

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

3. TIFF(tagged image file format)格式

TIFF 格式是一种独立于操作系统和文件系统的格式(在 Windows 环境和 Macintosh 机上都可使用),很便于在软件之间进行图象数据交换。TIFF 图象文件包括文件头(表头)、文件目录(标识信息区)和文件目录项(图象数据区)。文件头只有一个,且在文件前端。它给出数据存放顺序、文件目录的字节偏移信息。文件目录给出文件目录项的个数信息,并有一组标识信息,给出图象数据区的地址。文件目录项是存放信息的基本单位,也称域。域主要分为基本域、信息描述域、传真域、文献存储和检索域 5 类。

TIFF 格式的描述能力很强,可制定私人用的标识信息。TIFF 格式支持任意大小的图象,文件可分为 4 类:二值图象、灰度图象、调色板彩色图象和全彩色图象。一个 TIFF 文件中可以存放多幅图象,也可存放多份调色板数据。

4. JPEG(joint picture expert group)格式

JPEG 是对静止灰度或彩色图象的一种压缩标准(参见上册 6.6.2 小节),在使用有损压缩方式时其可节省的空间是相当大的。

JPEG 标准只是定义了一个规范的编码数据流,并没有规定图象数据文件的格式。Cube Microsystems 公司定义了一种 JPEG 文件交换格式(JPEG file interchange format, JFIF)。JFIF 图象是一种或使用灰度表示,或使用 Y, C_b, C_r 分量彩色表示的 JPEG 图象。它包含一个与 JPEG 兼容的头。一个 JFIF 文件通常包含单个图象,图象可以是灰度的,其中的数据为单个分量,也可以是彩色的,其中的数据是 Y, C_b, C_r 分量。 Y, C_b, C_r 分量与常见的 R, G, B 三原色的关系如下:

$$Y = 0.299R + 0.587G + 0.114B \quad (1.1)$$

$$C_b = 0.1687R - 0.3313G + 0.5B \quad (1.2)$$

$$C_r = 0.5R - 0.4187G - 0.0813B \quad (1.3)$$

TIFF6.0 也支持用 JPEG 压缩的图象, TIFF 文件可以包含直接 DCT 的图象,也可以包含无损 JPEG 图象,还可以是用 JPEG 编码的条或块的系列(这样允许只恢复图象的局部而不用读取全部内容)。

1.2 习题及解答

1.1 连续图象 $f(x, y)$ 与数字图象 $I(r, c)$ 中各量的含义各是什么? 它们有什么联系和区别? 它们的取值各在什么范围?

解答:

连续图象 $f(x, y)$ 对应一个 2-D 数组, 这里 x 和 y 表示 2-D 空间 XY 中一个坐标点的位置, 而 f 则代表图象在点 (x, y) 的某种性质 F 的数值。这里 f, x, y 的值可以是任意实数。

数字图象 $I(r, c)$ 也对应一个 2-D 数组, 这里 I 代表离散化后的 $f, (r, c)$ 代表离散化后的 (x, y) , 其中 r 代表图象的行, c 代表图象的列。这里 I, c, r 的值都是整数。

1.2 图象处理、图象分析和图象理解各有什么特点？它们之间有哪些联系和区别？

解答：

图象处理、图象分析和图象理解处在 3 个抽象程度和数据量各有特点的不同层次上。图象处理是比较低层的操作，它主要在图象像素级上进行处理，处理的数据量非常大。图象处理着重强调在图象之间进行的变换。图象分析则进入了中层，分割和特征提取把原来以像素描述的图象转变成比较简洁的非图形式的描述。图象分析主要是对图象中感兴趣的目标进行提取和测量，以获得它们的客观信息，从而建立对图象的描述。图象理解的重点是在图象分析的基础上，进一步研究图象中各目标的性质和它们之间的相互联系，并得出对图象内容含义的理解以及对原来客观场景的解释，从而指导和规划行动。所以图象理解主要是高层操作，基本上是对从描述中抽象出来的符号进行运算，其处理过程和方法与人类的思维推理可以有許多类似之处。

1.3 图象工程主要与哪些学科相关？它们之间如何互相影响？

解答：

图象工程是一门系统地研究各种图象理论、技术和应用的新的交叉学科，从它的研究方法来看，它与数学、物理学、生理学、心理学、电子学、计算机科学等许多学科可以相互借鉴；从它的研究范围来看，它与模式识别、计算机视觉、计算机图形学等多个专业又互相交叉。另外，图象工程的研究进展与人工智能、神经网络、遗传算法、模糊逻辑等理论和技术都有密切的联系，它的发展应用与医学、遥感、通信、文档处理和工业自动化等许多领域也是不可分割的。

1.4 近年来有哪些新的数学工具在图象工程中得到应用？

解答：

如人工智能、神经网络、遗传算法、模糊逻辑、小波变换等。

1.5 简要叙述图象采集、图象显示、图象存储以及图象通信与图象处理和分析的联系。

解答：

图象采集、图象显示、图象存储以及图象通信都是围绕图象处理和分析而工作的，反过来，图象处理和分析又对图象采集、图象显示、图象存储以及图象通信提供支持。

1.6 近年来在图象采集、图象显示、图象存储各方面最突出的进展是什么？对图象处理和分析产生了哪些影响？

解答：

在图象采集方面，除 CCD 速度加快、分辨率提高外，近年来固体摄像器件发展迅速，电荷注射器件(charge-injection device, CID)和 CMOS 摄像机等都已投入应用。

在图象显示方面，各种新型打印机，如热敏、热升华打印机得到应用。

在图象存储方面，微型计算机的内存多已超过 100Mbyte，Winchester 磁盘的存储量已多用几十个 Gbyte 来衡量。闪速存储器(flash)等新型存储器得到广泛使用，读写光驱已成为许多便携式计算机的标准配置。

上述进展加快了图象处理和分析的速度，并扩展了图象处理和分析的应用范围。

1.7 本书主要可分成哪些层次？互相之间有什么关系？

解答:

全书主要可分为 3 个层次, 第一层是基础知识, 第二层是图象处理技术, 第三层是图象分析技术。第一层的基础知识是支持第二层图象处理技术和第三层图象分析技术的。

1.8 附录 B 中的哪些文献你听说过或查阅过?

解答:

大部分文献在清华大学图书馆都可查到。

课后答案网
www.hackshp.cn

2.1.4 亮度和照度

下面是对几个亮度和照度名词的进一步解释[参 1991]。

1. 主观亮度

主观亮度指由人的眼睛依据视网膜感受光刺激的强弱所判断出的被观察物体的亮度, 分布在视网膜上的各个感光单元独立地接受光通量的刺激。扩展光源在视网膜上的象的照度越大, 照射在它所占面积内每个感光单元的光通量就越多, 所以对扩展光源, 规定眼睛的主观亮度就是视网膜上的象照度。对于点光源, 它在视网膜上的象仅落在个别的感光单元上, 此时的主观亮度不取决于象的照度, 而取决于进入瞳孔的总光通量。

2. 象亮度

象亮度与光源上每个面元发出的总光通量中有多少进入观察器有关, 可表示为

$$L' = k \left(\frac{n'}{n} \right)^2 L \quad (2.4)$$

其中 L' 是象亮度, L 是物亮度, n' 和 n 分别是象方空间和物方空间的折射率, k 为透射率。在 $n' = n$ 时, 如果忽略光的损失 (即 $k \approx 1$), 则象亮度近似等于物亮度, 并与物象的相对位置和成像系统的放大率无关。

3. 象照度

象照度决定了使成象物 (如底片) 感光的总光通量, 在光点距光轴很近时, 有

$$E = \frac{k \pi L u_0^2}{V^2} \quad (2.5)$$

其中 k 为透射率, u_0 为人射孔径角, L 是物亮度, V 是横向放大率。在象距远大于焦距的情况下, 象照度与横向放大率平方成反比, 如投影仪会使象放大的同时变暗。在物距远大于焦距的情况下, 象照度基本保持不变, 如用照相机拍摄远近不同的目标时, 只要物亮度相同, 底片的感光程度是一样的。

2.2 习题及解答

2.1 人类视觉中最基本的几个要素是什么?

解答:

从结构角度来看, 人类视觉中最基本的要素有

- (1) 眼睛, 这是感觉器官;
- (2) 神经纤维, 这是信息传输组织;
- (3) 大脑皮层, 这是知觉器官。光刺激在眼睛上并作用于视网膜上引起视感觉, 再通过神经纤维传递到大脑皮层进行处理引起视知觉。

从功能角度来看, 人类视觉中最基本的要素有

- (1) 视觉分视感觉和视知觉;
- (2) 视知觉又分亮度视觉、颜色视觉、形状视觉和空间视觉等, 其中亮度视觉和颜色视觉主要与眼中锥细胞和杆细胞的数量和分布有关, 而形状知觉和空间知觉还与观察者

的自身机体内部条件以及经验知识有关。

2.2 马赫带效应和同时对比度反映了什么共同问题?

解答:

它们都反映了人类视觉所感知的主观亮度并不是物体表面照度的简单函数。

2.3 试说明上册图 2.3.1 中舌形图里连接红、绿、蓝构成的三角形与上册图 2.3.3 中 HSI 颜色三角形有何不同。

解答:

(1) 上册图 2.3.1 中舌形图里连接红、绿、蓝构成的三角形只包含了可见颜色的一个子集合;上册图 2.3.3 中 HSI 三角形则包含所有可见颜色。

(2) 光谱能量相同的点(白色所对应的点)不在上册图 2.3.1 中舌形图里连接红、绿、蓝构成的三角形的中心,但该点的投影在上册图 2.3.3 中 HSI 三角形的中心。所以在 RGB 三角形中,任一点的色饱和度与从光谱能量相同点指向该点的矢量长度成正比;而在 HSI 三角形中,每一点的色饱和度与从三角形中心点指向该点的矢量长度成正比。

(3) 在上册图 2.3.1 中舌形图里连接红、绿、蓝构成的三角形里,每一点的色调为光谱能量相同的点到该点的射线与色度图边界交点处的色调;而在上册图 2.3.3 中的 HSI 三角形里,每一点的色调正比于指向该点的矢量与 R 轴的夹角。

2.4 证明上册式(2.3.6)中计算 S 的公式对所有在上册图 2.3.3 中 HSI 颜色三角形里的点都成立。

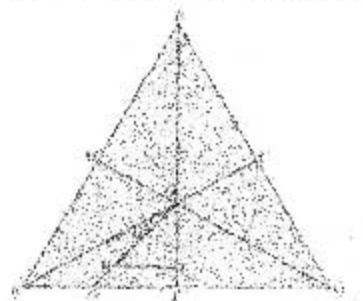
解答:

说明型的证明为:对 R、G、B 三点,上册式(2.3.6)都成立,S 均为 1,取到最大值。对三角形中心点,上册式(2.3.6)也成立,S 为 0,取到最小值。三角形里的其他点均可由它们组合得到,其 S 仍可由上册式(2.3.6)计算。

严格的证明为:参见图解 2.4,从 P 点向 OY 作垂线,交于 T 点。饱和度 S 是 PO 和 QO 的比值,也是 OT 和 OY 的比值。注意 O 的坐标为 $(1/3, 1/3)$, 所以有

$$S = \frac{|PO|}{|QO|} = \frac{|TO|}{|YO|} = \frac{|YO| - |TY|}{|YO|} = \frac{1/3 - b}{1/3} = 1 - 3b$$

因为在三角形 ORC 中任意一点皆有 $b \leq r$ 与 $b \leq g$, 所以 $S = 1 - 3B/(R+G+B)$ 。同理可得到在三角形 OGB 中和三角形 OBR 中的 S 值分别为 $1 - 3R/(R+G+B)$ 与 $1 - 3G/(R+G+B)$, 所以对所有在上册图 2.3.3 中 HSI 颜色三角形里的点都有



图解 2.4

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$S = 1 - \frac{3}{R+G+B} [\min(R, G, B)]$$

2.5 为什么从 RGB 空间向 HSI 空间转换时分 2 段计算 H , 而从 HSI 空间向 RGB 空间转换时分 3 段计算 H ?

解答:

在 HSI 颜色三角形中, H 是代表某种颜色的矢量与 R 轴的夹角, 它的取值范围是 $0^\circ \sim 360^\circ$ 。

当从 RGB 空间向 HSI 空间转换时, 从上册式 (2.3.7) 直接算出的 H 值在 $[0^\circ, 180^\circ]$ 中 (注意到反余弦函数的取值范围为 $0^\circ \sim 180^\circ$), 在 $[180^\circ, 360^\circ]$ 中的 H 值需另外计算。

当从 HSI 空间向 RGB 空间转换时, 由于 H 角在 HSI 颜色三角形图中可分成 3 个对应和对称的部分, 所以计算时分成 3 段可利用对称性简化表达和计算。

2.6 发光强度及亮度与照度各有什么不同?

解答:

发光强度指光源的能量辐射强度。光度学亮度指扩展光源在某个方向上单位投影面积的发光强度。主观亮度指观察者所看到的物体表面反射光的度量, 它受观察者心理因素的影响。照度指光源照射到物体表面的光通量, 它是光源对物体辐射的一种量度, 其数值主要是受到光源的能量和光源到物体表面距离的影响。

2.7 空间点 $(1, 2, 3)$ 经 $\lambda = 0.5$ 的镜头透视后的摄像机坐标和图象平面坐标各是什么?

解答:

参见上册图 2.5.1, 根据上册式 (2.5.9), 空间点 $(1, 2, 3)$ 经 $\lambda = 0.5$ 的镜头透视后的摄像机坐标为 $(-0.2, -0.4, -0.6)$, 图象平面坐标是 $(-0.2, -0.4)$ 。

2.8 波特率 (band rate) 是一种常用的离散数据传输量度。当采用二进制时, 它等于每秒所传输的比特数。现设每次先传输 1 个起始比特, 再传输 8 个比特的信息, 最后传输 1 个终止比特, 试计算

(1) 以 9600 波特传输 1 幅 256×256 、256 灰度级的图象所需的时间;

(2) 以 38400 波特传输 1 幅 1024×1024 、16777216 色的真彩色图象所需的时间。

解答:

(1) 传输的比特数为 $256 \times 256 \times 10 = 655360$, 则以 9600 波特的速率传输需要时间为 $655360 / 9600 = 68.27s$ 。

(2) 传输的比特数为 $1024 \times 1024 \times 30 = 31457280$, 则以 38400 波特的速率传输需要时间为 $31457280 / 38400 = 81.92s$ 。

2.9 设有 2 个图象子集 S 和 T , 如图题 2.9 所示。

	S					T				
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1

图题 2.9

- (1) 如果 $V = \{1\}$, 试指出它们是否① 4-连通, ② 8-连通, ③ m-连通;
 (2) 子集 S 和子集 T 是否① 4-毗邻, ② 8-毗邻, ③ m-毗邻;
 (3) 如果将子集 S 和子集 T 以外的所有像素看成另一个子集 U , 试指出子集 S 和子集 T 是否与子集 U ① 4-毗邻, ② 8-毗邻, ③ m-毗邻。

解答:

- (1) 子集 S 和子集 T 为 8-连通和 m-连通;
 (2) 子集 S 和子集 T 为 8-毗邻和 m-毗邻;
 (3) 子集 S 和子集 U 为 4-毗邻、8-毗邻和 m-毗邻, 子集 T 与子集 U 为 8-毗邻和 m-毗邻。

2.10 试画出

- (1) 将单像素宽的 8-通路转换为 4-通路的程序流程;
 (2) 将单像素宽的 m-通路转换为 4-通路的程序流程。

解答:

- (1) 假设已知点 p 和 q 为 8-连通的两个相邻像素, 并假设 $V = \{1\}$, 则将其改为 4-通路的程序流程为

- ① 判断 q 是否在 p 的 4-邻域中, 若是则转到④, 否则向下执行;
 ② 查看 p 的 4-邻域中的像素是否也在 q 的 4-邻域中, 若是则转入④, 否则继续向下执行;

- ③ 将与 q 和 p 都为 4-邻域的一个像素设置为 1 (可任意选择其中的一个像素);
 ④ 结束。

- (2) 对于 m-通路, 其流程相对要简单一些。

- ① 判断 q 是否在 p 的 4-邻域中, 若是则转到③, 否则向下执行;
 ② 将在 q 和 p 的 4-邻域中的像素设置为 1 (可任意选择其中的一个像素);
 ③ 结束。

当像素 p 和 q 不相邻时, 对它们之间通路上的每两个相邻像素都进行上述处理即可。

- 2.11 根据上册 2.7.3 小节中的讨论画出由矩阵 B 代表的各元素间所有可能的空间排列。

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

解答:

如果考虑的是 4-连接的关系, 有 12 种可能的空间排列, 见图解 2.11.1。

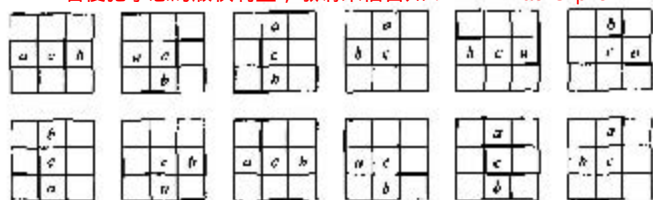
如果考虑的是 8-连接的关系, 也有 12 种可能的空间排列, 见图解 2.11.2。

- 2.12 证明上册 2.7.3 小节中计算 B^+ 的算法给出与上册式 (2.7.3) 完全相同的结果。

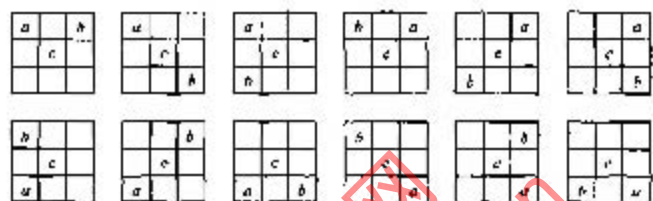
解答:

严格的证明如下 [Warshell 1962];

设上册 2.7.3 小节中计算 B^+ 的算法所得到的结果为 B^* 。首先证明当 $B^* = 1$ 时,



图解 2.11.1



图解 2.11.2

有 $B^+ = 1$, 注意到 $B^+(i, j) = 1$ 可能是两种情况的结果, 一是 $B^+(i, j) = 1$, 且初始化为 1, 二是 $B^+(i, j)$ 在算法第 2 步被置为 1. 前一种情况很容易理解, 下面仅讨论第二种情况. 在第 L_0 (当 $j = L_0$ 时) 次运用第 2 步中, 有 $B^+(i, L_0) = B^+(L_0, j) = 1$, 由于一共要应用 n 次第 2 步, 所以有 $B^+(i, L_A) = B^+(L_A, L_{A-1}) = \dots = B^+(L_2, L_1) = B^+(L_1, L_0) = B^+(L_2, R_1) = \dots = B^+(R_0, j) = 1$, 这正好是定义 B^+ 所要求的使 $B^+(i, j) = 1$ 的序列.

下面证明当 $B^+(i, j) = 1$ 时有 $B^+(i, j) = 1$. 假设这个命题是错误的, 则应存在整数序列 $i \neq k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_m \neq j$, 使得 $B(i, k_1) = B(i, k_2) = \dots = B(i, k_m) = 1$, 而 $B^+(i, j) = 0$. 令 $L = \{x \mid 1 \leq x \leq n, B^+(i, x) = 1\}$, 令 λ 是 L 中最大的元素. 很明显, $B^+(i, k_m)$ 必定在第 m 次应用第 2 步时由 0 变为 1 (这是因为如果 $B^+(i, k_m) = 1$, 由于 $B^+(k_m, k_{m+1}) = 1$, 则 $B^+(i, k_{m+1})$ 将会在第 2 步中置为 1, 这就与 λ 的定义相矛盾), 且 m 必然小于 k_m , 因为在第 2 步中的第 k_m 次迭代后紧接着的那次迭代中, 对于任意的 p , 如果 $B^+(p, k_m) = 1$, 则有 $B^+(p, k_{m+1}) = 1$. 这样, 在第 2 步的第 p_0 次迭代中, 对任意的 p_0 , 当 $B^+(p_0, k_1) = B^+(p_0, p_1) = 1$ 时, 会导致 $B^+(p_1, k_1) = 1$. 但是如果 $B^+(p_1, k_1)$ 在这个时候等于 1, 则要么是在第 k_1 次迭代中, 或是在第 p_1 次迭代中被置为 1, 其中 $k_1 < p_1 < p_0$. 这样, 我们就可以生成一个有限的顺序排列的集合 $p_1 > p_2 > \dots > k_1$, 其中 $B^+(p_0, k_1)$ 在第 k_1 次迭代中被置为 1, 据此 $B^+(p_1, k_1)$ 将在其后紧接着的迭代中被置为 1. 于是, 上述得到的序列将肯定导致 $B^+(p_0, k_{m+1})$ 在第 p_1 次迭代后被置为 1. 由于 p_0 是任意的, 所以可取 $p_0 = i$, 这将导致如果 $m \geq k_m$, 有 $B^+(i, k_{m+1}) = 1$. 这显然是矛盾的. 但是, 如果 $m < k_m$, 则在第 k_m 次迭代前就有 $B^+(i, k_m) = B^+(k_m, k_{m+1}) = 1$, 从而在第 2 步的那次迭代后有 $B^+(i, k_{m+1}) = 1$, 这也是矛盾的.

