

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

第一章 绪论

1. 用 3 位数字计算出方程:

$$\begin{cases} 0.780x + 0.563y = 0.217 \\ 0.457x + 0.330y = 0.127 \end{cases}$$

的解 x, y , 再用 6 位数字计算出 x 与 y , 已知正确解为练习练习 $x=1, y=-1$, 计算结果说明什么?

解: 用 3 位浮点计算: $(2) - (1) \times \frac{0.457}{0.780}$, 即 $(2) - (1) \times 0.586$ 得:

$$\begin{cases} 0.780x + 0.563y = 0.217 \\ 8.2 \times 10^{-5}y = -1.62 \times 10^{-4} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = 1.71 \\ y = -1.89 \end{cases}$$

用 6 位浮点计算: $(2) - (1) \times \frac{0.457}{0.780}$, 即 $(2) - (1) \times 0.585897$ 得:

$$\begin{cases} 0.780x + 0.563y = 0.217 \\ 1.39989 \times 10^{-4}y = -1.39649 \times 10^{-4} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = 0.998247 \\ y = -0.997571 \end{cases}$$

此例说明, 在计算过程中, 选取有效数字位数越多, 相对误差越小, 计算结果越精确。

10. a, b, c 都是 (β, t, L, U) 中的数, 试给出 $f(\frac{a}{bc})$ 的向前误差分析和向后误差分析。

解: (1) 由定理 5, 向前误差分析为

$$f\left(\frac{a}{bc}\right) = f\left(\frac{f\left(\frac{a}{b}\right)}{c}\right) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)(1+\delta_1)}{c}(1+\delta_2) = \frac{a}{bc}(1+\delta_1)(1+\delta_2) = \frac{a}{bc}(1+w) = \frac{a}{bc} + E$$

$$\text{其中 } |w| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t} 2.02, \quad |E| = \left|\frac{a}{bc}w\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{a}{bc}\right| 2.02\beta^{-t}.$$

(2) 向后误差分析, 仍由定理 5

$$f\left(\frac{a}{bc}\right) = f\left(\frac{a}{f(bc)}\right) = \frac{a(1+\delta_2)}{bc(1+\delta_1)} = \frac{a+\delta_a}{(b+\delta_b)(c+\delta_c)}$$

其中: $|\delta_a| \leq |\alpha \delta_2| \leq \frac{1}{2} |\alpha| \beta^{-t}, |\delta_b| = 0, |\delta_c| \leq |\alpha \delta_1| \leq \frac{1}{2} |\alpha| \beta^{-t}$ 。

11. 将 (2, 4, -2, 2) 中的数全部列出来, 且在实轴上表示出来, 问总共共有多少?

解: (2, 4, -2, 2) 系统中的所有正数为:

$1.0000 \times 2^{-2}, 1.0001 \times 2^{-2}, \dots, 1.1111 \times 2^{-2}$, 共16个
 $1.0000 \times 2^{-1}, 1.0001 \times 2^{-1}, \dots, 1.1111 \times 2^{-1}$, 共16个
 $1.0000 \times 2^0, 1.0001 \times 2^0, \dots, 1.1111 \times 2^0$, 共16个
 $1.0000 \times 2^1, 1.0001 \times 2^1, \dots, 1.1111 \times 2^1$, 共16个
 $1.0000 \times 2^2, 1.0001 \times 2^2, \dots, 1.1111 \times 2^2$, 共16个

共有 $16 \times 5 = 80$ 个, 再加上 $[-1.1111 \times 2^2, -1.0000 \times 2^{-2}]$ 中的 80 个负数以及 0, 故共有 161 个。

14. 假设有一种算法, 求 $\sqrt{a}$ 可得到 6 位有效数字, 问为了使 $\sqrt{\pi}$ 有 4 位有效数字, π 应取几位有效数字?

解: 因为

$$\begin{aligned} f(\sqrt{\pi}) &= f(\sqrt{f(\pi)}) = f(\sqrt{\pi(1+\delta_1)}) = \sqrt{\pi(1+\delta_1)}(1+\delta_2) = \sqrt{\pi}(1+\delta_1)(1+\delta_2) \\ &= \sqrt{\pi}\sqrt{1+\delta_1} + \sqrt{\pi}\sqrt{1+\delta_1}\delta_2 \end{aligned}$$

其中: δ_1 为 π 取近似值时的相对误差, δ_2 为求开方运算的相对误差, 由题设和定理 1 知 $|\delta_2| \leq \frac{1}{2} 10^{-(6-1)}$

所以:
$$\left| \frac{f(\sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \right| \leq \left| \sqrt{1+\delta_1} - 1 \right| + \sqrt{1+\delta_1} |\delta_2| \leq \frac{|\delta_1|}{\sqrt{1+\delta_1} + 1} + 2|\delta_2| \leq |\delta_1| + 2|\delta_2|$$

若 $|\delta_1| \leq \frac{1}{2} 10^{-5}$, 即对 π 取 6 位有效数字时,

$$\left| \frac{f(\sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \right| \leq |\delta_1| + 2|\delta_2| \leq 1.5 \times 10^{-5} \leq \frac{1}{4} \times 10^{-4}$$

$\sqrt{\pi}$ 有 4 位有效数字（由定理 1）。

15. 求 $f(\sum_{i=1}^n x_i y_i)$ 的误差分析。

解：

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^n x_i y_i) &= f(\sum_{i=1}^n f(x_i y_i)) = f(\sum_{i=1}^n x_i y_i (1 + \delta_i)) \\ &= x_1 y_1 (1 + \delta_1)(1 + \eta_2)(1 + \eta_3) \cdots (1 + \eta_n) + x_2 y_2 (1 + \delta_2)(1 + \eta_2)(1 + \eta_3) \cdots (1 + \eta_n) \\ &\quad + x_3 y_3 (1 + \delta_3)(1 + \eta_3)(1 + \eta_4) \cdots (1 + \eta_n) + \cdots + x_n y_n (1 + \delta_n)(1 + \eta_n) \\ &= x_1 y_1 (1 + w_1) + x_2 y_2 (1 + w_2) + \cdots + x_n y_n (1 + w_n) \end{aligned}$$

其中 $|w_1| \leq \frac{1}{2} 1.01 \cdot n \cdot \beta^{\frac{1}{2}}$, $|w_i| \leq \frac{1}{2} 1.01 \cdot (n+2-i) \cdot \beta^{\frac{1}{2}}$ 。

16. 有误差 ε , $|\varepsilon| \leq \frac{1}{2} 10^{-4}$, 问 $\sin \tilde{x}, \cos \tilde{x}, \operatorname{tg} \tilde{x}$ 的传播误差是多少？

解：因为若 $f'(\tilde{x}) \neq 0$, 则 $|f(x) - f(\tilde{x})| \approx |f'(\tilde{x})| |x - \tilde{x}|$, 又由于：

$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$, 则：

当 $f(x) = \sin x$ 时, $|\sin x - \sin \tilde{x}| \leq |x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2} 10^{-4}$,

当 $f(x) = \cos x$ 时, $|\cos x - \cos \tilde{x}| \leq |x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2} 10^{-4}$,

当 $f(x) = \operatorname{tg} x$ 时, $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \tilde{x}| \leq |\sec^2 \tilde{x}| |x - \tilde{x}| \leq 16.943 \cdots \times \frac{1}{2} 10^{-4} \leq 8.5 \times 10^{-4}$ 。

1. 下列函数表（表 18）中的数字都是有效数字。

(1) 通过 $\text{ctg}x$ 的函数表，进行插值，求 $\text{ctg}(0.0015)$ ，并估计误差；

解：先作差分表：

x	$\text{ctg}x$			
0.001	1000.000			
		-500.001		
0.002	499.999		333.334	
		-166.667		-250
0.003	333.332		83.334	199.998
		-83.333		-50.002
0.004	249.999		33.332	
		-50.001		
0.005	199.998			

取 $x_1 = 0.001, h = 0.001, x = 0.0015 = x_1 + ph, p = 0.5$, 则由表初公式有：

$$\begin{aligned}
 p(0.0015) &= 1000 - 500.001 \times 0.5 + 333.334 \times \frac{p(p-1)}{2!} - 250 \times \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} \\
 &\quad + 199.998 \times \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!} \\
 &= 684.89533281
 \end{aligned}$$

又由： $(\text{ctg}x)^{(5)} = -120 \sin^{-6} x + 120 \sin^{-4} x - 16 \sin^{-2} x$, 所以误差为：

$$|\text{ctg}(0.0015) - p_4(0.0015)| \leq \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)h^5 \right| \leq 328.125$$

2. 给定 $f(x)$ 的函数值如表 19 所示，用 3 种途径求 3 次插值多项式。

解：(1) 用牛顿方法。先作差商表：

$$\begin{array}{rcll} 0 & 1.45 & & \\ & & 1.126666666 & \\ 1.5 & 3.14 & & -0.0976264187 \\ & & 0.7947368421 & -0.0121015635 \\ 3.4 & 4.65 & & -0.1799170512 \\ & & -0.1588235294 & \\ 6.8 & 4.11 & & \end{array}$$

$$N_3(x) = 1.45 + 1.126666666(x-0) - 0.0976264187x(x-1.5)$$

所以: $-0.0121015635x(x-1.5)(x-3.4)$

(2) 用 Lagrange 方法

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{(x-1.5)(x-3.4)(x-6.8)}{(-1.5)(-3.4)(-6.8)} \times 1.45 + \frac{x(x-3.4)(x-6.8)}{1.5(1.5-3.4)(1.5-6.8)} \times 3.14 \\ &+ \frac{x(x-1.5)(x-6.8)}{3.4(3.4-1.5)(3.4-6.8)} \times 4.65 + \frac{x(x-1.5)(x-3.4)}{6.8(6.8-1.5)(6.8-3.4)} \times 4.11 \end{aligned}$$

化简得: $p_3(x) = -0.0121015635x^3 - 0.0383287583x^2 + 1.211388323x + 1.45$

(3) 用内维尔方法

$$p_{1,2}(x) = \frac{x-1.5}{0-1.5} \times 1.45 + \frac{x-0}{1.5-0} \times 3.14 = 1.126666666x + 1.45$$

$$p_{2,3}(x) = \frac{x-3.4}{1.5-3.4} \times 3.14 + \frac{x-1.5}{3.4-1.5} \times 4.65 = 0.7947368421x + 1.947894736$$

$$p_{3,4}(x) = \frac{x-6.8}{3.4-6.8} \times 4.65 + \frac{x-3.4}{6.8-3.4} \times 4.11 = -0.1588235294x + 5.19$$

$$p_{1,2,3}(x) = \frac{x-3.4}{0-3.4} \times p_{1,2}(x) + \frac{x-0}{3.4-0} \times p_{2,3}(x)$$

$$p_{2,3,4}(x) = \frac{x-6.8}{1.5-6.8} \times p_{2,3}(x) + \frac{x-1.5}{6.8-1.5} \times p_{3,4}(x)$$

再由: $p_{1,2,3,4}(x) = \frac{x-6.8}{0-6.8} \times p_{1,2,3}(x) + \frac{x-0}{6.8-0} \times p_{2,3,4}(x)$

得: $p_3(x) = -0.0121015635x^3 - 0.0383287583x^2 + 1.211388323x + 1.45$

3. 给定 $f(x)$ 的函数值如表 20 所示, 求 $f(27) = ?$

解: 先作差商表:

14	68.7		
		-1.567	
17	64.	8.118×10^{-3}	
		-1.429	0.000153
31	44.	0.01133	
		-1.225	
35	39.1		

$$f(x) \approx p_3(x) = 68.7 - 1.567 \times (x-14) + 8.118 \times 10^{-3} (x-14)(x-17)$$

$$\text{即: } + 0.000153(x-14)(x-17)(x-31)$$

$$\text{故: } f(27) \approx p_3(27) = 49.3047222$$

4. 求 $\sqrt[3]{3}$, 利用 $f(x) = 3^x$, 取节点 $x=0, x=1, x=-1$ 作插值, 并估计截断误差。

解: 先作差商表:

0	1		
		2	
1	3	$2/3$	
		$4/3$	
-1	$1/3$		

$$\text{所以, } f(x) \approx p_2(x) = 1 + 2x + \frac{2}{3}x(x-1) \quad \text{。故: } \sqrt[3]{3} \approx p_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{41}{27} = 1.518518518$$

$$\text{其截断误差: } R_2(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x(x-1)(x+1), -1 < \xi < 1$$

$$\text{由于 } f'''(x) = 3^x (\ln 3)^3, \text{ 所以 } |R_2(x)| \leq \frac{3 \times (\ln 3)^3}{3!} \times \frac{1}{3} \times \left| \left(\frac{1}{3} \right)^2 - 1 \right| = 0.1964 \dots \leq 0.2$$

