -1.5F_{Bx} + 0.5F\cos30^\circ = 0$$

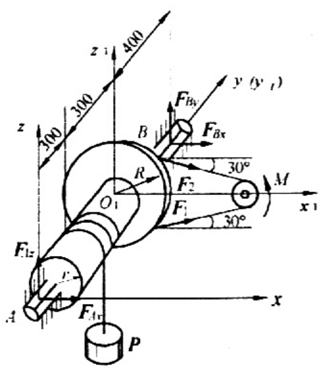
$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} + F_{Bx} + F\cos30^\circ = 0$$

解得 $P_2 = 360\ \text{N},\ F_{Az} = 160\ \text{N},$

$F_{Bz} = 230\ \text{N},\ F_{Ax} = -40\sqrt{3}\ \text{N},\ F_{Bx} = 10\sqrt{3}\ \text{N}$



题 4.19 图



题 4.20 图

4.20 已知 $r = 100\ \text{mm}, R = 200\ \text{mm}, P = 10\ \text{kN}$,主动边(下边)拉力为从动边拉力的两倍,其它尺寸如图所示;

求 支座 A 和 B 的反力以及链条的拉力。

解 把链条断开,该系统受力如图,图中 $F_1 = 2F_2$,由

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0,\quad (F_2 - F_1)R + Pr = 0$$

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 1\,000F_{Bz} + 600(F_1 - F_2)\sin30^\circ - 300P = 0$$

$$\Sigma Z = 0,\quad F_{Az} + F_{Bz} + (F_1 - F_2)\sin30^\circ - P = 0$$

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0,\quad -1\,000F_{Bx} - 600(F_1 + F_2)\cos30^\circ = 0$$

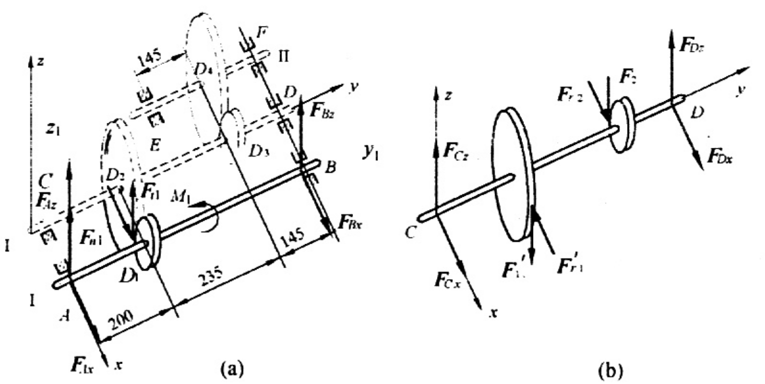
$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_{Bx} + (F_1 + F_2)\cos30^\circ = 0$$

解得 $F_1 = 10\ \text{kN},\ F_2 = 5\ \text{kN},\ F_{Bz} = 1.5\ \text{kN}$

$F_{Az} = 6\ \text{kN},\ F_{Bx} = -7.8\ \text{kN},\ F_{Ax} = -5.2\ \text{kN}$

4.21 已知 $M_1 = 697\ \text{N}\cdot\text{m}, D_1 = 160\ \text{mm}, D_2 = 632\ \text{mm}, D_3 = 204\ \text{mm}$,齿轮压力角为 20°,不计各零件自重;

求 轴承 A、B、C、D 处 的约束反力。



题 4.21 图

解 先研究 AB 轴系统,受力如图(a),由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_{n1} + F_{Bx} = 0$$

$$\Sigma Z=0,\quad F_{Az}+F_1+F_{Bz}=0$$

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad 580F_{Bz}+200F_1=0$$

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad F_1\frac{D_1}{2}-M_1=0$$

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad -580F_{Bx}-200F_{r1}=0$$

其中 $F_{r1}=F_1\tan20^\circ$，注意单位的统一，解得

$$F_1=8712.5\ \text{N},F_{r1}=3171\ \text{N},F_{Bz}=-3.004\ \text{kN}$$

$$F_{Az}-5.708\ \text{kN},F_{Bx}=-1.093\ \text{kN},F_{Ax}=-2.078\ \text{kN}$$

再研究 CD 轴系统，受力如图(b)，由

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad F_1'\frac{D_2}{2}-F_2\frac{D_3}{2}=0$$

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad 580F_{Dz}-435F_2-200F_1'=0$$

$$\Sigma Z=0,\quad F_{Cz}+F_{Dz}-F_1'-F_2=0$$

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad -580F_{Dx}-435F_{r2}+200F_{r1}'=0$$

$$\Sigma X=0,\quad F_{Cx}+F_{Dx}+F_{r2}-F_{r1}'=0$$

注意到 $F_{r2}=F_2\tan20^\circ$，解得

$$F_2=26\,992\ \text{N},F_{r2}=9\,824\ \text{N},F_{Dz}=23.25\ \text{kN},$$

$$F_{Cz}=12.46\ \text{kN},F_{Dx}=-6.275\ \text{kN},F_{Cx}=-0.378\ \text{kN}$$

4.22 已知 $M_z=1\,200\ \text{N}\cdot\text{m}$，$F_t:F_a:F_r=1:0.32:0.17$，$P=12\ \text{kN}$，$OB=0.6\ \text{m}$；

求 轴承 C、A 的约束反力。

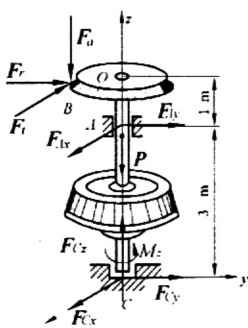
解 整体受力如图所示，

由 $\Sigma M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad M_z-F_t\cdot OB=0$

解得 $F_t=2\,000\ \text{N}$

又由 $F_t:F_a:F_r=1:0.32:0.17$，

得到 $F_a=640\ \text{N},F_r=340\ \text{N}$。



题 4.22 图

再由平衡方程

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0,\quad -3F_{Ay} - 4F_r + 0.6F_a = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} + F_{Cy} + F_r = 0$$

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 3F_{Ax} - 4F_t = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_{Cx} - F_t = 0$$

$$\Sigma Z = 0,\quad F_{Cz} - P - F_a = 0$$

解得 $F_{Ay} = -325.3$ N, $F_{Cy} = -14.7$ N, $F_{Ax} = 2\,667$ N,

$F_{Cx} = -666.7$ N, $F_{Cz} = 12\,640$ N

4.23 已知 均质长方形薄板重 $P = 200$ N；

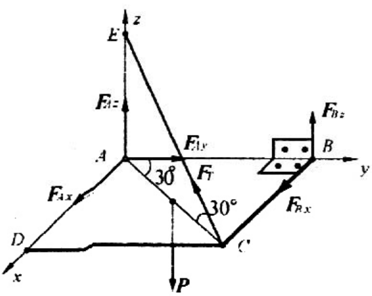
求 球铰 A、蝶铰 B 的约束反力及绳子的拉力。

解 研究板，受力如图，设 $CD = a, BC = b$，由

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$P\frac{b}{2} - bF_T\sin30^\circ = 0$$

$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F}) = 0,$$



题 4.23 图

$$aF_T\sin30^\circ - P\frac{a}{2} + F_{Bz}a = 0$$

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0,\ -aF_{Bx} = 0$$

$$\Sigma X = 0,\quad F_{Ax} + F_{Bx} - F_T\cos30^\circ\sin30^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - F_T\cos30^\circ\cos30^\circ = 0$$

$$\Sigma Z = 0,\quad F_{Az} - P + F_T\sin30^\circ + F_{Bz} = 0$$

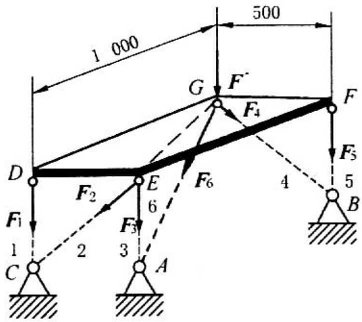
解得 $F_T = 200$ N，$F_{Bz} = 0$，$F_{Bx} = 0$

$F_{Ax} = 86.6$ N，$F_{Ay} = 150$ N，$F_{Az} = 100$ N

4.24 已知　G 处受力 F 作用，板和杆的自重不计；

求　各杆的内力。

解　板的受力如图，由 $\Sigma M_{AE}(\boldsymbol{F})=0$、$\Sigma M_{CD}(\boldsymbol{F})=0$ 以及 $\Sigma M_{BF}(\boldsymbol{F})=0$，分别得 $F_4=0$，$F_6=0$，$F_2=0$



题 4.24 图

再由　$\Sigma M_{EF}(\boldsymbol{F})=0$，

$$-500F_1-500F=0$$

$$\Sigma M_{GF}(\boldsymbol{F})=0,\quad 1\,000F_1+1\,000F_3=0$$

$$\Sigma M_{DE}(\boldsymbol{F})=0,\quad -1\,000F_5-1\,000F=0$$

得　$F_1=-F$(压)，$F_3=F$，$F_5=-F$(压)

4.25 已知　力偶矩 M_2 与 M_3，曲杆自重不计；

求　使曲杆保持平衡的力偶矩 M_1 和支座 A、D 的反力。

解　曲杆整体受力如图，由平衡方程

$$\Sigma X=0,\quad F_{Dx}=0$$

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad aF_{Az}-M_2=0$$

$$\Sigma Z=0,\quad F_{Az}-F_{Dz}=0$$

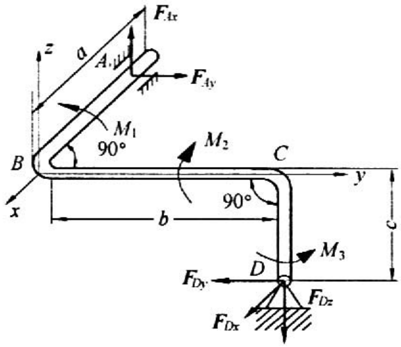
$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad M_3-aF_{Ay}=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad F_{Ay}-F_{Dy}=0$$