综上所述, 假设是正确的.

另外, 验证式的证明为: 以上册式(2.7.1)的数据为例, 分别用上册式(2.7.3)和简便算法计算。

用上册式(2.7.3)依次得

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}, & BB &= \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}, & BBB &= \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \\
 BBBB &= \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}, & BBBBB &= \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}
 \end{aligned}$$

最后得

$$B^+ = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}$$

而用简便算法, 则有

$$j = 1:$$

$$\begin{aligned}
 b(1, 1) &= b(1, 1) + b(1, 1) = 1, & b(1, 2) &= b(1, 2) + b(1, 2) = 0, \\
 b(1, 3) &= b(1, 3) + b(1, 3) = 0, & b(1, 4) &= b(1, 4) + b(1, 4) = 0, \\
 b(1, 5) &= b(1, 5) + b(1, 5) = 0 \\
 b(2, 1) &= b(2, 1) + b(1, 1) = 1, & b(2, 2) &= b(2, 2) + b(1, 2) = 0, \\
 b(2, 3) &= b(2, 3) + b(1, 3) = 0, & b(2, 4) &= b(2, 4) + b(1, 4) = 1, \\
 b(2, 5) &= b(2, 5) + b(1, 5) = 0
 \end{aligned}$$

$$j = 2:$$

$$\begin{aligned}
 b(4, 1) &= b(4, 1) + b(2, 1) = 1, & b(4, 2) &= b(4, 2) + b(2, 2) = 1, \\
 b(4, 3) &= b(4, 3) + b(2, 3) = 0, & b(4, 4) &= b(4, 4) + b(2, 4) = 1, \\
 b(4, 5) &= b(4, 5) + b(2, 5) = 0
 \end{aligned}$$

$$j = 3:$$

$$\begin{aligned}
 b(5, 1) &= b(5, 1) + b(3, 1) = 0, \quad b(5, 2) = b(5, 2) + b(3, 2) = 0, \\
 b(5, 3) &= b(5, 3) + b(3, 3) = 1, \quad b(5, 4) = b(5, 4) + b(3, 4) = 0, \\
 b(5, 5) &= b(5, 5) + b(3, 5) = 0
 \end{aligned}$$

$$j = 4:$$

$$\begin{aligned}
 b(2, 1) &= b(2, 1) + b(4, 1) = 1, \quad b(2, 2) = b(2, 2) + b(4, 2) = 1, \\
 b(2, 3) &= b(2, 3) + b(4, 3) = 0, \quad b(2, 4) = b(2, 4) + b(4, 4) = 1, \\
 b(2, 5) &= b(2, 5) + b(4, 5) = 0 \\
 b(4, 1) &= b(4, 1) + b(4, 1) = 0, \quad b(4, 2) = b(4, 2) + b(4, 2) = 1, \\
 b(4, 3) &= b(4, 3) + b(4, 3) = 0, \quad b(4, 4) = b(4, 4) + b(4, 4) = 0, \\
 b(4, 5) &= b(4, 5) + b(4, 5) = 0
 \end{aligned}$$

将上述结果综合起来, 有 $b(1, 1) = 1, b(2, 1) = 1, b(2, 2) = 1, b(2, 4) = 1, b(4, 1) = 1, b(4, 2) = 1, b(4, 4) = 1, b(5, 3) = 1$ 。

2.13 图题 2.13 给出了一个图象子集。

$$\begin{array}{cccc}
 & 3 & 1 & 2 & 1(q) \\
 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
 2 & 2 & 0 & 2 & \\
 1 & 2 & 1 & 1 & \\
 (p) & 1 & 0 & 1 & 2
 \end{array}$$

图题 2.13

(1) 令 $V = \{0, 1\}$, 计算 p 和 q 之间的 D_1, D_2 和 D_∞ 距离;

(2) 令 $V = \{1, 2\}$, 仍计算上述 3 个距离。

解答:

(1) 在 $V = \{0, 1\}$ 时 p 和 q 之间通路的 D_1 距离为 ∞, D_2 距离为 4, D_∞ 距离为 5;

(2) 在 $V = \{1, 2\}$ 时 p 和 q 之间通路的 D_1 距离为 6, D_2 距离为 4, D_∞ 距离为 6。

2.14 (1) 证明 p 和 q 之间的 D_4 距离等于它们之间最短的 4-通路的长度;

(2) 上述通路是惟一的吗?

解答:

(1) 简单证明如下:

令 p 和 q 的坐标分别为 (x, y) 和 (s, t) , 则它们之间的 D_4 距离为 $D_4(p, q) = |x - s| + |y - t|$; 而 p 和 q 的之间最短的 4-通路的长度应该是沿水平方向的通路长度加上沿垂直方向的通路长度, 也是 $|x - s| + |y - t|$ 。

详细的证明如下:

根据 p 和 q 之间通路的定义, 最短通路长度应是通路长度所能取的最小值。现在考虑 4-通路 (8-通路类似), 任意连接的两点 (x_i, y_i) 和 (x_{i+1}, y_{i+1}) 的坐标值必有一个相等, 即 $x_i = x_{i+1}$ 或 $y_i = y_{i+1}$, 而从象素 p 到象素 q 的坐标差值在两个方向上分别为 $x - s$ 和 $y - t$ 。当通路长度为 n 时, 有 $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = |x - s|$ 和 $\sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) = |y - t|$ 。注意, 对给

定的 i , $(x_{i+1} - x_i)$ 和 $(y_{i+1} - y_i)$ 不会同时为零, 但也不会同时不为零。由上可见, $n \geq |x - s| + |y - t|$, 而 $D_4(p, q) = |x - s| + |y - t|$ 表明 D_4 距离等于最短的 4-通路长度。

(2) 上述通路不是惟一的(长度并不能限制所有的位置)。

2.15 如何仅利用逻辑运算从所给图象(图题 2.15)中检测出二值圆环?



图题 2.15

解答:

一种方法是将被给图象分别向上、下、左、右和斜上、斜下、斜左、斜右各移动一个象素, 得到 8 幅平移图象, 将这 8 幅图象分别与所给图象进行“异或”运算, 得到各个方向的边界(黑色), 再对这些边界图进行“与”运算, 就得到二值圆环的轮廓。

另一种方法是用 1-D 算法在水平、垂直及两个斜方向进行检测, 再将结果“与”起来。具体算法如下: 设黑色象素为 1, 白色象素为 0, 原图为 $f(i)$, $i = 0, 1, \dots, (n-1)$, 逻辑运算结果为 $g(i)$, $i = 0, 1, \dots, (n-1)$, 则

$$g(i) = \begin{cases} f(i) \text{ AND } [\text{NOT}[f(i-1) \text{ AND } f(i+1)]] & i = 1, 2, \dots, (n-2) \\ 0 & i = 0, (n-1) \end{cases}$$

2.16 (1) 给出将图象顺时针旋转 45° 的变换矩阵。

(2) 如何利用上述矩阵实现图象旋转?

(3) 利用(1)中得到的矩阵旋转图象点 $(x, y) = (1, 0)$ 。

解答:

(1) 设图象在图象平面 xy 上, 则旋转变换矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

(2) 设原图象的坐标为 $v = [x, y]^T$, 则旋转变化后得到的新坐标为 $v'(x', y') = Rv$ 。

(3) 新坐标点为 $v' = [x', y']^T = [\cos 45^\circ, -\sin 45^\circ]^T = [\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2]^T$ 。

2.17 设给定如下平移变换矩阵 T 和尺度变换矩阵 S , 分别计算对空间点 $(1, 2, 3)$ 先平移变换后尺度变换和先尺度变换后平移变换所得到的结果, 并进行比较讨论。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解答:

先平移变换后尺度变换的结果为 $[12, 18, 18]^T$, 而先尺度变换后平移变换的结果为

$[6, 10, 12]^T$ 。两相比较, 可以看到对平移变换和尺度变换的相互次序进行交换得到的结果是不同的, 它们之间的次序一般是不可交换的。

2.18 已知空间 1 个点成象在图象平面 (a, b) 处, 现要将其移到 (c, d) 处, 试分别写出用以下变换进行移动所需的变换矩阵:

- (1) 只用平移变换;
- (2) 只用尺度变换;
- (3) 只用旋转变换。

解答:

$$(1) T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

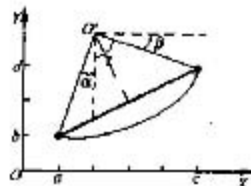
$$(2) S = \begin{bmatrix} c/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 旋转是绕 Z 轴进行的, 所以旋转矩阵根据上册式 (2.9.11) 为

$$R = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为旋转中心与两点的距离要相等, 所以应在两点的中垂线上, 设在 $O'(s, t)$ 点, 则由图解 2.18 可得旋转角

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{|t-d|}{|s-c|} - \arctan \frac{|t-b|}{|s-a|}$$



图解 2.18

种变换对于一般的信号分析或应用场合是足够了,但是,对于纹理图象等这些在中频区域的能量分布占有很大比重的信号,如果需要获得更多的与中频通道有关的信息,还需要对小波变换的高频通道作进一步的分解。如果不仅对低通滤波器的输出进行递归分解,而且也对应高通滤波器的输出进行递归分解,则称为小波包变换。小波包包括一个调制波形正交基函数库。这个小波包函数库 $\{W_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 可以由给定的函数 W_0 按如下方式产生:

$$\begin{aligned} W_{2n}(x) &= \sqrt{2} \sum_k h(k) W_n(2x - k) \\ W_{2n+1}(x) &= \sqrt{2} \sum_k g(k) W_n(2x - k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 $h(k)$ 为尺度系数, $g(k)$ 为小波系数,它们之间存在正交关系;函数 $W_0(x)$ 可以看成尺度函数 $\phi(x)$, $W_1(x)$ 则为母小波函数 $\varphi(x)$ 。这样,小波包库就可以定义为由形如 $W_n(2^l x - k)$, $l, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ 的函数组成的正交基的集合。库中的每个元素可以由下列指标确定:尺度参数 l ,局部化参数 k 和振荡参数 n 。

小波包变换不仅对低频子信号进行递归分解,而且对高频子信号进行递归分解。对于1-D的情形,完全的小波包变换形成一棵完全二叉树。当然完全的小波包变换并不总是必要的,可以根据一定的规则选择需要分解的频道,这就形成非完全二叉树。因此,小波包变换又称为树结构小波变换。

2-D小波包基函数的产生方法与1-D小波基函数相同。2-D小波包变换形成四叉树结构。图3.5给出二级分解的示意图。



图 3.5 2-D 图象的二级小波包分解示意图

3.2 习题及解答

3.1 2-D 傅里叶变换的分离性有什么实际意义?

解答:

可以利用这个性质将 2-D 变换分成两个 1-D 变换以加快计算速度,即将 $O(n^4)$ 的运算量减为 $O(n^2)$ 的运算量。

3.2 证明上册式(3.2.18)和上册式(3.2.19)成立。

解答:

将上册式(3.2.18)左边代入上册式(3.2.10)展开即可证明上册式(3.2.18)成立。

$$\begin{aligned} & F\{f(x, y) \exp[j2\pi(u_0 x + v_0 y)/N]\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[j2\pi(u_0 x + v_0 y)/N] \exp[-j2\pi(ux + vy)/N] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\{[-j2\pi(u-u_0)x + (v-v_0)y]/N\} \\
 &= F[(u-u_0), (v-v_0)]
 \end{aligned}$$

将上册式(3.2.19)左边代入上册式(3.2.10)展开即可证明上册式(3.2.19)成立。

$$\begin{aligned}
 &F\{f(x-x_0, y-y_0)\} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\{j2\pi[u(x-x_0) + v(y-y_0)]/N\} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\{-j2\pi[ux_0 + vy_0]/N\} \exp\{j2\pi[ux + vy]/N\} \\
 &= F(u, v) \exp\{-j2\pi[ux_0 + vy_0]/N\}
 \end{aligned}$$

3.3 试举例说明 2-D 傅里叶变换的周期性和共轭对称性的用途。

解答：

根据周期性，只需一个周期里的变换就可将整个变换完全确定。

根据共轭对称性，只需一半的变换就可将整个变换完全确定。

3.4 设 x, y 都是连续变量，计算下列各式的傅里叶变换：

(1) $df(x)/dx$;

(2) $\partial f(x, y)/\partial x + \partial f(x, y)/\partial y$;

(3) $\partial^2 f(x, y)/\partial x^2 + \partial^2 f(x, y)/\partial y^2$ 。

解答：

(1) 借助上册式(3.2.2)，有

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \frac{j2\pi u}{N} \exp[j2\pi ux/N] \Leftrightarrow j2\pi u F(u)$$

(2) 借助上册式(3.2.10)，有

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \frac{j2\pi u}{N} \exp[j2\pi(ux + vy)/N] \\
 &\quad + \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \frac{j2\pi v}{N} \exp[j2\pi(ux + vy)/N] \\
 &\Leftrightarrow j2\pi(u+v) F(u, v)
 \end{aligned}$$

(3) 在(2)的基础上，有

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \left(\frac{j2\pi u}{N}\right)^2 \exp[j2\pi(ux + vy)/N] \\
 &\quad + \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \left(\frac{j2\pi v}{N}\right)^2 \exp[j2\pi(ux + vy)/N] \\
 &\Leftrightarrow [j2\pi(u+v)]^2 F(u, v)
 \end{aligned}$$

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

3.5 证明 $f(x)$ 的自相关函数的傅里叶变换就是 $f(x)$ 的功率谱 $|F(u)|^2$ 。

解答:

根据相关定理(参见上册式(3.2.47)), 有 $f(x) \circ f(x) \Leftrightarrow F^*(u)F(u)$, 根据共扼定义, 有 $F^*(u)F(u) = |F(u)F(u)|$ 。又根据共扼对称性, 有 $|F(u)|^2 = |F(u)| \times |F(u)| = |F(u) \times F(u)|$ 。

3.6 证明离散傅里叶变换和反变换都是周期函数(为简便可以用 1-D 函数为例)。

解答:

设离散傅里叶变换和反变换的周期都是 N , 则有

$$\begin{aligned} F(u+N) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi(u+N)x/N] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N] \exp[-j2\pi x] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N] = F(u) \\ f(x+N) &= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi u(x+N)/N] \\ &= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux/N] \exp[j2\pi u] \\ &= \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux/N] = f(x) \end{aligned}$$

3.7 试讨论连续卷积和离散卷积的不同。

解答:

连续卷积和离散卷积在定义域方面不同。

为了避免重迭误差, 在离散卷积中需要对被卷积系列进行扩展, 即将有限长的被卷积序列 A 和 B 扩展成长度为 $M = A + B - 1$ 的序列以得到以 M 为周期的结果序列。

3.8 证明 2 个函数卷积的傅里叶变换是这 2 个函数傅里叶变换的乘积(为简便可以用单变量函数为例)。

解答:

根据离散卷积定义上册式(3.2.36), 有

$$f_c(x) * g_c(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_c(m) g_c(x-m) \quad x=0, 1, \dots, M-1$$

则左边的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F[f_c(x) * g_c(x)] &= \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_c(m) g_c(x-m) \right\} \exp[-j2\pi ux/M] \\ &= \frac{1}{M} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} f_c(m) \exp[-j2\pi um/N] \right\} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g_c(x-m) \exp[-j2\pi u(x-m)/M] \right\} \\ &= F(u)G(u) \end{aligned}$$

3.9 1个实函数 $f(x)$ 可分解成为 1 个奇函数 $f_{\text{odd}}(x)$ 和 1 个偶函数 $f_{\text{even}}(x)$ 之和。

(1) 证明 $f_{\text{even}}(x) = [f(x) + f(-x)]/2$, $f_{\text{odd}}(x) = [f(x) - f(-x)]/2$;

(2) 证明 $F[f_{\text{even}}(x)] = \text{Re}\{F[f(x)]\}$, $F[f_{\text{odd}}(x)] = j\text{Im}\{F[f(x)]\}$ 。

解答:

(1) 由 $f(x) = f_{\text{even}}(x) + f_{\text{odd}}(x)$, 得到

$$f(-x) = f_{\text{even}}(-x) + f_{\text{odd}}(-x) = f_{\text{even}}(x) + f_{\text{odd}}(-x) = f_{\text{even}}(x) - f_{\text{odd}}(x)$$

两式相加得

$$f_{\text{even}}(x) = [f(x) + f(-x)]/2$$

两式相减得

$$f_{\text{odd}}(x) = [f(x) - f(-x)]/2$$

(2) 根据共扼对称性, 有

$$F[f(x)] = F^*(u) = F(-u)$$

利用(1)中结果, 有

$$F[f_{\text{even}}(x)] = F\{[f(x) + f(-x)]/2\} = [F(u) + F^*(u)]/2 = \text{Re}\{F[f(x)]\}$$

同理有

$$F[f_{\text{odd}}(x)] = F\{[f(x) - f(-x)]/2\} = [F(u) - F^*(u)]/2 = j\text{Im}\{F[f(x)]\}$$

3.10 借助上册 3.3.1 小节中的讨论证明:

$$(1) W_M^{NM} = W_M^M;$$

$$(2) W_M^{NM} = W_M^M;$$

$$(3) W_M^{NM} = -W_M^M.$$

解答:

(1) 因为 $W_N = \exp(-j2\pi/N)$, 所以

$$W_M^{NM} = \exp(-j2\pi * 2ux/2M) = \exp(-j2\pi ux/M) = W_M^M$$

$$(2) W_M^{NM} = \exp(-j2\pi * (u+M)/M) = \exp(-j2\pi u/M) = W_M^M$$

$$(3) W_M^{NM} = \exp(-j2\pi * (u+M)/2M) = \exp(-j2\pi u/2M) * \exp(-j\pi) = -W_M^M$$

3.11 在上册 3.3.2 小节中指出, 为计算 N 点的 FFT 需要 $N \log_2 N$ 次加法和 $(1/2)N \log_2 N$ 次乘法, 如计算 1 幅 $N \times N$ 图的 2-D FFT 需要多少次加法和乘法?

解答:

1 幅 $N \times N$ 图的 2-D FFT 可以分解成 2 个 $N \times N$ 点的 1-D FFT。所以计算 1 幅 $N \times N$ 图的 2-D FFT 需要 $2N^2 \log_2 N = 4N^2 \log_2 N$ 次加法和 $2(1/2)N^2 \log_2 N = 2N^2 \log_2 N$ 次乘法。

3.12 根据上册 3.3.4 小节中的位对换规则对输入数据进行排序以计算 1 个 16 点的快速傅里叶变换。

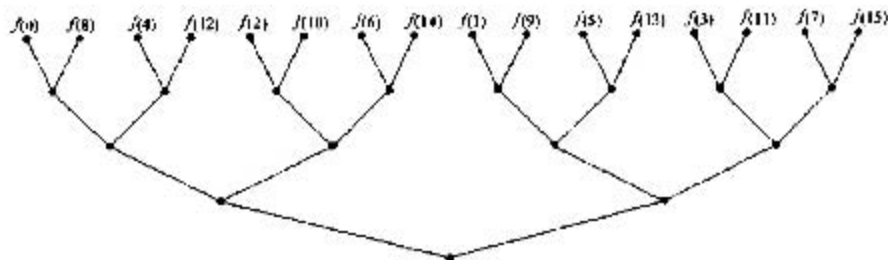
解答:

排序结果如图解 3.12。

3.13 (1) 证明上册式(3.4.15)和上册式(3.4.17)组成 1 个变换对;

(2) 以 $N = 4$ 为例, 验证上册式(3.4.23)和上册式(3.4.24);

(3) 试根据上册式(3.4.34)和上册式(3.4.35), 写出 $N=4$ 阶的哈达玛矩阵。



图解 3.12

解答:

(1) 将上册式(3.4.17)代入上册式(3.4.15), 考虑到变换核组成的矩阵是一个对称矩阵并且其行和列正交, 有

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} W(n) \prod_{l=0}^{N-1} (-1)^{x_l(x)2^{l-1}n_{l-1} \dots n_0} \right\} \prod_{l=0}^{N-1} (-1)^{x_l(x)2^{l-1}n_{l-1} \dots n_0} = \frac{1}{N} W(n) N = W(n)$$

(2) 当 $N = 4$ 时 ($M = 2$), 沃尔什变换核的值如表解 3.13.