5. 证明: 在两个节点: $x_1, x_2 = x_1 + h$ 上作线性插值, 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, 余项为

$$R \leq \frac{h^2}{8} \max_{x_1 \leq x \leq x_2} |f''(x)|$$

证: 因为

$$\begin{aligned} R = |f(x) - p_1(x)| &= \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_1)(x - x_2) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{x_1 \leq x \leq x_2} |f''(x)| \max_{x_1 \leq x \leq x_2} |(x - x_1)(x - x_2)| \\ &\leq \frac{h^2}{8} \max_{x_1 \leq x \leq x_2} |f''(x)|, \end{aligned}$$

其中: $\max_{x_1 \leq x \leq x_2} |(x - x_1)(x - x_2)| = \left| \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 \right) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2 \right) \right| = \frac{h^2}{4}$

6. 若 h 是小量, 则 $f(x-h), f(x), f(x+h)$ 三个函数值应怎样线性组合, 才能得到较好的 $f''(x)$ 的近似值。

解: 由于

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 - \frac{f'''(x)}{3!} h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} h^4, x-h < \xi_1 < x,$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!} h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!} h^4, x < \xi_2 < x+h,$$

所以:
$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{f^{(4)}(\xi_2) + f^{(4)}(\xi_1)}{4!} h^4,$$

即:
$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x) + \frac{f^{(4)}(\xi_2) + f^{(4)}(\xi_1)}{4!} h^2.$$

7. 证明 $\frac{d}{dx} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = f'(x_1, x_2, \dots, x_n, x, x)$ 。

证: 设 $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = x$, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_i) - f(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{y_i - x} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} f'(x_1, x_2, \dots, x_n, y_i, x) = f'(x_1, x_2, \dots, x_n, x, x)\end{aligned}$$

11. 用拉格朗日途径导出如下 $f(x)$ 的 $2n-1$ 次埃尔米特插值 $H_{2n-1}(x)$, 满足:

$$H_{2n-1}(x_i) = f(x_i), H'_{2n-1}(x_i) = f'(x_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

解: 先构造次数不高于 $2n-1$ 的多项式 $H_{i,2n-1}(x)$ 满足下列 $2n$ 个条件:

$$\begin{cases} H_{i,2n-1}(x_j) = 0, j = 1, 2, \dots, n \\ H'_{i,2n-1}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

满足上述条件的 $2n-1$ 的多项式 $H_{i,2n-1}(x)$ 可以写成:

$$H_{i,2n-1}(x) = A(x-x_i)(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{i-1})^2 (x-x_{i+1})^2 \cdots (x-x_n)^2$$

其中 A 为待定系数, 再由条件 $H'_{i,2n-1}(x_i) = 1$ 得:

$$A = \frac{1}{(x_i - x_1)^2 (x_i - x_2)^2 \cdots (x_i - x_{i-1})^2 (x_i - x_{i+1})^2 \cdots (x_i - x_n)^2}$$

$$\text{即: } H_{i,2n-1}(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{i-1})^2 (x-x_{i+1})^2 \cdots (x-x_n)^2}{(x_i - x_1)^2 (x_i - x_2)^2 \cdots (x_i - x_{i-1})^2 (x_i - x_{i+1})^2 \cdots (x_i - x_n)^2}$$

再构造次数不高于 $2n-1$ 的多项式 $h_{i,2n-1}(x)$ 满足下列 $2n$ 个条件:

$$\begin{cases} h_{i,2n-1}(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}, j=1,2,\dots,n \\ h'_{i,2n-1}(x_j) = 0, j=1,2,\dots,n \end{cases},$$

令:
$$h_{i,2n-1}(x) = (ax+b) \frac{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{i-1})^2 (x-x_{i+1})^2 \cdots (x-x_n)^2}{(x_i-x_1)^2 (x_i-x_2)^2 \cdots (x_i-x_{i-1})^2 (x_i-x_{i+1})^2 \cdots (x_i-x_n)^2}$$

它满足上述条件中除 $h'_{i,2n-1}(x_i) = 0, h_{i,2n-1}(x_i) = 1$ 外的所有其他条件, 于是再由

$$h_{i,2n-1}(x_i) = ax_i + b = 1,$$

$$\begin{aligned} h'_{i,2n-1}(x_i) &= a + (ax_i + b) \left[\frac{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{i-1})^2 (x-x_{i+1})^2 \cdots (x-x_n)^2}{(x_i-x_1)^2 \cdots (x_i-x_{i-1})^2 (x_i-x_{i+1})^2 \cdots (x_i-x_n)^2} \right]'_{x=x_i} \\ &= a + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{2}{x_i - x_j} = 0 \end{aligned}$$

所以
$$a = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{2}{x_i - x_j} = 1 - a x_i = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{2}{x_i - x_j} x_i$$
, 于是:

$$h_{i,2n-1}(x) = \left[1 + 2(x_i - x) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{2}{x_i - x_j} \right] \frac{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{i-1})^2 (x-x_{i+1})^2 \cdots (x-x_n)^2}{(x_i-x_1)^2 \cdots (x_i-x_{i-1})^2 (x_i-x_{i+1})^2 \cdots (x_i-x_n)^2}$$

于是所求的埃尔米特插值多项式为

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^n h_{i,2n-1}(x) f(x_i) + \sum_{i=1}^n H_{i,2n-1}(x) f'(x_i)$$

13. 找一个 5 次 Hermite 多项式 $H_5(x)$, 满足

$$H_5^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), i=1,2; j=0,1,2.$$

解: 由差商表: (略)

$$H_5(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 + \frac{f(x_1, x_2) - f'(x_1) - \frac{1}{2}f''(x_1)(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^2}(x-x_1)^3$$

$$+ \frac{f'(x_2) - 3f(x_1, x_2) + 2f'(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^3}(x-x_1)^3(x-x_2)$$

$$+ \frac{6f(x_1, x_2) - 3f'(x_1) - 3f'(x_2) - \frac{1}{2}(f''(x_1) - f''(x_2))(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^4}(x-x_1)^3(x-x_2)^2$$

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq s} (y_j - y_i)^{m_i m_j}$$

14. 证明 (34) 式成立，即证明

证明：因为：

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} = \lim_{k \rightarrow \infty} \det \begin{pmatrix} A_1^{(k)} \\ A_2^{(k)} \\ \vdots \\ A_s^{(k)} \end{pmatrix} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^s \prod_{1 \leq i < j \leq m_i} (x_{m_i, k}^{(i)} - x_{i, k}^{(i)})} \det \begin{pmatrix} 1 & l_1(x_{1, k}^{(1)}) & \cdots & l_n(x_{1, k}^{(1)}) \\ 1 & l_1(x_{2, k}^{(1)}) & \cdots & l_n(x_{2, k}^{(1)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & l_1(x_{m_1, k}^{(1)}) & \cdots & l_n(x_{m_1, k}^{(1)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & l_1(x_{1, k}^{(s)}) & \cdots & l_n(x_{1, k}^{(s)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & l_1(x_{m_s, k}^{(s)}) & \cdots & l_n(x_{m_s, k}^{(s)}) \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{1 \leq i < j \leq s} \prod_{m=1}^{m_i} \prod_{l=1}^{m_j} (x_{m, k}^{(j)} - x_{i, k}^{(i)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq s} (y_j - y_i)^{m_i m_j}$$

17. 解：因为 $y = J_0(x)$ ，若 $x = \varphi(y)$ 是贝塞尔函数的反函数，为求 $y = J_0(x)$ 的

零点，只需求 $\alpha = \varphi(0)$ ，下面用插值方法计算 $\varphi(0)$ ，先作差商表：

y	$x = \varphi(y)$		
-0.09680493700	2.6		
		-2.065212044	
-0.0483837764	2.5		1.00939626
		-0.964966239	-1.615956602
0.0025076832	2.4		0.7632137735
		-1.885650346	
0.0555397844	2.3		

于是根：

$$\begin{aligned}\alpha^* &= p_3(0) = 2.6 - 2.065212044 \times (0 + 0.096804937) \\ &\quad + 1.00939626(0 + 0.096804937)(0 + 0.0483837764) \\ &\quad - 1.615956602(0 + 0.096804937)(0 + 0.0483837764)(0 - 0.0025076832) \\ &= 2.404824021\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\alpha^* &= p_2(0) = 2.5 - 1.964966239(0 + 0.0483837764) \\ &\quad + 0.7632137735(0 + 0.0483837764)(0 - 0.0025076832) \\ &= 2.404834911\end{aligned}$$

课后答案网
www.hackshp.cn

样条插值和曲线拟合

2. $f(x) = |x|$, 在 $[-1, 1]$ 上取 $h = 0.5$, 作 4 次多项式的等距插值, 求 $P_4(\frac{1}{2})$, 并比较与 $f(\frac{1}{2})$ 的差别, 如果用分段插值, 那么结果将如何?

解: (1) 先作差商表

$$\begin{array}{ccccccc} & -1 & & 1 & & & \\ & & -1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & 0 & & \\ & & & -1 & & \frac{4}{3} & \\ 0 & & 0 & & 2 & & -\frac{4}{3} \\ & & & 1 & & -\frac{4}{3} & \\ & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & 0 & \\ & & & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & & \end{array}$$

所以: $P_4(x) = 1 - (x+1) + \frac{4}{3}(x+1)(x+\frac{1}{2})x - \frac{4}{3}(x+1)(x+\frac{1}{2})x(x-\frac{1}{2})$, 故:
 $P_4(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ 。

(2) 若采用分段插值, 则在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上, $L(x) = f(0) \frac{x - \frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2}} + f(\frac{1}{2}) \frac{x - 0}{\frac{1}{2} - 0} = x$, 所以:

$$L(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2}) = P_4(\frac{1}{2}), \text{ 结果一样。}$$

4. 对 $\lg x$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 中用等距分段 Hermite 3 次插值, 其余项是什么?

解: 若对 $\lg x$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 中用等距分段 Hermite 3 次插值, 则在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 由第二章定理 8 知:

$$|\lg x - H_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2, x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$$

由于 $tg^{(4)}(x) = 16 \frac{\sin x}{\cos^3 x} + 24 \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$, 所以在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上,

$$|tg^{(4)}(x)| \leq 16 \frac{1}{1/2} + 24 \frac{1}{1/2} = 80$$

$$|tgx - H_3(x)| \leq \frac{80}{4!} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 \leq \frac{80}{4!} \times \frac{1}{16} h^4 = \frac{5}{24} h^4$$

注意右端与 i 无关, 故在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上, 有: $|tgx - H_3(x)| \leq \frac{5}{24} h^4$ 。

5. 对函数 $\frac{\sin x}{x}$, 在区间 $[0, 1]$ 上用等距线性插值、等距 Hermite 3 次插值、等距样条插值, 问步长 h 应取多少才能保证各自的截断误差小于 10^{-4} ?

解: 因为 $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos tx dt = \frac{\sin tx}{x} \Big|_0^1$, 所以

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 t^k \cos \left(tx + \frac{k\pi}{2} \right) dt, \text{ 因此 } |f^{(k)}(x)| \leq \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}.$$

若在区间 $[0, 1]$ 上用等距线性插值, 则误差为:

$$|f(x) - L(x)| = \frac{M_2}{8} h^2 \leq \frac{1}{24} h^2, \text{ 对任 } x \in [0, 1]$$

欲使 $|f(x) - L(x)| \leq 10^{-4}$, 只须 $h < \sqrt{24 \times 10^{-4}} = 0.048988979\dots$ 。

若在区间 $[0, 1]$ 上用等距 Hermite 3 次插值, 则误差为:

$$|f(x) - H_3(x)| \leq \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 \right| \leq \frac{1}{4 \times 5} \cdot \frac{h^4}{16}, \text{ 对任 } x \in [0, 1]$$

欲使 $|f(x) - H_3(x)| \leq 10^{-4}$ ，只须 $h < (4 \times 5 \times 16 \times 10^{-4})^{\frac{1}{4}} = 0.66195 \dots$

若在区间 $[0,1]$ 上用等距样条插值，则由定理 5，有：

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{16} h^4 \|f^{(4)}(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{5} \cdot h^4$$

欲使 $|f(x) - s(x)| \leq 10^{-4}$ ，只须 $h < (5 \times 16 \times 10^{-4})^{\frac{1}{4}} = 0.299069756 \dots$ 。

7. 对 $f(x) = |x|$ ，在 $[-1,1]$ 上取 5 个等距节点，求 3 次自然样条插值。

解：取节点 $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = 1$ ，作差商表：

$$\begin{array}{ccccccc} & & -1 & & 1 & & \\ & & & -1 & & & \\ & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & -1 \\ & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\ & & & & 1 & & 2 \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 & & 1 \end{array}$$

对于自然样条， $M_1 = M_5 = 0$ ，按公式 (10) 形成方程组：

$$\begin{cases} 2M_2 + \frac{1}{2}M_3 = 6f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \frac{1}{2}M_2 + 2M_3 + \frac{1}{2}M_4 = 6f(x_2, x_3, x_4) = 12 \\ \frac{1}{2}M_3 + 2M_4 = 6f(x_3, x_4, x_5) = 0 \end{cases}$$