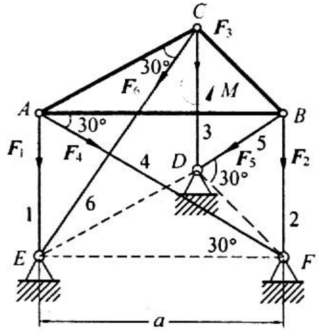
$$\Sigma M_x(\boldsymbol{F})=0,\quad M_1-F_{Dz}b-F_{Dy}c=0$$

解得　$F_{Dx}=0$，$F_{Az}=\dfrac{M_2}{a}$，$F_{Dz}=\dfrac{M_2}{a}$，$F_{Ay}=\dfrac{M_3}{a}$，

$$F_{Dy}=\frac{M_3}{a},\quad M_1=\frac{b}{a}M_2+\frac{c}{a}M_3$$



题 4.25 图



题 4.26 图

4.26 已知 等边三角形板的边长为 a，在板面内作用一矩为 M 的力偶，板、杆自重不计；

求 各杆的内力。

解 三角形板 ABC 受力如图，由

$$\sum M_{DC}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_4 \cos 30^\circ \cdot a \cos 30^\circ + M = 0$$

$$\sum M_{EA}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_5 \cos 30^\circ \cdot a \cos 30^\circ + M = 0$$

$$\sum M_{FB}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_6 \cos 30^\circ \cdot a \cos 30^\circ + M = 0$$

$$\sum M_{CB}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_1 a \cos 30^\circ + F_4 \sin 30^\circ \cdot a \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum M_{CA}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_2 a \cos 30^\circ - F_5 \sin 30^\circ \cdot a \cos 30^\circ = 0$$

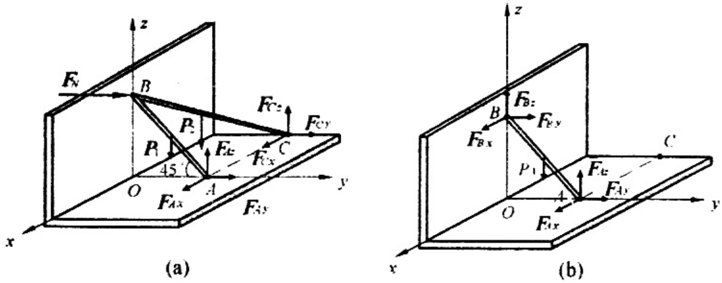
$$\sum M_{AB}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_3 a \cos 30^\circ - F_6 \sin 30^\circ \cdot a \cos 30^\circ = 0$$

解得 $F_4 = F_5 = F_6 = -\dfrac{4M}{3a}$(压)，$F_1 = F_2 = F_3 = \dfrac{2M}{3a}$(拉)

4.27 已知 均质杆 AB、BC 分别重为 P_1 与 P_2，A、B、C 均为球铰，B 端靠在铅直光滑的墙上，$\angle BAC = 90^\circ$；

求 球铰 A、C 的约束反力及 B 点墙面的法向反力。

解 先研究 AB 杆，受力如图(b)，由



题 4.27 图

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -F_{Ax} \cdot OA = 0 \qquad 得 F_{Ax} = 0$$

再取 AB、CD 两杆为一体来研究,受力如图(a)所示,由

$$\Sigma M_{AC}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad (P_1 + P_2)\frac{AB}{2}\cos 45^\circ - F_N \cdot AB\sin 45^\circ = 0$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Ax} + F_{Cx} = 0$$

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{Cz} \cdot AC - P_2\frac{1}{2} \cdot AC = 0$$

$$\Sigma Z = 0, \quad F_{Az} + F_{Cz} - P_1 - P_2 = 0$$

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F}) = 0, \quad -(F_{Ax} + F_{Cx}) \cdot OA - F_{Cy} \cdot AC = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{Ay} + F_{Cy} + F_N = 0$$

解得
$$F_N = \frac{1}{2}(P_1 + P_2), F_{Cx} = 0, F_{Cz} = \frac{1}{2}P_2,$$
$$F_{Az} = P_1 + \frac{1}{2}P_2, F_{Cy} = 0, F_{Ay} = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$$

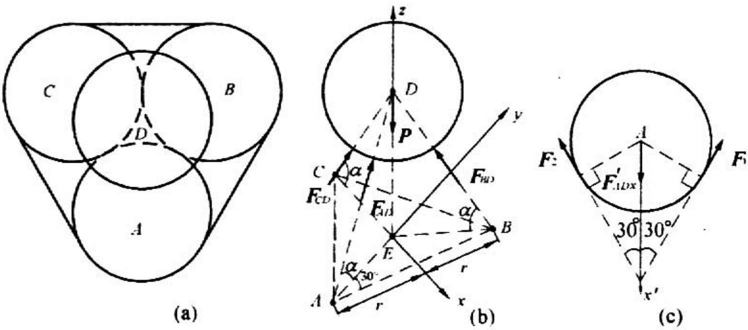
4.28 已知 均质球的半径均为 r,重均为 P,图(a);

求 绳的张力 F(本题意欲求维持球的平衡所需绳的最小张力,此时 A、B、C 三球之间的压力为零)。

解 先研究球 D,如图(b),为空间汇交力系,由

$$\Sigma X = 0, \quad -F_{AD}\cos\alpha\sin 30^\circ - F_{BD}\cos\alpha\sin 30^\circ + F_{CD}\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{AD}\cos\alpha\cos 30^\circ - F_{BD}\cos\alpha\cos 30^\circ = 0$$



题 4.28 图

$$\Sigma Z = 0,\quad (F_{AD} + F_{BD} + F_{CD})\sin\alpha - P = 0$$

式中 $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 解得 $F_{AD} = F_{BD} = F_{CD} = \dfrac{P}{\sqrt{6}}$

再研究 球 A ,它在水平面内受力如图(c),由

$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\ F_1 r - F_2 r = 0,$ 得 $F = F_1 = F_2$

又 $\Sigma F_{x'} = 0,\ F_{ADx'} - 2F\cos30^\circ = 0,$ $F_{ADx'} = F_{AD}\cos\alpha$

解得 $F = \dfrac{P}{3\sqrt{6}}$

4.29 已知 $AB = CD = 2r$,绳长 l,杆重为 P,角 α ;

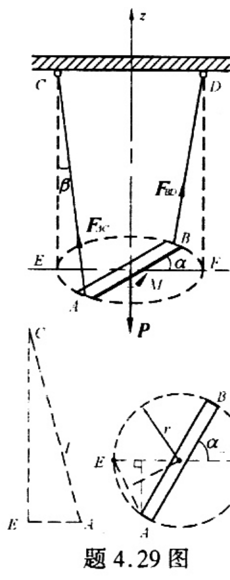
求 使杆在图示位置平衡时所需的力偶矩 M 以及绳内的拉力 F 。

解 AB 杆受力如图,由

$$\Sigma M_{EF}(\boldsymbol{F}) = 0,\quad -F_{AC}\cos\beta\cdot r\sin\alpha + F_{BD}\cos\beta\cdot r\sin\alpha = 0$$

解得 $F_{AC} = F_{BD} = F$

由 $\Sigma Z = 0,\quad 2F\cos\beta - P = 0$



题 4.29 图

解得 $$F=\frac{Pl}{2\sqrt{l^2-4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

由 $\Sigma M_z(\boldsymbol{F})=0$,

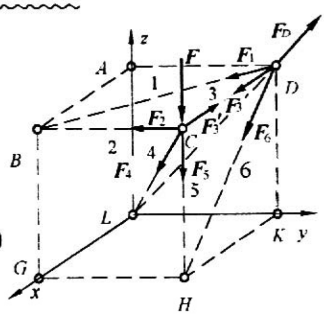
$$M-2F\sin\beta\cdot r\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

解得 $$M=\frac{Pr^2\sin\alpha}{\sqrt{l^2-4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

4.30 已知 力 F 与力 F_D，杆重不计，图示为一正方体；

求 各杆的内力。

解 先研究节点 D，由



题 4.30 图

$\Sigma Y=0,\ -F_1\cos45^\circ+F_D\cos45^\circ=0$

$\Sigma Z=0,\ -F_6\cos45^\circ+F_D\sin45^\circ=0$

$\Sigma X=0,\ F_1\sin45^\circ+F_3+F_6\sin45^\circ=0$

解得 $F_1=F_D$(拉)，$F_6=F_D$(拉)，$F_3=-\sqrt{2}F_D$(压)

然后研究节点 C，由

$$\Sigma X=0,\quad -F_3'-F_4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos45^\circ=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad -F_2-F_4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin45^\circ=0$$

$$\Sigma Z=0,\quad -F_5-F-F_4\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

得 $F_4=\sqrt{6}F_D$，$F_2=-\sqrt{2}F_D$，$F_5=-(F+\sqrt{2}F_D)$

4.31 已知 机床重 50 kN，$\theta=0^\circ$ 时，秤上读数为 35 kN；$\theta=20^\circ$ 时，秤 上读数为 30 kN；

求　机床重心的位置。

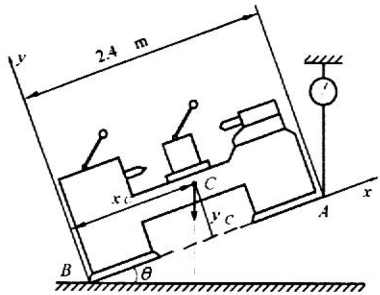
解　当 $\theta = 0^\circ$ 时，

由 $\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0$，$35 \times 2.4 - 50 \times x_C = 0$，解得 $x_C = 1.68\ \mathrm{m}$

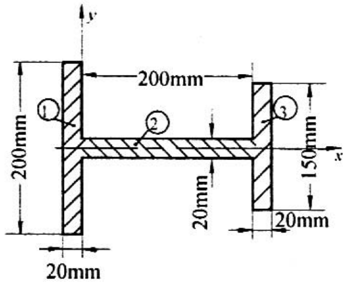
当 $\theta = 20^\circ$ 时，由

$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0$，　$30 \times 2.4\cos\theta - 50 \times (x_C - y_C\tan\theta)\cos\theta = 0$