表解 3.13

$x \backslash u$	0	1	2	3
0	+	+	+	+
1	+	+	-	-
2	-	-	+	+
3	+	-	-	+

$$W(0) = \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = \frac{1}{2} [f(0) + f(2)] + \frac{1}{2} [f(1) + f(3)]$$

$$W(2) = \frac{1}{4} [f(0) - f(1) + f(2) - f(3)] = \frac{1}{2} [f(0) + f(2)] - \frac{1}{2} [f(1) + f(3)]$$

(3) 将上册式(3.4.34)代入上册式(3.4.35), 有

$$H_1 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.14 证明上册式(3.4.45)和上册式(3.4.46)组成 1 个变换对。

解答:

将上册式(3.4.45)代入上册式(3.4.46), 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \left\{ a(n) \sum_{y=0}^{N-1} f(y) \cos \left[\frac{(2y+1)n\pi}{2N} \right] \right\} \cos \left[\frac{(2x+1)n\pi}{2N} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a^2(n) \sum_{y=0}^{N-1} f(y) \cos \left[\frac{(2y+1)n\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2x+1)n\pi}{2N} \right] \end{aligned}$$

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{y=0}^{N-1} f(y) \sum_{u=0}^{N-1} a^2(u) \times \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(x+y+1)u\pi}{N} + \cos \frac{(y-x)u\pi}{N} \right] \\
 &= \sum_{y=0}^{N-1} f(y) \times \frac{\delta(x-y)}{N} = f(x)
 \end{aligned}$$

反过来, 还可将上册式(3.4.46)代入上册式(3.4.45), 得到两式互为变换。

3.15 写出 $N=2$ 时的 2-D DCT 的正反变换核的值; 讨论正反变换核的可分离性和对称性。

解答:

对比上册式(3.4.3)和上册式(3.4.48), 可知正变换核表达式为

$$g(x, y, u, v) = a(u)a(v) \cos \left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right]$$

当 $N=2$ 时, 2-D DCT 的正变换核的值为

$$g(x, y, 0, 0) = 1/2$$

$$g(0, y, 1, 0) = 1/2$$

$$g(1, y, 1, 0) = -1/2$$

$$g(x, 0, 0, 1) = 1/2$$

$$g(x, 1, 0, 1) = -1/2$$

$$g(1, 1, 0, 0) = g(1, 1, 1, 1) = 1/2$$

$$g(1, 1, 0, 1) = g(1, 1, 1, 0) = -1/2$$

2-D DCT 的正反变换核是一样的, 所以值相同。

由变换核表达式可知, 核具有可分离性, 即

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_2(y, v) = a(u) \cos \left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] a(v) \cos \left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right]$$

而对称性由上式可直接看出。

3.16 根据上册图 3.4.3, 不考虑 $a(u)$, 算出对应 $u=v=1$ 块中的各值。

解答:

在 $u=v=1$ 时, 核的通式为

$$g(x, y, 1, 1) = \cos \left[\frac{(2x+1)\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2y+1)\pi}{2N} \right] = \cos \left[\frac{(2x+1)\pi}{8} \right] \cos \left[\frac{(2y+1)\pi}{8} \right]$$

分别计算得

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} g(0, 0, 1, 1) & g(0, 1, 1, 1) & g(0, 2, 1, 1) & g(0, 3, 1, 1) \\ g(1, 0, 1, 1) & g(1, 1, 1, 1) & g(1, 2, 1, 1) & g(1, 3, 1, 1) \\ g(2, 0, 1, 1) & g(2, 1, 1, 1) & g(2, 2, 1, 1) & g(2, 3, 1, 1) \\ g(3, 0, 1, 1) & g(3, 1, 1, 1) & g(3, 2, 1, 1) & g(3, 3, 1, 1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.8536 & 0.3536 & -0.3536 & -0.8536 \\ 0.3536 & 0.1464 & -0.1464 & -0.3536 \\ -0.3536 & -0.1464 & 0.1464 & 0.3536 \\ -0.8536 & -0.3536 & 0.3536 & 0.8536 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.17 对 $N=8$, 计算哈尔变换矩阵。

解答:

对 $N=8$, 有 $n=3$ 。根据上册式(3.4.50), 可得到表解 3.17。

表解 3.17

k	0	1	2	3	4	5	6	7
p	0	0	1	2	2	2	2	2
q	0	1	1	0	1	2	3	4

所以有

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

3.18 对 $N = 8$, 计算斯拉特变换矩阵。

解答:

先根据上册式(3.4.56)和上册式(3.4.57)算得

$$a_N = \left[\frac{3 \times 8^2}{4(8^2 - 1)} \right]^{1/2} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

$$b_N = \left[\frac{8^2 - 4}{4(8^2 - 1)} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{21}}$$

令

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_N & b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/\sqrt{21} & \sqrt{5/21} \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_N & a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{5/21} & 4/\sqrt{21} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_N & b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4/\sqrt{21} & \sqrt{5/21} \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ b_N & a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{5/21} & 4/\sqrt{21} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

则有

$$S_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & I_2 \\ A_3 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & -I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ B_3 & B_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7/\sqrt{21} & 5/\sqrt{21} & 3/\sqrt{21} & 1/\sqrt{21} & -1/\sqrt{21} & -3/\sqrt{21} & -5/\sqrt{21} & -7/\sqrt{21} \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} \\ 7/\sqrt{105} & -1/\sqrt{105} & -9/\sqrt{105} & -17/\sqrt{105} & 17/\sqrt{105} & 9/\sqrt{105} & 1/\sqrt{105} & -7/\sqrt{105} \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

3.19 证明上册式(3.5.7),上册式(3.5.8)和上册式(3.5.9)成立。

解答: 霍特林变换的定义见上册式(3.5.6),有

$$y = A(x - m_x)$$

$$(1) m_y = E\{y\} = E\{A(x - m_x)\} = E\{Ax\} - E\{Am_x\} = Am_x - Am_x = 0$$

$$(2) C_y = E\{(y - m_y)(y - m_y)^T\}$$

$$= E\{A(x - m_x)(x - m_x)^T A^T\} = AE\{(x - m_x)(x - m_x)^T\}A^T = AC_x A^T$$

(3) 因为 A 是由 C_x 的特征矢量组成其各行的矩阵, 所以 $AC_x A^T$ 为对角矩阵, 这样根据上册式(3.5.8), C_y 是对角矩阵。进一步, $AC_x A^T$ 主对角线上的元素是 C_x 的特征值, 所以式(3.5.9)成立。

3.20 设有 1 组随机矢量 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, 其中 $x_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$, $x_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$, $x_3 = [1 \ 0 \ 0]^T$, 请分别给出 x 的协方差矩阵和经霍特林变换所得到的矢量 y 的协方差矩阵。

解答:

根据上册式(3.5.4)可得均值矢量为

$$m_x = \frac{1}{3} [1 \ 1 \ 1]^T$$

根据上册式(3.5.5)可得 x 的协方差矩阵为

$$C_x = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

下面计算 C_x 的特征值。根据定义 C_x 的特征矩阵为

$$C_x - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

所以特征多项式为

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) - 2$$

特征值所满足的特征方程为

$$(2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) - 2 = 0$$

解上述一元三次方程, 得到 3 个特征值:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 3$$

经霍特林变换所得到的矢量 y 的协方差矩阵的对角元素就是 C_x 的特征值, 所以

$$C_y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

补充:

如果要计算与特征值 λ_i 对应的特征矢量, 并获得转换矩阵 A , 需求下列齐次方程组的非零解 x :

$$(C_x - \lambda_i I)x = 0$$

例如对 $\lambda_1 = 0$, 方程组为

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

解有无穷组, 满足

$$x_1 = x_2 = x_3$$

而对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 方程组为

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

解也有无穷组, 满足

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

将与各个特征值 λ_i 对应的特征矢量转置就可得到转换矩阵 A , 如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

也可是

$$A = \begin{bmatrix} 0.2503 & -0.7772 & 0.5774 \\ -0.7982 & 0.1718 & 0.5774 \\ 0.5479 & 0.6054 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

3.21 设有 1 组 64×64 的图象, 已借助上册式 (3.5.9) 算出它们的协方差矩阵是单位矩阵。如果只使用一半的原始特征值根据上册式 (3.5.11) 计算重建图象, 那么原始图和重建图之间的均方误差是多少?

解答:

对 64×64 的图象, 其协方差矩阵是 $(64 \times 64) \times (64 \times 64)$ 矩阵, 所以

$$e_{ms} = \sum_{j=1}^{64 \times 64} \lambda_j - \sum_{j=1}^{32 \times 32} \lambda_j = \sum_{j=33 \times 64+1}^{64 \times 64} \lambda_j = \sum_{j=2049}^{4096} 1 = 2048$$

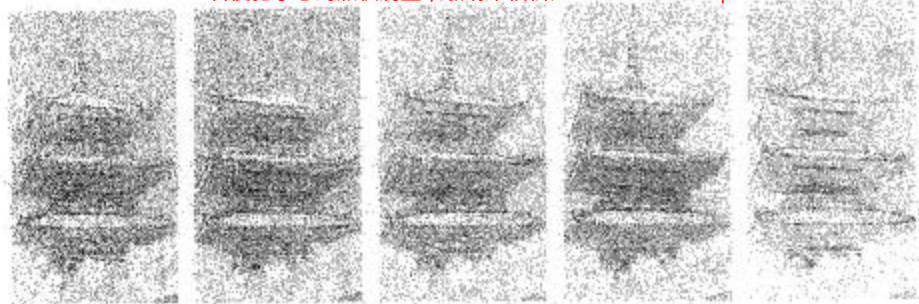


图 4.8 一般阈值和颜色变化后的图像

4.2 习题及解答

4.1 用灰度剪切变换函数 $T(r) = 0, r \in [0, 127]; T(r) = 255, r \in [128, 255]$ 能从 1 幅 8 位面图像中提取出第 7 位面, 据此给出 1 组变换函数以提取该图像的其他各个位面。

解答:

设要提取第 n 个位面, 则有通式

$$T_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{int}[r/2^n] \text{ 为偶数或零} \\ 255 & \text{int}[r/2^n] \text{ 为奇数} \end{cases}$$

以第 6 位面为例, 有

$$T_6(r) = \begin{cases} 0 & \text{int}[r/64] \text{ 为偶数或零} \\ 255 & \text{int}[r/64] \text{ 为奇数} \end{cases}$$

等价于

$$T_6(r) = \begin{cases} 0 & r \in [0, 63] \text{ 或 } r \in [128, 191] \\ 255 & r \in [64, 127] \text{ 或 } r \in [192, 255] \end{cases}$$

4.2 为什么一般情况下对离散图像的直方图均衡化并不能产生完全平坦的直方图?

解答:

因为同一个灰度值的各个像素没有理由变换到不同灰度级, 所以数字图像直方图均衡化的结果一般不能得到完全均匀分布的直方图, 只是近似均衡的直方图。

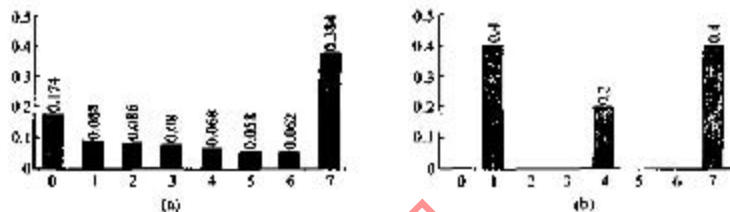
4.3 设已用直方图均衡化技术对 1 幅数字图像进行了增强, 试证明再用这个方法对所得结果增强并不会改变其结果。

解答:

从原理上分析, 直方图均衡化所用的变换函数为原始图像的累积直方图, 均衡化后得到的增强图像的累积直方图除有些项合并外, 其余项与原始图像的累积直方图相同。如果再次均衡化, 所用的变换函数即为均衡化后得到的增强图像的累积直方图(并且不会有新的合并项), 所以不会改变其结果。

直方图均衡化也可看作作用均匀分布直方图为规范化函数时的直方图规范化特例。第一次均衡化后, 图象直方图已成为均匀分布的了, 再次均衡化仍只能得到均匀分布的直方图, 所以第二次均衡化不会改变第一次均衡化的结果。

4.4 设 1 幅图象有如题 4.4(a)所示直方图, 拟对其进行规定直方图变换, 所需规定直方图如题 4.4(b)所示。请参照上册表 4.2.2 列表给出直方图规范化计算结果(不必统计直方图各灰度级象素), 并比较 SML 方法和 GML 方法的误差情况。



图题 4.4

解:

计算结果见表 4.4。

表题 4.4

序号	运 算	步骤和结果							
1	列出原始图灰度级 $s, t = 0, \dots, 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	统计原始直方图各灰度级象素 n_s								
3	用式(4.2.2)计算原始直方图	0.174	0.088	0.086	0.08	0.058	0.058	0.062	0.384
4	计算原始累计直方图	0.174	0.262	0.348	0.428	0.486	0.544	0.616	1.00
5	规定直方图 $p_t(m_k) = n_k / N$	0	0.4	0	0	0.2	0	0	0.4
6	计算规定累计直方图	0	0.4	0	0	0.6	0	0	1.0
7S	SML 映射	1	1	1	1	1	4	4	7
8S	确定映射对应关系	0, 1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 1					5, 6 $\rightarrow$ 4		7 $\rightarrow$ 7
9S	变换后直方图	0	0.496	0	0	0.12	0	0	0.384
7G	GML 映射	1	1	1	1	4	4	4	7
8G	查找映射对应关系	0, 1, 2, 3 $\rightarrow$ 4					4, 5, 6 $\rightarrow$ 4		7 $\rightarrow$ 7
9G	变换后直方图	0	0.428	0	0	0.188	0	0	0.384

注: 表中步骤 7S 到 8S 对应 SML 映射方法, 步骤 7G 到 9G 对应 GML 映射方法。

SML 映射方法的误差为 $|0.4 - 0.496| + |0.2 - 0.12| + |0.4 - 0.384| = 0.192$ 。

GML 映射方法的误差为 $|0.4 - 0.428| + |0.2 - 0.188| + |0.4 - 0.384| = 0.056$ 。

4.5 证明上册式(4.2.12)和上册式(4.2.13)成立。

解:

$$\begin{aligned}\bar{g}(x, y) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_i(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [f_i(x, y) + e_i(x, y)] = f(x, y) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i(x, y) \\ E[\bar{g}(x, y)] &= f(x, y) + E\left\{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i(x, y)\right\} = f(x, y) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E[e_i(x, y)] = f(x, y) \\ \sigma_{\bar{g}}^2(x, y) &= E\left\{\left[f(x, y) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i(x, y)\right]^2\right\} - \left\{E\left[f(x, y) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i(x, y)\right]\right\}^2 \\ &= f^2(x, y) + \frac{1}{M^2} E\left\{\left[\sum_{i=1}^M e_i(x, y)\right]^2\right\} - f^2(x, y) \\ &= \frac{1}{M^2} E\left\{\sum_{i=1}^M e_i^2(x, y)\right\} = \frac{1}{M} \sigma_{e_i}^2(x, y)\end{aligned}$$

所以

$$\sigma_{\bar{g}}(x, y) = \sqrt{\frac{1}{M}} \sigma_{e_i}(x, y)$$

4.6 设工业检测中工件的图象受到零均值不相关噪声的影响。如果图象采集装置每秒可采集 30 幅图, 要采用图象平均方法将噪声的方差减少到 1/10, 那么工件需保持多长时间固定在采集装置前?

解答:

根据上册式(4.2.13), 可知 $M = 100$, 所以工件需保持固定约 3.3s。

4.7 空间滤波器在具体实现时需要让模板的中心移过图象中的每个位置, 计算模板系数和对应象素的乘积并对它们求和。对所有模板系数均为 1 的低通滤波器, 可使用称为盒滤波器或移动平均的算法程序, 即每次只计算在模板移动中其值变化的部分。

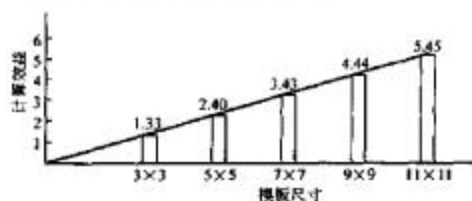
(1) 对 $n \times n$ 的滤波器编 1 个程序实现上述快速算法。

(2) 用直接算法和用上述快速算法所需的计算次数之比称为计算效益。忽略图象边界的影响, 计算当 n 为 3 到 11 的奇数时的计算效益, 并画出计算效益为 n 的函数的曲线。注意 $1/n^2$ 的尺度系数对 2 种算法是公共的, 所以这里可不考虑。

解答:

(1) 水平移动时每次减去模板移动前最左一列对应的图象象素值, 再加上模板移动后最右一列对应的图象象素值, 这样可将 $n^2 - 1$ 次乘积和求和减少为 $2n$ 次乘积和求和 (对所有模板系数均为 1 的低通滤波器都不须乘法)。如果 n 比较大, 还可考虑将每列模板对应象素值先求和, 这样每次移动只需 n 次加法和一次减法。

(2) 这里计算效益为 $n^2 - 1/(2n)$, 曲线见图解 4.7。



图解 4.7

由图解 4.7 可见, 模板尺寸越大, 计算效益越高。

4.8 编 1 个程序实现 $n \times n$ 中值滤波器。当模板中心移过图象中每个位置时, 设计一种简便地更新中值的方法。

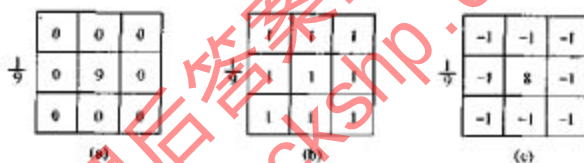
解答:

水平移动模板, 每次当模板中心移过图象中每个位置时, 比较模板移动前最左一列对应的各图象像素值与此时中值的大小来更新中值, 再比较模板移动后最右一列对应的各图象像素值与此时中值的大小来更新中值, 这样可将 n^3 次比较排序减少为 $2n$ 次比较排序 (对 n 个像素值的比较排序需要 n^2 次操作)。

4.9 利用 3×3 滤波器, 证明 (参见上册 4.3.3 小节) 在空域中利用 $\text{Highpass} = \text{Original} - \text{Lowpass}$ 可得到高通滤波的图象。

解答:

获得 Original, Lowpass 和 Highpass 的 3×3 滤波器模板分别如图解 4.9(a), (b) 和 (c) 所示。



图解 4.9

将模板看成矩阵, 可以得到 $\text{Highpass} = \text{Original} - \text{Lowpass}$ 。

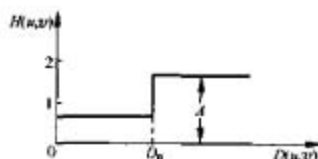
4.10 画出高频增强滤波器的转移函数和脉冲响应曲线。

解答:

将上册式 (4.3.2) 和上册式 (4.4.3) 结合起来可得到转移函数为

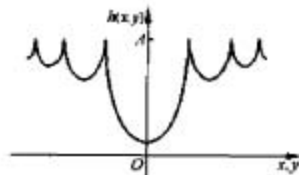
$$H(u, v) = \begin{cases} A - 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ A & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其图示见图解 4.10.1。



图解 4.10.1

脉冲响应是转移函数的傅里叶反变换, 这里转移函数是一个常数与一个低通滤波器的差, 所以脉冲响应曲线由该常数减去低通滤波器的傅里叶反变换得到, 见图解 4.10.2。