解得： $M_2 = -\frac{12}{7}, M_3 = \frac{48}{7}, M_4 = -\frac{12}{7}$ 。由 (9) 式即得样条函数的表达式 (略)。

11. 对于 3 次样条函数 $s(x)$ ，如果给定的条件是 $s''(x_i) = y_i'', i = 1, 2, \dots, n$ ，如何给出边界条件使得 $s(x)$ 唯一确定。

解: 由于 $s(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是 3 次多项式, 故 $s''(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是 1 次多项式, 而且满足 $s''(x_i) = M_i = y_i'', s''(x_{i+1}) = M_{i+1} = y_{i+1}''$, 因此可表示为

$$s''(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \quad \text{于是积分两次并利用 } s(x_i) = y_i, s(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad ($$

y_i, y_{i+1} 为未知量) 可定出积分常数:

$$s(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_i}{h_i}$$

事实上, 积分两次后, 记

$$s(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + c_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + d_i \frac{x - x_i}{h_i}, \quad \text{再由}$$

$s(x_i) = y_i, s(x_{i+1}) = y_{i+1}$ 可定出 c_i, d_i 。于是:

$$s'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{M_i h_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1} h_i}{6}$$

即:

$$s'(x_i) = -\frac{M_i h_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i+1}), \quad s'(x_{i+1}) = \frac{M_{i+1} h_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i+1})$$

若考虑在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 有 $s'(x_i) = \frac{M_i h_{i-1}}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} (M_{i-1} - M_i)$, 两边的 $s'(x_i)$ 应

相等, 即: $\frac{M_i h_{i-1}}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} (M_{i-1} - M_i) = -\frac{M_i h_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i+1})$,

整理并记 $\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}, \lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots, n-1$, 得:

$$-\mu_i y_{i-1} + y_i - \lambda_i y_{i+1} = -\frac{1}{3} M_i h_{i-1} h_i - \frac{h_{i-1} h_i}{6(x_{i+1} - x_{i-1})} (M_{i+1} h_i + M_{i-1} h_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

若给定边界条件 $y_1 = f(x_1), y_n = f(x_n)$, 则形成方程组:

$$\begin{cases} y_2 - \lambda_2 y_3 = -\frac{1}{3} M_2 h_1 h_2 - \frac{h_1 h_2}{6(x_3 - x_1)} (M_3 h_2 + M_1 h_1) + \mu_2 y_1 \\ -\mu_i y_{i-1} + y_i - \lambda_i y_{i+1} = -\frac{1}{3} M_i h_{i-1} h_i - \frac{h_{i-1} h_i}{6(x_{i+1} - x_{i-1})} (M_{i+1} h_i + M_{i-1} h_{i-1}), \\ i = 2, 3, \dots, n-1 \\ -\mu_{n-1} y_{n-2} + y_{n-1} = -\frac{1}{3} M_{n-1} h_{n-1} h_{n-2} - \frac{h_{n-1} h_{n-2}}{6(x_n - x_{n-2})} (M_{n-2} h_{n-2} + M_n h_{n-1}) + \lambda_{n-1} y_n \end{cases}$$

该方程组的系数矩阵为严格对角占优矩阵, 故 $s(x)$ 唯一确定。

12. 若 $a = x_1, x_2, \dots, x_n = b$ 是实轴上 n 个由小到大排列的点, 考虑一个 $[a, b]$ 上的函数 $s(x)$, 它在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个二次多项式, 并且 $s(x_i) = y_i (i = 1, 2, \dots, n), y_i$ 是已知值, 又在内节点 $x_2, \dots, x_{n-1}$ 上 $s'(x)$ 连续, 这样的 $s(x)$ 称为二次样条插值。试证这样的二次样条插值有很多, 并问加上何种条件才能使它唯一, 给出求 $s(x)$ 的方程。

解: 由于在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, $s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2$ 有 3 个待定系数, 于是在 $[a, b]$ 上共有 $3(n-1)$ 个待定系数, 。要满足的条件是:

通过型值点: $s(x_i) = y_i, s(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$, 共有 $2(n-1)$ 个方程;

$s(x)$ 的一阶导数连续, 即 $s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i), i = 2, 3, \dots, n-1$ 共有 $n-2$ 个方程。

这样总共有 $3n-4$ 个方程, 而待定系数有 $3n-3$ 个, 于是 $s(x)$ 可以有很多。若要使它唯一确定, 加上 $s'(x_1) = y'_1$ 即可。事实上: 考虑 $s(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个二

次多项式, 可以写成: $s(x) = y_i + s'(x_i)(x - x_i) + \frac{s''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2$, 若记 $k_i = s'(x_i)$ 为

未知量, 则: $s'(x) = k_i + s''(x_i)(x - x_i)$, 再由 $s'(x_{i+1}) = k_{i+1}$ 得 $s''(x_i) = \frac{k_{i+1} - k_i}{x_{i+1} - x_i}$, 故

$s(x) = y_i + k_i(x - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{k_{i+1} - k_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)^2$, 再由 $s(x_{i+1}) = y_{i+1}$ 得:

$$\frac{k_{i+1} + k_i}{2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-1$$

再由 $k_1 = s'(x_1) = y'_1$ 为已知, 从而由 $k_{i+1} = 2f(x_i, x_{i+1}) - k_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, 可求得 $k_2, k_3, \dots, k_n$, 且由递推关系知 $k_2, k_3, \dots, k_n$ 是唯一确定的。

15. 证明满足周期边界条件的 3 次样条插值函数 $s(x)$ 也具有极小模性质, 即:

$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [g''(x)]^2 dx$, 其中 $g(x)$ 是二阶导数连续函数, 且 $g(x_i) = y_i = s(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $g(x_1) = g(x_n), g'(x_1) = g'(x_n), g''(x_1) = g''(x_n)$ 。

证: 设 $g(x)$ 是二阶导数连续, 且满足 $g(x_i) = y_i = s(x_i), i = 1, 2, \dots, n$, $g(x_1) = g(x_n), g'(x_1) = g'(x_n), g''(x_1) = g''(x_n)$ 的任意一个函数, 令 $\eta(x) = g(x) - s(x)$, 则 $\eta(x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。由:

$$\begin{aligned} \int_a^b s''(x)\eta''(x)dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''(x)\eta''(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} s''(x)\eta'(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'''(x)\eta'(x)dx \\ &= s''(x_n)\eta'(x_n) - s''(x_1)\eta'(x_1) - \sum_{i=1}^{n-1} s'''(x)\eta(x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s^{(4)}(x)\eta(x)dx \\ &= s''(x_n)(g'(x_n) - s'(x_n)) - s''(x_1)(g'(x_1) - s'(x_1)) - s'''(x_n)\eta(x_n) + s'''(x_1)\eta(x_1) = 0 \end{aligned}$$

得:

$$\begin{aligned}\int_a^b [g''(x)]^2 dx &= \int_a^b [s''(x) + \eta''(x)]^2 dx \\&= \int_a^b [s''(x)]^2 dx + \int_a^b [\eta''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b s''(x) \eta''(x) dx \\&= \int_a^b [s''(x)]^2 dx + \int_a^b [\eta''(x)]^2 dx\end{aligned}$$

故: $\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [g''(x)]^2 dx$ 。证毕

16. 证明: 贝齐尔曲线 $P_n(P_0, P_1, \dots, P_n, t) = P_n(P_n, P_{n-1}, \dots, P_0, 1-t)$ 。

证: 因

$$\begin{aligned}P_n(P_0, P_1, \dots, P_n, t) &= \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_i C_i^n t^i (1-t)^{n-i}, \text{ 令 } j = n-i \\&= \sum_{j=0}^n P_{n-j} C_{n-j}^n t^{n-j} (1-t)^j = \sum_{j=0}^n P_{n-j} C_j^n (1-t)^j [1-(1-t)]^{n-j} \\&= P_n(P_n, P_{n-1}, \dots, P_0, 1-t)\end{aligned}$$

17. 对于贝齐尔曲线 $P_3(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_{i,3}(t)$, 若要求 $P_3(\frac{1}{3}) = Q_1, P_3(\frac{2}{3}) = Q_2$, 问 P_1, P_2 应是什么?

解: 由 $P_3(\frac{1}{3}) = Q_1$ 得: $P_0(\frac{2}{3})^3 + 3P_1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2 + 3P_2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1 + P_3(\frac{1}{3})^3 = Q_1$, 即:

$$8P_0 + 12P_1 + 6P_2 + P_3 = 27Q_1,$$

再由 $P_3(\frac{2}{3}) = Q_2$ 得: $P_0 + 6P_1 + 12P_2 + 8P_3 = 27Q_2$, 解得:

$$\begin{cases} P_1 = -\frac{5}{6}P_0 + 3Q_1 - \frac{3}{2}Q_2 + \frac{1}{3}P_3 \\ P_2 = \frac{1}{3}P_0 - \frac{3}{2}Q_1 + 3Q_2 - \frac{5}{6}P_3 \end{cases}$$

18. 利用作图定理证明: $P_n(t) = \sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) P_{i,n-k}$ 。

证: 利用数学归纳法。当 $k = 1$ 时:

$$\sum_{i=0}^1 B_{i,1}(t) P_{i,n-1} = B_{0,1}(t) P_{0,n-1} + B_{1,1}(t) P_{1,n-1} = (1-t) P_{0,n-1} + t P_{1,n-1} = P_{0,n} = P_n(t)$$

成立。假设当 $k = m$ 时有: $\sum_{i=0}^m B_{i,m}(t) P_{i,n-m} = P_{0,n}$, 则当 $k = m+1$ 时:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m+1} B_{i,m+1}(t) P_{i,n-m-1} &= \sum_{i=0}^{m+1} [(1-t) B_{i,m}(t) + t B_{i-1,m}(t)] P_{i,n-m-1} \\ &= t \sum_{i=0}^{m+1} B_{i-1,m}(t) P_{i,n-m-1} + (1-t) \sum_{i=0}^{m+1} B_{i,m}(t) P_{i,n-m-1} \\ &= t \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t) P_{i+1,n-1-m} + (1-t) \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t) P_{i,n-1-m} \quad (\text{由归纳假设}) \\ &= t P_{1,n-1} + (1-t) P_{0,n-1} = P_{0,n} = P_n(t) \end{aligned}$$

故由数学归纳法知, 对任意 $0 \leq k \leq n$ 有: $P_n(t) = \sum_{i=0}^k B_{i,k}(t) P_{i,n-k}$ 。

19. 证明: $(1-t) \frac{d}{dt} P_{0,n-1} + t \frac{d}{dt} P_{1,n-1} = (n-1)(P_{1,n-1} - P_{0,n-1})$ 。

证: 因为: $(1-t) P_{0,n-1} + t P_{1,n-1} = P_{0,n} = P_n(t)$, 两边求导得:

$$P_{1,n-1} - P_{0,n-1} + (1-t) \frac{d}{dt} P_{0,n-1} + t \frac{d}{dt} P_{1,n-1} = \frac{d}{dt} P_{0,n} = n(P_{1,n-1} - P_{0,n-1})$$

故: $(1-t) \frac{d}{dt} P_{0,n-1} + t \frac{d}{dt} P_{1,n-1} = (n-1)(P_{1,n-1} - P_{0,n-1})$ 。

最佳逼近

1. 若 $f(x) \in C_{[a,b]}$, 试构造相应的 Bernstein 多项式。

解: 作变换 $x = \varphi(t) = a + t(b-a)$, 则当 $x \in [a, b]$ 时, $t \in [0, 1]$, 记:

$g(t) = f(\varphi(t)) = f(a + t(b-a)), t \in [0, 1]$, 则其 Bernstein 多项式为:

$$B_n(g) = \sum_{i=0}^n g\left(\frac{i}{n}\right) C_i^n t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) C_i^n t^i (1-t)^{n-i}, n = 1, 2, \dots$$

再将 $t = \frac{x-a}{b-a}$ 代入上式即得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 Bernstein 多项式:

$$B_n(f) = \sum_{i=0}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) C_i^n \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^i \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-i}, n = 1, 2, \dots$$

4. 假设 $f \in C_{[a,b]}$, 证明 f 关于 P_0 的最佳一致逼近多项式为:

$$\frac{M+m}{2}, \text{ 其中: } m = \min_{x \in [a,b]} f(x), M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

证明: 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 使:

$$f(x_1) = m = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(x_2) = M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

(1) 若 $m = M$, (2) 则 $f(x)$ 为常数, (3) 显然 $c = \frac{M+m}{2}$ 就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 0 次最佳一致逼近多项式。

(4) 若 $m \neq M$ 则 $x_1 \neq x_2$, (5) 且记 $c = \frac{M+m}{2}$, (6) 由于当 $a \leq x \leq b$ 时, $m \leq f(x) \leq M$, (7) 于是: $-\frac{M-m}{2} \leq f(x) - c \leq \frac{M-m}{2}$, (8) 即 $\|f(x) - c\|_{\infty} = \frac{M-m}{2}$, (9) 又 $f(x_1) - c = -\|f(x) - c\|_{\infty}$, (10) 9;

$f(x_2) - c = \|f(x) - c\|_\infty$, (11) 即 x_1, x_2 为误差曲线 $f(x) - c$ 的两个正负相间的偏差点, (12) 由契比雪夫定理知, (13) $c = \frac{M+m}{2}$ 就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 0 次最佳一致逼近多项式。

6. 证明 $f \in C_{[a,b]}$ 的最佳一致逼近 n 次多项式就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的某个 n 次拉格朗日插值多项式。

证明: (1) 若 $f(x) \in P_n$, 则 $f(x)$ 的最佳一致逼近 n 次多项式就是 $f(x)$ 自身。这时在 $[a, b]$ 上任取 $n+1$ 个不同的点, $f(x)$ 就可以看作以这 $n+1$ 个点为插值节点的关于自身的拉格朗日插值多项式。

(2) 若 $f(x) \notin P_n$, 且 $p(x) \in P_n$ 是 $f(x)$ 的最佳一致逼近 n 次多项式, 则由契比雪夫定理知, 误差曲线 $f(x) - p(x)$ 在 $[a, b]$ 上有至少由 $n+2$ 个点组成的交错点组, 从而由介值定理知 $f(x) - p(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点, 于是 $p(x)$ 就是以这 $n+1$ 个零点为插值节点的 n 次拉格朗日插值多项式。

7. 假设 $f \in C_{[-1,1]}$ 是奇(偶)函数, 问其最佳一致逼近多项式是否也是奇(偶)函数?