解得　　　　$y_C = 0.659\ \mathrm{m}$



题 4.31 图



题 4.32 图

4.32　已知　工字钢截面尺寸如图所示；

求　此截面的几何中心。

解　$S_1 = S_2 = 4\ 000\mathrm{mm}^2$，　$S_3 = 3\ 000\mathrm{mm}^2$

$x_1 = -10\mathrm{mm}$，$x_2 = 100\mathrm{mm}$，$x_3 = 210\mathrm{mm}$

由对称性，$y_C = 0$；　而 $x_C = \dfrac{\Sigma S_i x_i}{\Sigma S_i} = 90\ \mathrm{mm}$

4.33　已知　薄板形状与尺寸如图所示；

求　此薄板重心的位置。

解　如图所示，把此薄板分为矩形、三角形与四分之一圆形三部分，其面积和重心坐标分别为

$S_1 = 54\ 000\ \mathrm{mm}^2$，$S_2 = 15\ 000\ \mathrm{mm}^2$，$S_3 = 7\ 854\ \mathrm{mm}^2$；

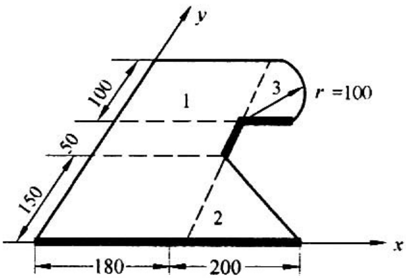
$x_1 = 90\ \mathrm{mm}$，$x_2 = 246.7\ \mathrm{mm}$，

$$x_3 = 180 + \frac{2}{3} \times \frac{100 \sin 45^\circ}{\frac{\pi}{4}} \cos 45^\circ = 222.4 \text{ mm},$$

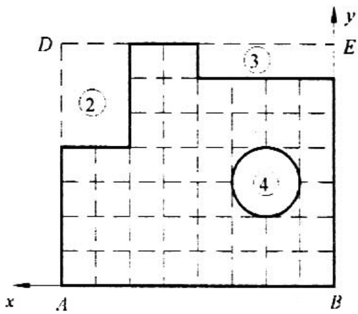
$$y_1 = 150 \text{ mm}, \ y_2 = 50 \text{ mm},$$

$$y_3 = 200 + \frac{2}{3} \times \frac{100 \sin 45^\circ}{\frac{\pi}{4}} \sin 45^\circ = 242.4 \text{ mm}$$

整板重心坐标 $x_C = \dfrac{\Sigma S_i x_i}{\Sigma S_i} = 135 \text{ mm}$，$y_C = \dfrac{\Sigma S_i y_i}{\Sigma S_i} = 140 \text{ mm}$



题 4.33 图



题 4.34 图

4.34 已知　平面图形中一方格的边长为 20 mm；

求　挖去一圆后剩余部分面积的重心位置。

解　把此平面图形分为一个大矩形 $ABED$ 和两个小矩形及一个圆四部分,其面积和重心坐标分别为

$$S_1 = 22\,400 \text{ mm}^2, \ x_1 = 80 \text{ mm}, \ y_1 = 70 \text{ mm};$$

$$S_2 = -2\,400 \text{ mm}^2, \ x_2 = 140 \text{ mm}, \ y_2 = 110 \text{ mm};$$

$$S_3 = -1\,600 \text{ mm}^2, \ x_3 = 40 \text{ mm}, \ y_3 = 130 \text{ mm};$$

$$S_4 = -400\pi, \ x_4 = 40 \text{ mm}, \ y_4 = 60 \text{ mm}$$

剩余部分面积的重心为

$$x_C = \frac{\Sigma S_i x_i}{\Sigma S_i} = 78.26 \text{ mm}, \ y_C = \frac{\Sigma S_i y_i}{\Sigma S_i} = 59.53 \text{ mm}$$

4.35 已知　$AD = a$；

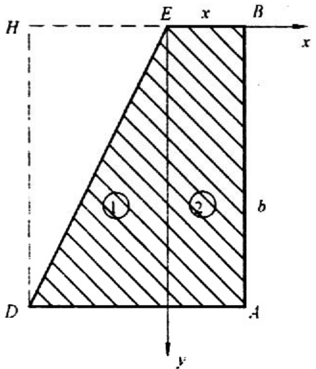
求　若将图示均质梯形板在点 E 挂起，且使 AD 边保持水平，BE 应等于多少？

解　设坐标系如图，要使 AD 边水平，梯形板的重心应在 y 轴上，即 $x_C = 0$；把梯形板分为三角形与矩形两部分，

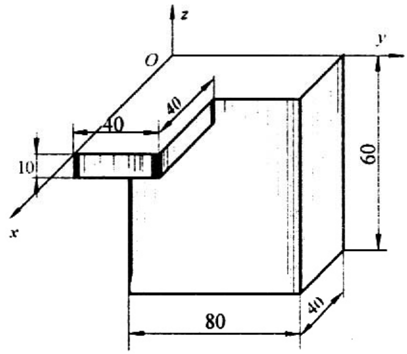
设
$$EB = x, \quad AB = b$$

由
$$x_C = \frac{\Sigma S_i x_i}{\Sigma S_i} = 0, \ \frac{x}{2} \cdot bx - \frac{b}{6}(a - x)^2 = 0$$

解出
$$BE = x = 0.366a$$



题 4.35 图



题 4.36 图

4.36 已知　均质块尺寸如图所示；

求　均质块重心的位置。

解　把此均质块分为两个立方体，其体积和重心坐标分别为

$V_1 = 192\ 000\ \text{mm}^3$，$x_1 = 20\ \text{mm}$，$y_1 = 40\ \text{mm}$，$z_1 = (-30)\ \text{mm}$

$V_2 = 16\ 000\ \text{mm}^3$，$x_2 = 60\ \text{mm}$，$y_2 = 20\ \text{mm}$，$z_2 = (-5)\ \text{mm}$

此均质块重心坐标为　$x_C = \frac{\Sigma V_i x_i}{\Sigma V_i} = 23.1\ \text{mm}$，

$$y_C = \frac{\Sigma V_i y_i}{\Sigma V_i} = 38.5 \text{ mm}, z_C = \frac{\Sigma V_i z_i}{\Sigma V_i} = -28.1 \text{ mm}$$

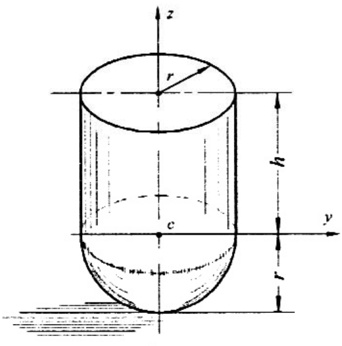
4.37 已知 均质物体尺寸如图；

求 当此物重心恰好在半球体的中心 C 时，圆柱体的高。

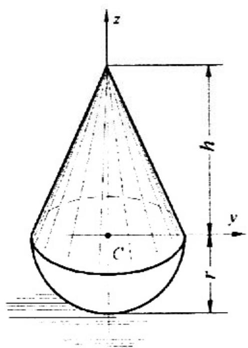
解 设图示坐标系原点为 C，则

$$z_c = \frac{\pi r^2 h \frac{h}{2} + \frac{2}{3}\pi r^3(-\frac{3}{8}r)}{\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3} = 0$$

解得
$$h = \frac{r}{\sqrt{2}}$$



题 4.37 图



题 4.38 图

4.38 已知 均质物体尺寸如图；

求 当此物重心恰好在半球体的中心 C 时，圆锥体的高。

解 设图示坐标系原点为 C，则

$$z_C = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h \frac{h}{4} + \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot (-\frac{3}{8}r)}{\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3} = 0$$

解得
$$h = \sqrt{3}r$$

第五章　摩　　擦

5.1　已知　P、α、θ 及摩擦角 φ；

求　拉动物体时力 F_T 的值及 θ 角为何值时，此力为最小。

解　物体受力如图(a)，当运动即将发生时，有

$F_S = f_S F_N = \tan\varphi F_N$

$\Sigma X = 0,\ F_T\cos\theta - F_S - P\sin\alpha = 0$

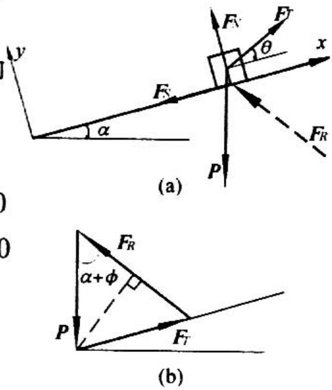
$\Sigma Y = 0,\ F_T\sin\theta + F_N - P\cos\alpha = 0$

解得拉动物体时的力至少为

$$F_T = \frac{P\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\theta-\varphi)}$$

由此式可看出，当 $\theta = \varphi$ 时，F_T 有最小值　$F_{T\min} = P\sin(\alpha+\varphi)$

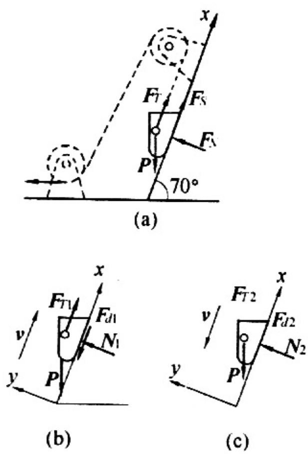
若用几何法求解，则全反力 $\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_S + \boldsymbol{F}_N$ 如图(a)中虚线所示，封闭的力三角形如图(b)，当 $\boldsymbol{F}_T \perp \boldsymbol{F}_R$ 时，$\boldsymbol{F}_T$ 最小，仍可得到上面的结果。