图解 4.10.2

4.11 设仅利用像素点 (x, y) 的 4-近邻像素(不用点 (x, y) 本身)组成 1 个低通滤波器。

- (1) 给出它在频域的等价滤波器 $H(u, v)$;
- (2) 证明所得结果确实是 1 个低通滤波器。

解答:

- (1) 滤波后的函数为(设各系数均为 1)

$$g(x, y) = \frac{1}{4} \{f(x+1, y) + f(x, y+1) + f(x-1, y) + f(x, y-1)\}$$

对其进行傅里叶变换(借助平移性质)得

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \frac{1}{4} \{F(u, v) \exp(j2\pi u/N) + F(u, v) \exp(-j2\pi u/N) \\ &\quad + \frac{1}{4} \{F(u, v) \exp(j2\pi v/N) + F(u, v) \exp(-j2\pi v/N)\} \\ &= \frac{1}{2} F(u, v) [\cos(2\pi u/N) + \cos(2\pi v/N)] \end{aligned}$$

所以频域的等价滤波器为

$$H(u, v) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi u/N) + \cos(2\pi v/N)]$$

(2) 上述滤波器以 N 为周期, 在 $u=0, v=0$ 时取到最大值, 在一个周期内随着频率值的增加其幅值逐渐减小, 这表明该滤波器的功能相当于 1 个低通滤波器。

4.12 有一种计算梯度的基本步骤是计算 $f(x, y)$ 和 $f(x+1, y)$ 的差。

- (1) 给出在频域进行等价计算所用的滤波器转移函数 $H(u, v)$;
- (2) 证明这个运算相当于 1 个高通滤波器的功能。

解答:

- (1) 滤波后的函数为(设各系数均为 1)

$$g(x, y) = f(x+1, y) - f(x, y)$$

对其进行傅里叶变换(借助平移性质)得

$$G(u, v) = F(u, v) \{\exp(j2\pi u/N) - 1\}$$

所以滤波器转移函数 $H(u, v)$ 为

$$H(u, v) = \exp(j2\pi u/N) - 1$$

- (2) 取转移函数 $H(u, v)$ 的模, 有

$$\|H(u, v)\| = \|\cos(2\pi u/N) - 1 + j \sin(2\pi u/N)\|$$

$$\begin{aligned}
 &= [\cos(2\pi u/N) - 1]^2 - \sin^2(2\pi u/N) \\
 &= 2[1 - \cos(\pi u/N)]
 \end{aligned}$$

由上式可知转移函数以 N 为周期，在 $u = 0, v = 0$ 收到最小值，随着频率值在一个周期内的增加单增，对应于 1 个高通滤波器。

4.13 讨论用于空间滤波的平滑滤波器和锐化滤波器的相同点、不同点以及联系。

解答：

相同点：都能减弱或消除傅里叶空间的某些分量，而不影响或较少影响其他分量，从而达到增强某些频率分量的效果。

不同点：平滑滤波器减弱或消除了傅里叶空间的高频分量，所以达到了增强低频分量、平滑图象中细节的效果。锐化滤波器减弱或消除傅里叶空间的低频分量，所以达到了增强高频分量、锐化图象中细节的效果。

联系：两者效果相反，互为补充，从原始图象中减去平滑滤波器的结果得到锐化滤波器的效果，而从原始图象中减去锐化滤波器的结果则可得到平滑滤波器的效果。

4.14 在什么条件下上册式(4.4.5)的巴特沃斯低通滤波器变成理想低通滤波器？

解答：

当 n 趋向于无穷大时，如果此时 $D(u, v)$ 大于 D_0 ， $H(u, v)$ 趋向于零；如果此时 $D(u, v)$ 小于 D_0 ， $H(u, v)$ 趋向于 1。

4.15 证明可以通过在频域内用原始图减去低通滤波图得到高通滤波的结果。

解答：

设原始图的傅里叶变换为 $F(u, v)$ ，低通滤波器的转移函数为 $H(u, v)$ ，则在频域内用原始图减去低通滤波图得到 $G(u, v) = F(u, v) - F(u, v)H(u, v) = F(u, v) \times [1 - H(u, v)]$ ，结果和低通滤波图互补，所以是得到了高通滤波的结果。

4.16 从巴特沃斯低通滤波器出发推导它对应的高通滤波器。

解答：

低通滤波器和它对应的高通滤波器是互补的，所以

$$\begin{aligned}
 H_h(u, v) &= 1 - H_l(u, v) = 1 - \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}} \\
 &= \frac{[D(u, v)/D_0]^{2n}}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}} = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}
 \end{aligned}$$

4.17 有一种常用的图象增强技术是将高频增强和直方图均衡化结合起来以达到使边缘锐化的反差增强效果，以上 2 个操作的先后次序对增强效果有影响吗，为什么？

解答：

高频增强是一种线性操作，但直方图均衡化是一种非线性操作，所以 2 个操作的先后次序对增强效果有影响，不能互换。

4.18 在天体研究获图象中有一些相距很远的对应恒星的亮点。由于大气散射原因而透加的照度常使得这些亮点很难看清楚。如果将这类图象模型化为恒定亮度的背景与 1 组脉冲的乘积，根据同态滤波的概念设计 1 种增强方法将对应恒星的亮点提取出来。

解答:

恒定亮度的背景对应低频成分, 脉冲则对应高频成分, 所以对乘积取对数可将两种成分区别开分别处理。根据同态滤波的概念可设计减少低频成分, 增加高频成分的滤波器。

4.19 试证明: 如果 $H(u, v)$ 是实对称的, 则 $h(x, y)$ 一定也是实对称的。

解答:

因为 $H(u, v)$ 实对称, 所以有 $H(u, v) = H(-u, -v)$

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)/N] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(-u, -v) \exp[j2\pi(ux + vy)/N] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) \exp[j2\pi(-ux - vy)/N] = h(-x, -y) \end{aligned}$$

4.20 在 1 条自动装配线上, 有 3 类形状相同的工件。为了方便检测, 将工件用不同颜色标注。现只有 1 个单色摄影机, 请提出 1 种用这个摄影机检测 3 种颜色的方法。

解答:

第 1 种方法是可在摄影机前加上与标注颜色对应的滤色镜, 增强对应颜色转化得到的灰度, 以与其他颜色区别。

第 2 种方法是设计与标注颜色转换得到的灰度对应的增强滤波器, 将对应的灰度分别增强为差距较大的 3 种灰度, 以便于检测。

4.21 设有 1 个能输出 RGB 模拟信号的彩色摄影机, 1 个能将这些模拟信号转化为以 $(1/30)s$ 的视频速度输出 RGB 或 HSI 图象的数字化器, 3 块能以视频速度接受图象的帧缓存卡, 以及 1 个能以视频速度计算直方图的硬件。所有这些都可与 1 台微机组在一起。现要解决如下问题: 生产线上有一系列形状相同但颜色不同的工件, 它们按红、黄、绿、蓝的次序排列。请借助以上硬件设计 1 个图象处理软件系统将工件的颜色检测出来。这里假设工件移动速度相当慢, 所以可忽略由此产生的图象模糊问题。请画出系统的流程图并对每个模块及所选处理技术进行讨论。

解答:

系统的流程图如图解 4.21, 用彩色摄影机获取图象, 借助数字化器输出 HSI 图象, 分别将 H, S, I 分量输入帧缓存卡, 对 H 分量计算直方图。因为红、黄、绿、蓝分别对应不同色调, 所以可通过检测色调直方图的峰值来确定工件颜色。如果色调范围是 360° , 则红、黄、绿、蓝分别对应 $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ 。



图解 4.21

为 $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P$, 则计算点 (x', y') 的插值公式为

$$g(x', y') = \sum W_x W_y g(\cdot) \quad (5.1)$$

其中 W_x 为横坐标插值的加权值, W_y 为纵坐标插值的加权值, 分别计算如下[王 1994]:

- (1) 如果 $g(\cdot)$ 的横坐标值与 x' 的差值 d_x 小于 1 (即 B, C, F, G, J, K, N, O), 则

$$W_x = 1 - 2d_x^2 + 3d_x^3 \quad (5.2)$$

- (2) 如果 $g(\cdot)$ 的横坐标值与 x' 的差值 d_x 大于 1 (即 A, D, E, H, I, L, M, P), 则

$$W_x = 4 - 8d_x + 5d_x^2 - d_x^3 \quad (5.3)$$

- (3) 如果 $g(\cdot)$ 的纵坐标值与 y' 的差值 d_y 小于 1 (即 E, F, G, H, I, J, K, L), 则

$$W_y = 1 - 2d_y^2 + 3d_y^3 \quad (5.4)$$

- (4) 如果 $g(\cdot)$ 的纵坐标值与 y' 的差值 d_y 大于 1 (即 A, B, C, D, M, N, O, P), 则

$$W_y = 4 - 8d_y + 5d_y^2 - d_y^3 \quad (5.5)$$

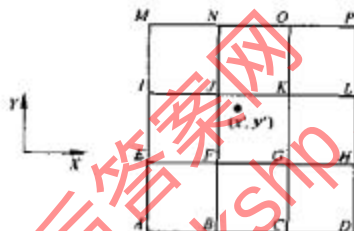


图 5.2 三次线性插值方法

有试验曾借助对精细印刷品图象的空间坐标校正比较了双线性插值法和三次线性插值方法的计算精确度[章 2001e]。这里精确度是借助校正图 $f(x, y)$ 与原始标准图 $s(x, y)$ 之间的相关系数来表示的。相关系数的定义为

$$C = \frac{\sum f(x, y) s(x, y)}{\sqrt{\sum f^2(x, y) \sum s^2(x, y)}} \quad (5.6)$$

相关系数越大, 则精确度越高。实验中, 用双线性插值法得到的校正图与标准图之间的相关系数为 0.977891, 而用三次样条插值法得到的校正图与标准图之间的相关系数为 0.990418, 相差约 1.25%。

5.2 习题及解答

5.1 设有 1 个线性位移不变的图象退化系统, 它的脉冲响应可以写成 $h(x-a, y-b) = \exp\{-(x-a)^2 + (y-b)^2\}$ 。如果给系统输入 1 个位于 $x=a$ 处的无穷长细直线信号, 它可用 $f(x, y) = \delta(x-a)$ 模型化, 求系统的输出。

解答:

系统的脉冲响应是 $h(x, y) = \exp\{-(x^2 + y^2)\}$, 系统的输入是 $f(x, y) = \delta(x-a)$,

则系统的输出是

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \exp\{-[(x-a)^2 + y^2]\}$$

5.2 对在 x 和 y 方向上任意的匀速运动, 推导类似于上册式(5.3.12)的转移函数。

解答:

设 $x_0(t) = ct/T$, $y_0(t) = rt/T$, 则有

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_0^T \exp\left[-j2\pi\left(u\frac{ct}{T} + v\frac{rt}{T}\right)\right] dt \\ &= \frac{T}{\pi(uc + vr)} \sin[\pi(uc + vr)] \exp[-j\pi(uc + vr)] \end{aligned}$$

5.3 设 1 幅图象的模糊是由物体在 x 方向的匀加速运动产生的。当 $t = 0$ 时物体静止, 在 $t = 0$ 到 $t = T$ 间物体加速度是 $x_0(t) = at^2/2$, 求转移函数 $H(u, v)$, 并讨论匀速运动和匀加速运动所造成的模糊的不同特点。

解答:

将加速度 $x_0(t) = at^2/2$ 代入上册式(5.3.10), 有

$$H(u, v) = \int_0^T \exp\left[-j2\pi u \frac{at^2}{2}\right] dt = \int_0^T \exp[-j\pi a u t^2] dt$$

上述积分在 T 趋向于无穷时为有限值, 所以在 T 为有限值时应为较小的正值(也可借助级数展开分析)。

对匀速运动造成的模糊(见上册式(5.3.12)), 由于 $H(u, v)$ 可能在 uv 平面上某些位置取零或很小, 从而使得恢复结果与预期的结果可能有很大差距。对匀加速运动造成的模糊, 由于其 $H(u, v)$ 没有在 uv 平面上取零的点, 则没有这个问题。

5.4 试写出

(1) 由上册式(5.4.6)得到上册式(5.4.7)的步骤;

(2) 由上册式(5.4.7)得到上册式(5.4.8)的步骤。

解答:

(1) 将 W^{-1} 乘进去, 有

$$\begin{aligned} W^{-1} \hat{f} &= W^{-1}(WD^*DW^{-1} + sWA^{-1}BW^{-1})^{-1}WD^*W^{-1}g \\ &= W^{-1}[W(D^*D)^{-1}W^{-1} + sW(A^{-1}B)^{-1}W^{-1}]^{-1}WD^*W^{-1}g \\ &= [(D^*D)^{-1} + s(A^{-1}B)^{-1}]D^*W^{-1}g = (D^*D + sA^{-1}B)^{-1}D^*W^{-1}g \end{aligned}$$

(2) 将各个矩阵用对应的傅里叶变换代替, 有

$$\begin{aligned} W^{-1} \hat{f} &\Leftrightarrow \hat{F}(u, v) & W^{-1} g &\Leftrightarrow G(u, v) & A^{-1} B &\Leftrightarrow S_s(u, v)/S_f(u, v) \\ D^* &\Leftrightarrow H^*(u, v) & D &\Leftrightarrow H(u, v) & D^* D &\Leftrightarrow |H(u, v)|^2 \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} \hat{F}(u, v) &= \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + s[S_s(u, v)/S_f(u, v)]} G(u, v) \\ &= \left[\frac{1}{H(u, v)} \times \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + s[S_s(u, v)/S_f(u, v)]} \right] G(u, v) \end{aligned}$$

5.5 成像时由于长时间曝光受到大气干扰而产生的图象模糊可以用转移函数

$H(u, v) = \exp[-(u^2 + v^2)/2\sigma^2]$ 表示。设噪声可忽略, 求恢复这类模糊的维纳滤波器的方程。

解答:

噪声可忽略时, 维纳滤波器退化成理想的逆滤波器, 所以

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = \frac{G(u, v)}{\exp[-(u^2 + v^2)/2\sigma^2]} = \exp[(u^2 + v^2)/2\sigma^2] G(u, v)$$

5.6 试从上册式(5.4.23)出发证明上册式(5.4.24)。

解答:

噪声的均值和方差分别为

$$\bar{n}_e = \frac{1}{(M-1)(N-1)} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} n_e(x, y)$$

$$\sigma_e^2 = E\{[n_e(x, y) - \bar{n}_e]^2\} = E[n_e^2(x, y)] - \bar{n}_e^2$$

如果用采样的平均来近似噪声平方的期望值, 则有

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{(M-1)(N-1)} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} n_e^2(x, y) - \bar{n}_e^2$$

上式中的求和其实就是将各个 n_e 自乘再相加, 根据定义, 这就是 $\|n\|^2$, 所以移项后有

$$\|n\|^2 = (M-1)(N-1)[\bar{n}_e^2 + \sigma_e^2]$$

5.7 设上册图 5.2.1 中的模型是线性位置不变的, 证明其输出的功率谱可表示为 $|G(u, v)|^2 = |H(u, v)|^2 |F(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2$ 。

解答:

将上册图 5.2.1 中的模型

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + n(x, y)$$

取傅里叶变换, 有

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) + N(u, v)$$

两边求模的平方(注意 f 与 n 不相关), 有

$$|G(u, v)|^2 = |F(u, v)|^2 |H(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2$$

5.8 设恢复滤波器 $R(u, v)$ 满足 $|\hat{F}(u, v)|^2 = |R(u, v)|^2 |G(u, v)|^2$, 并假设强制恢复图象的功率谱 $|\hat{F}(u, v)|^2$ 等于原始图象的功率谱 $|F(u, v)|^2$ 。

(1) 根据 $|F(u, v)|^2$, $|H(u, v)|^2$ 和 $|N(u, v)|^2$ 求出 $R(u, v)$ 。(提示: 参照上册图 5.2.1, 式(5.2.34)和练习题 5.7。)

(2) 用(1)中所得的结果以类似于式(5.4.8)的形式写出 $\hat{F}(u, v)$ 。

解答:

(1) 根据假设, $|F(u, v)|^2 = |\hat{F}(u, v)|^2$, 所以有

$$\begin{aligned} |R(u, v)|^2 &= \frac{|F(u, v)|^2}{|G(u, v)|^2} = \frac{|F(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2 |H(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2} \\ &= \frac{1}{|H(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2 / |F(u, v)|^2} \\ R(u, v) &= \frac{|R(u, v)|^2}{R^*(u, v)} = \frac{1}{H(u, v)} = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2 / |F(u, v)|^2} \end{aligned}$$

(2) 利用(1)中所得的结果可得

$$\hat{F}(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + |N(u, v)|^2 + |F(u, v)|^2} G(u, v)$$

5.9 设1台X射线成像设备所产生的模糊可模型化为1个卷积过程,且卷积函数为循环对称的,即 $h(r) = [(r^2 - 2\sigma^2)/\sigma^4] \exp[-r^2/2\sigma^2]$,其中 $r^2 = x^2 + y^2$ 。为恢复这类图象要设计1个有约束最小平方恢复滤波器,请推导它的转移函数。

解答:

根据上册式(5.4.21),转移函数为

$$R(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + s |P(u, v)|^2}$$

对 $h(r) = h(x, y)$ 进行傅里叶变换得(取正方形图象,即 $M = N$)

$$H(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{M-1} \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right] \exp[-j2\pi(ux + vy)/M]$$

进一步得

$$H^*(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{M-1} \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right] \exp[j2\pi(ux + vy)/M]$$

借助上册式(5.4.10)计算

$$\begin{aligned} P(u, v) &= \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{x=0}^{M-1} p(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)/M] \\ &= \frac{1}{M} \{ -\exp[-j2\pi u/M] - \exp[-j2\pi v/M] - \exp[-j2\pi(u + 2v)/M] \\ &\quad - \exp[-j2\pi(2u + v)/M] + 4\exp[-j2\pi(u + v)/M] \} \end{aligned}$$

将 $H(u, v)$, $H^*(u, v)$ 和 $P(u, v)$ 代入就可求得有约束最小平方恢复滤波器。

5.10 从上册式(5.5.9)出发推导上册式(5.5.10)。

解答:

将上册式(5.5.9)对 $w(x, y)$ 求导得(为清晰,将各个量的坐标不写)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^2}{dw} &= \frac{1}{(2X+1)(2Y+1)} \sum_{n=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y 2\{[(g-wp) - (\bar{g}-w\bar{p})](-p+\bar{p})\} \\ &= \frac{1}{(2X+1)(2Y+1)} \sum_{n=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y [-pg + \bar{p}g + \bar{g}p - \bar{g}\bar{p} + w(p^2 + \bar{p}^2 - 2\bar{p}p)] \\ &= \frac{1}{(2X+1)(2Y+1)} \sum_{n=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y [-\bar{p}g + \bar{p}\bar{g} + \bar{g}\bar{p} - \bar{g}p + w(\bar{p}^2 + p^2 - 2\bar{p}^2)] \\ &= \frac{1}{(2X+1)(2Y+1)} \sum_{n=-X}^X \sum_{n=-Y}^Y [-\bar{p}g + \bar{p}\bar{g} + w(\bar{p}^2 - p^2)] \end{aligned}$$

令导数为零,即求和量为零,得到上册式(5.5.10)。

5.11 设用三角形代替上册图 5.6.1 中的四边形,建立与上册式(5.6.7)和上册式(5.6.8)相对应的校正几何形变的空问变换式。

解答:

三角形有3个顶点,所以可参见上册式(5.6.3)和上册式(5.6.4)得

$$x' = k_1 x + k_2 y + k_3$$

$$y' = k_4 x + k_5 y + k_6$$

将 3 个顶点作为对应点代入上面 2 式中, 可解得 6 个系数 $k_i, i = 1, 2, \dots, 6$, 从而确定变换式。

5.12 设上册图 5.6.1 中左下角为原点, 求表示几何失真过程的一对双线性等式和校正公式。如设 $f(1, 1)=1, f(7, 1)=7, f(1, 7)=7, f(7, 7)=14$, 求点 $f(2, 4)$ 的灰度值。

解答:

将上册图 5.6.1 中各对应点的坐标代入上册式(5.6.9)和上册式(5.6.10)得

$$1 = k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$$

$$1 = k_5 + 2k_6 + 2k_7 + k_8$$

$$7 = 6k_1 + k_2 + 6k_3 + k_4$$

$$7 = 6k_5 + k_6 + 6k_7 + k_8$$

$$1 = 2k_1 + 7k_2 + 4k_3 + k_4$$

$$1 = 2k_5 + 7k_6 + 4k_7 + k_8$$

$$7 = 7k_1 + 6k_2 + 42k_3 + k_4$$

$$7 = 7k_5 + 6k_6 + 42k_7 + k_8$$

联立解得: $k_1 = 15/13, k_2 = -3/13, k_3 = 0, k_4 = -4/13, k_5 = 15/13, k_6 = -3/13, k_7 = 0, k_8 = 4/13$ 。

利用双线性公式, 先求得点 $f(2, 1)$ 的灰度值为 2, 点 $f(2, 7)$ 的灰度值为 8; 进一步可知点 $f(2, 4)$ 的灰度值为 5。

5.13 证明

(1) 如果 $f(x, y)$ 是旋转对称的, 那么它可以由单个投影重建;

(2) 如果 $f(x, y)$ 是可以分解成 $g(x)$ 和 $h(y)$ 的乘积, 那么它可以由 2 个与坐标轴垂直的投影重建。

解答:

(1) 如果 $f(x, y)$ 是旋转对称的, 那么它在各个方向上的投影是相同的, 所以可以由任一方向上的单个投影来重建。

(2) 设 $f(x, y)$ 在 X 轴上的投影为 $S(x)$, 在 Y 轴上的投影为 $T(y)$, 则有

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) dy$$

$$T(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = h(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$$

上两式中的积分均应为有限常数, 设分别为 H 和 G , 则有

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(y)}{G} dy$$

$$HG = \int_{-\infty}^{+\infty} T(y) dy$$

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$f(x, y) \approx g(x)h(y) = \frac{S(x)}{H} \frac{T(y)}{G} = \frac{S(x)T(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} T(y)dy}$$

所以 $f(x, y)$ 可以由 2 个与坐标轴垂直的投影重建。

5.14 试证明傅里叶变换投影定理。

解答:

证明傅里叶变换投影定理可表述为, 证明图象 $f(x, y)$ 在与 X 轴成 θ 角的直线上投影的傅里叶变换是 $f(x, y)$ 的傅里叶变换在朝向角 θ 上的 1 个截面。不失一般性, 可取 $\theta = 0$ 。

设图象 $f(x, y)$ 在 X 轴上的投影为 $g_x(x)$, 则有

$$g_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

其傅里叶变换为

$$G_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(x) \exp[-j2\pi ux] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi ux] dx dy$$

另一方面, $f(x, y)$ 的傅里叶变换为

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

将上式中的 v 取为零, 则得到 $G_x(u) = F(u, 0)$, 所以傅里叶变换投影定理得证。

5.15 如何产生上册图 5.7.3(b) 所示模式, 如何用 FFT 计算它们的采样。

解答:

上册图 5.7.3(b) 所示模式是将上册图 5.7.3(a) 所示模式中对应 n 为偶数的采样点保留, 而将对应 n 为奇数的采样点向网阵中心缩小一半距离得到的。由于这样一来, 采样点的分布比较均匀, 所以在傅里叶平面进行极坐标向直角坐标插值时得到较精确的结果。

根据上面所讨论的模式产生方法, 可知当 n 为偶数时, 上册式 (5.7.11) 仍成立, 而当 n 为奇数时, 有

$$\begin{aligned} G_{\Sigma}[(k+1/2)\Delta R, \theta_s] &= \Delta s \sum_{m=-M}^{M^*} g(m\Delta s, \theta_s) \exp\left[-\frac{j2\pi(k+1/2)m}{M}\right] \\ &= \Delta s \sum_{m=-M}^{M^*} g(m\Delta s, \theta_s) \exp\left[-\frac{j2\pi km}{M}\right] \exp\left[-\frac{j\pi m}{M}\right] \end{aligned}$$

所以可用统一的方法用 FFT 计算它们的采样。

5.16 设在点 (x, y) 处的线性衰减系数为 $d(x, y)$, 根据 X 射线衰减规律, 有

$$\int_{(s, \theta)} d(x, y) = \ln\left(\frac{I_i}{I}\right)$$

其中 I_i 为射线入射强度, I 为射线透过物体后的强度, (s, θ) 代表从发射源到接受器的直线与物体相交的部分。现定义 CT 值为

$$CT = k \frac{d(x, y) - d_w(x, y)}{d_w(x, y)}$$

其中 $d_w(x, y)$ 为水的线性衰减系数, k 为归一化系数。当使用卷积逆投影重建法时, 已知

重建滤波器冲激响应为 $h(s)$, 求计算 CT 值的表达式。

解答:

根据上册式(5.7.17), 可将 $d(x, y)$ 表示为

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 g(s, \theta) h(x \cos \theta + y \sin \theta - s) ds d\theta \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \ln \left(\frac{I_t}{I(s, \theta)} \right) h(x \cos \theta + y \sin \theta - s) ds d\theta \end{aligned}$$

式中 $I(s, \theta)$ 表示与原点相距 s 、法向与 X 轴正向夹角为 θ 的射线透过物体后的强度。这样可得

$$CT = k \left[\frac{\int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \ln \left(\frac{I_t}{I(s, \theta)} \right) h(x \cos \theta + y \sin \theta - s) ds d\theta}{d_w(x, y)} - 1 \right]$$

6.2 习题及解答

6.1 在式(6.2.16)中, 当对数底数为 e 时, 得到的信息单位称为奈特(nat); 当对数底数为 10 时, 得到的信息单位称为哈特利(hartley)。推导它们与比特的换算关系。

解答:

用不同的单位要表达相同数量的信息, 所以根据定义, 有

$$1\text{bit} = -\log_2 P(E)$$

$$1\text{nat} = -\ln P(E) = \frac{-\log_2 P(E)}{\log_2 e} = -\log_2 e \text{ bit}$$

$$1\text{hartley} = -\lg P(E) = \frac{-\log_2 P(E)}{\log_2 10} = -\log_2 10 \text{ bit}$$

6.2 对 1 个具有 q 个符号的零记忆信源, 证明它的熵的最大值为 $\log q$, 这个值当且仅当所有源符号出现概率相同时达到。提示: 考虑 $\log q - H(u)$, 并利用不等式 $\ln x \leq x-1$ 。

解答:

设 q 个符号为 $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$, 令 $u = [P(a_1) \ P(a_2) \ \dots \ P(a_q)]^T$, 则信源的熵为

$$H(u) = -\sum_{i=1}^q P(a_i) \log P(a_i)$$

现设函数

$$\begin{aligned} G(u) &= \log q - H(u) = \log q + \sum_{i=1}^q P(a_i) \log P(a_i) = \sum_{i=1}^q P(a_i) [\log q + \log P(a_i)] \\ &= \sum_{i=1}^q P(a_i) \log [qP(a_i)] \leq \sum_{i=1}^q P(a_i) [qP(a_i) - 1] = q \sum_{i=1}^q P^2(a_i) - 1 \end{aligned}$$

再考虑函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_q) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_q^2 - \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_q)$$

对 x_i , ($i=1, 2, \dots, q$) 和 λ 求偏导并取偏导为零, 可知极值在所有 x_i 相等时取得。当所有源符号出现概率相同时, 有 $p(a_i) = 1/q$, ($i=1, 2, \dots, q$), 此时

$$G_{\min}(u) = q \sum_{i=1}^q P^2(a_i) - 1 = q^2 \frac{1}{q} - 1 = 0$$

所以

$$H_{\max}(u) = \log q$$

6.3 客观保真度准则和主观保真度准则各有什么特点?

解答:

客观保真度准则提供了 1 种简单和方便的评估信息损失的方法, 它用编码输入图与解码输出图的函数表示图象压缩所损失的信息量。它不受观察者主观因素的影响。

因为很多解压图最终是供人看的, 所以在这种情况下用主观的方法来测量图象的质量常更为合适。主观保真度准则就是观察者用以评价图象质量的标准, 它直接与应用目

的相联系。

6.4 除书中介绍的保真度准则外，还有什么方法可以描述解码图象相对于原始图象的偏离程度？

解答：

例如还可以结合压缩编码的最终应用，用直接使用原始图象进行应用和使用压缩后的解码图象进行应用所获得效果的差来评判编码方法的优劣。这从一方面来说，比利用客观保真度准则的方法更结合实际，另一方面，比仅利用主观保真度准则的方法要准确和定量。

6.5 设 $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $u = [3/4 \quad 1/4]^T$, $Q = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/10 \\ 1/3 & 9/10 \end{bmatrix}$ ，计算与信道有关的各个概率，包括 $P(a=0)$, $P(a=1)$, $P(b=0)$, $P(b=1)$, $P(b=0|a=0)$, $P(b=0|a=1)$, $P(b=1|a=0)$, $P(b=1|a=1)$, $P(a=0|b=0)$, $P(a=0|b=1)$, $P(a=1|b=0)$, $P(a=1|b=1)$, $P(a=0, b=0)$, $P(a=0, b=1)$, $P(a=1, b=0)$, $P(a=1, b=1)$ 。

解答：

$$P(a=0) = 3/4, P(a=1) = 1/4, P(b=0) = (2/3) \times (3/4) + (1/10) \times (1/4) = 21/40, \\ P(b=1) = (1/3) \times (3/4) + (9/10) \times (1/4) = 19/40;$$

$$P(b=0|a=0) = 2/3, P(b=0|a=1) = 1/10, P(b=1|a=0) = 1/3, P(b=1|a=1) = 9/10;$$

$$P(a=0, b=0) = (3/4) \times (2/3) = 1/2, P(a=0, b=1) = (3/4) \times (1/4) = 1/4, P(a=1, b=0) = (1/4) \times (1/10) = 1/40, P(a=1, b=1) = (1/4) \times (9/10) = 9/40;$$

$$P(a=0|b=0) = (1/2)/(21/40) = 20/21, P(a=0|b=1) = (1/4)/(19/40) = 10/19, \\ P(a=1|b=0) = (1/40)/(21/40) = 1/21, P(a=1|b=1) = (9/40)/(19/40) = 9/19.$$

6.6 考虑例 6.2.2 中的信源和二元对称信道，令 $p_u = 3/4$, $p_v = 1/3$ ，试问

(1) 信源的熵是多少？

(2) 当接受到输出时，关于输入的不确定性减少了多少？

(3) 不确定性的改变与信道容量在数值上是什么关系？

解答：

(1) 因为 $p_u = 3/4$ ，所以 $u = [3/4 \quad 1/4]^T$ ，根据上册式(6.2.18)，信源的熵为

$$H(u) = -p_u \log p_u - (1-p_u) \log(1-p_u) = -\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \approx 0.81$$

(2) 当接受到输出时，输入的不确定性为 $H(u|v)$ ，所以根据上册式(6.2.24)和上册式(6.2.29)，输入不确定性的减少量为

$$I(u, v) = H(u) - H(u|v) = H_u[p_u p_v + (1-p_u)(1-p_v)] - H_u(p_v) \\ = H_u[(3/4) \times (1/3) + (1-3/4)(1-1/3)] - H_u(1/3) = H_u(5/12) - H_u(1/3)$$

进一步根据上册式(6.2.26)，有

$$I(u, v) = H_u(5/12) - H_u(1/3) = 0.97986 - 0.91829 = 0.06157$$

(3) 根据上册式(6.2.25)，信道容量是不确定性改变的最大值，所以当接受到输出

时, 输入不确定性的减少使得信道容量增大了。

6.7 (1) 请说明是否能用变长编码法压缩 1 幅已直方图均衡化的具有 2^8 级灰度的图?

(2) 这样的图象中包含象素间冗余吗?

解答:

(1) 对数字图象进行直方图均衡化所得到的结果中各灰度值的出现概率并不相等, 所以依然存在编码冗余, 但均衡化再用变长编码法得到的数据压缩效率一般不高。

(2) 因为直方图是 1-D 的, 所以均衡化后图象中由几何或结构关系所产生的象素间相关性仍存在, 即仍有象素间冗余, 仍可以进行压缩。

6.8 (1) 对 1 个具有 3 个符号的信源, 有多少种唯一的哈夫曼码?

(2) 构造这些码。

解答:

(1) 对 1 个具有 3 个符号的信源, 有 4 种唯一的哈夫曼码。

(2) 这 4 种码分别见表解 6.8 (设 3 个符号分别为 a, b, c)。

表解 6.8

符号	第 1 种码	第 2 种码	第 3 种码	第 4 种码
a	0	0	1	1
b	10	11	01	00
c	11	10	00	01

6.9 (1) 计算在上册表 6.2.2 中给出符号概率的信源的熵;

(2) 对信源符号构造哈夫曼码, 解释这样构造的码与上册表 6.2.2 中第 2 种码的区别;

(3) 构造最优的 B_1 码;

(4) 构造最优的 2 bit 二元平移码;

(5) 将所有符号分成 2 组, 每组 4 个, 然后构造最优的哈夫曼平移码;

(6) 对每个码计算平均字长, 并将它们与 (1) 中算得的熵进行比较。

解答:

(1) 根据上册式 (6.2.18), 有

$$\begin{aligned}
 H(x) &= - \sum_{j=1}^7 P(a_j) \log P(a_j) = - [0.19 \log 0.19 + 0.25 \log 0.25 + 0.21 \log 0.21 \\
 &\quad + 0.16 \log 0.16 + 0.08 \log 0.08 + 0.06 \log 0.06 + 0.03 \log 0.03 + 0.02 \log 0.02] \\
 &= - [-0.4552 - 0.5 - 0.4728 - 0.4230 - 0.2915 - 0.2435 - 0.1518 - 0.1129] \\
 &= 2.65
 \end{aligned}$$

(2) 根据上册图 6.3.2 所构造的哈夫曼码见表解 6.9.1。

表解 6.9.1

符号	概率	码字	概率	码字	概率	码字	概率	码字	概率	码字	概率	码字
a_1	0.25	01	0.25	01	0.25	01	0.25	01	0.35	00	0.40	1
a_2	0.21	10	0.21	10	0.21	10	0.21	10	0.25	01	0.35	00
a_3	0.19	11	0.19	11	0.19	11	0.19	11	0.21	10	0.25	01
a_4	0.16	001	0.16	001	0.16	001	0.19	000	0.19	11		
a_5	0.08	0001	0.08	0001	0.11	0000	0.16	001				
a_6	0.06	00000	0.06	00000	0.08	0001						
a_7	0.03	000010	0.05	00001								
a_8	0.02	000011										

上图表 6.2.2 中的第 2 种码也是一种哈夫曼码,其特点是可以每次随机地赋 0 或者 1,并不影响编码效果。

(3) 所构造的最优 B_1 码见表解 6.9.2。

表解 6.9.2

符号	a_2	a_3	a_1	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
概率	0.25	0.21	0.19	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
码字	C0	C1	C0C0	C0C1	C1C0	C1C1	C0C0C0	C0C0C1

(4) 所构造的最优 2 bit 二元平移码见表解 6.9.3。

表解 6.9.3

符号	a_2	a_3	a_1	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
概率	0.25	0.21	0.19	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
码字	00	01	10	1100	1101	1110	111100	111101

(5) 将所有符号分成 2 组,每组 4 个,所构造的最优哈夫曼平移码见表解 6.9.4。

表解 6.9.4

符号	a_2	a_3	a_1	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
概率	0.25	0.21	0.19	0.16	0.08	0.06	0.03	0.02
码字	01	10	11	001	00001	00010	00011	000001

(6) 平均字长: (2) 中的哈夫曼码为 2.7; (3) 中的最优 B_1 码为 3.18; (4) 中的最优 2 bit 二元平移码为 2.8; (5) 中的最优哈夫曼平移码为 2.75。它们均大于 (1) 中算得的熵。

6.10 对上附图 6.3.3 中所用信源的符号进行哈夫曼编码,给出码字、码字的平均长度和编码效率(并与算术编码进行比较)。

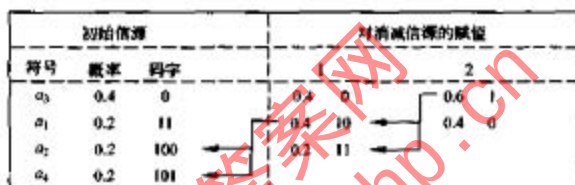
解答:

信源消减见图解 6.10.1。



图解 6.10.1

赋值见图解 6.10.2。



图解 6.10.2

平均长度

$$L_{avg} = \sum_{i=1}^{L-1} l(s_i) p_i(s_i) = 0.4 \times 1 + 0.2 \times 2 + 2 \times 0.2 \times 3 = 2$$

信源熵

$$H(u) = - \sum_{j=1}^J P(a_j) \log P(a_j) = 1.922$$

编码效率

$$\eta = n \frac{H(u)}{L_{avg}} = 1 \times \frac{1.922}{2} = 0.961$$

如果用上述哈夫曼码对由 5 个符号组成的符号序列 $a_1 a_2 a_3 a_4$ 进行编码, 则需 10 个二进制数 ($2^{10}=1024$), 比算术编码需要的 3 个十进制数 ($10^3=1000$) 数据量要大, 或者说哈夫曼码的编码效率比算术编码的低。

6.11 已知符号 a, e, i, o, u, x 的出现概率分别是 0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 对 0.23355 进行算术解码。

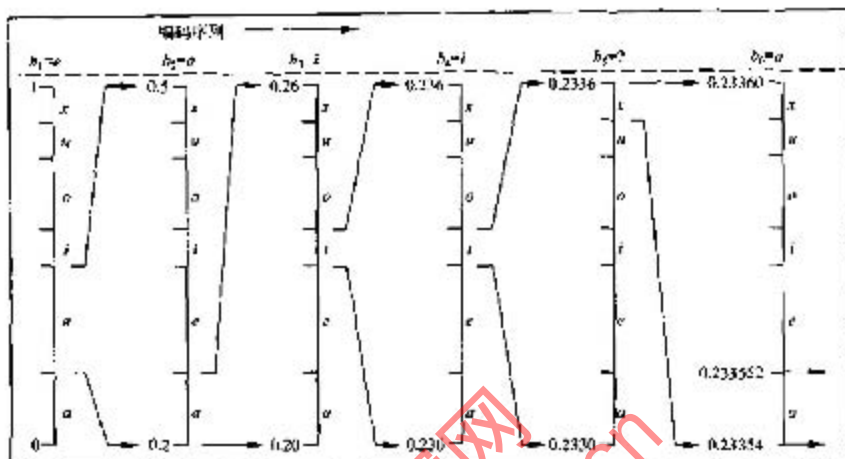
解答:

算术解码先将各符号根据出现概率排好, 然后根据所给码字进行算术编码, 直到全部编好, 最后取编码所用的符号。

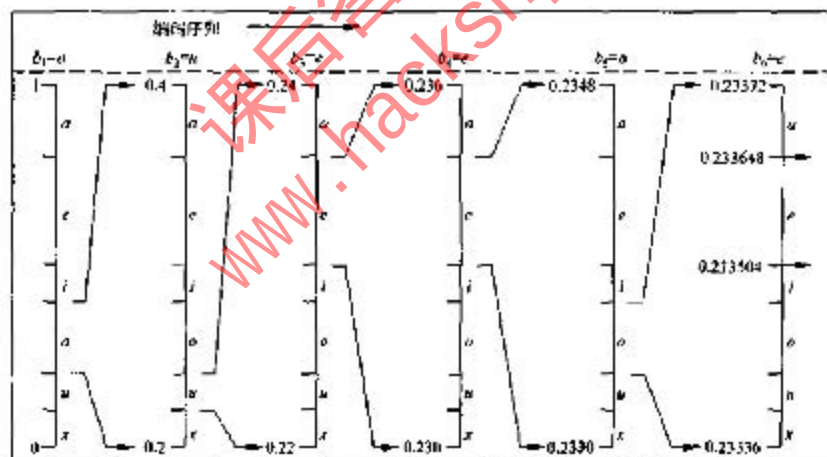
如果从 0 开始排符号 a, e, i, o, u, x , 得到的结果见图解 6.11.1。

根据编码结果, 解出来的码序列为 $eaiixa$ 。

如果从 1 开始排符号 a, e, i, o, u, x , 得到的结果见图解 6.11.2。



圖解 6.11.1



图解 5.11.2

根据编码结果,解出来的码序列为 042202。

6.12 (1) 构造完整的 4 bit 灰度码:

(2) 设计 1 个通用的方法将已灰度编码的数字转换成它的二值对应物,并用此法对 011010100111 进行解码。

解答：

(1) 所构造的 4 bit 灰度码和对应的 4 bit 自然码见表解 6.12.