解: 回答是肯定的。这里只证明当 f 是偶函数时, 相应的最佳一致逼近多项式也是偶函数。事实上, 由于 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最佳一致逼近多项式, 则有:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \Delta(f, P_n), \text{ 对 } \forall x \in [-1, 1]$$

用 $-x$ 代替 x , 并注意到 $f(-x) = f(x)$, 也有:

$$|f(x) - p_n(-x)| \leq \Delta(f, P_n), \text{ 对 } \forall x \in [-1, 1]$$

这说明 $p_n(-x)$ 也是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最佳一致逼近多项式, 再由唯一性知:

$p_n(-x) = p_n(x)$, 对 $\forall x \in [-1, 1]$ 成立, 说明 $p_n(x)$ 是偶函数。证毕

8. 求解 $\sqrt{x}$ 在 $[\frac{1}{4}, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式。

解: 因: $f(x) = \sqrt{x}, f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} < 0$, 对 $\forall x \in [\frac{1}{4}, 1]$, 故由定理 4 的推论 2

知 $x_0 = \frac{1}{4}, x_2 = 1$ 是契比雪夫交错点。假设 $p(x) = a_1x + a_0$ 是 $\sqrt{x}$ 在 $[\frac{1}{4}, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式, 则 $\sqrt{\frac{1}{4}} - (a_1 \cdot \frac{1}{4} + a_0) = 1 - (a_1 + a_0), \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}$, 又若 x_1 是另一个

契比雪夫交错点, 则由 $f'(x_1) - a_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - a_1 = 0, \Rightarrow x_1 = \frac{9}{16}$, 再由

$\sqrt{x_1} - a_1x_1 - a_0 = -(1 - a_1 - a_0)$ 得 $a_0 = \frac{17}{48}$, 所以 $\sqrt{x}$ 在 $[\frac{1}{4}, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式为 $\frac{2}{3}x + \frac{17}{48}$ 。

9. 选取常数 a , 使 $\max_{x \in [0, 1]} |x^2 - ax|$ 最小, 又问这样的常数是否唯一?

解: 令 $f(x) = x^2 - ax$, 由 $f'(x) = 2x - a = 0$, 解得 $x_1 = \frac{a}{2}$, 再由 $f(0) = 0$,

$$f(x_1) = -\frac{a^2}{4}$$

$f(1) = 1 - a$, 所以 $\max_{x \in [0, 1]} |x^2 - ax| = \max_{a \in [0, 1]} \left\{ 1 - a, \frac{a^2}{4} \right\}$, 欲使 $\max_{x \in [0, 1]} |x^2 - ax|$ 最小,

只需取 $1 - a = \frac{a^2}{4}$, 即解得 $a = 2\sqrt{2} - 2$ 。

11. 证明第一类契比雪夫多项式具有如下性质:

- (1) $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$, (2) $T_{2n}(x) = T_n(2x^2 - 1)$
(3) $T'_{2n+1}(x) = 2(2n+1)[T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) + \cdots + T_2(x) + \frac{1}{2}T_0(x)]$
(4) $T'_{2n}(x) = 4n[T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) + \cdots + T_1(x)]$

证明: (1)

$$\begin{aligned} T_m(T_n(x)) &= \cos[m \arccos(T_n(x))] = \cos[m \arccos(\cos(n \arccos x))] \\ &= \cos(mn \arccos x) = T_{mn}(x) \end{aligned}$$

$$(2) \because \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1, \Rightarrow 2\theta = \arccos(2\cos^2 \theta - 1)$$

$$T_{2n}(x) = \cos 2n\theta = \cos n \arccos(2\cos^2 \theta - 1) = T_n(2x^2 - 1)$$

(3) 因 $\theta = \arccos x, \cos \theta = x$, 则

$$\begin{aligned} T'_{2n+1}(x) &= \cos'[(2n+1) \arccos x] = -\sin[(2n+1) \arccos x] \cdot (2n+1) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (2n+1) \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned} &[T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) + \cdots + T_2(x) + \frac{1}{2}T_0(x)] \sin \theta \\ &= [\cos 2n\theta + \cos(2n-2)\theta + \cdots + \cos 2\theta + \frac{1}{2}] \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}[\sin(2n+1)\theta - \sin(2n-1)\theta + \sin(2n-1)\theta - \sin(2n-3)\theta + \cdots \\ &\quad + \sin 3\theta - \sin \theta + \sin \theta] = \frac{1}{2} \sin(2n+1)\theta \end{aligned}$$

$$\text{代入上式即得 } T'_{2n+1}(x) = 2(2n+1)[T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) + \cdots + T_2(x) + \frac{1}{2}T_0(x)]$$

(4) 同理因

$$\begin{aligned} &[T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) + \cdots + T_1(x)] \sin \theta \\ &= [\cos(2n-1)\theta + \cos(2n-3)\theta + \cdots + \cos \theta] \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'_{2n}(x) &= [\cos(2n \arccos x)]' = -\sin(2n\theta) \cdot 2n \cdot \frac{-1}{\sin \theta} = 2n \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} \\ &= 4n[T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) + \cdots + T_1(x)] \end{aligned}$$

12. 构造区间 $[a, b]$ 上的最小零偏差 n 次代数多项式。

解: 已知在 $[-1, 1]$ 的最小零偏差 n 次代数多项式为 $2^{1-n} T_n(t)$, 即它是 n 次首一多项式, 且在 $[-1, 1]$ 上的 $n+1$ 个点 $t_i = \cos \frac{i\pi}{n}, i = 0, 1, \dots, n$ 处轮流取得其最大值与最小值 $\pm 2^{1-n}$ 。对于区间 $[a, b]$, 作变换 $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, 则当 $t \in [-1, 1]$ 时, $x \in [a, b]$, 以 $t = \frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)$ 代入 $2^{1-n} T_n(t)$ 得 $2^{1-n} T_n \left(\frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right)$, 其首项系数为 $\left(\frac{2}{b-a} \right)^n$, 于是 $\left(\frac{b-a}{2} \right)^n 2^{1-n} T_n \left(\frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right)$ 是 x 在 $[a, b]$ 上的 n 次首一多项式, 且在 $n+1$ 个点 $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i, i = 0, 1, \dots, n$ 处轮流取得其最大值与最小值 $\pm \left(\frac{b-a}{2} \right)^n 2^{1-n}$, 故 $[a, b]$ 上的最小零偏差 n 次代数多项式为 $\left(\frac{b-a}{2} \right)^n 2^{1-n} T_n \left(\frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right)$ 。

14. 试求 $a \cos(n+1)x + b \sin(n+1)x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上关于 T_n 的最佳一致逼近三角多项式, 并求出最佳逼近值。

解: 不妨设 $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, 则 $f(x) = a \cos(n+1)x + b \sin(n+1)x$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(n+1)x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(n+1)x \right)$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} [\cos(n+1)x_0 \cos(n+1)x + \sin(n+1)x_0 \sin(n+1)x]$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(n+1)(x - x_0), \text{ 其中 } (n+1)x_0 = \arctg \frac{b}{a}$$
取 $T_n(x) = 0$, 则误差曲线 $f(x) - T_n(x)$ 满足 $\|f(x) - T_n(x)\|_\infty = \sqrt{a^2 + b^2}$, 且

$f(x) - T_n(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + 2\pi)$ 上的 $2n+2$ 个点: $x_k = x_0 + \frac{k}{n+1}\pi$,

$k = 0, 1, \dots, 2n+1$ 处轮流取得其最大值与最小值 $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, 由于

$f(x) - T_n(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 故这一性质在 $[0, 2\pi)$ 上也成立。

因此 $f(x) = a \cos(n+1)x + b \sin(n+1)x$ 的最佳一致逼近三角多项式为

$T_n(x) = 0$, 最佳逼近值为 $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ 。

当 $\sqrt{a^2+b^2} = 0$ 时, 上述结论也成立。

15. 假设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 $(0, \pi)$ 上的 n 个互不相同的点, 证明: 对于任意向量

$(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$, 方程组 $\sum_{k=1}^n a_k \sin kx_i = y_i, i = 1, 2, \dots, n$ 有唯一解。

证明: 原方程组的矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} \sin x_1 & \sin 2x_1 & \cdots & \sin nx_1 \\ \sin x_2 & \sin 2x_2 & \cdots & \sin nx_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin x_n & \sin 2x_n & \cdots & \sin nx_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

为证明上述方程组有唯一解, 仅需证明对应的齐次方程组只有零解。用

反证法, 假设对应的齐次方程组有非零解 $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)^T \neq 0^T$, 由此

令 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k^* \sin kx$, 于是对应的齐次方程组相当于

$f(x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 注意到已知 $x_i \in (0, \pi)$ 且互不相同以及

$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k^* \sin kx$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中为奇函数, 故 $f(-x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 再加

上 $f(0) = 0$, 从而 n 次三角多项式 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k^* \sin kx$ 在 $[-\pi, \pi)$ 中有 $2n+1$ 个零点, 这与引理 3 的性质 6 相矛盾。于是原方程组有唯一解。

16. 证明在区间 $[-1, 1]$ 上, $\Delta(e^x, P_n) \leq \frac{e\pi}{2(n+1)}$ 。

证明: 因在区间 $[-1, 1]$ 上, $2^{-n} T_{n+1}(x)$ 是在所有 $n+1$ 次首一多项式中, 与零偏差最小的多项式, 故以 $2^{-n} T_{n+1}(x)$ 的零点:

$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2(n+1)}, i = 1, 2, \dots, n+1$ 为插值节点, 构造拉格朗日 n 次插值多项

式 $p_n(x)$, 则: $|f(x) - p_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| |w_{n+1}(x)|$, 因为根据 x_i 的取

法有: $w_{n+1}(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x)$, 从而

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} |2^{-n} T_{n+1}(x)| \leq \frac{e}{2^n (n+1)!} \leq \frac{e\pi}{2^{n+1} (n+1)}$$

于是 $\Delta(e^x, p_n) \leq |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{e\pi}{2^{n+1} (n+1)}$ 。

17. 证明许瓦兹不等式 $(x, y) \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, 并借此证明内积范数满足范数的 3 条性质。

证: 取 $a = \frac{(x, y)}{(y, y)}$, 则

$$0 \leq (x - ay, x - ay) = (x, x) - 2a(x, y) + a^2(y, y) = (x, x) - \frac{(x, y)^2}{(y, y)}$$

故: $(x, y) \leq |(x, y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ 。并由内积的性质: $(x, x) \geq 0, \forall x \in X$;

$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 推出:

$$(1) \|x\| = \sqrt{(x, x)} \geq 0, \text{ 且 } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(2) \|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = |\alpha| \sqrt{(x, x)} = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X;$$

(3) 由于:

$$(x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

所以: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

18. 求 x^2 在 $[0, 1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式。

解: 由于 $\phi_1 = 1, \phi_2 = x$, 则: $(\phi_1, \phi_1) = \int_0^1 dx = 1, (\phi_1, \phi_2) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$
 $(\phi_2, \phi_2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, (\phi_1, f) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, (\phi_2, f) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4},$ 可得方程组:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1 = \frac{1}{4} \end{cases}, \text{解之得: } \begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{6} \\ \alpha_1 = 1 \end{cases}.$$