题 5.1 图

5.2　已知　$P = 25$ kN，料斗与滑道间的静、动滑动摩擦系数 $f_S = f = 0.3$；

求　(1) 若绳子拉力分别为 $F_{T1} = 22$ kN 与 $F_{T2} = 25$ kN 时，料斗处于静止状态，料斗与滑道间



题 5.2 图

的摩擦力；

(2)料斗匀速上升和下降时绳子的拉力。

解　(1)设摩擦力 F_S 向上，料斗受力如图，有

$$\Sigma X = 0,\ F_{T1} + F_S - P\sin 70^\circ = 0$$

将 $F_{T1} = 22\ \text{kN}$ 代入得

$$\underline{F_{S1} = 1.492\ \text{kN}(\nearrow)},$$

将 $F_{T2} = 25\ \text{kN}$ 代入得

$$\underline{F_{S2} = -1.508\ \text{kN}(\swarrow)}$$

(2)当料斗匀速上升时，对图(b)有

$$F_{d1} = fF_{N1}$$

$$\Sigma X = 0,\ F_{T1} - F_{d1} - P\sin 70^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\ F_{N1} - P\cos 70^\circ = 0$$

解得

$$\underline{F_{T1} = 26.06\ \text{kN}}$$

当匀速下降时，对图(c)有

$$F_{d2} = fF_{N2}$$

$$\Sigma X = 0,\ F_{T2} + F_{d2} - P\sin 70^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\ F_{N2} - P\cos 70^\circ = 0$$

解得

$$\underline{F_{T2} = 20.93\ \text{kN}}$$

5.3　已知　$P_A = 5\,000\ \text{N}, P_B = 6\,000\ \text{N}$；$A$ 与 B、B 与地之间的静滑动摩擦系数分别为 $f_{S1} = 0.1$、$f_{S2} = 0.2$；

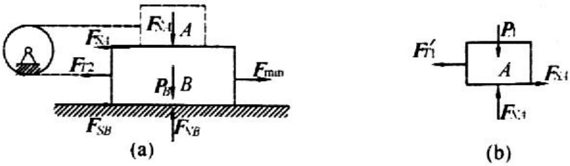
求　使系统运动的水平力 $\boldsymbol{F}$ 的最小值。

解　在临界状态，对物 A (图(b))，有

$$F_{SA} = f_{S1}F_{NA}$$

$$\Sigma X = 0,\ F_{SA} - F_{T1} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\ F_{NA} - P_A = 0$$



题 5.3 图

对物 B (图(a)),有 $F_{T2} = F_{T1}$,且

$$F_{SB} = f_{S2}F_{NB}$$

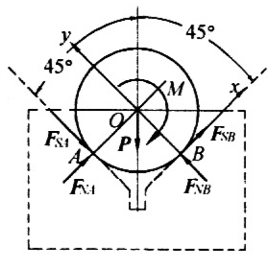
$$\Sigma X = 0,\ F_{\min} - F_{SA}' - F_{SB} - F_{T2} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\ F_{NB} - P_B - F_{NA}' = 0$$

解得 $F_{\min} = 3\ 200\ \mathrm{N}$

5.4 已知 $P = 400\ \mathrm{N}$,直径 $D = 0.25\ \mathrm{m}$,欲转动棒料需力偶矩 $M = 15\ \mathrm{N \cdot m}$;

求 棒料与 V 形铁间的摩擦系数 f_S。



题 5.4 图

解 棒料受力如图,在临界状态,

$$F_{SB} = f_S F_{NB},\quad F_{SA} = f_S F_{NA}$$

$$\Sigma X = 0,\ F_{NA} + F_{SB} - P\sin 45^\circ = 0$$

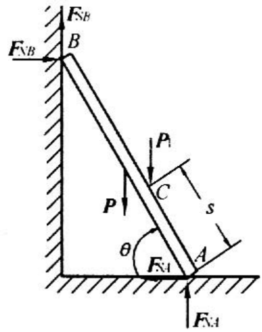
$$\Sigma Y = 0,\ F_{NB} - F_{SA} - P\cos 45^\circ = 0$$

$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\ (F_{SA} + F_{SB})\frac{D}{2} - M = 0$$

解得 $f_S = 0.223$

5.5 已知　梯长 l，$\theta = 60°$，重 $P = 200\ \text{N}$；人重 $P_1 = 650\ \text{N}$；A、B 处的摩擦系数均为 $f_S = 0.25$；

求　人所能达到的最高点 C 到 A 点的距离 s。



题 5.5 图

解　整体受力如图，设 C 点为人所能达到的极限位置，此时

$$F_{SA} = f_S F_{NA}, \quad F_{SB} = f_S F_{NB}$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{NB} - F_{SA} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{NA} + F_{SB} - P - P_1 = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,$$

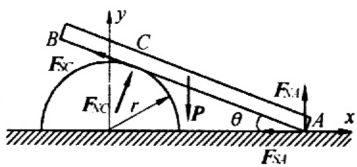
$$-F_{NB} l \sin\theta - F_{SB} l \cos\theta + P \frac{l}{2} \cos\theta + P_1 s \cos\theta = 0$$

解得

$$s = 0.456l$$

5.6 已知　$AB = 2b$、固定半圆柱半径为 r、f_S，均质杆重为 P；

求　杆平衡时角 θ 的最大值。



题 5.6 图

解　AB 杆受力如图，在临界状态，有

$$F_{SA} = f_S F_{NA}$$

$$F_{SC} = f_S F_{NC}$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{NC} \sin\theta - F_{SC} \cos\theta - F_{SA} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{NC} \cos\theta + F_{SC} \sin\theta + F_{NA} - P = 0$$

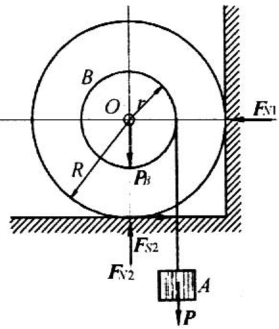
$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad Pb \cos\theta - F_{NC} \cdot AC = 0$$

解得

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{f_S r}{(1 + f_S^2) b}}$$

5.7 已知 轮重 $P_B = 500\ \mathrm{N}, R = 200\ \mathrm{mm}, r = 100\ \mathrm{mm}$，轮与地板面间的静摩擦系数 $f_S = 0.25$，墙壁光滑；

求 为保持平衡，物 A 的最大重量 P。



题 5.7 图

解 鼓轮受力如图，在临界状态，有

$$F_{S2} = f_S F_{N2}$$

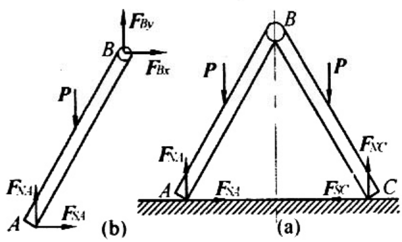
$$\Sigma Y = 0, \quad F_{N2} - P_B - P = 0$$

$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{S2}R - Pr = 0$$

解得 $\underline{P = 500\ \mathrm{N}}$

5.8 已知 两均质杆，立于水平面上，处于临界平衡状态，且 $AB = BC = AC$；

求 A、B 两处的静摩擦系数。



题 5.8 图

解 设每根杆重为 P，杆长为 l，整体受力如图(a)，由 $\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0$，

$$\frac{3}{2}lP\cos60^\circ + \frac{l}{2}P\cos60^\circ - 2lF_{NA}\cos60^\circ = 0$$

解得 $$F_{NA} = P$$

再研究 AB 杆，受力如图(b)，在临界平衡时，有

$$F_{SA} = f_S F_{NA}$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0, \quad P\frac{l}{2}\cos60^\circ + F_{SA}l\sin60^\circ - F_{NA}l\cos60^\circ = 0$$

解得 $f_S = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$，由于对称，故 $\underline{f_{SA} = f_{SC} = f_S = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$

5.9　已知　$d = 300\ \mathrm{mm}, b = 100\ \mathrm{mm}, f_S = 0.5$，人重为 P；

求　确保安全的最小距离 l。

解　套钩受力如图(a)，临界平衡时，有

$$F_{SA} = f_S F_{NA}, \quad F_{SB} = f_S F_{NB}$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{NB} - F_{NA} = 0$$

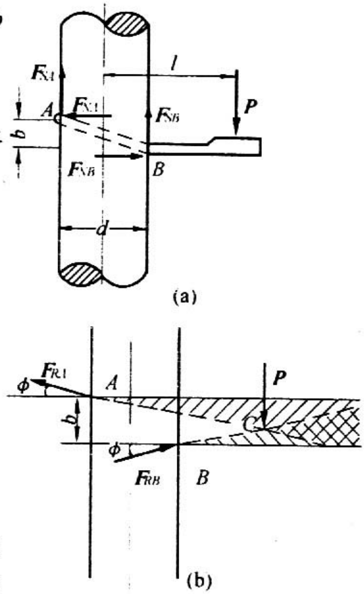
$$\Sigma Y = 0, \quad F_{SB} + F_{SA} - P = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$F_{SB}d + F_{NB}b - P\left(l + \frac{d}{2}\right) = 0$$

解得　$l = \dfrac{b}{2f} = 100\ \mathrm{mm}$

用几何法求解时，套钩受力如图(b)，图中全反力 $\boldsymbol{F}_{RA}$、$\boldsymbol{F}_{RB}$ 与重力 $\boldsymbol{P}$ 汇交于点 C，由图可得



题 5.9 图

$$b = \left(l + \frac{d}{2}\right)\tan\varphi + \left(l - \frac{d}{2}\right)\tan\varphi$$

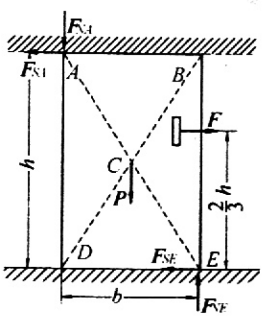
$$= 2l\tan\varphi = 2lf$$

同样得　$l = \dfrac{b}{2f}$

5.10　已知　h、F，以及门与上下导轨间的静摩擦系数 f_S；

求　为使门能滑动，门的最小宽度；又门的自重对此有无影响。

解　设门重为 P，当门即将滑动时，



题 5.10 图

$$F_{SA} = f_S F_{NA}, \quad F_{SE} = f_S F_{NE}$$

$$\Sigma X = 0, \quad F - F_{SA} - F_{SE} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{NE} - F_{NA} - P = 0$$