表解 6.12

4 bit 自然码	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
4 bit 灰度码	0000	0001	0011	0010	0110	0111	0101	0100	1100	1101	1111	1110	1010	1011	1001	1000

(2) 从灰度码 g_3, g_2, g_1, g_0 到对应的自然码 a_3, a_2, a_1, a_0 的转换为

$$a_3 = g_3$$

$$a_2 = g_2 \oplus g_3$$

$$a_1 = (g_3 \oplus g_2) \oplus g_1$$

$$a_0 = [(g_3 \oplus g_2) \oplus g_1] \oplus g_0$$

对 011010100111 进行解码得到 010011000101。

6.13 对 1 幅 64×64 二值图用每块有 4 个像素的 1-D WBS 法(见 6.3.2 小节)进行编码, 已知对图象某一行的编码为 0110010000001000010010000000, 其中 0 代表黑色像素。

(1) 将这行码解出来;

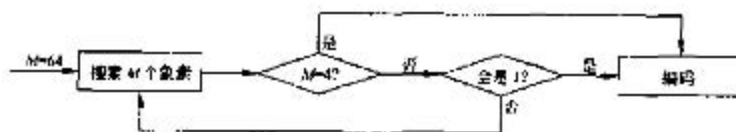
(2) 设计 1 个 1-D 的迭代 WBS 方法, 开始先搜索所有白线(64 个像素的块), 然后连续地将非白色区间二等分, 直至达到 4 个像素的块;

(3) 用(2)中的方法对(1)中解出来的行编码, 并与 1-D WBS 法比较所用的比特数。

解答:

(1) 在 WBS 法中, 将白色块区域编为 0, 而将所有其他块(包括实心黑色块)区域都用 1 接上该块的位模式编码(在每块的位模式编码中, 用 1 表示白色像素, 用 0 表示黑色像素)。这样在解码时, 遇 0 解为 1111, 遇 1 则将其后 4 位解成一块, 所以最后解码结果为 1111, 1001, 1111, 1111, 1111, 1111, 1111, 1111, 0000, 0010, 1111, 1111, 1111, 1111, 1111, 1111。

(2) 所设计的迭代 WBS 方法流程可见图解 6.13.1。



图解 6.13.1

具体工作情况可见图解 6.13.2(是 1 棵二叉树, 有 5 层, 最后是编码)。

(3) 用(2)中的方法解出来的行编码为 011001001000010001000。这里只用了 20 个比特, 比 1-D WBS 法少用 8 个比特。迭代 WBS 方法可将长于 4 的连续 1 用一个 0 表示, 所以比 1-D WBS 方法效率更高。

6.14 将给定图象(图题 6.14)分解成 3 个位平面, 然后用游程编码方法逐行编码, 输出码字, 计算编码效率。

$$L_{\text{avg}} = \sum_{k=0}^{L-1} l(s_k) p_s(s_k) = 2 \times 0.35714 + 2 \times 0.23809 + 3 \times 0.11904 + 3 \times 0.09524 \\ 3 \times 0.09524 + 4 \times 0.04762 + 5 \times 0.02381 + 5 \times 0.02381 = 2.5476$$

初始信源		信源的缩减和变					
序号	概率	1	2	3	4	5	6
1	0.35714	0.35714	0.35714	0.35714	0.35714	0.40476	0.59524
2	0.23809	0.23809	0.23809	0.23809	0.23809	0.35714	0.40476
4	0.11904	0.11904	0.11904	0.19048	0.21428	0.23809	
0	0.09524	0.09524	0.09524	0.11904	0.19048		
3	0.09524	0.09524	0.09524	0.09524			
8	0.04762		0.09524				
6	0.02381	0.04762					
7	0.02381						

图解 6.14.2

因为图象共需 42 个游程, 所以表达图象需要 $42 \times 2.53656 = 107$ 个比特来表达, 比直接用原始的表达式还需要的比特多, 原因主要是这里图象尺寸较小和游程较短。

6.15 (1) 为什么在上册图 6.3.5 中要将上 1 行中对应 e 之后的第 1 个类似过渡点当作 c' ?

(2) 你能设计 1 个其他的方法吗?

解答:

(1) 这样所确定的 RAC 距离的动态范围比较小, 编码码本会比较简单。另外, 解码也会相对简单, 且能唯一确定。

(2) 例如可用黑白游程交错的 RAC, 即当前行跟踪白游程时, 用上 1 行中对应 e 之后的黑游程的第 1 个类似过渡点当作 c' , 同样可以进行 RAC 距离编码。

6.16 将上册表 6.4.1 填充满。

解答:

分别用下列各式计算编码器:

$$\hat{f}_n = \hat{f}_{n-1}$$

$$e_n = f_n - \hat{f}_n$$

$$e_n = \begin{cases} +6.5 & e_n > 0 \\ -6.5 & e_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}_n = \hat{e}_n + \hat{f}_c$$

解码器中各项同编码器。

误差直接计算(n 相同)。

填充满后的表如表解 6.16。

表解 6.16

输入		编 码 器				解 码 器		误差
n	f	$\hat{f}$	e	$\hat{e}$	$\tilde{f}$	$\hat{\tilde{f}}$	$\tilde{\hat{f}}$	$[f - \hat{f}]$
0	14.0	—	—	—	14.0	—	14.0	0.0
1	15.0	14.0	1.0	6.5	20.5	14.0	20.5	-5.5
2	14.0	20.5	-6.5	-6.5	14.0	20.5	14.0	0.0
3	15.0	14.0	1.0	6.5	20.5	14.0	20.5	-5.5
4	13.0	20.5	-7.5	-6.5	14.0	20.5	14.0	-1.0
5	15.0	14.0	1.0	6.5	20.5	14.0	20.5	5.5
6	15.0	20.5	5.5	6.5	14.0	20.5	14.0	1.0
7	14.0	14.0	0.0	6.5	20.5	14.0	20.5	-6.5
8	20.0	20.5	-0.5	-6.5	14.0	20.5	14.0	6.0
9	26.0	14.0	12.0	6.5	20.5	14.0	20.5	5.5
10	27.0	20.5	6.5	6.5	27.0	20.5	27.0	0.0
11	28.0	27.0	1.0	6.5	33.5	27.0	33.5	-5.5
12	27.0	33.5	-6.5	-6.5	27.0	33.5	27.0	0.0
13	27.0	27.0	0.0	-6.5	20.5	27.0	20.5	6.5
14	29.0	20.5	8.5	6.5	27.0	20.5	27.0	2.0
15	37.0	27.0	10.0	6.5	33.5	27.0	33.5	3.5
16	47.0	33.5	13.5	6.5	40.0	33.5	40.0	7.0
17	62.0	40.0	22.0	6.5	46.5	40.0	46.5	15.5
18	75.0	46.5	28.5	6.5	53.0	46.5	53.0	22.0
19	77.0	53.0	24.0	6.5	59.5	53.0	59.5	17.5
20	78.0	59.5	18.5	6.5	66.0	59.5	66.0	12.0
21	79.0	66.0	13.0	6.5	72.5	66.0	72.5	6.5
22	80.0	72.5	7.5	6.5	79.0	72.5	79.0	1.0
23	81.0	79.0	2.0	6.5	85.5	79.0	85.5	-4.5
24	81.0	85.5	-4.5	-6.5	79.0	85.5	79.0	2.0
25	82.0	79.0	3.0	6.5	85.5	79.0	85.5	-3.5
26	82.0	85.5	-3.5	-6.5	79.0	85.5	79.0	3.0

6.17 设 1 幅图象具有如上册式(6.4.18)形式的自相关函数, 其中 $a_k = 0$, 它已用 1 个一阶预测器按 DPCM 方式编码。

- (1) 组成自相关矩阵 R 和矢量 r ;
- (2) 找出最优的预测系数;
- (3) 计算利用上述最优预测系数时的预测误差的方差。

解答:

- (1) 对图象 $f(x, y)$, 有

$$E\{f(x, y)f(x-i, y-i)\} = \sigma^2 \rho_i^x \rho_i^y$$

这里需注意上式应仅在 $\rho_x \neq 0$ 和 $\rho_y \neq 0$ 时成立。在 $\rho_x \neq 0$ 时, 对任何 i 都有 $\rho_i^x = 1$, 而在 $\rho_x = 0$ 时, 对任何 j 都有 $\rho_i^x = 1$ 。设二阶预测器为 (因为 $\rho_x = 0$, 所以只在一行预测)

$$\hat{f}(x, y) = a_1 f(x-1, y) + a_2 f(x-2, y)$$

则

$$R = \begin{bmatrix} E\{f_{n-1}f_{n-1}\} & E\{f_{n-1}f_{n-2}\} \\ E\{f_{n-2}f_{n-1}\} & E\{f_{n-2}f_{n-2}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \rho_x \\ \sigma^2 \rho_x & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$r = [E\{f_n f_{n-1}\} \quad E\{f_n f_{n-2}\}]^T = [\sigma^2 \rho_x \quad \sigma^2 \rho_x^2]^T$$

- (2) 最优的预测系数借助上册式 (6.4.14), 有

$$a = R^{-1}r = [\rho_x \quad 0]^T = [a_1 \quad a_2]^T$$

这里并不需要计算 R^{-1} , 只需两边同乘 R 即可。

- (3) 使用上述最优预测系数时的预测误差的方差为

$$E\{e_n^2\} = \sigma^2 - a^T r = [a_1 \quad a_2]^T \begin{bmatrix} \sigma^2 \rho_x \\ \sigma^2 \rho_x^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 (1 - \rho_x^2)$$

6.18 对 $L=4$ 和均匀概率密度函数

$$p(s) = \begin{cases} 1/(2A) & -A \leq s \leq A \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

推导 Lloyd-Max 判断和重建值。

解答:

对 $L=4$, 有 $i=1, 2$ 。用最小均方量化误差 (即 $E\{(s-t_i)^2\}$) 作为准则, 这里最小误差条件为

$$\int_0^{t_1} (s-t_1) p(s) ds = 0$$

$$\int_{t_1}^{\infty} (s-t_2) p(s) ds = 0$$

其中

$$s_1 = (t_1 + t_2)/2$$

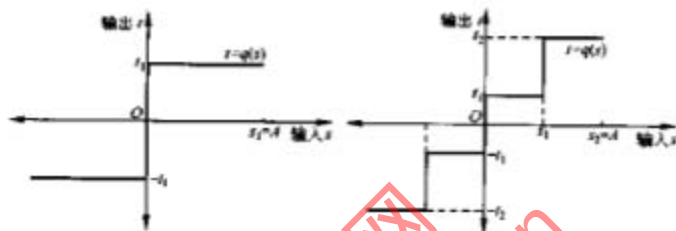
$$p(s) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & -A \leq s \leq A \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

这样通过解两个积分方程 (注意第 2 个积分的上限为 A) 可解得

$$s_i = \begin{cases} 0 & i=0 \\ A & i=1 \end{cases} \quad \text{重建值} \quad t_i = A/2$$

$$s_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ A/2 & i = 1 \\ A & i = 2 \end{cases} \quad \text{重建值} \quad \begin{cases} t_1 = A/4 \\ t_2 = 3A/4 \end{cases}$$

两组解的示意图分别见图解 6.18(第一组解中实际上对应 $L=2$)。



图解 6.18

- (3) 用起点和终点间的最大值点确定峰的位置(图中各 T 点);
 (4) 用前一个峰的终点和后一个峰的起点间的最小值点确定这两个峰之间谷点的位置(图中各 B 点)。

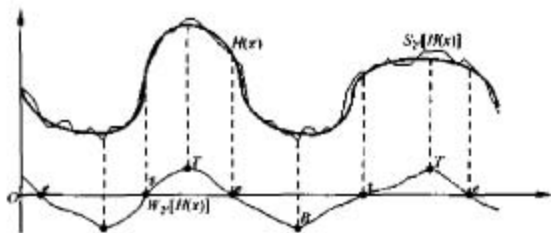


图 7.2 直方图中峰点和谷点的确定

当分辨率逐渐增加时, 阈值数目也会逐渐增加。可用最小距离判据来解决两相邻尺度之间阈值并非一一对应的问题。设在两相邻尺度 2^{l+1} 和 2^l 所对应的阈值分别为 T_i^{l+1} 和 T_k^l , 计算:

$$\text{dis}(T_i^{l+1}, T_k^l) = \min_j \text{dis}(T_i^{l+1}, T_j^l), \quad l = 0, 1, \dots, N_1 \quad (7.8)$$

它当 $l=k$ 时取得最小值, 这表明在尺度 2^{l+1} 的阈值 T_i^{l+1} 对应于在尺度 2^l 的阈值 T_k^l 。这样可对在最低分辨率一层选取的所有阈值逐层跟踪, 最后选取相应的最高分辨率一层的对应阈值作为最优阈值。

7.2 习题及解答

7.1 设 1 幅 $N \times N$ 二值图象中心处有 1 个值为 1 的 $n \times n$ 的正方形区域, 此处的象素值均为 1。

(1) 根据上册式(4.3.5), 使用索贝尔算子计算这幅图的梯度, 并画出梯度幅度图(给出梯度幅度图中所有象素的值);

(2) 画出根据上册式(7.2.3)得到的梯度方向的直方图, 并标出直方图每个峰的高度;

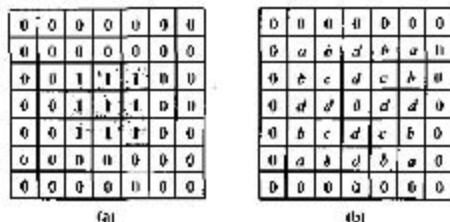
(3) 画出根据上册图 7.2.4(a) 的模板算出的拉普拉斯图, 给出图中所有象素的值。

解答:

(1) 不失一般性, 设图象如图解 7.1.1(a) (其中 $N=7, n=3$), 使用索贝尔算子计算这幅图的梯度得到的梯度幅度图见解图 7.1.1(b) (其中 $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{10}, c=4, d=3\sqrt{2}$)。

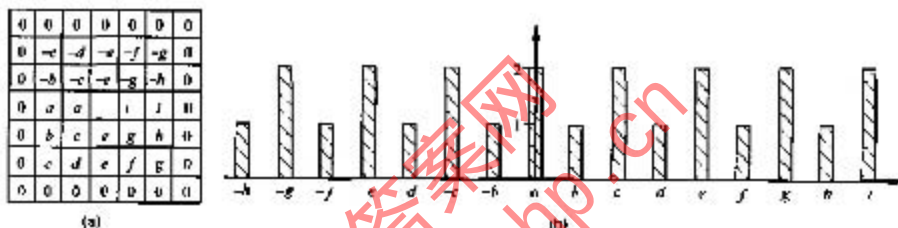
上面结果可方便地推广到更大的 n 。

(2) 根据图解 7.1.1(a) 利用索贝尔算子得到的梯度方向图如图解 7.1.2(a) (其中 $a=0^\circ, b=18^\circ, c=45^\circ, d=72^\circ, e=90^\circ, f=108^\circ, g=135^\circ, h=162^\circ, i=180^\circ$), 可见图中各点的梯度方向基本都在该点指向值为 1 的 $n \times n$ 的正方形区域的中心方向上(图中中心点的



图解 7.1.1

梯度方向不定)。由图 7.1.1(a) 的梯度方向图可得到其直方图如图解 7.1.2(b)。



图解 7.1.2

(3) 根据图解 7.1.1(a), 利用上册图 7.2.4(a) 的模板算出的拉普拉斯图如图解 7.1.3。



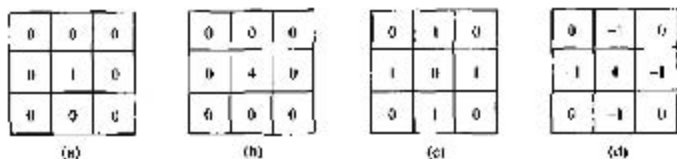
图解 7.1.3

7.2 如上册 4.3.3 小节中指出的, 从原始图中减去模糊图称为非锐化掩模。证明用上册图 7.2.4(a) 模板算得的拉普拉斯值正比于(只差 1 个 $1/4$ 的系数)从原始图中减去 4-邻域平均图所得的结果。

解答:

获得原始图的模板见解图 7.2.1(a), 乘以 4 得到图解 7.2.1(b), 获得 4-邻域平均图的模板见解图 7.2.1(c), 图解 7.2.1(b) 减图解 7.2.1(c) 得到图解 7.2.1(d), 正是拉普拉斯模板。

例如, 先计算如图解 7.2.2(a) (为上册题 7.1 中的原始图乘以 4 得到) 的 4-邻域平均图, 结果见解图 7.2.2(b), 图解 7.2.2(a) 减图解 7.2.2(b) 得到图解 7.2.2(c), 正是上册



图解 7.2.1



图解 7.2.2

题 7.1 的结果。

7.3 (1) 证明上册式(7.2.6)所给算子的平均值为零;

(2) 证明任意图象与上述算子卷积后其平均值也为零;

(3) 说明当使用如下册图 7.2.4 中的模板近似计算上册式(7.2.6)时,上述(2)中的结论是否仍能成立?

解答:

(1) 对上册式(7.2.6)进行积分:

$$\begin{aligned} \iint \nabla^2 h dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \left(\frac{r^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{t}{2\sigma^4} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt - \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = 0 \end{aligned}$$

(2) 给定任意图象 $f(x, y)$, 它与上述算子的卷积为

$$\iint f(x, y) \otimes \nabla^2 h dx dy = f(u, v) \iint \nabla^2 h dx dy = 0$$

上式的第一个等号根据积分的第一中值定理得到, 而第二个等号则借助上述(1)的结果得到。

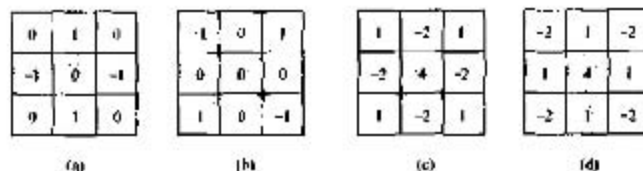
(3) 上册图 7.2.4 中模板的均值为零, 所以上述(2)中的结论仍能成立。

7.4 给出能使上册图 7.2.7 中直线子空间基的各个模板产生最强响应的直线的方向。这里设直线的宽度为 1 个象素。

解答:

宽度为 1 个象素的直线与模板卷积, 最强响应出现在卷积值最大的方向, 即直线与过模板某条线卷积值最大的方向。对上册图 7.2.7 中直线子空间基的两个直线模板来说,

最强响应的方向分别在水平和垂直方向以及两个对角线方向上, 见图解 7.4(a) 和 (b) 的阴影所示。对上册图 7.2.7 中直线子空间基的两个拉普拉斯模板来说, 最强响应的方向分别在两个对角线方向以及水平和垂直方向上, 见图解 7.4(c) 和 (d) 的阴影所示。



图解 7.4

7.5 对某些 2-D 模板在图象中漫游 1 遍进行卷积的结果也可用相应的 1-D 模板在图象中分别漫游 2 遍并进行卷积得到。例如上册 4.3.2 小节中的 3×3 平滑滤波器的 2-D 模板对图象的处理效果可通过先用模板 $[1 \ 1 \ 1]$ 在图象中漫游卷积 1 遍, 并将这个 1-D 模板旋转 90° 再漫游卷积前次结果而得到。现请证明上册图 7.2.2 中的索贝尔模板的效果可通过先用差分模板 $[-1 \ 0 \ 1]$ 在图象中漫游卷积 1 遍, 再用平滑模板 $[1 \ 2 \ 1]$ 旋转 90° 后再漫游卷积前次结果而得到。

解答:

两次用两个模板对图象卷积相当于先将两个模板卷积再将结果与图象卷积, 具体是:

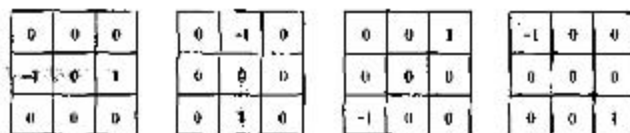
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \ 0 \ 1] \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

两个模板卷积的结果正是一个索贝尔模板, 所以得证。

7.6 设 1 幅二值图象中含有水平、垂直、倾斜 45° 和倾斜 135° 的各种直线, 请设计 1 组可以用来检测这些直线中单像素宽间断长度为多个像素的 3×3 模板。

解答:

注意到间断对应灰度的突然变化, 即间断处会产生阶跃边缘, 所以可借助边缘检测模板来检查间断。参见题 7.4, 得到 1 组满足条件的模板依次如图解 7.6 所示 (阴影给出直线的方向)。



图解 7.6

如果间断长度超出 3×3 模板, 可将模板沿直线方向移动, 在间断的两端将各检测到一个阶跃边缘 (一个跃下一个跃上)。

7.7 提出 1 种在梯度图象中检测直线段中的长度为 1 到 L 个像素间断的方法。这里可设背景灰度为常数, 所有线段都是单像素宽且已标为同样的、与背景灰度值不同的灰度值。提示: 不要试图构造检测断裂的模板, 而要根据上册 2.7.2 小节中关于 8-连通的概念进行。

解答:

设线段像素的灰度为 l , 背景像素的灰度为 b , 则其间有 1 到 L 个像素间断的直线段中应具有如下的模式: $lllllbbb...bbblll$, 其中 b 的个数可以是 1 到 L 个。利用 8-连通的概念, 可以先确定直线的方向, 然后沿直线方向, 从已知的线段像素出发, 对周围与其 8-连通的像素进行判断, 直到遇到背景像素, 记为第 1 个间断。再从背景像素出发, 对周围与其 8-连通的像素进行判断, 直到遇到线段像素, 则将最后一个背景像素记为第 L 个间断。

7.8 (1) 解释为什么上册图 7.2.13(a) 中点 1 在上册图 7.2.13(b) 中对应的是 1 条直线?