故 x^2 在 $[0, 1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式为: $x - \frac{1}{6}$ 。

19. 若 $A \in R^{n \times m}$ 是秩为 m 的矩阵, 试求解问题: $\min_{x \in R^m} \|Ax - b\|_2$, 其中: $b \in R^n, x \in R^m$ 。

解: 若记 $x_i \in R^n$ 为矩阵 A 的第 i 列向量, 则由于 A 的秩为 m , 故 $x_1, x_2, \dots, x_m$

线性无关, 且记 $V = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 显然:

$V = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{Ax \mid x \in R^m\}$, 于是子空间 V 对 $b \in R^n$ 的最佳平方逼近

为: $\Delta(b, V) = \min_{y \in V} \|b - y\|_2 = \min_{x \in R^m} \|b - Ax\|_2$ 。从而上述问题即为最小二乘问题, 其

解满足法方程组: $A^T A \alpha = A^T b$, 故所求问题的解为: $\alpha = (A^T A)^{-1} A^T b$ 。

20. 若连续函数列 $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots\}$ 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交, 且 $\phi_0(x)$ 恒正, 证明:

对任意 n 个数 $c_1, c_2, \dots, c_n$, 广义多项式 $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少有一个零点。

证明：用反证法。若存在 n 个数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ ，使广义多项式 $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ 在 $[a, b]$ 上没有零点，由于 $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ 为连续函数，故 $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒正，或恒负。不妨设 $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) > 0, x \in [a, b]$ ，又由 $\phi_0(x)$ 恒正，故

$$\int_a^b \rho(x) \left(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right) \phi_0(x) dx > 0$$

。但由于 $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots\}$ 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交，故

$$\int_a^b \rho(x) \left(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right) \phi_0(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b \rho(x) \phi_i(x) \phi_0(x) dx = 0$$

，这与上式矛盾。

因此，对任意 n 个数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ ，广义多项式 $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少有一个零点。

21. 试写出勒让德多项式的前 4 项。

解：由递推公式：

$$\begin{cases} p_0(x) = 1, p_1(x) = x, \\ p_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x \cdot p_k(x) - \frac{k}{k+1} p_{k-1}(x), k = 1, 2, \dots \end{cases}$$
 得：

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, p_3(x) = \frac{5}{2}x \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3}x = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)。$$

22. 证明：第二类契比雪夫多项式在内积 $(f, g) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) g(x) dx$ 意义下正交。问其规范正交系又怎样？

证明：由于

$$\begin{aligned}(U_n(x), U_m(x)) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sin((m+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= -\int_{-1}^1 \sin((n+1)\arccos x) \sin((m+1)\arccos x) d(\arccos x) \\&= -\int_x^0 \sin((n+1)t) \sin((m+1)t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x [\cos(n-m)t - \cos(n+m+2)t] dt \\&= \begin{cases} \pi/2, m=n \\ 0, m \neq n \end{cases}\end{aligned}$$

因此第二类契比雪夫多项式在内积 $(f, g) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) g(x) dx$ 意义下正交，且其规范正交系为：

$$\frac{U_n(x)}{\sqrt{\pi/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, n=1, 2, \dots$$

课后答案网
www.hackshp.cn

第五章 数值积分

1. 若求积公式 (2) 具有 m 次代数精度, 试证明对于任意次数不超过 m 的代数多项式 $p(x)$, 都有 $E_n(p) = 0$ 。

证明: 因为对 $i = 0, 1, 2, \dots, m$, 都有 $E_n(x^i) = 0$, 从而由

$E_n(f) = I(f) - I_n(f)$ 的线性性质以及任意 $p(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i$ 有:

$$E_n(p) = E_n\left(\sum_{i=0}^m c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^m c_i E_n(x^i) = 0 \quad \text{。结论成立。}$$

2. 证明柯特斯系数满足 $C_j^n = C_{n-j}^n, \sum_{j=0}^n C_j^n = 1$ 。

证明: (1) 由 $C_j^n = \frac{(-1)^{n-j}}{n(n-j)!j!} \int_0^n \frac{\Pi_n(t)}{t-j} dt$, 令 $t = n-t'$, 则

$$\Pi_n(t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-n) = (n-t')(n-t'-1)\cdots(-t') = (-1)^{n+1} t'(t'-1)\cdots(t'-n)$$

$$\text{故 } C_j^n = \frac{(-1)^{n-j}(-1)^{n+1}}{n(n-j)!j!} \int_0^n \frac{\Pi_n(t')}{n-t'-j} dt' = \frac{(-1)^j}{n(n-j)!j!} \int_0^n \frac{\Pi_n(t')}{t'-(n-j)} dt' = C_{n-j}^n$$

(2) 由于牛顿-柯特斯公式的代数精度 $\geq n$, 故对零次多项式 $f(x) = 1$,

有 $E_{n+1}(f) = 0$, 即 $I(f) = I_{n+1}(f)$, 也就是 $\int_a^b f(x)dx = (b-a) \sum_{j=0}^n C_j^n f(x_j)$,

$$\text{即 } b-a = (b-a) \sum_{j=0}^n C_j^n, \text{ 由 } b-a \neq 0 \text{ 得 } \sum_{j=0}^n C_j^n = 1 \quad \text{。}$$

3. 证明柯特斯系数 C_k^n 满足方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^n & \cdots & n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^n \\ C_2^n \\ \vdots \\ C_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} \\ \frac{n^2}{3} \\ \vdots \\ \frac{n^n}{n+1} \end{bmatrix}$$

证明: 由于牛顿-柯特斯公式的代数精度 $\geq n$, 故在区间 $[0, n]$ 上使用牛顿-柯特斯公式对 $f(x) = x^i, i = 1, 2, \cdots, n$ 精确成立, 即:

$$(n-0) \sum_{j=0}^n C_j^n j^i = \int_0^n x^i dx, i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 也就是:}$$

$$n \sum_{j=0}^n C_j^n j^i = \frac{n^{i+1}}{i+1}, i = 1, 2, \cdots, n \quad \text{或} \quad \sum_{j=1}^n C_j^n j^i = \frac{n^i}{i+1}, i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 写成矩阵形式即}$$

为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^n & \cdots & n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^n \\ C_2^n \\ \vdots \\ C_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} \\ \frac{n^2}{3} \\ \vdots \\ \frac{n^n}{n+1} \end{bmatrix}$$

4. 证明 $\Pi_n(\frac{n}{2} + t) = (-1)^{n+1} \Pi_n(\frac{n}{2} - t)$, 若 t 不是整数, 且 $0 < t+1 \leq \frac{n}{2}$, 则 $|\Pi_n(t+1)| < |\Pi_n(t)|$; 若 t 不是整数, 且 $\frac{n}{2} < t \leq n$, 则 $|\Pi_n(t)| < |\Pi_n(t+1)|$ 。

证明: 因为 $\Pi_n(t) = t(t-1)\cdots(t-n)$, 所以:

$$\begin{aligned} \Pi_n(\frac{n}{2} + t) &= (\frac{n}{2} + t)(\frac{n}{2} + t - 1) \cdots (\frac{n}{2} + t - n + 1)(\frac{n}{2} + t - n) \\ &= (-1)^{n+1} (-\frac{n}{2} - t)(-\frac{n}{2} - t + 1) \cdots (-\frac{n}{2} - t - 1)(-\frac{n}{2} - t) \\ &= (-1)^{n+1} (\frac{n}{2} - t)(\frac{n}{2} - t - 1) \cdots (\frac{n}{2} - t - (n-1))(\frac{n}{2} - t - n) \\ &= (-1)^{n+1} \Pi_n(\frac{n}{2} - t) \end{aligned}$$

若 t 不是整数, 且 $0 < t+1 \leq \frac{n}{2}$ 时, 有 $0 < 2t+2 \leq n$ 成立, 所以: $t+2 \leq n-t$,

于是 $0 < t+1 < t+2 \leq n-t$ 。再由:

$$\Pi_n(t+1) = (t+1)t(t-1)\cdots(t-n+1)$$

$$\Pi_n(t) = t(t-1)\cdots(t-n+1)(t-n)$$

和 $|t+1| < |t-n| = |n-t|$ 得: $|\Pi_n(t+1)| < |\Pi_n(t)|$ 。

同理当 $\frac{n}{2} < t \leq n$ 时, $n < 2t \leq 2n$, 两边再减 t 有: $0 \leq n-t < t < t+1$,

即 $|n-t| < |t+1|$, 所以若 t 不是整数, 且 $\frac{n}{2} < t \leq n$ 时, $|\Pi_n(t)| < |\Pi_n(t+1)|$ 。

证毕

5. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $\alpha_i > 0, \eta_i \in [a, b], i = 1, 2, \dots, n$ 。证明: 存在 $\eta \in [a, b]$ 成

立 $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(\eta_i) = f(\eta) \sum_{i=1}^n \alpha_i$

证明: 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小

值, 即当 $x \in [a, b]$ 时 $m \leq f(x) \leq M$ 。又若令 $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, 则由 $\alpha_i > 0$ 得:

$$m \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) f(\eta_i) \leq M \quad \text{。故由连续函数的介值定理知: 必存在 } \eta \in [a, b],$$

$$\text{使 } f(\eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} f(\eta_i), \quad \text{即 } \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\eta_i) = \alpha f(\eta) = f(\eta) \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{。}$$

6. 若用复化梯形公式求积分 $\int_0^1 e^x dx$, 则积分区间要多少等分才能保证计算结果有五位有效数字?

解: 欲使 $|I(f) - T_n| = \left| -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\eta) \right| = \frac{h^2}{12} e^\eta \leq \frac{h^2}{12} e < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 其中

$$\eta \in [0, 1],$$

只须 $n > \sqrt{\frac{8}{6} \times 10^4} = 67.308764$, 即积分区间要 68 等分才能保证计算结果有五位有效数字。

7. 函数 $f(x)$ 由表 14 给出, 利用复化梯形公式按如下的尺度, 计算 $\int_1^{1.8} f(x) dx$:

(1) $h = 0.1$ (2) $h = 0.2$ (3) $h = 0.4$

解: (1) $h = 0.1$ 时,

$$T(f) \approx T_8 = \frac{0.1}{2} [f(1.0) + f(1.8) + 2(f(1.1) + f(1.2) + \cdots + f(1.7))] \\ = 1.7683$$

(2) $h = 0.2$ 时, $T(f) \approx T_4 = \frac{0.2}{2} [f(1.0) + f(1.8) + 2(f(1.2) + f(1.4) + f(1.6))]$
= 1.7728

(3) $h = 0.4$ 时, $T(f) \approx T_2 = \frac{0.4}{2} [f(1.0) + f(1.8) + 2f(1.4)] = 1.7904$

8. 验证复化柯特斯公式和复化辛卜生公式之间存在递推关系 $C_n = \frac{16S_{2n} - S_n}{15}$ 。

解: 将区间 $[a, b]$ n 等分, 其节点 $x_i = a + ih, h = (b - a) / n, i = 0, 1, 2, \dots, n$,

在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上采用辛卜生公式得:

$$S_n = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})], \text{ 以及:}$$

$$S_{2n} = \frac{h}{12} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 4f(x_{i+\frac{3}{4}}) + f(x_{i+1})], \text{ 于是:}$$

$$\begin{aligned} 16S_{2n} - S_n &= \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \left[7f(x_i) + 32f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 7f(x_{i+1}) \right] \\ &= 15 \cdot \frac{h}{90} \sum_{i=0}^{n-1} \left[7f(x_i) + 32f(x_{i+\frac{1}{4}}) + 12f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 7f(x_{i+1}) \right] \\ &= 15C_n \end{aligned}$$

即: $C_n = \frac{16S_{2n} - S_n}{15}$ 。证毕。

9. 分别用复化梯形公式和复化辛卜生公式计算下列积分:

(1) $\int_0^1 e^{x^2} dx, \quad h = 0.1$

解: (1) 令 $f(x) = e^{x^2}$, 则:

$$T_{10} = \frac{0.1}{2} [f(0) + f(1) + 2(f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(0.9))] = 1.467175$$

$$S_{10} = \frac{0.1}{6} [f(0) + f(1) + 2(f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(0.9))$$

$$+ 4(f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.95))] = 1.462654$$

(2) $T_9 = 1.641134, \quad S_9 = 1.625271;$

(3) $T_5 = 0.759262, \quad S_5 = 0.781752;$

(4) $T_{10} = 0.407101, \quad S_{10} = 0.407297。$

10. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 证明复化梯形公式和复化辛卜生公式当 $n \rightarrow \infty$ 时,

收敛于积分值 $I = \int_a^b f(x) dx$ 。

证明: 将区间 $[a, b]$ n 等分, 其节点

$x_i = a + ih, h = (b - a)/n, i = 0, 1, 2, \cdots, n$, 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上采用梯形