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{SA}h + F_{NA}b + \frac{b}{2}P - \frac{2}{3}hF = 0$$

解得为使门能滑动，门的最小宽度为 $\qquad b = \frac{1}{3}f_S h + \frac{f_S^2 Ph}{F}$

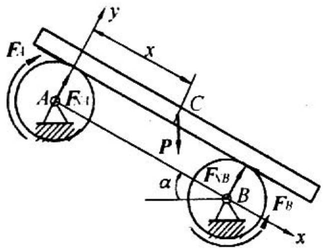
当门被卡住时，无论 $\boldsymbol{F}$ 力多大，门仍被卡住，得 $\quad b_{\min} = \frac{1}{3}f_S h$

可见，门重与此最小宽度无关。

5.11 已知 $AB = 2a$，角 α，动摩擦系数 f，板重 P，两轮反向转动；

求 平衡时板重心 C 的位置 x 。

解 长板受力如图，当板平衡时，



题 5.11 图

$$\Sigma X = 0,\quad F_A - F_B + P\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{NA} + F_{NB} - P\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 2aF_{NB} - P\cos\alpha x = 0$$

式中 $\qquad F_A = fF_{NA},\quad F_B = fF_{NB}$

解得 $\qquad x = a + \frac{a}{f}\tan\alpha$

5.12 已知 $d = 500$ mm，$a = 5$ mm，轧辊与铁板间的摩擦系数为 $f_S = 0.1$；

求 轧机所能轧压的铁板厚度。

解 铁板受力如图，为轧压铁板，应有

$$\Sigma X > 0,\quad 2(F_A\cos\alpha - F_{NA}\sin\alpha) > 0$$

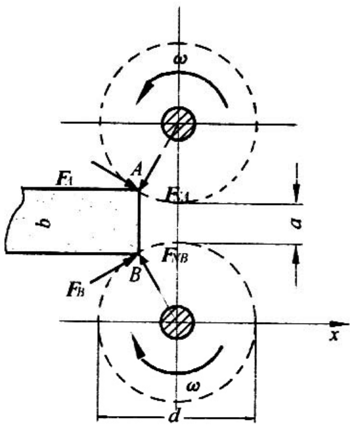
且 $\qquad F_A < f_S F_{NA}$

解得 $\qquad f_S > \tan\alpha$

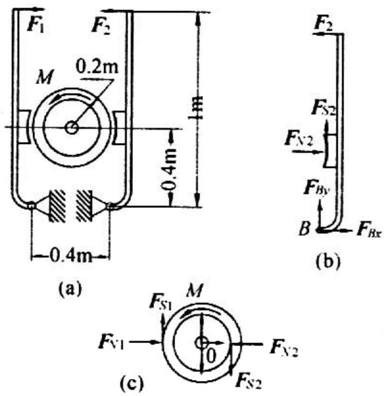
图中

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - \frac{b-a}{2}\right)^2}}{\frac{d}{2} - \frac{b-a}{2}}$$

所以可解出 $$b < d\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+f_S^2}}\right) = 7.48\ \text{mm}$$



题 5.12 图



题 5.13 图

5.13 已知 $F_1 = F_2, M = 160\ \text{N}\cdot\text{m}$,闸块与轮面间的摩擦系数 $f_S = 0.2$;

求 F_1、F_2 应为多大,方能使轮处于平衡状态。

解 设系统处于平衡状态,右侧杠杆受力如图(b),由 $\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0$,

$$F_2 \cdot 1 - F_{N2} \cdot 0.4 = 0$$

以及 $$F_{S2} \leqslant f_S F_{N2}$$

解得 $$F_{S2} \leqslant 0.5 F_2$$

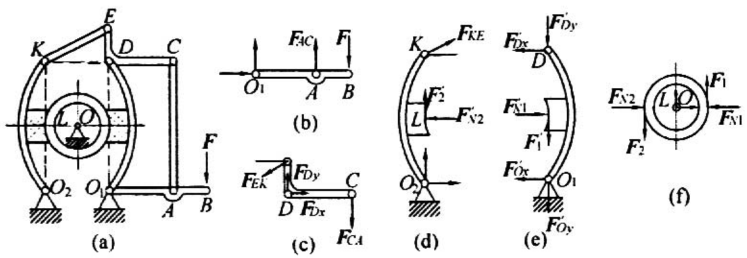
再研究轮子,如图(c),由

$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M - 0.2F_{S2}' - 0.2F_{S1}' = 0$$

式中 $F_{S2}' = F_{S1}' = F_{S2}$，解得 $\quad \underline{F_1 = F_2 \geqslant 800\ \text{N}}$

5.14 已知 $2R = O_1O_2 = KD = DC = O_1A = KL = O_2L = 0.5\ \text{m}, O_1B = 0.75\ \text{m}, AC = O_1D = 1\ \text{m}, ED = 0.25\ \text{m}$，闸块与轮面间的摩擦系数 $f_S = 0.5$，制动力 $F = 200\ \text{N}$，各零件自重不计；

求 作用于鼓轮上的制动力矩。



题 5.14 图

解 先研究 O_1AB 杆，受力如图(b)，

由 $$\Sigma M_{O1}(\boldsymbol{F}) = 0, \quad 0.5F_{AC} - 0.75F = 0$$

得 $$F_{AC} = 300\ \text{N}$$

接着研究 CDE，受力如图(c)，由

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F_{EK}\cos\alpha \cdot ED - F_{CA} \cdot CD = 0$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_{Dx} - F_{EK}\cos\alpha = 0$$

解得 $$F_{EK}\cos\alpha = 600\ \text{N}, \ F_{Dx} = 600\ \text{N}$$

再设轮子顺时针转动，则 O_2LK 与 O_1D 受力如图(d)、(e)，分别由

$$\Sigma M_{O2}(\boldsymbol{F}) = 0, \ F_{N2}' \cdot O_2L - F_{KE}\cos\alpha O_2K = 0$$

$$\Sigma M_{O1}(\boldsymbol{F}) = 0,\ F'_{Dx} \cdot O_1D - F'_{N1}\frac{1}{2}O_1D = 0$$

解得 $$F_{N2} = 1\ 200\ \text{N},\ F'_{N1} = 1\ 200\ \text{N}$$

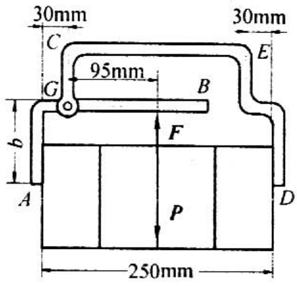
最后研究鼓轮，受力如图(f)，图中 $F_{S1} = f_S F_{N1}$，$F_{S2} = f_S F_{N2}$

所以 $$\underline{M_{制动} = \Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = F_{S1}R + F_{S2}R = 300\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

5.15 已知 砖重 $P = 120$ N，砖夹与砖之间的摩擦系数 $f_S = 0.5$；

求 能把砖提起所应有的尺寸 b。

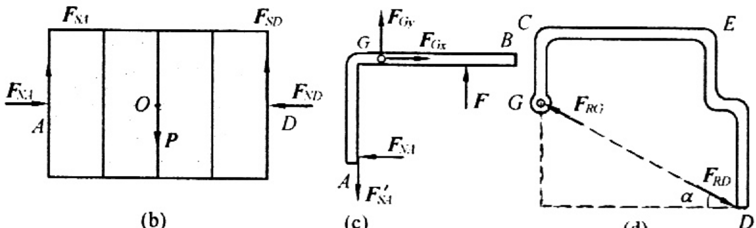
解 设提起砖时系统处于平衡状态，则由图(a)可知，$F = P$；



(a)

接着取砖为研究对象(图(b))，由 $\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0$，可得 $F_{SA} = F_{SD}$

再由 $\Sigma Y = 0$，$P - F_{SA} - F_{SD} = 0$



题 5.15 图

$$\Sigma X = 0,\quad F_{NA} - F_{ND} = 0$$

得 $$F_{SA} = F_{SD} = \frac{P}{2},\ F_{NA} = F_{ND}$$

最后研究曲杆 AGB，如图(c)，

由 $$\Sigma M_G(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 95F + 30F'_{sA} - bF'_{NA} = 0$$

解出 $$b=\frac{220F_{SA}}{F_{NA}}$$

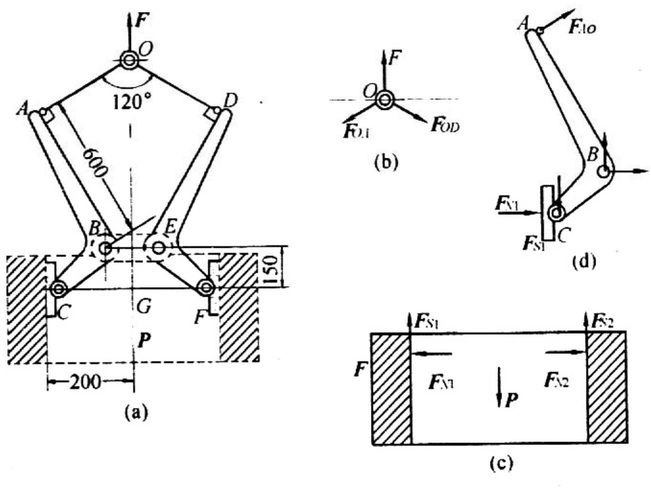
砖不下滑需满足条件 $$F_{SA}\leqslant f_S F_{NA}$$

由此两式可得 $$b\leqslant 110\ \text{mm}$$

此题也可只研究二力构件 $GCED$（图(d)），图中 $\tan\alpha=\dfrac{b}{220}$；砖不下滑，应有 $\tan\alpha\leqslant\tan\varphi=f_S$，由此即能解得尺寸 b。