(2) 点 1 是能产生如此结果的惟一个点吗?

(3) 解释上册图 7.2.13(b) 中的反射相连关系。

解答:

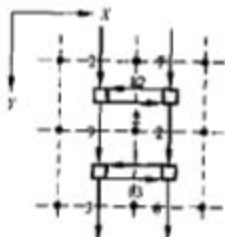
(1) 点 1 的坐标是 $(0, 0)$, 由式 (7.2.1) 得到的方程为 $\lambda = 0$ (θ 可为任意值), 这个方程对应的正是一条直线 (幅度总为零的正弦曲线)。

(2) 由上册式 (7.2.1), 当 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$, 得到的均是一条幅度不为零的正弦曲线, 所以点 1 是能产生如此结果的惟一个点。

也可这样考虑: 在 AB 空间中的直线总应可写成 $\lambda = k\theta + b$ 的形式, 其中 k 和 b 为常数。当 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$ 时, 无法将 $\lambda = x\cos\theta + y\sin\theta$ 转化为上述形式 (λ 不是 θ 的线性函数), 只有当 $x=0$ 且 $y=0$ 时, 才能得到一条直线。

(3) 由于正弦函数是奇函数, 余弦函数是偶函数, 所以 λ 关于原点是反符号对称的。严格说来, θ 的取值范围是 $0 \pm \pi/2$, 这样在左端点有 $\lambda_1 = x\cos(-\pi/2) + y\sin(-\pi/2) = -y$, 在右端点有 $\lambda_2 = x\cos(\pi/2) + y\sin(\pi/2) = y$ 。两者符号相反, 大小相同, 这就解释了上册图 7.2.13(b) 中的反射相连关系。

7.9 将上册图 7.3.3 中指出的所有边缘元素都标在上册图 7.3.2(a) 的图象上, 并计算最小代价通路的代价。



图解 7.9

解答:

将上册图 7.3.3 中的 10 个边缘元素在图解 7.9 中用箭头来表示 (代价标在箭头旁), 其中粗线箭头给出最小代价通路, 有阴影方块对应上册图 7.3.3 中两个箭头的交汇。

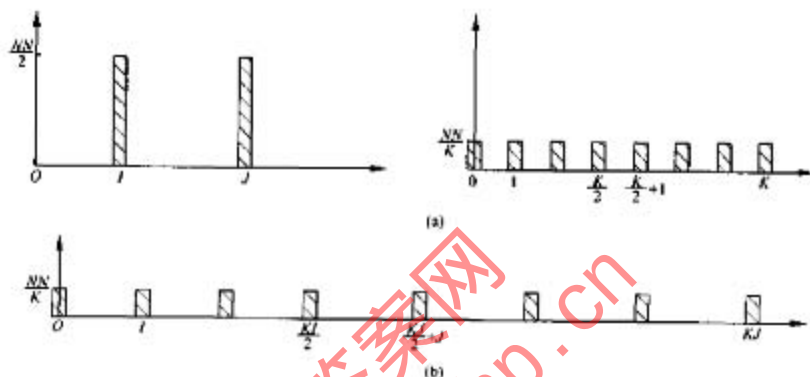
最小代价通路的代价为 $2+2+2+1+3=10$ 。

7.10 设有 1 幅无噪声的 $N \times N$ 图象, 其中左半边像素的灰度值为 I , 右半边像素的灰度值为 J , 且 $J > I$ 。现设有另 1 幅无噪声的 $N \times N$ 的图象, 其灰度值从最左 1 列的 0 线性增加到最右 1 列的 K 。

$K > J$, 将 2 幅图相乘, 得到 1 幅图象, 其直方图是怎样的?

解答:

设 2 幅无噪声的 $N \times N$ 图象的直方图如图解 7.10(a) 所示, 则 2 幅图相乘得到的图象的直方图如图解 7.10(b) 所示。结果直方图的灰度级数与第 2 幅图的级数相同, 但各个条(bin)的距离相应扩大了 I 倍或 J 倍。



图解 7.10

7.11 从上册式(7.4.9)出发推导上册式(7.4.10)。

解答:

只需参考上册式(7.4.5)将其中的高斯概率密度代入上册式(7.4.9), 就可得到一个一元二次方程, 其系数正如上册式(7.4.10)所示。

7.12 从上册式(7.4.10)出发推导上册式(7.4.11)。

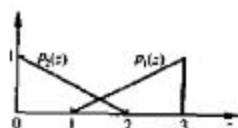
解答:

取上册式(7.4.10)中的 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 则有

$$\begin{cases} A = \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0 \\ B = 2(\mu_1 \sigma_2^2 - \mu_2 \sigma_1^2) = 2\sigma(\mu_1 - \mu_2) \\ C = \sigma^2(\mu_2^2 - \mu_1^2) + 2\sigma^2 \ln(P_1/P_2) \end{cases}$$

此时上册式(7.4.10)转化为一次方程 $T = -C/B$, 将上述 B 和 C 代入即得上册式(7.4.11)。

7.13 设 1 幅图象具有如图题 7.13 所示的灰度分布, 其中 $p_1(z)$ 对应目标, $p_2(z)$ 对应背景。如果 $P_1 = P_2$, 求分割目标和背景的最佳阈值。



图题 7.13

解答:

由图可见 $p_2(z) = 1 - z/2$, $p_1(z) = (z-1)/2$, 将 $P_1 = P_2$ 代入上册式(7.4.9), 解 $p_1(T) = p_2(T)$, 得到最佳阈值为 $T=3/2$ 。

7.14 一幅图象背景部分的均值为 25, 方差为 625, 在背景上分布着一些互不重叠的均值为 150, 方差为 400 的小目标。设所有目标合起来约占图象总面积的 20%, 提出 1 个基于取阈值的分割算法将这些目标分割出来。

解答:

一种简单的方法是作出图象的直方图, 取从高灰度数起对应 20% 像素的灰度为阈值。

如用最优阈值法, 可将给定数据代入上册式(7.4.10), 则有 $A=225$, $B=-167500$, $C=14394075$ 。解一元二次方程, 得到两个解, 分别为 645 和 99。根据题意, 只有第 2 个解合理, 所以阈值选为 99。

7.15 提出 1 种基于区域生长的方法解决上册题 7.14 中的问题。

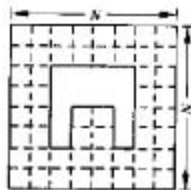
解答:

一种可行的方法由以下步骤组成:

- (1) 从左向右, 从上向下扫描图象;
- (2) 如扫到灰度值大于 150 的像素, 取为种子, 进行区域生长, 生长准则为将相邻的灰度值与已有区域的平均灰度值的差小于 60(3σ) 的像素扩展进来;
- (3) 如果不能再生长, 标记已生长的区域;
- (4) 如果扫描到图象右下角, 结束; 否则回到(1), 继续进行。

该方法没有利用已知所有目标合起来约占图象总面积的 20% 的条件, 但背景部分的均值为 25, 方差为 625 的条件利用了。注意灰度值大于 100 的像素有很大可能是目标像素, 但选种子像素时要尽量保证其为目标像素。

7.16 用分裂合并法分割如图题 7.16 的图象, 并给出对应分割结果的四叉树。



图题 7.16

解答:

步骤依次如图解 7.16.1。

可见需分三层, 分解图见图解 7.16.2。

对应分割结果的四叉树见图解 7.16.3(有阴影的节点为对应目标的节点)。

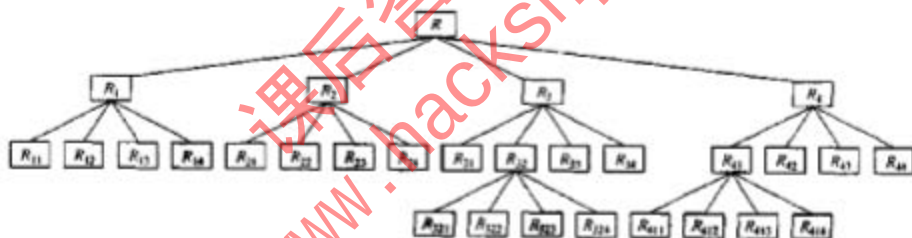
7.17 参照上册表 7.1.1, 将自己所知道的图象分割算法分别归到 PB, PR, SB, SR 这 4 类中去。



图解 7.16.1

R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}
R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}
R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}
R_{41}	R_{42}	R_{43}	R_{44}

图解 7.16.2



图解 7.16.3

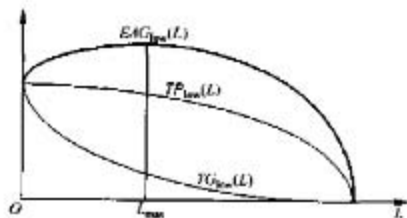
解答:

对一些常见图像分割算法的分类可参见[章 2001a]及所引参考文献。

7.18 试分析为什么典型的 $EAG_{\text{sub}}(L)$ 和 $EAG_{\text{low}}(L)$ 曲线都是单峰曲线。

解答:

参见图解 7.18[Zhang 1993], $EAG_{\text{low}}(L)$ 是 $TG_{\text{low}}(L)$ 与 $TP_{\text{low}}(L)$ 的比。 $TG_{\text{low}}(L)$ 和 $TP_{\text{low}}(L)$ 都随 L 的增加而减少。 $TG_{\text{low}}(L)$ 减少是因为大的 L 会剪切掉更多的像素, 而 $TP_{\text{low}}(L)$ 的减少有两个原因, 一是像素个数的减少, 二是剩下的像素间的对比度的减少。 当 L 从 0 开始增加, $TG_{\text{low}}(L)$ 和 $TP_{\text{low}}(L)$ 曲线都从它们各自的最大值下降。 开始时, $TG_{\text{low}}(L)$ 曲线下降得比较慢, 因为剪切掉的像素都属于背景(梯度较小); 而 $TP_{\text{low}}(L)$ 曲线下降得相对较快, 因为剪切掉的像素个数较多。 这两个因素的共同作用会使 $EAG_{\text{low}}(L)$ 值逐步增加并达到一个极大值。 然后, $TG_{\text{low}}(L)$ 曲线会比 $TP_{\text{low}}(L)$ 曲线下降得快, 因为更多的具有大梯度的像素会被剪切掉, 结果 $EAG_{\text{low}}(L)$ 值减少。



(3) 正八边形, $h=k$, 由式(8.7), 式(8.8), 式(8.9), 式(8.10)可知

$$F_1 = \frac{64(h-1)^2}{4\pi \times [7h^2 - 10h + 4]} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} F_1 = \frac{64}{4\pi \times 7} = \frac{16}{7\pi}$$

$$F_3 = \frac{16(3+2\sqrt{2})(h-1)^2}{4\pi \times [7h^2 - 10h + 4]} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} F_3 = \frac{16(3+2\sqrt{2})}{4\pi \times 7} = \frac{4}{7\pi}(3+2\sqrt{2})$$

(4) 当 h 和 k 都很大时, 由数值计算可得

$$F_1 \Rightarrow \frac{10.2}{4\pi} \approx 0.81169$$

$$F_3 \Rightarrow \frac{13.7}{4\pi} \approx 1.0902$$

8.2 习题及解答

8.1 (1) 解释为什么利用上册 8.2.1 小节中的链码起点归一化方法可使所得链码与边界的起点无关?

(2) 求出对链码 11076765543322 进行起点归一化后的起点。

解答:

(1) 同一个边界的不同起点的各个链码可看作是由一串数码循环移位得到的。上册 8.2.1 小节中的链码起点归一化方法是在所有可能的数码串中选出独特的一串(对应最小自然数的一串), 这个数码串是由循环起点所决定的, 与原链码在边界上的起点无关。

(2) 循环链码 11076765543322 将 0 (作为起点) 放到最高位得到 07676554332211。

8.2 (1) 解释为什么利用上册 8.2.1 小节中的链码旋转归一化方法可使所得链码与边界的旋转无关?

(2) 求出链码 01010303033232212111 的一阶差分。

解答:

(1) 在上册 8.2.1 小节中的链码旋转归一化方法是利用链码的一阶差分重新构造 1 个序列来实现的, 虽然原始链码在边界旋转后会发生变化, 但差分却是与边界旋转无关的, 所以利用链码的一阶差分而重新构造出来的序列不会随边界旋转而变化。

(2) 根据差分的定义, 链码 01010303033232212111 的一阶差分序列为 1313313130313130313003。

8.3 (1) 说明上册 8.2.3 小节中用基于收缩的方法得到的多边形具有最小周长;

(2) 设相邻像素间的距离为 d , 证明用基于收缩的方法得到多边形时在每个像素内产生的最大误差是 $\sqrt{2}d$ 。

解答:

(1) 用上册 8.2.3 小节的收缩方法得到的多边形应具有最少的顶点或拐点, 且各点间的距离也最短(因为是直线), 所以具有最小周长。

(2) 相邻像素间的距离为 d , 也就是像素的尺寸为 $d \times d$ 。用基于收缩的方法得到多边形时, 每段边界仅在它原来所在像素范围内的位置变动到一个离该位置最近的顶点上, 移动距离最大为像素的对角线, 所以产生的最大误差是 $\sqrt{2}d$ 。

8.4 (1) 在上册 8.2.3 小节中讨论的基于聚合的方法里, 如果逼近或拟合误差的限度定为零, 对所得的多边形有什么影响?

(2) 在上册 8.2.3 小节中讨论的基于分裂的方法里, 如果逼近或拟合误差的限度定为零, 对所得的多边形有什么影响?

解答:

(1) 如果将逼近或拟合误差的限度定为零, 则在聚合的过程中, 由于没有一条直线与边界的差小于零, 所以所得到的多边形就是原来的多边形。

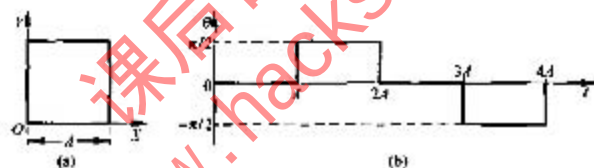
(2) 如果将逼近或拟合误差的限度定为零, 则分裂过程一直要进行到所构成的多边形与原来的多边形完全一致时才会停下来。

8.5 (1) 如果跟踪边界, 将切线和 1 条参考线之间的夹角作为沿边界位置的函数就可得到 1 种标记。画出对上册图 8.2.9(b) 正方形边界用这种切线角法得到的标记。

(2) 上述方法的 1 种变型可称为斜率密度函数, 它实际上是切线角的直方图。现设 1 个正方形其各边分别与 X 和 Y 轴平行, 取 Y 轴为参考线, 以正方形最靠近原点的角点为起点, 画出这样得到的标记。

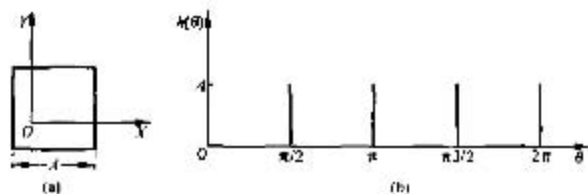
解答:

(1) 参见图解 8.5.1(a), 取 X 轴为参考线, 沿逆时针方向跟踪边界, 则得到的标记见图解 8.5.1(b)。



图解 8.5.1

(2) 设正方形如图解 8.5.2(a) 放置, 取 Y 轴为参考线, 则得到的标记见图解 8.5.1(b) (切线角的直方图与以哪个角点为起点没有关系)。



图解 8.5.2

8.6 画出圆和等腰三角形的骨架。

解答:

圆的骨架就是圆心点, 而等腰三角形的骨架是内心与各顶点间的角平分线, 分别见图解 8.6(a) 和 (b)。



图解 8.0

8.7 (1) 对图题 8.7 中各图，讨论上册 8-3-3 小节中求骨架算法第 1 步在点 p 的操作；

(2) 同上讨论第 2 步。



图题 8.7

解答：

(1) 先判断是否满足 4 个条件(黑体表示不满足)：

$$\begin{array}{llll}
 N(p_1) = 5 & N(p_1) = 1 & N(p_1) = 4 & N(p_1) = 3 \\
 S(p_1) = 1 & S(p_1) = 1 & S(p_1) = 4 & S(p_1) = 2 \\
 p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 1 & p_2 \cdot p_4 \cdot p_5 = 0 & p_2 \cdot p_4 \cdot p_5 = 1 & p_4 \cdot p_6 \cdot p_7 = 0 \\
 p_1 \cdot p_4 \cdot p_5 = 0 & p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0 & p_4 \cdot p_2 \cdot p_3 = 1 & p_1 \cdot p_6 \cdot p_7 = 0
 \end{array}$$

因为没有一种情况同时满足 4 个条件，所以对 4 幅图中的 p 点均不标注。

(2) 仍先判断是否满足 4 个条件(黑体表示不满足)：

$$\begin{array}{llll}
 N(p_1) = 5 & N(p_1) = 1 & N(p_1) = 4 & N(p_1) = 3 \\
 S(p_1) = 1 & S(p_1) = 1 & S(p_1) = 4 & S(p_1) = 2 \\
 p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0 & p_2 \cdot p_4 \cdot p_5 = 0 & p_2 \cdot p_4 \cdot p_5 = 1 & p_1 \cdot p_6 \cdot p_7 = 0 \\
 p_1 \cdot p_4 \cdot p_5 = 0 & p_2 \cdot p_4 \cdot p_5 = 0 & p_1 \cdot p_6 \cdot p_7 = 1 & p_2 \cdot p_6 \cdot p_7 = 0
 \end{array}$$

仅第一种情况能满足 4 个条件，所以仅标注第一幅图中 p 点，其后该 p 点将被除去。

8.8 求图题 8.3 中目标的形状数和形状数的阶。



图题 8.8

解答：

形状数的计算参见图解 8.8，进一步可得形状数的阶为 12。



图解 8.8

8.9 哪些类形状边界的傅里叶描述符中只有实数项? 此时上册图 8.4.5 中的坐标轴应如何设置?