公式并由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积得:

$$T_n = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f_i + f_{i+1}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot h + \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1} \cdot h \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (I + I) = I$$

；在每个

小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上采用辛卜生公式得：

$$S_n = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})] = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot h + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \cdot h + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \cdot h \right]$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} (I + 4I + I) = I$$

11. 11.111 11. 证明等式： $n \sin \frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \dots$ ，并用理查森外推法计算 π 的近似值。

证明：由于当 $-\infty < x < \infty$ 时，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \dots$$

，令 $x = \frac{\pi}{n}$ 得：

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{3!n^3} + \frac{\pi^5}{5!n^5} - \frac{\pi^7}{7!n^7} + \dots$$

，即：

$$n \sin \frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \frac{\pi^7}{7!n^6} + \dots$$

若令 $h = \frac{1}{n}$ ，并记 $A(h) = \frac{1}{h} \sinh \pi = n \sin \frac{\pi}{n}$ ，则上式成为：

$$\pi = A(h) + \frac{\pi^3}{3!} h^2 - \frac{\pi^5}{5!} h^4 + \frac{\pi^7}{7!} h^6 + \dots$$

，因此该公式符合理查森外推法的条

件，若记 $A_{0,k} = A\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k h\right)$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$ 由外推算法： $A_{m+1,k} = \frac{4^m A_{m,k+1} - A_{m,k}}{4^m - 1}$ ，

$m = 0, 1, \dots, k-1$ ，并取 $h = \frac{1}{2}$ （即 $n = 2$ ）得：

$h_0 = \frac{1}{2}$	$A_{0,0} = 2$			
$h_1 = \frac{1}{4}$	$A_{0,1} = 2,82842712$	3. 1045694 99		

$h_2 = \frac{1}{8}$	$A_{0,2} = 3.06146745$	3.1391475 69	3.1414527 73	
$h_3 = \frac{1}{16}$	$A_{0,3} = 3.12144515$	3.1414377 15	3.1415903 91	3.1415926 75

与 $\pi = 3.14159265 \dots$ 相比，有 8 位有效数字。

12. 用龙贝格算法求积分 $\int_1^2 dx/x$ 直到第五位小数不变。

0.7500000000			
0.7083333333	0.6944444444		
0.6970238095	0.6932539683	0.6931746032	
0.6941218504	0.6931545307	0.6931479015	0.6931474776

解：

www.hackshp.cn

积分的精确值为 $\int_1^2 dx/x = 0.6931471860$ 。

13. 假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数，求证

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta), \quad a \leq \eta \leq b$$

证明：因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数，则：

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \xi \in [a, b]$$

两边积分得： $\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$ ，因

$\frac{f''(\xi)}{2!} = f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, x\right)$ 在 $[a, b]$ 上连续，故存在 $\eta \in [a, b]$ ，使

$$\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{f''(\eta)}{2!} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{f''(\eta)}{2!} \cdot \frac{(b-a)^3}{12}, \text{ 即:}$$

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta). \text{ 证毕}$$

14. 给定求积公式 $\int_{-2a}^{2a} f(x) dx \approx A_{-1}f(-a) + A_0f(0) + A_1f(a)$ ，试决定求积系数，使之代数精确度尽可能高。

解：若求积公式对 $f(x) = 1, x, x^2$ 精确成立，则必满足方程组：

$$\begin{cases} 4a = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ 0 = -aA_{-1} + aA_1 \\ \frac{16a^3}{3} = a^2A_{-1} + a^2A_1 \end{cases} \text{ 解之得: } \begin{cases} A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}a \\ A_0 = -\frac{4}{3}a \end{cases}, \text{ 由于当 } f(x) = x^3 \text{ 时, 求积}$$

公式仍精确成立，但当 $f(x) = x^4$ 时，求积公式不再精确成立，故该求积公式具有 3 次代数精度。

15. 寻求如下的高斯型求积公式： $\int_0^1 xf(x) dx = A_1f(x_1) + A_2f(x_2)$.

解：由于求积公式是高斯型的，故对单项式 $1, x, x^2, x^3$ 精确成立，于是得到如下的关于 A_1, A_2, x_1, x_2 的方程组：

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (1) \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \quad (2) \\ A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \quad (4) \end{cases},$$

令 $u = x_1 x_2, v = x_1 + x_2$, 并由 (1) $\times u - (2) \times v + (3)$ 、(2) $\times u - (3) \times v + (4)$ 分

别得:
$$\begin{cases} \frac{1}{2}u - \frac{1}{3}v + \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{1}{3}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{5} = 0 \end{cases}$$
 解之得:
$$\begin{cases} u = \frac{3}{10} \\ v = \frac{6}{5} \end{cases}$$
, 因此 x_1, x_2 是一元二次方程:

$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10} = 0$ 的解: $x_1 = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10}, x_2 = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}$, 再由 (1)、(2) 解得:

$A_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}}{36}, A_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{36}$, 即:

$$\int_0^1 x f(x) dx = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}}{36}\right) f\left(\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{36}\right) f\left(\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}\right).$$

16. 利用 (52) 式推导当 $n = 2$ 时的三角辛卜生公式。

解: 令: $\rho(x) = e^{imx}, w_2(x) = (x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)$, 由

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{imx} f(x) dx &= \int_a^b f(x) \cos mx dx + i \int_a^b f(x) \sin mx dx \\ &\approx A_0^{(2)} f(a) + A_1^{(2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_2^{(2)} f(b) \end{aligned}$$

其中:

$$A_0^{(2)} = \int_a^b \frac{(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)(a-\frac{a+b}{2})} e^{imx} dx = \frac{ie^{ima}}{m} + \frac{e^{im\delta} + 3e^{ima}}{(a-b)(im)^2} + \frac{4(e^{im\delta} - e^{ima})}{(a-b)^2(im)^3}$$

$$A_1^{(2)} = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} e^{imx} dx = \frac{4(e^{im\delta} + e^{ima})}{(b-a)(im)^2} - \frac{8(e^{im\delta} - e^{ima})}{(b-a)^2(im)^3}$$

$$A_2^{(2)} = \int_a^b \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})} e^{imx} dx = \frac{e^{im\delta}}{im} - \frac{3e^{im\delta} + e^{ima}}{(b-a)(im)^2} + \frac{4(e^{im\delta} - e^{ima})}{(b-a)^2(im)^3}$$

可得当 $n = 2$ 时的三角辛卜生公式:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin mx dx &\approx I_2^{(1)}(f) \\ &= \frac{f(a) \cos ma - f(b) \cos mb}{m} + \frac{4(\cos mb - \cos ma)}{m^3(b-a)^2} \cdot [f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)] \\ &\quad + \frac{(\sin mb + \sin ma)(f(a) - 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) + 2\sin(ma)f(a) + 2\sin(mb)f(b)}{m^2(b-a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos mx dx &\approx I_2^{(2)}(f) \\ &= \frac{f(b) \sin mb - f(a) \sin ma}{m} + \frac{4(\sin ma - \sin mb)}{m^3(b-a)^2} \cdot [f(a) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \\ &\quad + \frac{(\cos mb + \cos ma)(f(a) - 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) + 2\cos ma f(a) + 2\cos mb f(b)}{m^2(b-a)} \end{aligned}$$

17. 适当处理下列定积分, 并选择合适的方法计算其近似值:

$$(1) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cos x dx$$

解: 因为: $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cos x dx$, 可以利用高斯-

第二类契比雪夫求积公式 $I \approx \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f(\cos \frac{k\pi}{n+1})$, 于是取 $n=3$ 得:

$$2I = \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{\pi}{4} f(\cos \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{2\pi}{4} f(\cos \frac{2\pi}{4}) + \frac{\pi}{4} \sin^2 \frac{3\pi}{4} f(\cos \frac{3\pi}{4}) = 1.382492873$$

所以: $I \approx 0.6912464386$

$$(2) \int_0^{2\pi} x \cos x (\sin 40x + \cos 50x) dx$$

解: 这是振荡积分, 利用三角梯形公式 (53) 得:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \cos x (\sin 40x + \cos 50x) dx &= \int_0^{2\pi} x \cos x \sin 40x dx + \int_0^{2\pi} x \cos x \cos 50x dx \\ &= \frac{-2\pi \cos(2\pi) \cos(40 \times 2\pi)}{40} + \frac{(\cos(50 \times 2\pi) - \cos(50 \times 0)) \cdot (2\pi \cos(2\pi) - 0 \cos 0)}{50^2 \times (2\pi - 0)} \\ &= -\frac{\pi}{20} = -0.15707963... \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

解: 由于: $I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{e^{|x|}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, 可以利用高斯-第一类契比雪夫求积公式:

$$I \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{(2k-1)x}{2n}\right), \text{ 于是取 } n=3 \text{ 得 (其中 } f(x)=e^{|x|} \text{):}$$

$$2I \approx \frac{\pi}{3} \left[f\left(\cos \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\cos \frac{3\pi}{6}\right) + f\left(\cos \frac{5\pi}{6}\right) \right] = 6.026501845, \text{ 所以}$$

$$I \approx 3.013250922.$$

$$(4) \int_0^{\infty} e^{-2x} \ln(1+x) dx$$

解：作积分变换： $x = t/2$ ，得：

$$I = \int_0^{\infty} e^{-2x} \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} \ln\left(1+\frac{t}{2}\right) dt, \text{ 于是可以利用高斯-拉盖尔求积}$$

公式 (其中 $f(x) = \ln(1+\frac{x}{2})$)：

$$I \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(n!)^2}{x_k (L'_n(x_k))^2} f(x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \text{ 于是取 } n=3 \text{ 得:}$$

$$I \approx \frac{1}{2} \times [0.7110930099 f(0.4157745568) + 0.2785177336 f(2.2942803603) + 0.0103892565 f(6.2899450829)] = 0.1809521056$$

$$(5) \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2x dx$$

解：由于： $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2x dx$ ，于是可以利用高斯-埃米特求积公式 (其中 $f(x) = \cos 2x$)：

埃米特求积公式 (其中 $f(x) = \cos 2x$)：

$$2I \approx \sum_{k=1}^n \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{(H'_n(x_k))^2} f(x_k), \text{ 于是取 } n=3 \text{ 得:}$$

$$I = \frac{1}{2} [0.2954089752 \times (f(1.2247448714) + f(-1.2247448714)) + 1.1816359006 \times f(0)] = 0.3633808875$$

$$(6) \int_0^1 \frac{(1+x+\sin x)^2}{\sqrt{x}} dx$$

解: 利用积分变换:

$$I = \int_0^1 \frac{(1+x+\sin x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2(1+t^2+\sin t^2) dt = \int_{-1}^1 (1+t^2+\sin t^2) dt$$

于是可以利用三

点高斯-勒让德求积公式 (其中 $f(x) = (1+x^2+\sin x^2)^2$) 得:

$$I \approx 0.5555555556 \times f(-0.7745966692) + 0.5555555556 \times f(0.7745966692) \\ + 0.8888888889 \times f(0) = 6.095136706$$

18. 试导出三重积分的梯形公式和辛卜生公式。

解: 设 $D = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$, 则三重积分的梯形公式和辛卜生公式分别为:

$$I_8(f) = \frac{(b-a)(d-c)(f-e)}{8} [f(a, c, e) + f(a, c, f) + f(a, d, e) + f(a, d, f) \\ + f(b, c, e) + f(b, c, f) + f(b, d, e) + f(b, d, f)] \\ I_{27}(f) = \frac{(b-a)(d-c)(f-e)}{36 \times 6} [f(a, c, e) + 4f(a, c, \frac{e+f}{2}) + f(a, c, f) \\ + 4f(a, \frac{c+d}{2}, e) + 16f(a, \frac{c+d}{2}, \frac{e+f}{2}) + 4f(a, \frac{c+d}{2}, f) \\ + f(a, d, e) + 4f(a, d, \frac{e+f}{2}) + f(a, d, f) \\ + 4f(\frac{a+b}{2}, c, e) + 16f(\frac{a+b}{2}, c, \frac{e+f}{2}) + 4f(\frac{a+b}{2}, c, f) \\ + 16f(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, e) + 64f(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, \frac{e+f}{2}) + 16f(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}, f) \\ + 4f(\frac{a+b}{2}, d, e) + 16f(\frac{a+b}{2}, d, \frac{e+f}{2}) + 4f(\frac{a+b}{2}, d, f) \\ + f(b, c, e) + 4f(b, c, \frac{e+f}{2}) + f(b, c, f) \\ + 4f(b, \frac{c+d}{2}, e) + 16f(b, \frac{c+d}{2}, \frac{e+f}{2}) + 4f(b, \frac{c+d}{2}, f) \\ + f(b, d, e) + 4f(b, d, \frac{e+f}{2}) + f(b, d, f)]$$

20. 用分离变量法以及辛卜生公式计算积分 $\int_0^1 \int_0^x y dy dx$ 并比较计算结果与准确值之间的关系

解: 令: $F(x) = \int_0^x y dy = \frac{x^2}{2}$, 则 $F(x)$ 是一个二次多项式, 故对 $J(F) = \int_0^1 F(x) dx$

使用辛卜生公式精确成立, 且对 $F(x) = \int_0^x y dy$ 使用辛卜生公式也精确成立, 因此

使用分离变量法以及辛卜生公式计算积分 $\int_0^1 \int_0^x y dy dx$ 是精确的。事实上, 使用辛卜生公式计算时:

$$F(0) = \int_0^0 y dy = 0, \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} y dy = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \left[0 + 4 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8},$$
$$F(1) = \int_0^1 y dy = \frac{1}{6} \times [0 + 4 \times \frac{1}{2} + 1] = \frac{1}{2},$$

故： $J(F) = \int_0^1 F(x) dx = \frac{1}{6} \times [F(0) + 4F(\frac{1}{2}) + F(1)] = \frac{1}{6}$ ，与精确计算
 $\int_0^1 \int_0^x y dy dx \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6}$ 是相同的。

课后答案网
www.hackshp.cn

第七章 函数方程求根

1. 对例 1 若要求计算到 $|x^* - x_k| \leq 10^{-4}$, 问 k 应为多大?