5.16 已知 不计自重的夹具的尺寸如图(a)所示；

求 C、F 两处的摩擦系数为多大，才可提起重物。



题 5.16 图

解 先研究整体，如图(a)，有

$$F=P$$

接着研究节点 O，如图(b)，得

$$F_{OA}=F_{OD}=F=P$$

再研究重物，受力如图(c)，由对称性或列平衡方程，可得

$$F_{S1} = F_{S2} = \frac{P}{2}$$

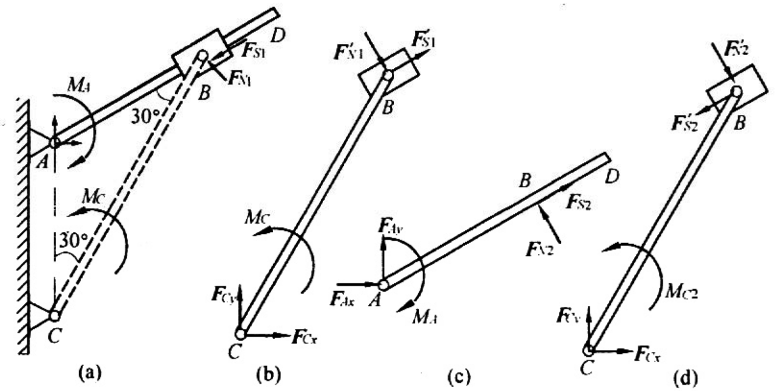
最后研究曲杆 ABC (图(d)),由

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 150F_{N1} + 200F_{S1} - 600F_{AO} = 0$$

以及重物不下滑的条件 $F_{S1} \leqslant f_S F_{N1}$,解得 $f_S \geqslant 0.15$

5.17 已知 $M_A = 40\ \mathrm{N \cdot m}$,$AD$ 杆与套筒间的摩擦系数 $f_S = 0.3$,自重均不计;

求 使系统平衡时力偶矩 M_C 的范围。



题 5.17 图

解 设 $M_C = M_{C1}$ 时,BC 杆与 AD 杆即将发生逆时针转动,两杆受力如图(a)、(b),分别有

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{N1} \cdot AB - M_A = 0$$

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_{C1} - F'_{N1} l \sin 60^\circ - F'_{S1} l \cos 60^\circ = 0$$

式中,$F'_{S1} = f_S F'_{N1}$ 解得 $M_{C1} = 70.39\ \mathrm{N \cdot m}$

同样,设 $M_C = M_{C2}$ 时,BC 杆与 AD 杆即将发生顺时针转动,两杆受力如图(c)、(d),分别有

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\ F_{N2} \cdot AB - M_A = 0$$

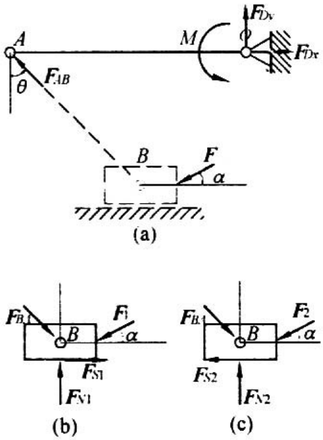
$$\sum M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\ F'_{s2} l \cos 60^\circ + M_{C2} - F'_{N2} l \sin 60^\circ = 0$$

式中，$F'_{S2} = f_S F'_{N2}$，解得 $\quad M_{C2} = 49.61\ \text{N}\cdot\text{m}$

综合上面得结果，得 $\quad 49.61\ \text{N}\cdot\text{m} \leqslant M_C \leqslant 70.39\ \text{N}\cdot\text{m}$

5.18 已知 $OA = l, \alpha、\theta, f_S$，且 $\tan\theta > f_S = \tan\varphi$，力偶矩 M；

求 机构在图示位置平衡时力 F 的值。



题 5.18 图

解 设 $F = F_1$ 时，滑块即将发生向左运动；对 OA 杆(图(a))，有

$\sum M_O(\boldsymbol{F}) = 0$，

$$M - F_{AB} l \cos\theta = 0 \qquad (*)$$

对滑块(图(b))，有

$$\sum X = 0,\ F_{BA}\sin\theta - F_1\cos\alpha + F_{S1} = 0$$

$$\sum Y = 0,\ F_{N1} - F_{BA}\cos\theta - F_1\sin\alpha = 0$$

式中 $\quad F_{S1} = f_S F_{N1},\ f_S = \tan\varphi$

解得
$$F_1 = \frac{M\sin(\theta+\varphi)}{l\cos\theta\cos(\alpha+\varphi)}$$

再设 $F = F_2$ 时，滑块即将发生向右运动；对滑块(图(c))，有

$$\sum X = 0,\quad F_{BA}\sin\theta - F_2\cos\alpha - F_{S2} = 0$$

$$\sum Y = 0,\quad F_{N2} - F_{BA}\cos\theta - F_2\sin\alpha = 0$$

式中 $\quad F_{S2} = f_S F_{N2},\ f_S = \tan\varphi$

与(＊)式联立，解得
$$F_2 = \frac{M\sin(\theta-\varphi)}{l\cos\theta\cos(\alpha-\varphi)}$$

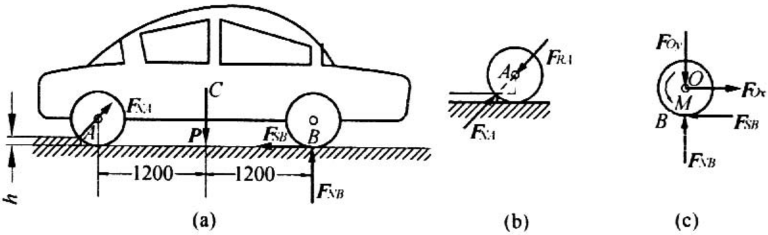
由
$$F_2 \leqslant F \leqslant F_1$$

得
$$\frac{M\sin(\theta-\varphi)}{l\cos\theta\cos(\alpha-\varphi)} \leqslant F \leqslant \frac{M\sin(\theta+\varphi)}{l\cos\theta\cos(\alpha+\varphi)}$$

此题在取 OA 为研究对象求得 F_{AB} 之后，利用摩擦角的概念，采用几何法求解是较简捷的方法，读者不妨一试。

5.19　已知　$P = 15$ kN，不计自重的车轮直径 $d = 600$ mm；

求　为使前轮越过 $h = 80$ mm 的障碍物，发动机给予后轮的力偶矩及此时后轮不打滑的静摩擦系数。



题 5.19 图

解　前轮若要越过障碍物，必须与水平地面脱离接触，故前轮此时是一个二力体(图(b))，全车受力如图(a)，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_{NA}\cos\alpha - F_{SB} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{NB} - P + F_{NA}\sin\alpha = 0$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 1.2P - 2.4F_{NA}\sin\alpha - 0.3F_{NA}\cos\alpha = 0$$

又
$$\sin\alpha = \frac{300 - 80}{300}$$

解得
$$F_{SB} = 6.224 \text{ kN},\ F_{NB} = 8.278 \text{ kN}$$

这时，为使后轮不打滑，应有 $F_{SB} \leqslant f_S F_{NB}$，可得 $f_S \geqslant 0.752$

再设发动机给予后轮的力偶之矩为 M，后轮受力如图(c)，由

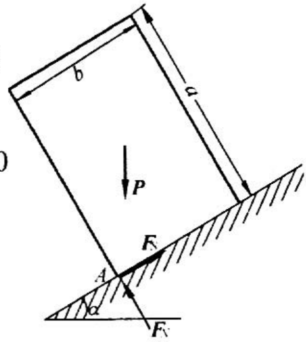
$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M - F_{SB}R = 0$$

得
$$M = 1.867 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5.20　已知　均质物块与斜面间的摩擦系数 $f_S = 0.4$；

求　当斜面倾角 α 逐渐增大时，物体在斜面上翻倒与滑动同

时发生时，边长 a 与 b 的关系。



题 5.20 图

解 设物块重 P，它将要翻倒时受力如图，由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, P\sin\alpha\,\frac{a}{2} - P\cos\alpha\,\frac{b}{2} = 0$$

解得 $$\frac{b}{a} = \tan\alpha$$

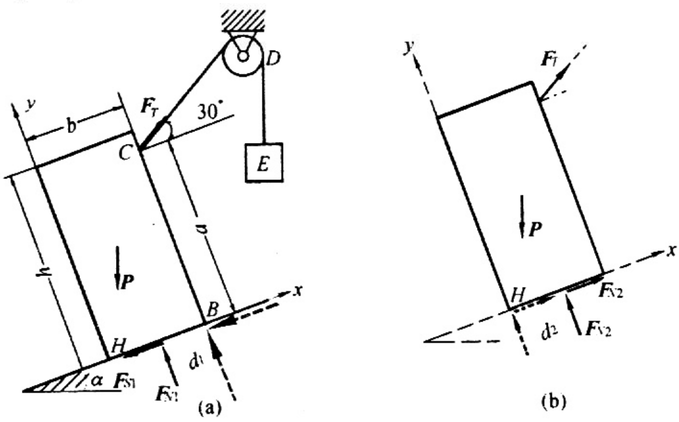
物块即将沿斜面下滑的条件为

$$\alpha = \varphi, \quad 即\ \tan\alpha = \tan\varphi = f_S$$

因此 $\dfrac{b}{a} = f_S$，解得 $\underline{b = 0.4a}$

5.21 已知 均质箱重 $P = 200$ kN，与斜面间的摩擦系数 $f_S = 0.2, b = 1$ m，$h = 2$ m，$a = 1.8$ m，$\alpha = 20^\circ$；

求 箱体平衡时物 E 的重量。



题 5.21 图

解 应分别考虑箱体有上、下滑动及翻倒的四种可能性。

若 F_T 较大，即箱体将可能上滑，或绕 B 点翻动；设箱体即将上滑，受力如图(a)，则

$$F_{S1} = f_S F_{N1}$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_T \cos30^\circ - P \sin20^\circ - F_{S1} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_T \sin30^\circ - P \cos20^\circ + F_{N1} = 0$$