解答:

边界的傅里叶描述符是

$$S(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp[-j2\pi\omega k/N] \quad \omega = 0, 1, \dots, N-1$$

其中边界序列

$$s(k) = u(k) + jv(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

将 $S(\omega)$ 的表达式展开, 有

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [u(k) + jv(k)] [\cos(2\pi\omega k/N) - j\sin(2\pi\omega k/N)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [u(k)\cos(2\pi\omega k/N) + v(k)\sin(2\pi\omega k/N)] \\ &\quad - j[u(k)\sin(2\pi\omega k/N) - v(k)\cos(2\pi\omega k/N)] \end{aligned}$$

由上可见, 如果下式满足

$$u(k)\sin(2\pi\omega k/N) = v(k)\cos(2\pi\omega k/N) \quad \omega = 0, 1, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

则傅里叶描述符中只有实数项。这表明 $s(k)$ 应关于原点对称, 或可称为圆周共轭对称 (实部偶对称, 虚部奇对称)。

此时上册图 8.4.5 中的坐标轴应设置得使边界关于 X, U 轴和 Y, V 轴对称。

8.10 字符 0, 1, 8, 9, X 的欧拉数各是多少?

解答:

$$0: E = C - H = 1 - 1 = 0; 1: E = C - H = 1 - 0 = 1; 8: E = C - H = 1 - 2 = -1;$$

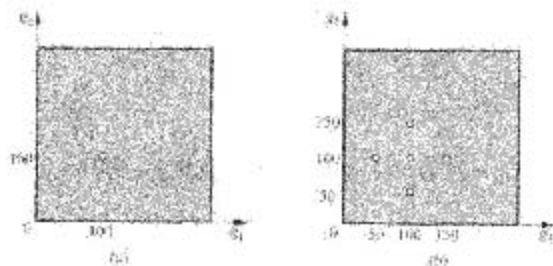
$$9: E = C - H = 1 - 1 = 0; X: E = C - H = 1 - 0 = 1.$$

8.11 有 1 种工件图的空间分辨率是 512×512 , 灰度分辨率是 256。当工件完好时, 整幅图的平均灰度值为 100, 噪声方差为 400。当工件损坏时, 会出现工件平均灰度值与整图平均灰度值的差值达 50 以上的块状区域。如果这种区域的面积大于 400 像素, 可认为工件已报废。试借助纹理分析的方法解决这个问题。

解答:

分别计算工件完好图和工件损坏图的共生矩阵。因为损坏区域为块状, 可定义位置算子为 4-邻域关系。工件完好图的共生矩阵应在 (100, 100) 处有峰值, 而工件损坏图的共生矩阵则还会在 (100, 50), (50, 100), (100, 150) 和 (150, 100) 处有峰值。图解 11(a) 和 (b) 分别以图象的形式给出两个共生矩阵的示意图, 其中白色和浅色表示幅度不同的峰

值。对比两个共生矩阵, 可以检测出工件质量情况。



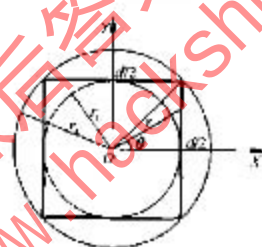
图解 8.11

8.12 试验证上册表 8.5.1 中数据正确。

解答:

(1) 正方形

如图解 8.12.1 建立坐标系, 设正方形边长为 d , 中心与原点重合。



图解 8.12.1

由上册式(8.5.6), 有

$$F = \frac{(4d)^2}{4\pi d^2} = \frac{4}{\pi} \approx 1.2732396$$

由上册式(8.5.17), 因为内切圆的半径是边长的一半, 而外接圆的半径是对角线长的一半, 所以有

$$S = \frac{r_i}{r_c} = \frac{d/2}{\sqrt{2}d/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.70710678$$

由上册式(8.5.18)到上册式(8.5.20), 考虑到正方形的对称性, 把正方形用斜对角线平分成 8 块, 仅计算图解 8.12.1 中有阴影的占 1/8 正方形的一块即可。

$$\mu = \frac{2}{d} \int_0^{d/2} \sqrt{(d/2)^2 + y^2} dy = \frac{d}{4} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{d} \int_0^{d/2} [\sqrt{(d/2)^2 + y^2} - \mu]^2 dy = \frac{d^2}{3} - \mu^2$$

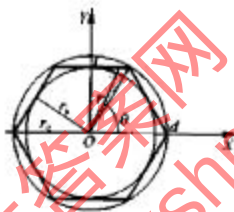
$$C = \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sqrt{d^2/3 - \mu^2}} = \frac{[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]/4}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{16}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]^2}}$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\frac{16}{3} - [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]^2}} \approx 9.1017$$

先由上册式(8.5.13)和上册式(8.5.14)算得 p 和 q , 再进一步计算偏心率。因为对正方形有 $A=B, H=0$, 所以 $p=q=\sqrt{1/A}$, 偏心率 $E=1$ 。

(2) 正六边形

如图解 8.12.2 建立坐标系, 设正六边形各边长均为 d , 则 $t=d\sqrt{3}/2$ 。



图解 8.12.2

由上册式(8.5.6), 有

$$F = \frac{\|B\|^2}{4\pi A} = \frac{(6d)^2}{4\pi(3 \times d^2 \sqrt{3}/2)} = \frac{6}{\sqrt{3}\pi} \approx 1.1026578$$

由上册式(8.5.17), 有

$$S = \frac{r_i}{r_c} = \frac{d\sqrt{3}/2}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$$

由上册式(8.5.18)到上册式(8.5.20), 利用对称性, 把正六边形平分成 6 块, 考虑其中 1 块的一半(见图解 8.12.2 中阴影部分), 有

$$\mu = \frac{2}{d} \int_0^{d/2} \sqrt{x^2 + (d\sqrt{3}/2)^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \ln \sqrt{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{d} \int_0^{d/2} [\sqrt{x^2 + (d\sqrt{3}/2)^2} - \mu]^2 dx = \frac{5}{6} - \mu^2$$

$$C = \frac{\mu}{\sigma} = \frac{2 + 3 \ln \sqrt{3}}{4\sqrt{5/6 - \mu^2}} \approx 22.6129$$

先由上册式(8.5.13)和上册式(8.5.14)算得 p 和 q , 再进一步计算偏心率。根据正六边形的对称性, 有 $H=0$, 而

$$A = \iint y^2 dx dy = 4 \left[\int_0^{1/2} \frac{3}{4} dx + 3 \int_{1/2}^1 (1-x)^2 dx \right] = 2$$

$$B = \iint x^2 dx dy = 4 \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 dy = \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

所以

$$p = \sqrt{2 \left[\left(2 + \frac{7\sqrt{3}}{6}\right) + \sqrt{\left(2 - \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2} \right]} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$q = \sqrt{2 \left[\left(2 + \frac{7\sqrt{3}}{6}\right) - \sqrt{\left(2 - \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2} \right]} = \sqrt{\frac{6}{7\sqrt{3}}}$$

所以偏心率 $E = 1.005168$ 。

(3) 如图解 8.12.3 建立坐标系, 设正八边形中心与 X 轴的交点间距离为 1, 则 $t = 0.41421$ 。



图解 8.12.3

由上册式(8.5.6), 有

$$F = \frac{\|B\|^2}{4\pi A} = \frac{(16t)^2}{4\pi(16p/2)} = \frac{8t}{\pi} \approx 1.0548$$

由上册式(8.5.17), 有

$$S = \frac{r_1}{r_2} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0.92387$$

由上册式(8.5.18)到上册式(8.5.20), 利用对称性, 把正八边形平分成 8 块, 取其中 1 块的一半(见图解 8.12.3 中阴影部分), 有

$$\mu = \frac{1}{p} \int_0^p \sqrt{y^2 + 1} dy = \frac{1}{2} \left[\sqrt{p^2 + 1} + \frac{1}{p} \ln(p + \sqrt{p^2 + 1}) \right] \approx 1.0279$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{p} \int_0^p [\sqrt{y^2 + 1} - \mu]^2 dy = \frac{p^2}{3} + 1 - \mu^2$$

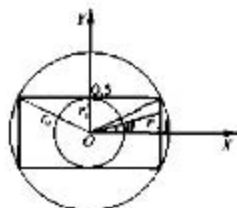
$$C = \frac{\mu}{\sigma} \approx 41.616115$$

由上册式(8.5.13)和上册式(8.5.14), 考虑到对称性, 有 $A = B$, $H = 0$, $p = q$, 所以偏心率 $E = 1$ 。

(4) 如图解 8.12.4 建立坐标系, 设长边长为 2, 短边长为 1。

由上册式(8.5.6), 有

$$F = \frac{\|B\|^2}{4\pi A} = \frac{(6)^2}{4\pi(2)} = \frac{9}{2\pi} \approx 1.4323945$$



图解 8.12.4

由上册式(8.5.17), 有

$$S = \frac{r_1}{r_0} = \frac{1/2}{\sqrt{1+(1/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472136$$

由上册式(8.5.18)到上册式(8.5.20), 利用对称性, 仅考虑第一象限中的阴影部分,

有

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \left(\int_0^{1/2} \sqrt{y^2+1} dy + \int_0^1 \sqrt{x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} dx \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{3} \left[\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5}) \right] \approx 0.85972 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{1+1/2} \left\{ \int_0^{1/2} [\sqrt{y^2+1} - \mu]^2 dy + \int_0^1 [\sqrt{x^2+(1/2)^2} - \mu]^2 dx \right\} = \frac{3}{4} - \mu^2$$

$$C = \frac{\mu}{\sigma} \approx 3.9645018$$

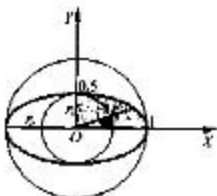
先由上册式(8.5.13)和上册式(8.5.14)算得 p 和 q , 再进一步计算偏心率。因为

$$A = \iint y^2 dx dy = 4 \left[\int_0^2 dx + 3 \int_0^{1/2} y^2 dy \right] = \frac{1}{6}$$

$$B = \iint x^2 dx dy = 4 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1/2} dy = \frac{2}{3}$$

$H=0$, $p=\sqrt{6}$, $q=\sqrt{3/2}$, 所以偏心率 $E=2$ 。

(5) 如图解 8.12.5 建立坐标系, 设长半轴长为 1, 短半轴长为 1/2。



图解 8.12.5

由上册式(8.5.6), 有

$$F = \frac{\|B\|^2}{4\pi A} \approx \frac{\{\pi[1.5(a+b) - \sqrt{ab}]\}^2}{4\pi(ab\pi)} = \frac{(2.25 - \sqrt{0.5})^2}{2} \approx 1.1902597$$

由上册式(8.5.17), 有

$$S = \frac{r_1}{r_c} = \frac{1}{2} = 0.5$$

由上册式(8.5.18)到上册式(8.5.20), 利用对称性, 仅考虑第一象限, 有($E(\cdot, \cdot)$ 为椭圆函数)

$$\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = \frac{2}{\pi} a \times E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \times 1.2111 \approx 0.77101$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} - \mu] d\theta = \frac{5}{8} - \mu^2 \approx 0.030543$$

$$C = \frac{\mu}{\sigma} \approx 4.4116398$$

借助由惯量推出的偏心率计算公式, 由于是椭圆, 所以偏心率 $E=2$ 。

8.13 要将上册图 8.2.9(a)和(b)中的 2 个标记区分开, 最少需要几个描述符?

解答:

要将圆形和正方形区别开, 只需一个描述符即可, 如可用形状参数(圆形为 1, 而正方形大于 1)、偏心率(圆形所对应的两个半轴长相等, 而正方形所对应的两个半轴长不相等)、球状性(圆形为 1, 而正方形小于 1)、圆形性(圆形要大于正方形)等。

如要将它们的标记区别开, 也只需一个描述符, 如可用标记的长度(对应圆形的标记为直线, 所以长度较短; 而对应正方形的标记为曲线, 所以长度较长)、曲率(对应圆形的标记为直线, 所以曲率为零; 而对应正方形的标记为曲线, 所以曲率较大)等。

8.14 设 1 幅 5×5 的棋盘图象之左上角象素值为 0, 分别定义位置操作算子 W 为向右 1 个象素和向右 2 个象素(参见上册例题 8.5.4), 求这 2 种情况下的共生矩阵。

0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0

图解 8.14

解答:

先画出棋盘图象见图解 8.14。

因为图解 8.14 中只有 2 种灰度的象素, 所以共生矩阵均为 2×2 的。当位置操作算子 W 为向右 1 个象素时, 共生矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

而当位置操作算子 W 为向右 2 个象素时, 共生矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

8.15 考虑 1 幅由 $m \times n$ 个黑白方块组成的棋盘图象, 给出共生矩阵为对角矩阵的位置操作算子。

解答:

由于棋盘图象黑白相间, 所以向右 i 个像素 ($i \leq m$), 或向下 j 个像素 ($j \leq n$) 的位置操作算子都能给出对角的共生矩阵 (可参见上册题 8.14), 更一般地, 同时向右 i 个像素 ($i \leq m$) 和向下 j 个像素 ($j \leq n$) 的位置操作算子也都能给出对角的共生矩阵。由于对称性, 上述向右和向下也可改为向左和向上。

8.16 对 1 幅包含黑白方块的棋盘图象建树结构表达。设每个树结点最多只能有 2 个分支。

解答:

树结构 (二叉树) 表达见图解 8.16.1 (参见 8.1.3 小节), 继续这样分下去, 最后一直到每个方块, 其中每个叶节点对应纯黑或纯白的子图象。



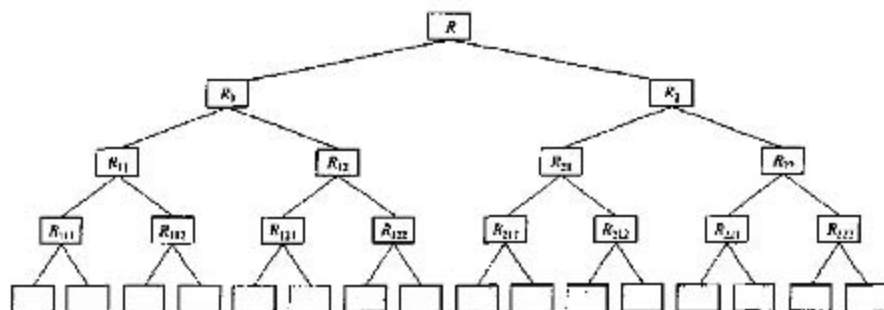
图解 8.16.1



图解 8.16.2

下面以 4×4 的棋盘图象为例, 其树结构表达的建立步骤依次如图解 8.16.2 各图所示 (其中虚线代表像素的边界, 而实线代表分支的划分线)。

与上述建立结构过程和结果对应的二叉树见图解 8.16.3。



图解 8.16.3

A.2 习题及解答

A.1 证明上册式(A.3.1)、上册式(A.3.4)和上册式(A.3.6)都等价。

解答:

根据上册式(A.3.1), 用 B 来膨胀 A , 也等价于用 B 的每一个象素来膨胀 A , 然后求结果的并集。而用 B 的每一个象素来膨胀 A , 实际上就是用 B 的每一个象素来位移 A 。所以可知上册式(A.3.1)、上册式(A.3.4)和上册式(A.3.6)都等价。

A.2 证明上册式(A.3.3)、上册式(A.3.5)和上册式(A.3.7)都等价。

解答:

根据上册式(A.3.3), 用 B 来腐蚀 A , 也等价于用 B 的每一个象素来腐蚀 A , 然后求结果的交集。而用 B 的每一个象素来腐蚀 A , 实际上就是用 B 的每一个象素来反位移 A 。所以可知上册式(A.3.3)、上册式(A.3.5)和上册式(A.3.7)都等价。

A.3 (1) 画出用 1 个半径为 $r/4$ 的圆形结构元素膨胀 1 个半径为 r 的圆的示意图;

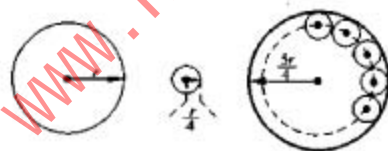
(2) 画出用上述结构元素膨胀 1 个 $r \times r$ 的正方形的示意图;

(3) 画出用上述结构元素膨胀 1 个侧边长为 r 的等腰三角形的示意图;

(4) 将(1), (2), (3)中的膨胀改为腐蚀, 分别画出示意图。

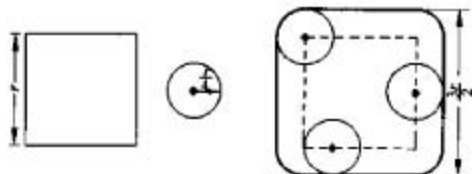
解答:

(1) 膨胀后是 1 个半径是 $r+r/4$ 的圆, 示意图见图解 A.3.1。



图解 A.3.1

(2) 膨胀后是 1 个边长是 $r+r/2$ 的有倒角的正方形, 示意图见图解 A.3.2。



图解 A.3.2

(3) 用上述结构元素膨胀 1 个侧边长为 r 的等腰三角形的示意图见图解 A.3.3。

(4) 将前面的膨胀改为腐蚀, 得到的结果见图解 A.3.4 (注意正方形没有倒角, 而等腰三角形被腐蚀掉了)。



图解 A.3.3



图解 A.3.4

A.4 设计 1 个形态学算法将 8-连通二值边界转化为 m -连通二值边界。注意这个算法不能切断连通性，可假设原边界是单象素宽完全连通的（但可有分叉点）。

解答：

用 1 个水平方向的 1×2 模板和 1 个垂直方向的 2×1 模板，对 8-连通二值边界上对角连通的两个象素进行膨胀，将它们共同的膨胀结果加入边界，则得到 m -连通的二值边界。

A.5 证明上册式(A.3.14)和上册式(A.3.15)。

解答：

依次利用上册式(A.3.10)、上册式(A.3.8)、上册式(A.3.9)和上册式(A.3.11)，可得

$$(A \cdot B)^c = [(A \ominus B) \oplus B]^c = (A \ominus B)^c \ominus \hat{B} = A^c \oplus \hat{B} \ominus \hat{B} = A^c \cdot \hat{B}$$

依次利用上册式(A.3.11)、上册式(A.3.9)、上册式(A.3.8)和上册式(A.3.10)，可得

$$(A \cdot B)^c = [(A \oplus B) \ominus B]^c = (A \oplus B)^c \oplus \hat{B} = A^c \ominus \hat{B} \oplus \hat{B} = A^c \cdot \hat{B}$$

A.6 设上册式(A.6.1)中的图象 $f(x, y)$ 和结构元素 $b(x, y)$ 都是矩形的， D_i 为 $[F_{i1}, F_{i2}] \cdot [F_{i3}, F_{i4}]$ ， D_b 为 $[B_{b1}, B_{b2}] \cdot [B_{b3}, B_{b4}]$ 。

(1) 设 $(x, y) \in D_i$ ，推导平移变量 s 和 t 能满足上册式(A.6.1)的区间，这些在 s 和 t 轴上的区间限定了 $(f \oplus b)(s, t)$ 在 st 平面上的矩形区域；

(2) 对腐蚀操作，根据式(A.6.3)确定对应的区间。

解答：

(1) 根据膨胀定义， $(f \oplus b)(s, t)$ 在 st 平面上的矩形区域为 $[S_{s1}, S_{s2}] \cdot [T_{t1}, T_{t2}]$ ，其中 $S_{s1} = F_{i1} + B_{b1}$ ， $S_{s2} = F_{i2} + B_{b2}$ ， $T_{t1} = F_{i3} + B_{b3}$ ， $T_{t2} = F_{i4} + B_{b4}$ 。

(2) 根据腐蚀定义， $(f \ominus b)(s, t)$ 在 st 平面上的矩形区域为 $[S_{s1}, S_{s2}] \cdot [T_{t1}, T_{t2}]$ ，其中 $S_{s1} = F_{i1} - B_{b1}$ ， $S_{s2} = F_{i2} - B_{b2}$ ， $T_{t1} = F_{i3} - B_{b3}$ ， $T_{t2} = F_{i4} - B_{b4}$ 。

A.7 灰度图 $f(x, y)$ 受到互不重叠的噪声干扰，这些噪声可用半径为 $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$ 和高度为 $H_{\min} \leq h \leq H_{\max}$ 的小圆柱状模型化。

- (1) 设计 1 个形态滤波器消除这些噪声;
- (2) 现设噪声是互相重叠的(最多 4 个), 重复(1)。

解答:

(1) 参照二值形态学实用算法中对噪声滤除的方法, 用半径为 $R_{\max}$, 高度为 $H_{\max}$ 的小圆柱状结构元素对 $f(x, y)$ 先开启再闭合就可消除噪声。

(2) 当噪声是互相重叠时, 可重复使用(1)中先开启再闭合的方法, 噪声重叠几个, 就重复使用几次。

课后答案网
www.hackshp.cn