解: 要使 $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1) \leq 10^{-4}$, 即 $\frac{1}{2^k}(1.3 - 1) \leq 10^{-4}$, 只需 $2^k \geq 0.3 \times 10^4$,

即: $k \geq \log_2 3000 = 11.55074678 \dots$, 故 k 应等于 12。

2. 对 $f(x) = 0$, 取 a_1, b_1, c_1 三点, 用反插值法求 $f(x)$ 的根 x^* 的近似, 即 x^* 用 $(a_1, f(a_1)), (b_1, f(b_1)), (c_1, f(c_1))$ 表示的近似。

解: 设 $y = f(x)$ 的反函数为 $x = \varphi(y)$, 若记 $y_1 = f(a_1)$, $y_2 = f(b_1)$, $y_3 = f(c_1)$, 则 $\varphi(y_1) = a_1$, $\varphi(y_2) = b_1$, $\varphi(y_3) = c_1$, 对于 $\varphi(y)$ 用插值公式:

$$\begin{aligned}\varphi(y) = & \varphi(y_1) + \varphi(y_1, y_2)(y - y_1) + \varphi(y_1, y_2, y_3)(y - y_1)(y - y_2) \\ & + \varphi(y_1, y_2, y_3, y)(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)\end{aligned}$$

令 $y = 0$ 代入上式得:

$$\begin{aligned}x^* = \varphi(0) = & a_1 + \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)}(0 - f(a_1)) + \varphi(y_1, y_2, y_3)(0 - f(a_1))(0 - f(b_1)) \\ & + \varphi(y_1, y_2, y_3, 0)(0 - y_1)(0 - y_2)(0 - y_3)\end{aligned}$$

丢掉右边第 4 项, 即得:

$$\begin{aligned}x_1 = & a_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} f(a_1) + f(a_1) \cdot f(b_1) \cdot \left[\frac{a_1}{(f(a_1) - f(b_1))(f(a_1) - f(c_1))} \right. \\ & \left. + \frac{b_1}{(f(b_1) - f(a_1))(f(b_1) - f(c_1))} + \frac{c_1}{(f(c_1) - f(a_1))(f(c_1) - f(b_1))} \right]\end{aligned}$$

3. $y = f(x)$ 的反函数为 $x = \varphi(y)$ ，对它在节点 $(f(a), a)$ 处作重节点插值，问 $x^* = \varphi(0)$ 的近似公式是怎样的？

解：令： $y_1 = f(a)$ ，则 $\varphi(y_1) = a$ ，且 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$ ，若将 $\varphi(y)$ 在 y_1 点作重节点插值，则：
$$\varphi(y) = \varphi(y_1) + \varphi'(y_1)(y - y_1) + \varphi(y_1, y_1, y)(y - y_1)^2,$$
令 $y = 0$ 得：

$$x^* = \varphi(0) = a + \frac{1}{f'(a)}(0 - f(a)) + \varphi(y_1, y_1, 0)(0 - f(a))^2,$$

，丢掉右边第三项，

即得：

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

此即为牛顿法迭代公式。

7. 用迭代法求解开普勒（Kepler）方程： $M = x - E \sin x$ ，其中：

$M = 0.8, E = 0.2$ ，取初始值 $x_0 = 0.8$ ，并估计 x_{10} 的误差。

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	0.8	4	0.9643024613	8	0.9643338824
1	0.9434712181	5	0.9643303052	9	0.964333887
2	0.9619201027	6	0.9643334793	10	0.9643338876
3	0.964058255	7	0.9643338411	11	0.9643338876

解：原方程与 $x = M + E \sin x$ 等价，于是取 $f(x) = M + E \sin x$ ，则 $f(x)$

是 $[0.6, 1]$ 上的压缩映象，因为对于

$$\forall x \in [0.6, 1], |f(x) - 0.8| = |E \sin x| \leq E = 0.2, \text{ 即: } f(x) \in [0.6, 1];$$

$$\forall x \in [0.6, 1], |f'(x)| = |E \cos x| \leq E = 0.2 < 1, \text{ 由推论知 } f(x) \text{ 是 } [0.6, 1] \text{ 上的压}$$

缩映象。故取初始值 $x_0 = 0.8$ ，经计算得：

而且:

$$|x^* - x_{10}| \leq \frac{L^{10}}{1-L} |x_0 - x_1| = 1.28 \times 10^{-7} \times 0.1434712181 = 0.000000018364315, \text{ 即 } x_{10}$$

至少有 7 位有效数字。

8. 验证下列函数满足李普希茨条件:

(1) $f(x) = 5 - \frac{1}{4} \cos 3x, \quad x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$

解: 对 $\forall x, y \in [0, \frac{2\pi}{3}]$, 有:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{4} |\cos 3x - \cos 3y| = \frac{1}{4} |2 \sin \frac{3(x-y)}{2} \sin \frac{3(x+y)}{2}| \leq \frac{3}{4} |x - y|, \text{ 即 } L = \frac{3}{4}$$

(2) $f(x) = 2 + \frac{1}{2}|x|, \quad x \in [-1, 1]$

解: 对 $\forall x, y \in [-1, 1]$, 有: $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2} ||x| - |y|| \leq \frac{1}{2} |x - y|$, 即 $L = \frac{1}{2}$

(3) $f(x) = 1/x, \quad x \in [2, 3]$

解: 对 $\forall x, y \in [2, 3]$, 有: $|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{1}{4} |x-y|$, 即 $L = \frac{1}{4}$

9. 对例 3, 如果利用 x_{13}, x_{14} 作估计, 则问 k 要多大, 才能使 $|x^* - x_k| \leq 10^{-6}$?

解: 已知 $|x^* - x_k| \leq L^{k-14} |x^* - x_{14}|$, 以及 $|x^* - x_{14}| \leq \frac{L}{1-L} |x_{13} - x_{14}|$, 所以:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^{k-13}}{1-L} |x_{13} - x_{14}|, \text{ 因此, 欲使 } |x^* - x_k| \leq 10^{-6}, \text{ 只需}$$

$$\frac{L^{k-13}}{1-L} |x_{13} - x_{14}| \leq 10^{-6}, \text{ 即}$$

$$k - 13 \geq \left(-6 \ln 10 - \ln \frac{|x_{13} - x_{14}|}{1-L} \right) / \ln L = 10.30453295, \text{ 所以 } k \geq 24 \text{ 即可。}$$

10. 对方程 $f(x) = x + \ln x$ 用迭代法求根, 若化成 $x = -\ln x$, 则问迭代是否收敛?

若化成 $x = e^{-x}$ 进行迭代, 问是否收敛?

解: 对于方程 $f(x) = x + \ln x = 0$, 由作图可知有唯一根在 $[\frac{1}{2}, \ln 2]$ 中,

当化成 $x = -\ln x$ 时, 迭代函数满足 $|f'(x)| = |(-\ln x)'| = |-\frac{1}{x}| > 1$, 故不收敛;

当化成 $x = e^{-x}$ 时, 迭代函数满足 $|f'(x)| = |(e^{-x})'| = e^{-x} \leq e^{-\frac{1}{2}} = 0.606531\dots$, 故是收敛的。

12. 证明定理 2: 对于方程 $x = f(x)$, 若满足条件:

(1) $|f(x_0) - x_0| \leq \eta$;

(2) 在圆 $S(x_0, \frac{\eta}{1-L})$ 中任意两点 x, y 满足: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, 且 $0 \leq L < 1$,

则由 x_0 出发按 (9) 式产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛到方程 (8) 的解 x^* , 且 x^* 是方程 (8)

在 $S(x_0, \frac{\eta}{1-L})$ 中的唯一解, 并有估计式: $|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} \eta$ 。

证明: 按定理 2 中给出的 L, η 构造一个一次方程: $t = Lt + \eta$, 其唯一根为: $t^* = \frac{\eta}{1-L}$ 。若令 $\varphi(t) = Lt + \eta$, 则上述方程即为 $t = \varphi(t)$, 取初始近似

$t_0 = 0$, 由迭代公式 $t_{k+1} = \varphi(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 产生序列 $\{t_k\}$, 我们可以证

明: (1) $\{t_k\}$ 为单调序列: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t^*$; (2) $t_k \rightarrow t^*$; (3)

$$t^* - t_k = \frac{L^k}{1-L} \eta$$

事实上, 由 $t_1 = \varphi(t_0) = \eta > 0 = t_0$, 且 $t_{k+1} - t_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = L(t_k - t_{k-1})$

得: $t_{k+1} - t_k = L^k(t_1 - t_0) = L^k \eta > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 故 $\{t_k\}$ 单调上升, 且

$$\begin{aligned} t_{k+1} - t_0 &= t_{k+1} - t_0 = t_{k+1} - t_k + t_k - t_{k-1} + \dots + t_1 - t_0 = (L^k + L^{k-1} + \dots + L + 1)\eta \\ &= \frac{1 - L^{k+1}}{1 - L} \eta < \frac{1}{1 - L} \eta = t^* \end{aligned}$$

即 $\{t_k\}$ 有上界, 且由 $t_k = \frac{1-L^k}{1-L}\eta$, 有: $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \frac{1}{1-L}\eta = t^*$, 显然

$$t^* - t_k = \frac{L^k}{1-L}\eta.$$

下面我们再证明按定理 2 产生的序列 $\{x_k\}$ 满足: $|x_{k+1} - x_k| \leq t_{k+1} - t_k$,
 $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

首先由定理条件知: $|x_1 - x_0| = |f(x_0) - x_0| \leq \eta = t_1 - t_0$, 即当 $k = 0$ 时成立;
假设当 $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ 时成立, 我们来证明当 $k = p$ 时也成立, 由于当
 $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ 时: 由

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_0| &\leq |x_{k+1} - x_k| + |x_k - x_{k-1}| + \dots + |x_1 - x_0| = t_{k+1} - t_k + t_k - t_{k-1} + \dots + t_1 - t_0 \\ &= t_{k+1} - t_0 = t_{k+1} < t^* = \frac{\eta}{1-L} \end{aligned}$$

知: $x_0, x_1, \dots, x_p \in S(x_0, \frac{\eta}{1-L})$, 从而:

$$|x_{p+1} - x_p| = |f(x_p) - f(x_{p-1})| \leq L|x_p - x_{p-1}| \leq L(t_p - t_{p-1}) = t_{p+1} - t_p, \text{ 于是对}$$

于任意自然数 $k = 0, 1, 2, \dots$, 都有: $|x_{k+1} - x_k| \leq t_{k+1} - t_k$ 。且 $x_k \in S(x_0, \frac{\eta}{1-L})$ 。

再由 $|x_{k+p} - x_k| \leq t_{k+p} - t_k$, 可知 $\{x_k\}$ 为基本序列, 设 $x_k \rightarrow x^*$, 则

$$x^* \in S(x_0, \frac{\eta}{1-L}), \text{ 在上式中令 } p \rightarrow \infty \text{ 得: } |x^* - x_k| \leq t^* - t_k = \frac{L^k}{1-L}\eta. \text{ 证毕}$$

13. 对任意实数 a , 如何不用除法求 $1/a$?