解得此时重物 E 的重量　$P_{E1} = F_T = 109.7\ \text{kN}$

设箱体即将绕 B 点向上翻动，则斜面的约束反力将如图(a)的虚线所示，由

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,$$

$$P \sin20^\circ \frac{h}{2} + P \cos20^\circ \frac{b}{2} - aF_T \cos30^\circ = 0$$

解得此时重物 E 的重量　$P_{E2} = 104.2\ \text{kN}$，因 $P_{E2} < P_{E1}$，所以箱体只有可能绕 B 点向上翻动。

若 F_T 较小，即箱体将可能下滑或绕 H 点翻倒；设箱体即将下滑，受力如图(b)，则

$$F_{S2} = f_S F_{N2}$$

$$\Sigma X = 0, \quad F_T \cos30^\circ - P \sin20^\circ + F_{S2} = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_T \sin30^\circ - P \cos20^\circ + F_{N2} = 0$$

解得此时重物 E 的重量　$P_{E3} = F_T = 40.21\ \text{kN}$

最后设箱体即将绕 H 点向下翻倒，斜面的约束反力将如图(b)的虚线所示，则由

$$\Sigma M_H(\boldsymbol{F}) = 0, \quad P \sin20^\circ \frac{h}{2} - P \cos20^\circ \frac{b}{2} + bF_T \sin 30^\circ - aF_T \cos30^\circ = 0$$

解得此时重物 E 的重量　$P_{E4} = F_T = -24.12\ \text{kN}$。但绳子拉力 F_T 不可能为负值，所以箱体不可能绕 H 点翻倒。

因此，箱体平衡时重物 E 的重量为

$$40.21\ \text{kN} \leqslant P_E \leqslant 104.2\ \text{kN}$$

5.22　已知　立柜重 $P = 1\ \text{kN}$，$h = 1.2\ \text{m}$，$a = 0.9\ \text{m}$，不计滚轮尺寸。当滚轮不转时，滚轮与地面间的摩擦系数 $f_S = 0.3$；当

滚轮转动时，不计滚动摩阻；

求 (1)若滚轮 A 不能转动，(2)若滚轮 B 不能转动，(3)两轮都不能转动时使立柜移动的水平力 F 的最小值，并校核在此三种情况下立柜会不会翻倒。

解 设两轮都不能转动，且立柜即将发生移动，则由图，得

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0, \quad Fh - P\frac{a}{2} + aF_{NA} = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y = 0, \quad F_{NA} + F_{NB} - P = 0 \tag{2}$$

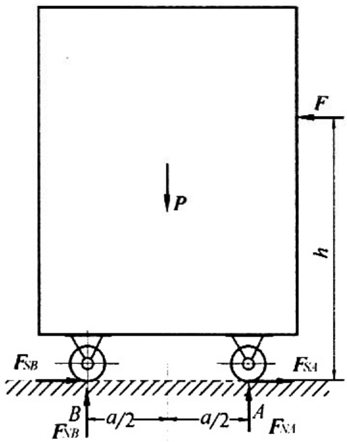
$$\Sigma X = 0, \quad F_{SB} + F_{SA} - F = 0 \tag{3}$$

式中 $F_{SA} = f_S F_{NA}$，$F_{SB} = f_S F_{NB}$

解出 $$F_{NA} = \frac{P}{2} - \frac{h}{a}F \tag{4}$$

$$F_{NB} = \frac{P}{2} + \frac{h}{a}F \tag{5}$$

$$F = f_S P = 0.3\ \text{kN}$$



题 5.22 图

若轮 B 转动，轮 A 不转动，且立柜即将发生移动，这时 B 轮相当于滚动支座，有

$$F_{SB} = 0, \quad F = F_{SA} = f_S F_{NA}$$

代入式 (4)，得 $F = 0.107\ \text{kN}$

若轮 A 转动，轮 B 不转动，且立柜即将发生移动，这时 A 轮相当于滚动支座，有

$$F_{SA} = 0, \quad F = F_{SB} = f_S F_{NB}$$

代入式 (5)，得 $F = 0.25\ \text{kN}$

立柜有翻倒趋势的条件是 $F_{NA} = 0$，设此时的推力为 $\boldsymbol{F}'$，由

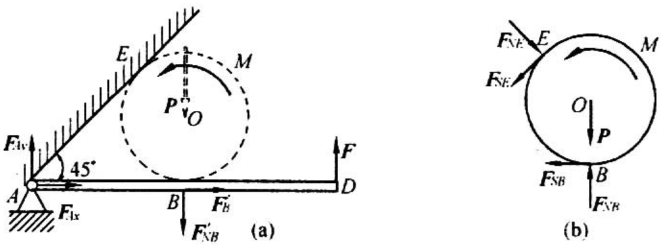
$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F'h - P\frac{a}{2} = 0$$

解得 $$F' = 0.375\ \text{kN}$$

前述三种情况求得的 F 值均小于此值,所以立柜不会翻倒。

5.23 已知 均质圆柱重 P、半径为 r,杆重不计,$\alpha = 45^\circ$,$AB = BD$,力 $F = P$,E、B 处的静摩擦系数均为 $f_S = 0.3$;

求 系统在图(a)所示位置保持静止时力偶矩 M 的最小值。



题 5.23 图

解 先研究 ABD 杆,受力如图(a),由

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad F \cdot AD - F_{NB}' \cdot AB = 0$$

解得
$$F_{NB}' = 2P$$

再研究圆柱,设它平衡,受力如图(b),则有

$$\Sigma X = 0,\ F_{NE}\sin 45^\circ - F_{SE}\cos 45^\circ - F_{SB} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0,\ -F_{NE}\cos 45^\circ - F_{SE}\sin 45^\circ - P + F_{NB} = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\ M + rF_{SE} - rF_{SB} = 0 \qquad (3)$$

设 E 点先达临界滑动状态,则有 $F_{SE} = f_S F_{NE}$ (4)

联立解得
$$M = 0.212Pr$$

$$F_{SB} = 0.5384P \leqslant f_S F_{NB} = 0.6P(\text{假设成立})$$

若 B 点先达临界滑动状态,则 $F_{SB} = f_S F_{NB}$ (5)

联立式(1)、(2)、(3)、(5),解得

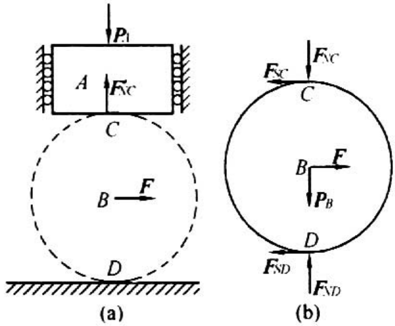
$$M = 0.317Pr,\ F_{NE} = 0.8P$$

$$F_{SE} = 0.2828P > f_S F_{NE}(\text{假设不成立})$$

这说明 B 处不可能先于 E 处到达临界状态,故 $M_{\min} = 0.212Pr$

5.24 已知 $P_A = 300$ N, $P_B = 600$ N，C、D 处的静摩擦系数分别为 $f_{S1} = 0.3$, $f_{S2} = 0.5$，不考虑滚动摩阻；

求 能拉动轮的水平力 F 的最小值。



题 5.24 图

解 先研究物块 A，如图(a)，得 $F'_{NC} = P_A$

再研究轮子，其半径设为 R，受力如图(b)，设其平衡，则

$$\Sigma X = 0,\ F - F_{SC} - F_{SD} = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y = 0,\ F_{ND} - P_B - F_{NC} = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\ RF_{SC} - RF_{SD} = 0 \tag{3}$$

设 C 点先达临界状态，则

$$F_{SC} = f_{S1}F_{NC} = f_{S1}P_A = 90\ \text{N} \tag{4}$$

解得 $$F = 180\ \text{N},\ F_{ND} = 900\text{N}$$

$$F_{SD} = 90\text{N} < f_{S2}F_{ND} = 450\ \text{N}(假设成立)$$

若设 D 点先达临界状态，则有

$$F_{SD} = f_{S2}F_{ND} \tag{5}$$

联立(1)、(2)、(3)、(5)各式，解得 $F = 900$ N

$$F_{SC} = 450\text{N} > f_{S1}F_{NC} = 90\text{N}(假设不成立)$$

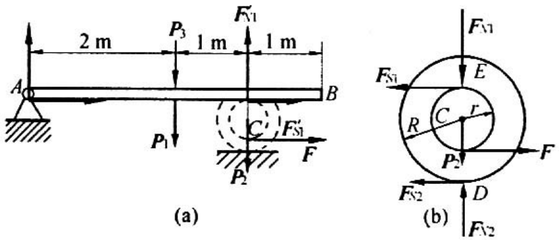
最后若设 C、D 两点同时达到临界滑动状态，则会导致

$$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) \neq 0(假设不成立)$$

事实上，在上述三种可能的临界状态中，只要有一种假设被证明成立，则另两种便不可能同时成立。所以 $F_{\min} = 180$ N。

5.25　已知　梁重 $P_1 = 196\ \mathrm{N}$,线圈架重 $P_2 = 343\ \mathrm{N}$,$R = 0.3\ \mathrm{m}$,$r = 0.1\ \mathrm{m}$,作用力 $P_3 = 254\ \mathrm{N}$,线圈架与 AB 梁和地面间静摩擦系数分别为 $f_{S1} = 0.4$,$f_{S2} = 0.2$；

求　拉动线圈架的水平力 F 的最小值。



题 5.25 图

解　先研究 AB 梁,受力如图(a),

由　$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad 3F_{N1}' - 2(P_3 + P_1) = 0$$

解得　$$F_{N1}' = 300\ \mathrm{N}$$

接着研究线圈架(图(b)),设其平衡,则

$$\Sigma X = 0,\quad F - F_{S1} - F_{S2} = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{N2} - P_2 - F_{N1} = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma M_C(\boldsymbol{F}) = 0,\quad rF_{S1} + rF - RF_{S2} = 0 \tag{3}$$

设 E 点先达临界状态,

有　$$F_{S1} = f_{S1}F_{N1} = 120\ \mathrm{N} \tag{4}$$

解得　$$F = 240\ \mathrm{N},\ F_{N2} = 643\ \mathrm{N}$$

$$F_{S2} = 120\mathrm{N} < f_{S2}F_{N2} = 128.6\ \mathrm{N}\quad（假设成立）$$

这说明,D 点不可能先达到临界滑动状态,D、E 两点也不会同时达到临界状态,所以

$$F_{\min} = 240\ \mathrm{N}$$

5.26　已知　$P_1 = 500\ \mathrm{N}$,$P_2 = 1\,000\ \mathrm{N}$,$r = 50\ \mathrm{mm}$,$R = 100\ \mathrm{mm}$;A、E 两处的静摩擦系数分别为 $f_{S1} = 0.5$,$f_{S2} = 0.2$；

求　系统平衡时物体 C 的重量 P 的最大值。

解　设该系统平衡，对轮轴，有

$$\Sigma X = 0,\ F_C \cos\alpha - F_1' + F_{S2} = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y = 0,\ F_C \sin\alpha - P_2 + F_{N2} = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma M_E(\boldsymbol{F}) = 0,\ -F_C(R + R\cos\alpha) + F_1'(R + r) = 0 \tag{3}$$

对物 A，有

$$\Sigma X = 0,\quad F_1 - F_{S1} = 0 \tag{4}$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{N1} - P_1 = 0 \tag{5}$$

先设轮轴即将滚动，但不打滑，使物块 A 即将滑动；则

$$F_{S1} = f_{S1}F_{N1} \tag{6}$$

可解得　$F_C = 208\ \text{N},\ F_{S2} = 83.6\ \text{N} < f_{S2}F_{N2} = 175\ \text{N}$

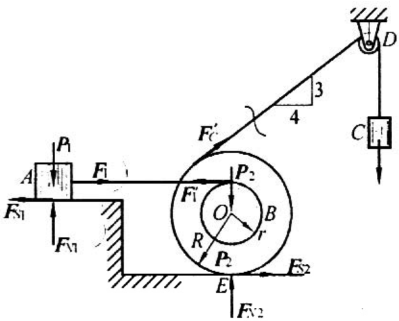
即轮轴在即将滚动时确实不会打滑。

再设轮轴即将打滑，物块 A 仍不动，对轮轴有

$$F_{S2} = f_{S2}F_{N2} \tag{7}$$

联立(1)、(2)、(4)、(5)、(7)各式，可解得

$$F_C = 384.6\ \text{N},\ F_{S1} > f_{S1}F_{N1}\text{(假设不成立)}$$



题 5.26 图

即此时物块 A 已不能平衡。因此，全系统平衡时物体 C 的重量 P 的最大值　$\underline{F_C = P = 208\ \text{N}}$

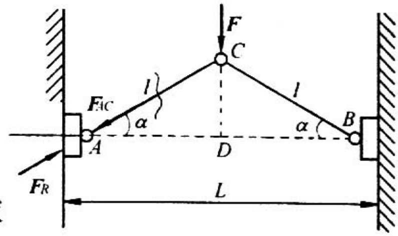
5.27　已知　墙壁与滑块间的静摩擦系数 $f_S = 0.5$，各构件自重不计，尺寸如图(a)所示；

求　为确保系统安全制动，α 角以及尺寸比 $l:L$ 应为多大。

解　为确保系统安全制动，滑块应自锁，在滑块的受力图中，应有　$\underline{\alpha < \varphi}$

即 $\tan\alpha < \tan\varphi_m = f_S$

而 $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{l^2 - \dfrac{L^2}{4}}}{\dfrac{L}{2}}$



题 5.27 图

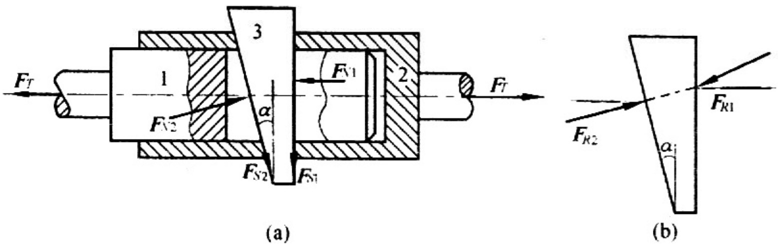
可解得，$\dfrac{l}{L} < 0.559$，显然还应

有 $\dfrac{L}{2} < l$

因此为能安全制动，应有 $0.5 < \dfrac{l}{L} < 0.559$

5.28 已知 楔块与两构件间的静摩擦系数均为 $f_S = 0.1$，楔块自重不计；

求 系统能自锁的倾斜角 α。



题 5.28 图

解 楔块受力如图(b)，图中 $\boldsymbol{F}_{R1} = \boldsymbol{F}_{R2}$，楔块自锁时

有 $$\alpha \leqslant 2\varphi$$

即 $\tan\alpha \leqslant \tan 2\varphi = \dfrac{2f_S}{1 - f_S^2}$，　　可解得 $\alpha \leqslant 11°25'$

若用解析法求解，可考察图(a)，楔块自锁时有

$$F_{S1} \leqslant fF_{N1},\ F_{S2} \leqslant fF_{N2}$$

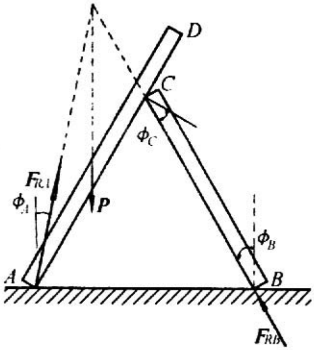
$$\Sigma X = 0,\quad F_{N2}\cos\alpha + F_{S2}\sin\alpha - F_{N1} = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_{N2}\sin\alpha - F_{S2}\cos\alpha - F_{S1} = 0$$

同样可解得 $\alpha \leqslant 11^{\circ}25'$

5.29 已知 均质长板 AD 重 P，长为 4 m，用一不计自重的短板 BC 支撑，$AC = BC = AB = 3$ m，设整体处于平衡的临界状态；

求 A、B、C 处的摩擦角的大小。



题 5.29 图

解 因 BC 杆为二力杆，故整体受力如图，因此

$$\varphi_B = 30^{\circ}, \quad \varphi_C = 30^{\circ}$$

由
$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\ 3F_{RB}\cos\varphi_B - 2P\cos 60^{\circ} = 0$$
$$\Sigma X = 0,\ F_{RA}\sin\varphi_A - F_{RB}\sin\varphi_B = 0$$
$$\Sigma Y = 0,\ F_{RA}\cos\varphi_A + F_{RB}\cos\varphi_B - P = 0$$

解得
$$\varphi_A = 16^{\circ}6'$$

显然，也可由三力平衡汇交定理直接由受力图中求出 φ_A。

5.30 已知 力 P 和角 α，不计自重的 A、B 块间的静摩擦系数为 f_S，其它接触处光滑；

求 使系统保持平衡的力 F 的值。

解 整体受力如图(a)

由
$$\Sigma Y = 0, \quad F_{NA} - P = 0$$

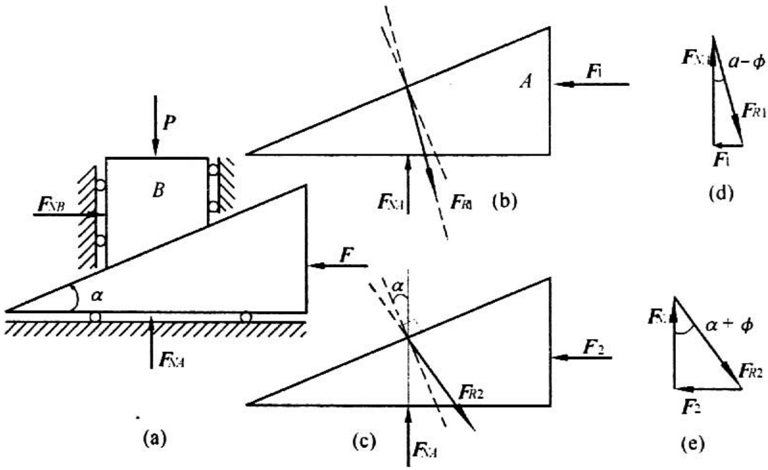
解得
$$F_{NA} = P$$

设 F 小于 F_1 时，楔块 A 向右运动(图(b))；当 F 大于 F_2 时，楔块 A 向左运动(图 c)。分别画出力三角形如图(d)、(e)所示

解得 $$F_1 = P\tan(\alpha - \varphi),\ F_2 = P\tan(\alpha + \varphi)$$

使系统保持平衡的力 F 的值应为 $F_1 \leqslant F \leqslant F_2$

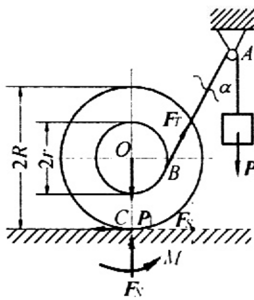
注意 $\tan\varphi = f_S$，得 $$P\frac{\sin\alpha - f_S\cos\alpha}{\cos\alpha + f_S\sin\alpha} \leqslant F \leqslant P\frac{\sin\alpha + f_s\cos\alpha}{\cos\alpha - f_S\sin\alpha}$$



题 5.30 图

5.31 已知 P_1、R、r、P_2 以及平衡时的角 α；

求 滚动摩阻力偶矩，滑动摩擦力与法向反作用力。



题 5.31 图

解 轮轴受力如图，由

$$\Sigma X = 0,\quad F_T \sin\alpha - F_S = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad F_N + F_T \cos\alpha - P_1 = 0$$

$$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_T r - F_S R + M = 0$$

式中 $F_T = P_2$

解得 $F_S = P_2 \sin\alpha$，$F_N = P_1 - P_2 \cos\alpha$，$M = P_2(R\sin\alpha - r)$

5.32 已知 P、R、F，滚阻系数 δ，轮子处于即将滚动但不滑动的临界平衡状态；