解: $\frac{1}{\alpha}$ 为方程 $f(x) = \frac{1}{x} - \alpha = 0$ 的唯一解, 对其使用牛顿法得公式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k + x_k - \alpha \cdot x_k^2 = x_k(2 - \alpha x_k)$$

。于是当 x_0 充分接近 $\frac{1}{\alpha}$

时, 由迭代公式 $x_{k+1} = x_k(2 - \alpha x_k)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $\frac{1}{\alpha}$ 。

14. 对实数 a , 列出牛顿法求 $\sqrt{a}$ 的迭代公式。

解: 令 $f(x) = x^2 - a$, 则 $\sqrt{a}$ 为 $f(x) = 0$ 的唯一正根, 其牛顿法迭代公式为:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

15. 用牛顿法求 $F(x) = 0$ 的根也是一种迭代法, 它的迭代函数是什么? 如果在零点 x^* 附近足够光滑, 且 $F'(x^*) \neq 0$, 试求出迭代函数的一阶导数在 x^* 的值, 然后利用定理 2 给出牛顿法的收敛定理, 并且证明此时定理 2 中的常数 L 可以取成任意的正数。

解: 求 $F(x) = 0$ 根的牛顿法的迭代函数为: $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$, 且:

$$f'(x)|_{x=x^*} = \left[\frac{F(x)F''(x)}{F'(x)^2} \right]_{x=x^*} = 0$$

。由于 $f'(x^*) = 0$, 故对任意 $0 \leq L < \frac{1}{2}$,

存在 r , 使当 $x \in S(x^*, r)$ 时, $|f'(x)| \leq L$, 从而对任意 $x, y \in S(x^*, r)$, 都有:

$|f(x) - f(y)| = |f'(x + \theta(y - x))(y - x)| \leq L|x - y|$, 即 $f(x)$ 在 $S(x^*, r)$ 上满足李普希兹条件。并且此时常数 L 可以取成任意的正数。

于是只要取 x_0 使 $x_0 \in S(x^*, (1-L)\frac{r}{3})$ 和 $\eta = \frac{r}{3}$, 则 x_0 和 η 即满足定理 2 的条件: (1)

$$|f(x_0) - x_0| = |f(x_0) - f(x^*) + x^* - x_0| \leq (L+1)|x^* - x_0| \leq \frac{1}{1-L}|x^* - x_0| \leq \frac{r}{3} = \eta$$

; (2) 由于 $S(x_0, \frac{\eta}{1-L}) \subset S(x^*, r)$ (事实上, 当 $x \in S(x_0, \frac{\eta}{1-L})$ 时,

$$|x - x^*| \leq |x - x_0| + |x_0 - x^*| \leq \frac{\eta}{1-L} + (1-L)\eta \leq 2\eta + \eta = 3\eta = r, \text{ 即}$$

$x \in S(x^*, r)$), 所以 $f(x)$ 在 $S(x_0, \frac{\eta}{1-L})$ 中满足李普希兹条件。

故由定理 2, 由 x_0 出发按牛顿法产生的序列收敛到方程 $F(x) = 0$ 的解 x^* ,

且 x^* 是方程 $F(x) = 0$ 在 $S(x_0, \frac{\eta}{1-L})$ 中的唯一解, 并有估计式:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} \eta.$$

16. 若 $F(x)$ 足够光滑, 在 x^* 处有 m 重根, 即

$$F(x^*) = F'(x^*) = \cdots = F^{(m-1)}(x^*) = 0, \quad F^{(m)}(x^*) \neq 0, \text{ 则此时迭代函数的一}$$

阶导数在 x^* 的值是什么? 如果将牛顿法改变成:

$x_{k+1} = x_k - mF(x_k)/F'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$, 此时迭代函数的一阶导数在 x^* 的值是什么?

解: 如果 x^* 是 $F(x)$ 的 m 重根, 则可以把 $F(x)$ 改写成:

$$F(x) = (x - x^*)^m G(x), \quad G(x^*) \neq 0 \text{ 从而 } F(x) \text{ 和 } F'(x) \text{ 在 } x^* \text{ 的泰勒展式为:}$$

$$F(x) = \frac{1}{m!} (x - x^*)^m F^{(m)}(\xi), \quad F'(x) = \frac{1}{(m-1)!} (x - x^*)^{m-1} F^{(m)}(\eta), \text{ 其中 } \xi \text{ 和 } \eta$$

都在 x 与 x^* 之间。设 $u(x) = \frac{F(x)}{F'(x)}$, 则:

$$u(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} u(x) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{1}{m} (x - x^*) \frac{F^{(m)}(\xi)}{F^{(m)}(\eta)} = 0$$

$$u'(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{u(x) - u(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{1}{m} \frac{F^{(m)}(\xi)}{F^{(m)}(\eta)} = \frac{1}{m}, \text{ 所以牛顿法迭代函数}$$

$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = x - u(x)$ 的一阶导数在 x^* 的值为

$f'(x^*) = 1 - u'(x^*) = 1 - \frac{1}{m} < 1$, 但不等于 0, 这时牛顿法一阶收敛; 如果将

牛顿法改成: $x_{k+1} = x_k - mF(x_k)/F'(x_k)$, 此时迭代函数的一阶导数在 x^* 的值为: $f'(x^*) = 1 - mu'(x^*) = 0$, 这时是二阶收敛的。

17. 1992 年, 道埃法哈达 (P. Deuflhard) 等给出一个关于函数方程组的牛顿法收敛定理。我们将它限制在一个自变量情况叙述如下: $F(x)$ 是定义在开区间 (a, b) 上的连续可微函数, 当 $x \in (a, b)$ 时, $F'(x) \neq 0$, 如果 $F(x)$ 在 (a, b) 中有零点 x^* , 并存在正数 ρ , 使得 $[x^* - \rho, x^* + \rho] \subset (a, b)$, 今用牛顿法求 $F(x)$ 的零点, 取初始值 $x_0 \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, 得到序列 $\{x_k\}$, 如果 $F(x)$ 满足:

$$|F'(x)^{-1}[F'(x+t\nu) - F'(x)]\nu| \leq t|\nu|^2, x, \nu + x \in (a, b), 0 \leq t \leq 1$$

w 是与 x_0, t 无关的常数, 并且 $\frac{\rho w}{2} < 1$, 则 $|x_k - x^*| \leq \rho, x_k \rightarrow x^*$, 且 x^* 为 $F(x) = 0$ 在 $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ 内的唯一零点。

证明: 先证明: $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{w}{2} |x_k - x^*|^2$ (*)

因为: $F(x^*) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x^*} F'(x) dx = \int_0^1 F'(x_0 + t(x^* - x_0)) dt (x^* - x_0)$, 所以有:

$$F(x^*) - F(x_0) - F'(x_0)(x^* - x_0) = \int_0^1 [F'(x_0 + t(x^* - x_0)) - F'(x_0)](x^* - x_0) dt$$

由 $x_0 \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, $x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1} F(x_0)$ 得:

$$\begin{aligned} |x_1 - x^*| &= |F'(x_0)^{-1}[F'(x_0)(x_0 - x^*) - F(x_0)]| \\ &= |F'(x_0)^{-1}[F(x^*) - F(x_0) - F'(x_0)(x^* - x_0)]| \\ &= |F'(x_0)^{-1} \int_0^1 [F'(x_0 + t(x^* - x_0)) - F'(x_0)](x^* - x_0) dt| \\ &\leq \int_0^1 |F'(x_0)^{-1}[F'(x_0 + t(x^* - x_0)) - F'(x_0)](x^* - x_0)| dt \\ &\leq \int_0^1 t w(x^* - x_0)^2 dt = \frac{w}{2} (x^* - x_0)^2 \leq \frac{w\rho}{2} |x^* - x_0| < |x^* - x_0| \leq \rho \end{aligned}$$

所以有 $x_1 \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, 且对 $k=0$ (*) 式成立。假设对 $k=0, 1, \dots, p-1$,

(*) 式成立, 且 $x_0, x_1, \dots, x_p \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, 则:

$$\begin{aligned} |x_{p+1} - x^*| &= |F'(x_p)^{-1}[F(x^*) - F(x_p) - F'(x_p)(x^* - x_p)]| \\ &\leq \int_0^1 |F'(x_p)^{-1}[F'(x_p + t(x^* - x_p)) - F'(x_p)](x^* - x_p)| dt \\ &\leq \int_0^1 t w(x^* - x_p)^2 dt = \frac{w}{2} (x^* - x_p)^2 \leq \frac{w\rho}{2} |x^* - x_p| \end{aligned}$$

即对 $k=p$, (*) 式也成立, 且 $x_{p+1} \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$ 。记 $L = \frac{w\rho}{2} < 1$, 则

(*) 式成为: $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{w\rho}{2} |x^* - x_k| = L |x^* - x_k| \leq \dots \leq L^{k+1} |x^* - x_0|$, 故

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ 。且 x^* 为 $F(x) = 0$ 在 $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ 内的唯一零点。因为若还有 $x'' \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, 使 $F(x'') = 0$, 则:

$$\begin{aligned} F(x'') - F(x^*) &= \int_0^1 F'(x^* + t(x'' - x^*)) dt (x'' - x^*), \\ x^* - x'' &= -(x'' - x^*) = F'(x^*)^{-1} [-F'(x^*)(x'' - x^*)] \\ &= F'(x^*)^{-1} [F(x'') - F(x^*) - F'(x^*)(x'' - x^*)] \\ |x^* - x''| &= \left| \int_0^1 F'(x^*)^{-1} [F(x^* + t(x'' - x^*)) - F'(x^*)(x'' - x^*)] dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |F'(x^*)^{-1} [F(x^* + t(x'' - x^*)) - F'(x^*)(x'' - x^*)]| dt \\ &\leq \frac{w}{2} (x'' - x^*)^2 \leq \frac{w\rho}{2} |x'' - x^*| < |x^* - x''| \end{aligned}$$

故必有 $x^* - x'' = 0$, 即 $x^* = x''$, x^* 为 $F(x) = 0$ 在 $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ 内的唯一零点。

18. 用简化牛顿法求解（取初始值为 $x=1, y=1, z=-1$ ）：

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = xyz + 1.089 = 0 \\ f_2(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4.23 = 0 \\ f_3(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 0.729 = 0 \end{cases}$$

解：因为：

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = yz, \frac{\partial f_1}{\partial y} = xz, \frac{\partial f_1}{\partial z} = xy, \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f_2}{\partial y} = 4y, \frac{\partial f_2}{\partial z} = 2z, \frac{\partial f_3}{\partial x} = 3x^2,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = 3y^2, \frac{\partial f_3}{\partial z} = 3z^2, \quad \text{所以：} \quad F'(x_0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F'(x_0)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

于是由迭代公式：
$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} - F'(x_0)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k, z_k) \\ f_2(x_k, y_k, z_k) \\ f_3(x_k, y_k, z_k) \end{pmatrix}$$
和初始值 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$ ，得：

$$(x_1, y_1, z_1) = (0.9733333334, 1.026, -1.0896666666),$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (0.9826471093, 1.020133108, -1.086627421),$$

$$(x_3, y_3, z_3) = (0.9813563556, 1.021553152, -1.086094857),$$

$$(x_4, y_4, z_4) = (0.9813625966, 1.021469548, -1.086353777) \text{ 已具有 4 位有效数字。}$$

20. 编一个用林士谔-贝尔斯多夫方法求多项式二次因子的程序，并用求：

$x^4 + 3.8x^3 - 19.45x^2 - 70.83x - 49.14$ 的二次因子。

解：相应的 C 语言程序为：

```
#define N 4
#include "math.h"
main()
{ double
a[N+2]={0, 1, 3.8, -19.45, -70.83, -49.14}, b[N+2], c[N+1], r, r1, s, s1;
int I, k=0;
```

```
c[0]=b[0]=0;c[1]=b[1]=a[1];
r1=3;s1=9;
do{
r=r1;s=s1;k++;
for(i=2;i<=N;i++)
{ b[i]=a[i]+r*b[i-1]+s*b[i-2]; c[i]=b[i]+r*c[i-1]+s*c[i-2]; }
b[N+1]=a[N+1]+r*b[N]+s*b[N-1];
r1=r-(b[N]*c[N-1]-b[N+1]*c[N-2])/(c[N-1]*c[N-1]-c[N]*c[N-2]);
s1=s-(b[N+1]*c[N-1]-b[N]*c[N])/(c[N-1]*c[N-1]-c[N]*c[N-2]);
printf("k=%d, r=%f, s=%f\n", k, r1, s1);
}while(fabs((r1-r)*(r1-r)+(s1-s)*(s1-s))>1e-6);
}
```

运行结果如下（即当 $r_0=3$, $s_0=9$ 时）：

k=1, r=2. 912164, s=7. 370090

k=2, r=1. 899813, s=11. 838944

k=3, r=2. 381480, s=9. 606082

k=4, r=2. 491076, s=9. 140486

k=5, r=2. 499932, s=9. 100301

k=6, r=2. 500000, s=9. 100000

若再修改程序中 r, s 的初始值成为 $r_0=-6$, $s_0=-5$ 时，可求得
r=-6. 3, s=-5. 4.

故

$$x^4 + 3.8x^3 - 19.45x^2 - 70.83x - 49.14 = (x^2 - 2.5x - 9.1)(x^2 + 6.3x + 5.4)。$$